Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Marzena Filipowicz-Chomko

Struktura i własności wyróżnionych typów algebr filialnych

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy:
prof. dr hab. Edmund R. Puczyłowski
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski

Czerwiec 2009

Oświadczenie autora rozprawy:

oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

. . . .

data podpis autora rozprawy

Oświadczenie promotora rozprawy:

niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

. . . .

data podpis promotora rozprawy

Streszczenie

W klasie algebr łącznych relacja bycia ideałem (ideałem lewostronnym, ideałem prawostronnym) nie jest przechodnia. Algebry, w których ta własność jest spełniona noszą nazwę algebr filialnych (lewostronnie filialnych, prawostronnie filialnych). Badaniem różnych typów filialności zajmowało się wielu autorów w różnych kontekstach. Zagadnienia te są interesujące ze względu na analogię z intensywnie badaną klasą tzw. t-grup, w których każda podgrupa podnormalna jest dzielnikiem normalnym. Algebry filialne można też rozważać jako uogólnienie algebr Hamiltona tzn. algebr, w których każda podalgebra jest ideałem.

W rozprawie badana jest struktura oraz własności wyróżnionych typów algebr filialnych. Składa się ona z trzech części.

W pierwszej, przedstawione są wyniki dotyczące filialnych i lewostronnie filialnych algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym z jedynką. Do głównych rezultatów tej części należą twierdzenia strukturalne opisujące lewostronnie filialne algebry półpierwsze, a także dotyczące β-radykalnych algebr filialnych, gdzie β oznacza radykał pierwszy. Otrzymane w tej części wyniki pokazują, że w przypadku ogólnym uzyskanie kompletnej klasyfikacji algebr filialnych, czy lewostronnie (prawostronnie) filialnych jest bardzo trudnym problemem.

W drugiej części badane są filialne i lewostronnie filialne algebry nad ciałem. W tym przypadku uzyskujemy prawie kompletną klasyfikację, a kompletną w przypadku algebr skończenie wymiarowych. Dowodzimy również, że w obrębie algebr β-radykalnych nad ciałem klasy algebr filialnych, lewostronnie filialnych i algebr Hamiltona pokrywają się.

Trzecia część rozprawy poświęcona jest badaniu różnych typów filialności pierścieni, czyli algebr nad pierścieniem liczb całkowitych. Wykazujemy, że pewne wyniki uzyskane dla algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym z jedynką można w tym przypadku wzmocnić, ale jednak nie aż tak bardzo, jak było to możliwe dla algebr nad ciałem. Opisujemy też pierścienie, których nie można odwzorować homomorficznie na niezerowe pierścienie filialne (lewostronnie filialne) oraz badamy związki pomiędzy klasami pierścieni filialnych, lewostronnie filialnych i prawostronnie filialnych.

Słowa kluczowe: ideał, ideał lewostronny (prawostronny), radykał, algebra filialna, algebra lewostronnie (prawostronnie) filialna, algebra pierwsza, algebra półpierwsza, H-algebra, algebra silnie regularna

Klasyfikacja tematyczna pracy: 16A12, 16A21, 16A45, 16D15, 16D25, 16D80, 16N80

Abstract

In the class of associative algebras the relation of being an ideal (left ideal, right ideal) is not transitive. Algebras in which this property does hold are called filial (left filial, right filial). Such algebras were studied by many authors in various contexts. They can be considered as an analog of extensively studied t-groups, i.e., groups in which every subnormal subgroup is a normal subgroup or as a generalization of Hamilton algebras, i.e., algebras in which all subalgebras are ideals.

In the thesis, the structure and properties of selected types of filial algebras are studied. The dissertation consists of three parts.

In the first one we study filial and left filial algebras over an arbitrary ring with identity. A structure theorem describing semiprime left filial algebras and prime radical filial algebras are obtained.

The second part concerns filial and left filial algebras over a field. In this case we get almost complete classification (it is complete for finite dimensional algebras) of left filial algebras. It is also shown that for prime radical algebras the classes of filial, left filial and Hamilton algebras coincide.

In the third part, different types of filiality of rings (so algebras over the ring of integers) are investigated. We show that some results obtained for algebras over an arbitrary commutative ring can be improved in this case but not as much as it was possible for algebras over a field. We describe rings which cannot be homomorphically mapped onto nonzero filial (left filial) rings as well as we study relations among the classes of filial, left filial and right filial rings.

Keywords: ideal, left (right) ideal, radical, filial algebra, left (right) filial algebra, prime algebra, semiprime algebra, H-algebra, strongly regular algebra

2000 Mathematics Subject Classification: 16A12, 16A21, 16A45, 16D15, 16D25, 16D80, 16N80

Składam serdeczne podziękowania mojemu promotorowi Profesorowi Edmundowi Puczyłowskiemu. Za to, że przed laty uwierzył, że ta praca może powstać i zawsze służył pomocą w trakcie jej przygotowywania, począwszy od propozycji obszaru badawczego, aż po szczegółowe uwagi do tekstu rozprawy. Dziękuję za wyrozumiałość, życzliwość, poświęcony czas, który był dla mnie czasem bardzo kształcącym. Dziękuję za to, że wprowadził mnie na drogę matematyki i pokazał jej bogaty warsztat.

Spis treści

Wstęp

Badanie własności ideałów jest ważnym zagadnieniem teorii pierścieni i algebr, bowiem wiele problemów tej teorii można sformułować właśnie w ich języku. Przykładem naturalnego pytania ogólnego wyrażającego takie własności jest pytanie, czy relacja bycia ideałem jest przechodnia, tzn. czy ideał ideału pierścienia jest ideałem tego pierścienia (nie zakładamy, że pierścienie mają jedynkę). Nietrudno jest znaleźć przykłady pokazujące, że odpowiedź na nie jest negatywna. Przykładem pozytywnego wyniku jest twierdzenie ADS (por. Twierdzenie 1.21) mówiące, że dowolny radykał ideału pierścienia jest ideałem tego pierścienia.

Pierścienie, w których relacja bycia ideałem jest przechodnia nazywamy filialnymi. Podobnie, poprzez przechodniość relacji bycia ideałem lewostronnym (prawostronnym) definiujemy pierścienie lewostronnie (prawostronnie) filialne. Pierścienie filialne można uznać za odpowiedniki t-grup (tzn. grup, w których każda podgrupa podnormalna jest dzielnikiem normalnym). Takie podgrupy pojawiły się na wczesnym etapie rozwoju teorii grup i były intensywnie badane (por. [16, 25, 13]). Ukazała się też obszerna monografia [35] na ich temat. Pierścienie filialne można też rozpatrywać jako uogólnienie pierścieni Hamiltona (tzn. pierścieni, w których każdy podpierścień jest ideałem). Pojawiły się one między innymi w pracach [30, 39, 43]. Szczegółowe badania były prowadzone przez R.L. Kruse w jego pracy doktorskiej i opublikowane w [33]. Wyniki tam otrzymane pokazały, że to zagadnienie nie jest łatwe. Sytuacja znacznie się upraszcza w przypadku algebr Hamiltona (tzn. algebr, w których każda podalgebra jest ideałem). W [36] Liu Shao-Xue uzyskał kompletną klasyfikację takich algebr (sprowadzającą się do wciąż otwartego problemu, klasyfikacji pewnych form kwadratowych).

Problem opisu pierścieni filialnych (bez użycia ich nazwy) był postawiony w monografii F. Szásza (por. [45], Problem 9). Pojawił się tam w kontekście innego zagadnienia rozważanego w [44], które nie jest bezpośrednio związane z pierścieniami filialnymi.

Przez wiele lat był otwarty problem dotyczący, tzw. stabilizacji łańcuchów Kurosza (por. [2, 27, 38]). Został on rozwiązany przez K.I. Beidara w [11]. Mówiąc bardzo pobieżnie, w przedstawionej przez niego konstrukcji zasadniczą rolę odgrywały pewne specyficzne pierścienie, które nie są filialne.

Systematyczne badanie wraz z wprowadzeniem terminologii rozpoczęła G. Ehrlich w [17]. W pracy tej zajmowała sie przypadkiem przemiennym, a jej główne motywacje nawiązywały do t-grup. Mniej więcej w tym samym czasie pewne wyniki odnośnie pierścieni filialnych były uzyskane niezależnie w pracach [40, 48, 46, 47]. W [40] A.D. Sands rozważał różne aspekty pytania, kiedy relacja bycia ideałem jest przechodnia (bez używania terminu filialny) i bez związku z innymi pracami. Podał w niej podstawowe charakteryzacje pierścieni, które mają tę własność (a więc, w naszym języku, pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych), ale nie badał ich dokładniej. W [48] S. Veldsman studiował pewne bardziej ogólne klasy pierścieni. Dla dowolnych α, β, γ zawartych w zbiorze trzech symboli: {lewostronny ideał, prawostronny ideał, ideał} rozważał klasy: $V(\alpha,\beta,\gamma) = \{R \mid I\alpha J\beta R \to I\gamma R\}$. Oczywiście wśród nich zawarte są klasy pierścieni filialnych, lewostronnie filialnych i prawostronnie filialnych. Veldsman podał charakteryzacje tych klas oraz bardzo ogólne związki między nimi. Prace G. Tzintzisa [46] i [47] dotyczyły teorii radykałów. Jak się okazało pewne problemy tej teorii sprowadzają się do badania klas pierścieni filialnych (lewostronnie filialnych), a dokładniej pierścieni, których nie można odwzorować homomorficznie na niezerowe pierścienie filialne (lewostronnie filialne). Żadna z tych prac nie zawiera jednak głębszych twierdzeń strukturalnych. Intensywne badania nad strukturą pierścieni filialnych (również w przypadku nieprzemiennym) prowadził R.R. Andruszkiewicz w pracach [8, 6, 10, 7]. Część uzyskanych wyników w pracy [8] weszła w skład jego rozprawy doktorskiej (por. [5]). Otrzymane tam rezultaty miały zastosowania w badaniach prowadzonych nad wspomnianym wyżej problemem stabilizacji łańcuchów i lewostronnych łańcuchów Kurosza (por. [9]). W pracy [6] Andruszkiewicz podał klasyfikację przemiennych filialnych dziedzin, zaś badania w pracach [10] oraz [7] dotyczyły zredukowanych filialnych pierścieni przemiennych.

Wszystkie wyżej wymienione prace dotyczyły pierścieni filialnych (pomijając różne niezależne obserwacje dotyczące ideałów jednostronnych). Sugerowały one podjęcie bardziej systematycznych badań pierścieni lewostronnie filialnych. To zagadnienie zapoczątkowało moje zainteresowanie tą tematyką. Pierwsze wyniki zostały uzyskane w [19] i rozszerzone w [20], gdzie również prowadzone były badania nad związkami między różnymi typami filialności. Naturalne pytania jakie pojawiały się przy badaniu tych klas potwierdzały, że są to zagadnienia interesujące. W obu pracach pojawiły się wyniki uzyskane dla algebr nad ciałem, które są filialne (lewostronnie filialne) jako pierścienie. Skierowały one moje zainteresowanie na przypadek filialnych i lewostronnie filialnych algebr nad ciałem. Inna motywacja płynęła z wyników uzyskanych we wspomnianej wyżej pracy Liu Shao-Xue (por. [36]). Badania prowadzone nad filialnymi i lewostronnie filialnymi algebrami nad ciałem potwierdziły, że istotnie w tym przypadku można powiedzieć więcej. W pracy [22] uzyskano prawie kompletną (a kompletną dla algebr skończenie wymiarowych) klasyfikację lewostronnie filialnych algebr nad ciałem (modulo otwarte problemy dotyczące form kwadratowych, które pojawiły się również u Liu Shao-Xue).

Satysfakcjonujące wyniki uzyskane w przypadku pierścieni i algebr nad ciałem inspirowały do dalszych badań. Pojawiło się pytanie na ile jest możliwe uzyskanie wspólnych ich uogólnień. Okazało się, że wiele wyników można rozszerzyć do przypadku algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym z jedynką, ale posługując się innymi metodami.

Powyżej opisana moja działalność w obszarze związanym z filialnymi i lewostronnie filialnymi algebrami wyznaczyła strukturę rozprawy doktorskiej. Składa się ona z czterech rozdziałów.

Rozdział 1 ma charakter wprowadzający. Zawiera ogólnie znane pojęcia i fakty dotyczące algebr i pierścieni łącznych wykorzystywane w dalszych fragmentach pracy.

Rozdział 2 dotyczy przypadku ogólnego, czyli filialnych i lewostronnie filialnych algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym z jedynką. Podajemy w nim definicje, charakteryzacje, własności takich algebr, a także związki pomiędzy wyróżnionymi typami filialności. Uzyskujemy między innymi twierdzenia opisujące strukturę lewostronnie filialnych algebr półpierwszych oraz β-radykalnych algebr filialnych. Ponadto, w rozdziale tym badamy filialność i lewostronną filialność typowych konstrukcji takich jak macierze, wielomiany, czy sumy proste.

Rozdział 3 dotyczy filialnych i lewostronnie filialnych algebr nad ciałem. Dowodzimy w nim, że w obrębie algebr β-radykalnych nad ciałem klasy algebr lewostronnie filialnych, filialnych i algebr Hamiltona się pokrywają. Podajemy też twierdzenie opisujące półpierwsze algebry lewostronnie filialne. Uzyskujemy prawie kompletną klasyfikację algebr lewostronnie filialnych w przypadku ogólnym, a kompletną w przypadku algebr skończenie wymiarowych. Dowodzimy też, że z filialności i lewostronnej filialności algebr nad ciałem wynika ich prawostronna filialność, a także podajemy opis struktury takich algebr.

Rozdział 4 dotyczy filialnych i lewostronnie filialnych pierścieni, czyli algebr nad pierścieniem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Wykazujemy w nim, że pewne wyniki uzyskane dla algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym K z jedynką można w tym przypadku wzmocnić, ale jednak nie aż tak, jak było to możliwe w przypadku, gdy K jest ciałem. W rozdziale tym podajemy również opis struktury pierścieni, których żaden niezerowy obraz homomorficzny nie jest filialny (lewostronnie filialny). Ważną część tego rozdziału stanowią przykłady pokazujące, że z filialności i lewostronnej filialności pierścieni, nie wynika ich prawostronna filialność.

Część uzyskanych wyników została zawarta w publikacjach [19, 20, 21, 22].

Każdy rozdział pracy poprzedzony jest wprowadzeniem, które przedstawia myśl przewodnią i dokładniej omawia wyżej zasygnalizowane zagadnienia. Najczęściej stosowane w pracy oznaczenia są wprowadzone w Rozdziale 1. Inne, dotyczące jedynie fragmentów pracy, pojawiają się w miejscach, w których są potrzebne.

Rozdział 1

Pojęcia i fakty dotyczące algebr i pierścieni wykorzystywane w pracy

Rozdział ten ma charakter wprowadzający. Zawiera ogólnie znane pojęcia oraz fakty dotyczące algebr i pierścieni łącznych wykorzystywane w pracy. Pojęcia te są zgodne z ogólnie przyjętą terminologią, która jest stosowana w książkach [24, 28, 18, 29, 34]. Przytaczamy je tutaj by uniknąć niejasności terminologicznych i swobodnie z nich dalej korzystać, często bez dalszych odwołań. W rozdziale tym przedstawiamy też z dowodami pewne fakty bardziej specyficzne, które będą nam potrzebne w różnych miejscach pracy.

Paragraf pierwszy zawiera podstawowe definicje, własności oraz przykłady, na początku pierścieni łącznych, a następnie algebr nad pierścieniem przemiennym. Wprowadzone tu zostały oznaczenia obowiązujące w całej pracy. Są w nim również przedstawione pewne znane konstrukcje pierścieni oraz algebr, jak np. konteksty Mority, dołączanie jedynki. W ostatniej części pierwszego paragrafu przedstawiamy pewne charakterystyczne elementy algebr, takie jak idempotenty, elementy nilpotentne, czy dzielniki zera oraz podajemy pewne użyteczne fakty, jak np. podnoszenie idempotentów modulo nil ideał, czy rozkład Pierce.

Paragraf drugi, złożony z trzech części, dotyczy wyróżnionych klas algebr i ideałów. Są to: algebry pierwsze i półpierwsze, algebry zredukowane, von Neumann regularne i silnie regularne, a także klasy radykalne. Przypominamy w nich definicje tych klas, a także ich podstawowe własności, często wykorzystywane w pracy.

W rozdziale tym K zawsze będzie oznaczało pierścień przemienny z jedynką. Używając terminu „algebra” będziemy mieli na myśli K-algebrę. Kiedy będą pojawiały się wyniki, w których rola K jest istotna, wówczas też K

będzie wyspecyfikowane.

1.1 Ustalenia wstępne

1.1.1 Podstawowe pojęcia i ich własności

Rozpoczniemy od wprowadzenia podstawowych oznaczeń.

Przez $\mathbb{N}$ oznaczamy zbiór liczb naturalnych, przez $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych.

Wszystkie rozważane w pracy pierścienie będą łączne (na ogół nieprzemienne). Będziemy je krótko nazywali **pierścieniami**.

Grupę $(R, +)$ będziemy nazywali **grupą addytywną** pierścienia R i oznaczali przez R^+. Jeżeli dodatkowo mnożenie w R jest przemienne, to R nazywamy **pierścieniem przemiennym**.

Jeśli mnożenie w R ma element neutralny, to ten element nazywamy jedynką pierścienia R i mówimy, że R jest **pierścieniem z jedynką**. Jedynkę dalej będziemy oznaczali symbolem 1. Rozważane w pracy pierścienie i algebry nie muszą mieć 1.

Zbiór wszystkich elementów pierścienia R, które są przemienne z każdym elementem tego pierścienia nazywamy **centrum pierścienia** R i oznaczmy przez $Z(R)$. Jeśli R jest pierścieniem przemiennym, to $Z(R) = R$.

Pierścieniem przeciwnego typu do pierścienia R z 1 jest **pierścień z zerowym mnożeniem**, to znaczy taki, w którym iloczyn dowolnych dwóch elementów jest zerowy. Na dowolnej grupie abelowej $(R, +)$ możemy oczywiście określić strukturę pierścienia z zerowym mnożeniem kładąc dla dowolnych $a, b \in A$, $ab = 0$. Tak otrzymany pierścień oznaczamy R^0. Również dla dowolnego pierścienia R przez R^0 oznaczamy pierścień z zerowym mnożeniem określony na grupie R^+.

Jeśli X i Y są dowolnymi podzbiorami pierścienia R, to przez sumę $X+Y$ rozumiemy zbiór $\{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$, zaś iloczyn XY jest zbiorem $\{\sum_{sk.} x_i y_i \mid x_i \in X, y_i \in Y\}$. Zbiór wszystkich podgrup addytywnej grupy R ze względu na wyżej określone operacje dodawania i mnożenia jest **półpierścieniem** tzn. R jest półgrupą ze względu na działanie dodawania oraz zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania $(X+Y)Z = XZ+YZ$ i łączność $(XY)Z = X(YZ)$.

Podzbiór S pierścienia R jest **podpierścieniem**, jeżeli jest on pierścieniem ze względu na te same działania co pierścień R. Podpierścień I pierścienia R nazywamy **lewostronnym** (**prawostronnym**) **ideałem** w R, gdy $RI \subseteq I$ ($IR \subseteq I$). Jeśli I jest zarówno lewostronnym, jak i prawostronnym ideałem to mówimy, że I jest **ideałem dwustronnym** lub krótko **ideałem**. Dla oznaczenia, że I jest ideałem (ideałem lewostronnym, ideałem prawostronnym) pierścienia R piszemy $I \lhd R$ ($I <_l R$, $I <_r R$).

Podpierścień S pierścienia R nazywamy **lewostronnie osiągalnym** (**osiągalnym**) jeśli istnieją takie podpierścienie $S = S_0 \subseteq \ldots \subseteq S_n = R$ pierścienia R, że dla każdego $0 \leqslant i \leqslant n-1$, S_i jest lewostronnym ideałem (ideałem) w S_{i+1}.

Oczywiście każdy pierścień zawiera ideały 0 i R, nazywane trywialnymi. Ideały różne od 0 i R nazywamy **nietrywialnymi**, a różne od R - **właściwymi**. Ideał I pierścienia R nazywamy **maksymalnym**, jeżeli dla $I \neq R$, z faktu, że $I \subseteq J \subseteq R$, dla pewnego $J \lhd R$ wynika, że $J = I$ lub $J = R$. Analogicznie definiujemy maksymalne ideały lewostronne (prawostronne).

Jeżeli I i J są ideałami (lewostronnymi ideałami, prawostronnymi ideałami) pierścienia R, to $I + J$ oraz $I \cap J$ również są ideałami (lewostronnymi ideałami, prawostronnymi ideałami) pierścienia R. Jeśli I jest ideałem, zaś P jest podpierścieniem pierścienia R, to wówczas $I + P$ jest podpierścieniem R.

Jeżeli I, J są ideałami (lewostronnymi ideałami, prawostronnymi ideałami) oraz $I \cap J = 0$, to $I + J$ nazywamy **sumą prostą** i oznaczamy $I \oplus J$. W tym przypadku przedstawienie dowolnego elementu $i + j$, gdzie $i \in I$, zaś $j \in J$ jest jednoznaczne.

Stwierdzenie 1.1. *Jeśli ideał I pierścienia R, traktowany jako pierścień, ma* 1*, to $R = I \oplus I'$ dla pewnego $I' \lhd R$.*

Pierścień, który nie zawiera ideałów nietrywialnych nazywamy **pierścieniem prostym**.

Jeśli I jest ideałem dwustronnym, to przez R/I oznaczamy **pierścień ilorazowy**. Przykładem pierścienia ilorazowego jest dla dodatniej liczby całkowitej n, pierścień $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, reszt liczb całkowitych modulo n, który będziemy oznaczali $\mathbb{Z}_n$.

Homomorfizm pierścieni rozumiany jest w standardowy sposób, a mianowicie, jeśli R i S będą pierścieniami, to odwzorowanie $f : R \to S$ nazywamy **homomorfizmem**, jeżeli dla każdego $a, b \in R$ spełnione są następujące warunki: $f(a + b) = f(a) + f(b)$ oraz $f(ab) = f(a)f(b)$.

Oczywiście homomorfizm pierścienia R w pierścień S jest także homomorfizmem grup R^+ w S^+. Jeżeli homomorfizm jest odwzorowaniem różnowartościowym (na, bijekcją), to nazywamy go **zanurzeniem** (epimorfizmem, izomorfizmem). Mówimy, że pierścienie R i S są izomorficzne, jeżeli istnieje izomorfizm $\varphi : R \to S$. Wówczas piszemy $R \simeq S$. **Jądrem homomorfizmu** $f : R \to S$ nazywamy zbiór $\{x \in R \mid f(x) = 0\}$ i oznaczamy $kerf$. Oczywiście jądro homomorfizmu pierścieni $f : R \to S$ jest ideałem pierścienia R.

Często będziemy wykorzystywali

Twierdzenie 1.2. (pierwsze twierdzenie o izomorfizmie) *Jeśli $f : R \to S$ jest homomorfizmem pierścieni, to $R/kerf \simeq f(R)$.*

Twierdzenie 1.3. (drugie twierdzenie o izomorfizmie) *Niech I i J będą ideałami pierścienia R. Wówczas $I/(I \cap J) \simeq (I + J)/J$.*

Twierdzenie 1.4. (trzecie twierdzenie o izomorfizmie) *Niech I, J będą takimi ideałami pierścienia R, że $J \subseteq I$. Wówczas I/J jest ideałem pierścienia R/J oraz $(R/J)/(I/J) \simeq R/I$.*

Nietrudno zauważyć, że każdy pierścień R ma strukturę lewostronnego (prawostronnego) R-modułu nad sobą ze względu na określone w nim działania dodawania i mnożenia.

Jeżeli M jest R-modułem, pierścień R ma 1 oraz dla dowolnego $m \in M$, $1m = m$ to moduł M nazywamy **unitarnym**.

Definicja 1.5. Niech R, S będą pierścieniami. Jeśli (V, +) jest grupą abelową, która ma strukturę lewostronnego R-modułu i prawostronnego S-modułu, to V nazywamy (R, S)-**bimodułem**, gdy dla dowolnych $r \in R$, $s \in S$ oraz $v \in V$, $(rv)s = r(vs)$.

Oczywiście każdy pierścień ma strukturę bimodułu nad sobą ze względu na działania dodawania i mnożenia w nim określone.

Ideały lewostronne (prawostronne) pierścienia R można traktować jako podmoduły lewostronnego (prawostronnego) R-modułu R. Ideały zaś, jako podbimoduły (R, R)-bimodułu R.

Definicja 1.6. Niech K będzie pierścieniem przemiennym, zaś A -pierścieniem. Mówimy, że A jest K**-algebrą** lub **algebrą nad** K, gdy na $(A, +)$ określona jest struktura lewostronnego K-modułu unitarnego oraz dla dowolnych $a, b \in A$ oraz $k \in K$, $k(ab) = (ka)b = a(kb)$.

Wszędzie dalej w tym rozdziale, K będzie pierścieniem przemiennym z 1. Często dla uproszczenia sformułowań K-algebrę będziemy krótko nazywali **algebrą**.

Dowolny pierścień R ma naturalną strukturę $\mathbb{Z}$-algebry (jeśli $n \in \mathbb{Z}$ i $r \in R$, to nr jest sumą n kopii r). Dlatego też w dalszej części pracy terminy pierścień i $\mathbb{Z}$-algebra będą używane wymiennie, w zależności od potrzeb.

M nazwiemy lewostronnym (prawostronnym) A-modułem K-algebry A, jeśli jest on lewostronnym (prawostronnym) modułem nad pierścieniem A, M jest lewostronnym (prawostronnym) K-modułem oraz dla każdego $k \in K$, $a \in A$, $m \in M$, $(ka)m = k(am) = a(km)$.

Ideał (ideał lewostronny, ideał prawostronny) K-algebry A to K-podmoduł A, który jest ideałem (ideałem lewostronnym, ideałem prawostronnym) A traktowanej jako pierścień.

Oczywiście każdy ideał (ideał lewostronny, ideał prawostronny) K-algebry A jest ideałem (ideałem lewostronnym, ideałem prawostronnym) pierścienia A, ale na ogół nie na odwrót. Przykładem jest algebra liczb rzeczywistych z zerowym mnożeniem $\mathbb{R}^0$. Liczby całkowite są ideałem pierścienia $\mathbb{R}^0$, ale nie są ideałem $\mathbb{R}$-algebry $\mathbb{R}^0$. Jeżeli jednak algebra A jest z 1 to w A ideały pierścieniowe są również ideałami algebrowymi.

1.1.2 Pewne konstrukcje ideałów i algebr

Dowolną algebrę A można w standardowy sposób rozszerzyć do algebry $A^{\#}$ z 1 (nawet jeśli A już ma jedynkę). Mianowicie $A^{\#}$ rozumiemy jako zbiór $\{(a,k) \mid a \in A, k \in K\}$, z dodawaniem po współrzędnych i mnożeniem określonym w następujący sposób: $(a,n)(b,m) = (ab+ma+nb, nm)$. Jedynką w $A^{\#}$ jest element $(0,1)$. Ponadto $A \simeq (A,0) = \{(a,0) \mid a \in A\} \lhd A^{\#}$ oraz $(0,K) = \{(0,k) \mid k \in K\} \simeq K$. Dalej będziemy A utożsamiali z $(A,0)$ oraz K z $(0,K)$, dzięki czemu możemy zakładać, że $A \lhd A^{\#}$ oraz $K \subseteq A^{\#}$. Ponadto K jest podalgebrą $A^{\#}$ taką, że $A \cap K = 0$ oraz $A^{\#} = A + K$. W efekcie $A^{\#}/A \simeq K$.

Algebrę A można również rozszerzyć do algebry z jedynką w „oszczędniejszy" sposób, co teraz przedstawimy.

Niech I będzie maksymalnym ideałem w zbiorze takich ideałów J algebry $A^{\#}$, że $A \cap J = 0$. Ideał I istnieje na mocy lematu Zorna. Wszędzie dalej $A^{\star}$ będzie oznaczało K-algebrę $A^{\#}/I$. Oczywiście $(A+I)/I \simeq A/(A \cap I) \simeq A$. Utożsamiając dowolny element $a \in A$ z warstwą $a + I$ możemy zakładać, że $A \lhd A^{\star}$.

Nie będziemy tutaj rozważali problemu dotyczącego jednoznaczności $A^{\star}$, gdyż w dalszych zastosowaniach $A^{\star}$, istotną rolę odgrywają tylko następujące własności:

- jeśli $T \subseteq A$, to T jest ideałem algebry A wtedy i tylko wtedy, gdy T jest ideałem $A^\star$,
- dla dowolnego niezerowego ideału J algebry $A^\star$ otrzymujemy, że $A \cap J \neq 0$,
- dla dowolnego podzbioru X algebry A, ideał (ideał lewostronny, ideał prawostronny) algebry A generowany przez X jest równy $A^\star X A^\star = AXA + AX + XA + KX$ ($A^\star X = AX + KX$, $XA^\star = XA + KX$), gdzie KX oznacza K-podmoduł A generowany przez X.

Ideał A generowany przez element $a \in A$ oznaczamy przez (a). Zatem $(a) = A^\star a A^\star = AaA + Aa + aA + Ka$. W przypadku, gdy A ma 1, $(a) = AaA$.

Lewostronnym anihilatorem $l_A(X)$, podzbioru X algebry A nazywamy zbiór wszystkich elementów $a \in A$, dla których $aX = 0$. Analogicznie definiujemy prawostronny anihilator $r_A(X) = \{a \in A \mid Xa = 0\}$. **Anihilatorem dwustronnym** $a_A(X)$, podzbioru X algebry A nazywamy zaś zbiór $a_A(X) = \{a \in A \mid Xa = aX = 0\}$. Oczywiście lewostronny (prawostronny) anihilator jest ideałem lewostronnym (prawostronnym) algebry A, zaś anihilator $a_A(X) = l_A(X) \cap r_A(X)$ nie musi być ani ideałem lewostronnym, ani prawostronnym.

Algebry, które nie zawierają nietrywialnych ideałów dwustronnych nazywamy **prostymi**. Nie jest znany ich pełny opis. Natomiast algebry, które nie zawierają ideałów lewostronnych (prawostronnych) opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.7. *Jeśli K-algebra A nie zawiera nietrywialnych ideałów lewostronnych (prawostronnych), to A jest algebrą z dzieleniem lub $A \simeq (K/I)^0$, gdzie I jest ideałem maksymalnym w K.*

Przecięcie wszystkich niezerowych ideałów algebry A nazywamy **rdzeniem** algebry A i oznaczamy $H(A)$. Algebrę A, która ma niezerowy rdzeń nazywamy **podprosto nierozkładalną**. Nietrudno sprawdzić, że $H(A)$ jest albo algebrą prostą albo algebrą z zerowym mnożeniem.

Algebra A jest **sumą podprostą** algebr A_t dla $t \in T$ wtedy i tylko wtedy, gdy A zawiera takie ideały I_t, że $\bigcap I_t = 0$ oraz $A_t \simeq A/I_t$ dla każdego $t \in T$. Odnotujmy, że suma podprosta algebr przemiennych jest przemienna oraz algebra jest zredukowana wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą podprostą dziedzin (por. [4]).

Niejednokrotnie w pracy będziemy wykorzystywali prosty, ale bardzo użyteczny

Lemat 1.8. Andrunakiewicza ([3]). *Jeżeli $I \lhd J \lhd A$, to $\bar{I}^3 \subseteq I$, gdzie $\bar{I}$ jest ideałem algebry A generowanym przez I.*

Jeśli A jest K-algebrą, to zbiory, $M_n(A)$ - $n \times n$-macierzy o współczynnikach z algebry A oraz $A[x]$ - wielomianów zmiennej x o współczynnikach z algebry A, mają naturalną strukturę K-algebry.

Oprócz wyżej wymienionych konstrukcji algebr, w pracy wykorzystywać będziemy tzw. konteksty Mority, które teraz omówimy.

Definicja 1.9. Niech R, S będą pierścieniami oraz niech V i W będą odpowiednio (R, S)-bimodułem i (S, R)-bimodułem. Czwórkę (R, V, W, S) nazywamy **kontekstem Mority**, jeśli mówiąc poglądowo, zbiór $\begin{pmatrix} R & V \\ W & S \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} r & v \\ w & s \end{pmatrix} \mid r \in R, v \in V, w \in W, s \in S\}$ ze względu na naturalne działania dodawania i mnożenia macierzy jest pierścieniem łącznym.

Definicja ta ma sens, jeśli założymy istnienie odwzorowań $V \times W \to R$ oraz $W \times V \to S$, przy których obrazy (v, w) i (w, v) oznaczamy vw i wv tak, że dla dowolnych $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $r \in R$, $s \in S$ zachodzą następujące warunki:

$$\begin{array}{ll} (v_1 + v_2)w = v_1 w + v_2 w; & v(w_1 + w_2) = vw_1 + vw_2; \\ r(vw) = (rv)w; & (vw)r = v(wr); \\ (vs)w = v(sw); & (v_1 w)v_2 = v_1(wv_2); \end{array}$$

oraz warunki dualne

$$\begin{array}{ll} (w_1 + w_2)v = w_1 v + w_2 v; & w(v_1 + v_2) = wv_1 + wv_2; \\ s(wv) = (sw)v; & (wv)s = w(vs); \\ (wr)v = w(rv); & (w_1 v)w_2 = w_1(vw_2). \end{array}$$

Przykłady kontekstów Mority

1. Niech U będzie pierścieniem, zaś M - prawostronnym U-modułem. Oczywiście M możemy traktować w naturalny sposób jako $(0, U)$-bimoduł. Przekształcenia zerowe $M \times 0 \to 0$ oraz $0 \times M \to U$ spełniają powyższe warunki. W ten sposób określamy kontekst Mority $\begin{pmatrix} U & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} u & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \mid u \in U, m \in M\}$.
W przypadku, gdy M jest lewostronnym U-modułem, to analogicznie otrzymujemy kontekst Mority $\begin{pmatrix} U & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} u & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid u \in U, m \in M\}$.

2. Podobnie jak wyżej, jeśli U i T są pierścieniami, zaś M jest (U, T)-bimodułem, to otrzymujemy kontekst Mority $\begin{pmatrix} U & M \\ 0 & T \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} u & m \\ 0 & t \end{pmatrix} \mid$

$u \in U, m \in M, t \in T\}$.

3. Niech A będzie pierścieniem, zaś I lewostronnym ideałem w A. Wówczas zbiór $\begin{pmatrix} I & A \\ I & A \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} i_1 & a_1 \\ i_2 & a_2 \end{pmatrix} \mid i_1, i_2 \in I, a_1, a_2 \in A\}$ jest podpierścieniem pierścienia macierzy $M_2(A)$. Oczywiście A oraz I mają strukturę odpowiednio (I, A) oraz (A, I)-bimodułu oraz odpowiednie przekształcenia są naturalnie wyznaczone, a więc $\begin{pmatrix} I & A \\ I & A \end{pmatrix}$ możemy też rozpatrywać jako kontekst Mority.

Analogicznie, jeżeli I jest ideałem prawostronnym pierścienia A, to uzyskujemy kontekst Mority $\begin{pmatrix} I & I \\ A & A \end{pmatrix}$.

Na powyższe przykłady powoływać się będziemy w różnych miejscach pracy.

1.1.3 Różne typy elementów

Element a algebry A z 1 nazywamy odwracalnym, jeżeli istnieje taki element $b \in A$, że $ab = ba = 1$. Algebra, w której każdy niezerowy element jest odwracalny jest nazywana **algebrą z dzieleniem**. Klasycznym przykładem algebry z dzieleniem, która nie jest ciałem jest algebra kwaternionów Hamiltona. Przemienne algebry z dzieleniem są ciałami. Dalej $\mathbb{Z}_p$ będzie oznaczało ciało reszt liczb całkowitych modulo liczba pierwsza p, $\mathbb{Q}$ - ciało liczb wymiernych, zaś $\mathbb{R}$ - ciało liczb rzeczywistych.

Niezerowy element a algebry A nazywamy **dzielnikiem zera**, jeżeli istnieje taki element $0 \neq b \in A$, że $ab = 0$ lub $ba = 0$. Algebry, które nie zawierają dzielników zera nazywamy **dziedzinami**.

Szczególnymi przykładami dzielników zera są **elementy nilpotentne** (nazywane również nilpotentami), czyli takie elementy x algebry A, że $x^n = 0$, dla pewnej liczby naturalnej n. Algebry, w których każdy element jest nilpotentny, noszą nazwę **nil algebr**. Natomiast algebrę A nazywamy **nilpotentną**, gdy istnieje liczba naturalna n, dla której $A^n = 0$. Najmniejsze takie n nazywane jest stopniem nilpotentności A. Ideał I nazywamy **nil ideałem** (**ideałem nilpotentnym**) jeśli jest on nil (nilpotentny) jako algebra.

Element e algebry A nazywamy **idempotentem** lub **elementem idempotentnym**, gdy $e^2 = e$. Oczywiście 1 jest szczególnym przykładem elementu idempotentnego. Mówimy zaś, że A jest **algebrą idempotentną**, gdy $A^2 = A$.

Teraz podamy pewne użyteczne fakty dotyczące elementów idempotentnych.

Stwierdzenie 1.10. *Niech e będzie idempotentem algebry A. Wówczas $A = eAe + eA(1-e) + (1-e)Ae + (1-e)A(1-e)$ i jest to suma prosta podgrup A^+.*

Powyższy rozkład nosi nazwę **rozkładu Pierce**. Algebra A nie musi być z 1. Zbiory $(1-e)A$ oraz $A(1-e)$ rozumiemy odpowiednio jako $\{x - ex \mid x \in A\}$ i $\{x - xe \mid x \in A\}$. Zauważmy, że $T = eAe$, $S = (1-e)A(1-e)$, $V = (1-e)Ae$ i $W = eA(1-e)$ są podalgebrami A oraz V i W są odpowiednio (T, S) oraz (S, T)-bimodułami. Wówczas zbiór $\begin{pmatrix} T & W \\ V & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eAe & eA(1-e) \\ (1-e)Ae & (1-e)A(1-e) \end{pmatrix}$ z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia macierzy jest podpierścieniem pierścienia macierzy $M_2(A)$, który też można traktować jako kontekst Mority. Nietrudno sprawdzić, że pierścień A jest z nim izomorficzny. Izomorfizm ten wyznacza przekształcenie: dla każdego $x \in A$, $x \to \begin{pmatrix} exe & ex(1-e) \\ (1-e)xe & (1-e)x(1-e) \end{pmatrix}$.

Stwierdzenie 1.11. (o podnoszeniu idempotentów). *Jeśli I jest nil ideałem algebry A oraz f jest idempotentem w A/I, to w algebrze A istnieje taki idempotent e, że $f = e + I$.*

1.2 Wyróżnione klasy algebr i ideałów

1.2.1 Algebry i ideały pierwsze oraz półpierwsze

Definicja 1.12. Algebrę A nazywamy **pierwszą**, gdy dla dowolnych jej ideałów (równoważnie, ideałów lewostronnych, ideałów prawostronnych) I, J, jeśli $IJ = 0$, to $I = 0$ lub $J = 0$.

Poniższe stwierdzenie podaje użyteczną charakteryzację algebr pierwszych.

Stwierdzenie 1.13. *A jest algebrą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a, b \in A$, jeśli $aAb = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$.*

Nietrudno sprawdzić, że jeśli I jest ideałem algebry pierwszej A, to I jest algebrą pierwszą.

Ideał I algebry A nazywamy **ideałem pierwszym**, gdy A/I jest algebrą pierwszą. Oczywiście z definicji łatwo otrzymujemy, że ideał I algebry A jest **ideałem pierwszym**, jeśli dla dowolnych jej ideałów J, L z faktu, że $JL \subseteq I$, wynika, że $J \subseteq I$ lub $L \subseteq I$.

Naturalnym uogólnieniem pojęcia pierwszości jest pojęcie półpierwszości.

Definicja 1.14. Algebrę A nazywamy **półpierwszą**, gdy A nie zawiera niezerowych ideałów (równoważnie, ideałów lewostronnych, ideałów prawostronnych) nilpotentnych.

Stwierdzenie 1.15. *A jest algebrą półpierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in A$, jeśli $xAx = 0$, to $x = 0$.*

Z lematu Andrunakiewicza wynika, że jeśli I jest ideałem algebry półpierwszej, to również I jest algebrą półpierwszą.

O ideale I powiemy, że jest **ideałem półpierwszym** algebry A, gdy A/I jest algebrą półpierwszą.

Oczywiście każdy ideał pierwszy jest również ideałem półpierwszym.

W dalszej części pracy będziemy wykorzystywali następujące proste obserwacje dotyczące ideałów półpierwszych.

Stwierdzenie 1.16. *(i) Jeżeli $I \lhd J \lhd A$ oraz J/I jest algebrą półpierwszą, to $I \lhd A$.*

(ii) Jeżeli I jest półpierwszym ideałem pierścieniowym algebry A, to I jest ideałem algebry A.

(iii) Jeśli I jest ideałem półpierwszym w algebrze $M_n(A)$, to $I = M_n(J)$ dla pewnego $J \lhd A$.

Dowód: (i) Niech $I \lhd J \lhd A$ oraz $\bar{I}$ będzie ideałem w A generowanym przez I. Oczywiście $\bar{I}/I \lhd J/I$. Z lematu Andrunakiewicza $(\bar{I})^3 \subseteq I$, więc $(\bar{I}/I)^3 = 0$. Ponieważ J/I jest algebrą półpierwszą, więc $\bar{I}/I = 0$. Stąd zaś $\bar{I} = I$, co kończy dowód (i).

(ii) Zauważmy, że jeśli A jest K-algebrą oraz I jest ideałem pierścienia A, to KI jest takim K-ideałem A, że $(KI)^2 \subseteq I$. Z półpierwszości A/I wynika więc, że $KI \subseteq I$, a stąd I jest K-ideałem.

(iii) Zauważmy, że $I \lhd M_n(A) \lhd M_n(A^\star)$. Ponieważ $M_n(A)/I$ jest algebrą półpierwszą, więc z (i) wynika, że $I \lhd M_n(A^\star)$. Algebra $A^\star$ jest z 1, dlatego też $I = M_n(J)$ dla pewnego $J \lhd A^\star$. Z założenia $I = M_n(J) \lhd M_n(A)$, a stąd $J \subseteq A$. Zatem $J \lhd A$. ∎

Element a algebry A nazywamy **regularnym**, jeżeli z faktu, że dla pewnego $b \in A$, $ab = 0$ lub $ba = 0$ wynika, że $b = 0$. Niezerowe elementy centralne algebry pierwszej są elementami regularnymi.

1.2.2 Radykały i ich różne typy

Definicja 1.17. Klasę algebr α nazywamy **radykalną**, gdy

(1) jest homomorficznie zamknięta, tzn. obrazy homomorficzne algebr z klasy α należą do α;

(2) jest zamknięta na rozszerzenia, tzn. jeśli I jest ideałem algebry A oraz I i A/I należą do α, to A należy do α;

(3) jest zamknięta ze względu na sumy ideałów, tzn. dla dowolnych I_t ideałów algebry A, jeśli $I_t \in \alpha$, to $\sum I_t \in \alpha$.

Algebry z klasy α nazywamy *α-radykalnymi* lub α-algebrami. Klasy radykalne nazywa się też krótko *radykałami*.

Z warunku (3) wynika, że dowolna algebra A zawiera największy α-ideał $\alpha(A) = \sum\{I \lhd A \mid I \in \alpha\}$, nazywany **$\alpha$-radykałem** algebry A.

Do najbardziej użytecznych w badaniu struktury algebr należą następujące radykały.

1. Nil radykał. Klasa $\mathcal{N}$ wszystkich nil algebr jest klasą radykalną. Dla dowolnej algebry A, $\mathcal{N}(A)$ nazywa się nil radykałem algebry A.

2. Radykał Jacobsona. W algebrze $(A, +, \cdot)$ zdefiniujmy działanie $\circ$ jako $a \circ b = a + b - ab$, dla dowolnych $a, b \in A$. Działanie to jest łączne, a także dla każdego $a \in A$, $a \circ 0 = 0 \circ a = a$. Zatem $(A, \circ)$ jest monoidem z elementem neutralnym równym 0. Klasa $\mathcal{J} = \{A \mid (A, \circ) \text{ jest grupą}\}$ jest klasą radykalną. Dla dowolnej algebry A, $\mathcal{J}(A)$ nazywa się radykałem Jacobsona algebry A.

3. Radykał pierwszy. Klasa β wszystkich algebr, które nie zawierają właściwych ideałów pierwszych jest klasą radykalną. Dla dowolnej algebry A, $\beta(A)$ nazywa się radykałem pierwszym algebry A.
Radykał pierwszy będzie odgrywał istotną rolę w naszych badaniach dlatego poniżej opiszemy go dokładniej.

Niejednokrotnie będziemy wykorzystywali następującą charakteryzację radykału pierwszego.

Twierdzenie 1.18. *Dla dowolnej algebry A, $\beta(A) = \bigcap\{I \lhd A \mid I$ jest ideałem pierwszym $A\}$.*

Dolnym radykałem wyznaczonym przez klasę algebr M nazywamy przecięcie wszystkich klas radykalnych zawierających M. Tę klasę oznaczamy przez l_M. Okazuje się, że jeżeli M jest klasą wszystkich algebr nilpotentnych, to dolny radykał wyznaczony przez klasę M pokrywa się z β. Radykał ten nazywa się też *radykałem Baera*. Oczywiście dla dowolnej algebry A, $\beta(A)$ zawiera wszystkie ideały nilpotentne A, a więc również $W(A) = \sum\{I \mid I$ - ideał nilpotentny algebry $A\}$. Często $W(A)$ nazywa się radykałem Wedderburna algebry A. Warto jednak zauważyć, że nie dla każdej algebry A, $W(A/W(A)) = 0$, a więc klasa $\{A \mid A = W(A)\}$ nie jest klasą radykalną w sensie powyższej definicji.

Pojęciem dualnym do pojęcia klasy radykalnej jest pojęcie klasy półprostej.

Definicja 1.19. Algebrę A nazywamy α**-półprostą**, gdy $\alpha(A) = 0$. Klasę $P(\alpha) = \{A \mid \alpha(A) = 0\}$ nazywamy zaś **klasą półprostą** radykału α.

Z tego, że $\beta = l_M$, gdzie M jest klasą algebr nilpotentnych oraz Twierdzenia 1.18 wynika, że algebra A jest β-półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy jest półpierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą podprostą algebr pierwszych.

Definicja 1.20. Klasę algebr α nazywamy **dziedziczną** (**lewostronnie dziedziczną**), gdy z faktu, że I jest ideałem A (I jest ideałem lewostronnym A) oraz $A \in \alpha$ wynika, że $I \in \alpha$.

Klasy β, $\mathcal{N}$ i $\mathcal{J}$ są przykładami klas dziedzicznych. Warto w tym miejscu zauważyć, że nie wszystkie klasy radykalne są dziedziczne. Przykładem jest klasa algebr idempotentnych.

W pracy [1] zostało udowodnione następujące twierdzenie, zwane obecnie Twierdzeniem ADS, „pokonujące przeszkodę” braku przechodniości relacji bycia ideałem. Poniżej zamieszczamy bez dowodu jego treść.

Twierdzenie 1.21. (ADS, [1]). *Dla dowolnej algebry A i dowolnej klasy radykalnej α, jeśli $I \lhd A$, to $\alpha(I) \lhd A$.*

Bezpośrednio z powyższego twierdzenia otrzymujemy

Wniosek 1.22. *Jeśli $I \lhd A$, to $\alpha(I) \subseteq \alpha(A)$, dla dowolnej algebry A i dowolnego radykału α.*

Z Twierdzenie ADS wynika, że jeśli α jest radykałem w klasie pierścieni ($\mathbb{Z}$-algebr), to dla dowolnej algebry A, $\alpha(A) \lhd A^\star$, a więc $\alpha(A)$ jest ideałem algebry A.

1.2.3 Algebry zredukowane, regularne i silnie regularne

Definicja 1.23. Mówimy, że algebra A jest **zredukowana** jeśli nie zawiera ona niezerowych elementów nilpotentnych.

Jasne jest, że algebra A jest zredukowana wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera ona niezerowych elementów, których kwadraty są zerami.

Przedstawimy teraz kilka podstawowych własności algebr zredukowanych, które będą wykorzystywane w pracy.

Stwierdzenie 1.24. *Niech A będzie algebrą zredukowaną. Wówczas*

(i) *Dla dowolnych $a, x, y \in A$, $ax = ay$ wtedy i tylko wtedy, gdy $xa = ya$.*

(ii) *Anihilator lewostronny (prawostronny) dowolnego podzbioru A jest ideałem w A.*

(iii) *Niech $a_1, \dots, a_n \in A$. Wówczas jeżeli $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 0$, to $a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)} = 0$, dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.*

Z (*iii*) powyższego stwierdzenia natychmiast wynika następująca użyteczna własność

Wniosek 1.25. *Dla dowolnych $a, b \in A$ i liczby całkowitej $n \geqslant 2$, jeśli A jest algebrą zredukowaną oraz $ab^n = 0$, to $ab = 0$.*

Ponadto nietrudno wykazać następujące

Stwierdzenie 1.26. *A jest zredukowaną algebrą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy A jest dziedziną.*

Ideał I algebry A nazywamy **istotnym** w A, gdy dla dowolnego niezerowego ideału J algebry A, $I \cap J \neq 0$.

Z definicji $A^\star$ wynika, że A jest ideałem istotnym $A^\star$.

Stwierdzenie 1.27. *Załóżmy, że I jest ideałem istotnym algebry A. Wówczas*

(i) (por. [41]) *I jest algebrą pierwszą (półpierwszą) wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebrą pierwszą (półpierwszą).*

(ii) (por. [32]) *I jest algebrą zredukowaną wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebrą zredukowaną.*

(iii) (por. [32]) *I jest dziedziną wtedy i tylko wtedy, gdy algebra A jest dziedziną.*

Definicja 1.28. Algebrę A nazywamy **algebrą regularną** (von Neumann regularną) [49], jeśli dla każdego elementu $a \in A$ istnieje taki element $x \in A$, że $axa = a$.

Algebry von Neumann regularne mają następującą charakteryzację.

Stwierdzenie 1.29. *Algebra A jest regularna von Neumann, gdy dla dowolnego $a \in A$ istnieje taki idempotent $e \in A$, że $A^\star a = Ae$.*

W algebrze zredukowanej idempotenty są centralne, czyli należą do centrum tej algebry. Nietrudno zauważyć, że jeśli $axa = a$, to ax jest idempotentem, a więc jeśli A nie zawiera elementów nilpotentnych, to ax należy do centrum $Z(A)$ algebry A (por. [23]).

Rozdział ten zakończymy omówieniem algebr silnie regularnych oraz ich własności. Te algebry i ich własności odgrywają w pracy istotną rolę i są w niej niejednokrotnie wykorzystywane.

Definicja 1.30. Algebrę A nazywamy **silnie regularną**, jeśli dla każdego $a \in A$ istnieje takie $x \in A$, że $a = xa^2$ lub równoważnie, dla każdego $a \in A$, $Aa^2 = A^\star a$.

Nietrudno jest wykazać, że A jest algebrą silnie regularną wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $a \in A$, $a^2A = aA^\star$.

Zauważmy, że gdy A jest algebrą z zerowym mnożeniem, to dla każdego $0 \neq a \in A$, $Aa^2 = Aa$ oraz $Aa^2 \neq A^\star a$. Zatem w powyższej definicji nie można zastąpić warunku $Aa^2 = A^\star a$ przez warunek $Aa^2 = Aa$. Oczywiście dla algebr z 1 oba te warunki są równoważne.

Ponadto znane są następujące charakteryzacje algebr silnie regularnych

Stwierdzenie 1.31. *Dla danej algebry A następujące warunki są równoważne:*

(i) *A jest algebrą silnie regularną;*

(ii) (por. [23]) *A jest algebrą von Neumann regularną i zredukowaną;*

(iii) (por. [12]) *Jeśli $I <_l J <_l A$, to $I^2 = I$.*

W wielu miejscach pracy będziemy wykorzystywali następujące znane własności algebr silnie regularnych.

Stwierdzenie 1.32. *(i) Algebry silnie regularne są duo algebrami, czyli algebrami, w których każdy ideał jednostronny jest ideałem dwustronnym.*

(ii) Ideały algebry silnie regularnej są algebrami silnie regularnymi.

(iii) Każda algebra silnie regularna jest idempotentna.

(iv) Idempotentne elementy algebry silnie regularnej są centralne.

(v) W algebrze silnie regularnej anihilator lewostronny dowolnego elementu jest równy jego anihilatorowi prawostronnemu.

(vi) Silnie regularna algebra A jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy jest algebrą z dzieleniem.

Twierdzenie 1.33. *Klasa $\mathcal{S}$ algebr silnie regularnych jest dziedziczną klasą radykalną.*

Dowód: Oczywiście klasa $\mathcal{S}$ jest homomorficznie zamknięta oraz nietrudno sprawdzić, że jest zamknięta ze względu na sumy ideałów. Zostaje więc sprawdzić, czy jest zamknięta na rozszerzenia. Załóżmy, że I oraz A/I są algebrami silnie regularnymi. Wówczas dla każdego elementu $a + I \in A/I$, $a + I \in (a^2 + I)(A/I) = (a^2A + I)/I$. Stąd $a \in a^2A + I$. Dlatego też istnieje taki element $x \in A$, że $a - a^2x \in I$. Ponieważ I jest algebrą silnie regularną, więc $a - a^2x \in (a - a^2x)^2I \subseteq (a^2 - a^3x - a^2xa + a^2xa^2x)I \subseteq a^2I \subseteq a^2A$. Zatem $a \in a^2A$, wobec tego A jest algebrą silnie regularną.
Załóżmy, że $A \in \mathcal{S}$ oraz niech $I \lhd A$. Dla dowolnego $0 \neq i \in I$ istnieje $x \in A$ taki, że $i = i^2x$. Mnożąc obie strony równości z prawej strony przez i otrzymujemy, że $i(i - ixi) = 0$, a stąd $(i - ixi)^2 = 0$. Ponieważ algebra A jest zredukowana, więc $i - ixi = 0$. Zatem $i = ixi = i^2x(xi) \in i^2I$. W efekcie $I \in \mathcal{S}$. ■

Na koniec przedstawimy charakteryzację algebr silnie regularnych, która odegra bardzo istotną rolę w opisie struktury półpierwszych algebr lewostronnie filialnych. Jest ona słabszą wersją charakteryzacji otrzymanej w [50] (ale tylko dla algebr z jedynką). Dowód wersji, która nam wystarczy jest prostszy. Dlatego też teraz przedstawimy niezależny od [50] dowód tego faktu (dla algebr bez jedynki).

Twierdzenie 1.34. *Algebra zredukowana R jest silnie regularna wtedy i tylko wtedy, gdy obrazy pierwsze R są algebrami z dzieleniem.*

Dowód: Ponieważ obrazy homomorficzne algebr silnie regularnych są algebrami silnie regularnymi, więc dla dowodu części „tylko wtedy” wystarczy wykazać, że jeśli R jest pierwszą algebrą silnie regularną, to R jest algebrą z dzieleniem. Dla dowolnego $0 \neq a \in R$ istnieje $b \in R$ takie, że $a = aba$. Stąd wynika, że dla dowolnego $y \in R$ $a(y - bay) = 0$. Ponieważ R jest zredukowana, więc również $(y - bay)a = 0$ dla dowolnego $y \in R$. Oczywiście $I = \{y - bay \mid y \in R\}$ jest ideałem prawostronnym w R. Zatem z pierwszości R oraz z tego, że $a \neq 0$ otrzymujemy, że $I = 0$. W efekcie dla dowolnego $y \in R$, $y = bay$. Stąd w szczególności, ba jest idempotentem R. Idempotent ten jest centralny, gdyż R jest algebrą zredukowaną. Algebra R jest również pierwsza, więc nie zawiera nietrywialanych centralnych idempotentów. Oczywiście $ba \neq 0$, gdyż $0 \neq a = aba$. Zatem ba jest jedynką R i b jest elementem odwrotnym do a. To dowodzi, że R jest algebrą z dzieleniem.
Udowodnimy teraz implikację przeciwną. Zauważmy na początku, że jeśli I jest ideałem półpierwszym algebry R, to R/I jest sumą podprostą algebr R/P, gdzie P przebiega zbiór ideałów pierwszych algebry R zawierających I. Stąd R/I jest sumą podprostą algebr z dzieleniem, a więc R/I jest algebrą zredukowaną. Załóżmy, że istnieje $a \in R$ takie, że a nie należy do aRa. Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną takich ideałów półpierwszych I algebry R, że a nie należy do $aRa + I$. Ponieważ R jest algebrą zredukowaną i a nie należy do aRa, więc $0 \in \mathcal{R}$. Zatem rodzina $\mathcal{R}$ jest niepusta. Niech $\{I_s\}$ będzie łańcuchem ideałów z rodziny $\mathcal{R}$. Oczywiście a nie należy do $aRa + \bigcup_{s \in S} I_s$. Zauważmy też, że jeśli dla pewnego $r \in R$, $r^2 \in \cup_{s \in S} I_s$, to $r^2 \in I_s$ dla pewnego $s \in S$. Jednakże, jak wykazaliśmy wcześniej R/I_s jest algebrą zredukowaną, więc $r \in I_s$. To dowodzi, że $\bigcup_{s \in S} I_s \in \mathcal{R}$. Stosując lemat Zorna możemy więc znaleźć w $\mathcal{R}$ ideał maksymalny Q. Zauważmy, że Q nie może być ideałem pierwszym, gdyż wówczas z założenia R/Q byłaby algebrą z dzieleniem i mielibyśmy, że $a \in aRa + Q$. Istnieją więc ideały A, B algebry R takie, że $Q \subsetneq A$, $Q \subsetneq B$ oraz $AB \subseteq Q$. Niech $K = \{r \in R \mid rB \subseteq Q\}$ oraz $L = \{r \in R \mid Kr \subseteq Q\}$. Oczywiście K i L są ideałami w R oraz $A \subseteq K$ i $B \subseteq L$. Zauważmy, że $(K \cap L)^2 \subseteq KL \subseteq Q$. Z półpierwszości ideału Q wynika więc, że $K \cap L \subseteq Q$. Zauważmy również, że jeśli I jest takim ideałem R, że $I^2 \subseteq L$, to $KIKI \subseteq KI^2 \subseteq KL \subseteq Q$. Z półpierwszości Q wynika więc, że $KI \subseteq Q$. Z definicji ideału L otrzymujemy, że $I \subseteq L$, co dowodzi, że L jest ideałem półpierwszym. Podobnie wykazujemy, że K jest ideałem półpierwszym. Z maksymalności Q wynika, że $a \in aRa + K$ oraz $a \in aRa + L$. Zatem $a - axa \in K$ oraz $a - aya \in L$ dla pewnych $x, y \in R$. Wówczas $a - a(x + y - xay)a = a - axa - (a - axa)ya \in K$, a także $a - a(x + y - xay)a = a - aya - ax(a - aya) \in L$. Stąd więc $a \in aRa + (K \cap L) \subseteq aRa + Q$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. ■

Rozdział 2

Filialne i lewostronnie filialne algebry nad pierścieniem przemiennym z jedynką

W tym rozdziale przedstawiamy wyniki dotyczące filialności algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym z 1. W paragrafie pierwszym podajemy definicje, podstawowe własności oraz przykłady algebr filialnych i lewostronnie filialnych. Te najbardziej naturalne własności oraz nasuwające się przykłady stwarzają pewne intuicje oraz wyznaczają ograniczenia użyteczne w dalszych badaniach. W paragrafie tym przedstawiamy również charakteryzację oraz własności klasy $\mathcal{C} = \{I \lhd R \mid RI = I^3 = IR\}$, która będzie odgrywała ważną rolę w różnych miejscach pracy.

Paragraf drugi zawiera charakteryzacje algebr filialnych i lewostronnie filialnych, a także bezpośrednio wynikające z nich własności. Między innymi dowodzimy w nim, że w lewostronnie filialnej β-radykalnej algebrze każda podalgebra jest jej ideałem lewostronnym.

W paragrafie trzecim zebraliśmy główne wyniki dotyczące lewostronnie filialnych algebr zredukowanych. Podajemy w nim charakteryzację takich algebr. W szczególności otrzymujemy, że zredukowane algebry są lewostronnie filialne wtedy i tylko wtedy, gdy są prawostronnie filialne, a więc i filialne. Paragraf ten zawiera również charakteryzację pierwszych algebr lewostronnie filialnych. Głównym jego rezultatem jest twierdzenie opisujące strukturę półpierwszych algebr lewostronnie filialnych.

Paragraf czwarty zawiera wyniki dotyczące struktury filialnych algebr β-radykalnych. Do głównych wyników należy fakt, że β-radykalna algebra A jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej podalgebry są ideałami. W szczególności otrzymujemy, że β-radykalna algebra filialna jest również lewostronnie filialna.

Paragraf piąty jest poświęcony badaniu zachowania się filialności oraz lewostronnej filialności przy typowych konstrukcjach, takich jak sumy proste, algebry macierzy i algebry wielomianów. Dowodzimy w nim, że klasa $\mathcal{C}$ jest największą podklasą klasy algebr filialnych, która jest zamknięta ze względu na: sumy proste, algebry macierzy. Podajemy również charakteryzację algebr, których sumy proste są lewostronnie fililane. Pokazujemy, że algebra wielomianów jest filialna lub lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest z zerowym mnożeniem. Na koniec tego paragrafu przedstawiamy charakteryzację pewnych kontekstów Mority, które są lewostronnie filialne lub prawostronnie filialne.

W całym rozdziale K oznacza pierścień przemienny z jedynką i jeśli nie prowadzi to do nieporozumień zamiast „K-algebra" piszemy krótko „algebra".

2.1 Definicje, najprostsze własności, przykłady

Na początku tego paragrafu wprowadzimy definicje algebr lewostronnie filialnych oraz filialnych.

Definicja 2.1. Algebrę A nazywamy **lewostronnie filialną** (**filialną**), gdy z faktu, że $J <_l I <_l A$ ($J \lhd I \lhd A$) wynika, że $J <_l A$ ($J \lhd A$).

Możemy również analogicznie zdefiniować **algebry prawostronnie filialne**. Wszystkie wyniki uzyskane dla algebr lewostronnie filialnych mają odpowiedniki (dualne) dla algebr prawostronnie filialnych. W pracy będziemy się głównie ograniczać do przypadku algebr lewostronnie filialnych, oprócz sytuacji, gdy użycie prawostronnej filialności będzie wyraźnie uzasadnione.

Oczywiście w przypadku algebr przemiennych lewostronna filialność, prawostronna filialność oraz filialność są pojęciami równoważnymi.

Z definicji algebry lewostronnie filialnej (filialnej) wynika natychmiast, że dowolne ideały oraz obrazy homomorficzne takiej algebry są algebrami lewostronnie filialnymi (filialnymi).

Zaczniemy od pewnych prostych przykładów algebr, które nie są filialne.

Przykład 2.2. Rozważmy $\mathbb{Z}$-algebrę $R = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$. Zauważmy, że $J = \{(x, x) \mid x \in 2\mathbb{Z}_4\} \lhd 2\mathbb{Z}_4 \oplus 2\mathbb{Z}_4 \lhd R$, ale J nie jest ideałem w R, gdyż na przykład $(1, 0)(2, 2) = (2, 0) \notin J$. Zatem $R = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ nie jest $\mathbb{Z}$-algebrą filialną. ■

Stąd wynika w szczególności, że klasa algebr filialnych, a także lewostronnie filialnych nie jest zamknięta ze względu na sumy proste. Kolejny przykład pokaże, że również nie jest zamknięta ze względu na dołączanie 1.

Rozważmy $\mathbb{Z}$-algebrę z zerowym mnożeniem $\mathbb{Z}_4^0$ i algebrę $\mathbb{Z}_4^0$ z dołączoną do niej 1, którą oznaczamy przez $(\mathbb{Z}_4^0)^\star$.

Przykład 2.3. Nietrudno sprawdzić, że $\mathbb{Z}$-algebra $(\mathbb{Z}_4^0)^\star$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$-algebrą macierzy $A = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_4\}$. Wówczas $J = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in 2\mathbb{Z}_4\} \lhd \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in 2\mathbb{Z}_4\} \lhd \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_4\}$. Natomiast $JR \ni \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin J$. Zatem $J \ntriangleleft R$. $\mathbb{Z}$-algebra $(\mathbb{Z}_4^0)^\star$ nie jest więc filialna. ■

Powyższe przykłady pokazują, że nietrudno jest znaleźć algebry, które nie są filialne (lewostronnie filialne). Łatwo jest również wskazać obszerne klasy algebr filialnych (lewostronnie filialnych).

Zauważmy, że dowolna podalgebra K-algebry K jest ideałem w K, a więc K jest filialną K-algebrą. Jest to bardzo szczególny przykład tzw. H-algebr, czyli algebr, w których każda podalgebra jest ideałem. Były one badane w przypadku, gdy K jest ciałem między innymi przez Liu Shao-Xue w pracy [36]. W przypadku, gdy $K = \mathbb{Z}$ nazywane są H-pierścieniami (tzn. pierścieniami w których każdy podpierścień jest ideałem). Ta obszerna podklasa pierścieni filialnych była badana przez wielu autorów (por. [43] oraz prace tam cytowane). Wyróżniająca jest tutaj praca Kruse (por. [33]), który prowadził systematyczne badania nad H-pierścieniami. Można również rozważać klasę pierścieni, w których każda podgrupa jest ideałem. Jest ona zawarta w klasie H-pierścieni i jest klasą niepustą (zawiera np. pierścień liczb całkowitych). Obie klasy, a w szczególności klasa H-pierścieni, nie są łatwe do opisania. Mimo wnikliwych badań prowadzonych w wyżej wymienionych pracach, nie udało się uzyskać kompletnej klasyfikacji H-pierścieni.

Oczywiście wszystkie algebry z zerowym mnożeniem są zarówno filialne jak i lewostronnie filialne. Przeciwstawną do klasy algebr z zerowym mnożeniem jest klasa algebr podidempotentnych (tzn. algebr, w których każdy ideał algebry jest idempotentny). Jest to bardzo obszerna klasa (zawierająca algebry proste oraz algebry silnie regularne), która była badana w wielu pracach (por. [24, 45]). Nawet samym algebrom prostym poświęcona jest monografia [15].

Niech A będzie algebrą podidempotentną. Wówczas, jeśli $J \lhd I \lhd A$, to ideał $\bar{J}$ algebry A generowany przez J jest ideałem idempotentnym. Z lematu Andrunakiewicza wynika, że $(\bar{J})^3 \subseteq J$. Zatem $AJ \subseteq A\bar{J} = A(\bar{J})^3 \subseteq (\bar{J})^3 \subseteq J$. Podobnie dowodzimy, że $JA \subseteq A$, a więc $J \lhd A$, co dowodzi filialności algebry A. Zatem algebry podidempotentne są filialne. Zauważmy, że z powyższego rozumowania wynika także, że klasa algebr

$$\mathcal{C} = \{A \mid AI = I^3 = IA \text{ dla każdego } I \lhd A\}$$

jest zawarta w klasie algebr filialnych. Wynika to też z następującego, ogólniejszego faktu, który w przypadku pierścieni był udowodniony w [5]. Przedstawimy tutaj jego nieco inny dowód bazujący na lemacie Andrunakiewicza.

Stwierdzenie 2.4. *Jeśli dla dowolnego $I \lhd A$, $AI = I^2 = IA$, to A jest algebrą filialną.*

Dowód: Załóżmy, że $J \lhd I \lhd A$ i niech $\bar{J}$ będzie ideałem w A generowanym przez J. Oczywiście $\bar{J}J \subseteq J$ oraz $J\bar{J} \subseteq J$. Ponieważ $A\bar{J} = \bar{J}^2 = \bar{J}A$, więc $A(J + \bar{J}^2) \subseteq A\bar{J} + \bar{J}^2 \subseteq \bar{J}^2$ oraz $(J + \bar{J}^2)A \subseteq \bar{J}^2$. Zatem $(J + \bar{J}^2)$ jest ideałem w A. Ponadto zauważmy, że z założenia o ideałach w A oraz z lematu Andrunakiewicza otrzymujemy, że $A(J + \bar{J}^2) = (J + \bar{J}^2)^2 = J^2 + J\bar{J}^2 + \bar{J}^2J + \bar{J}^4 \subseteq J$ i podobnie $(J + \bar{J}^2)A \subseteq J$. Stąd, $AJ \subseteq A(J + \bar{J}^2) \subseteq J$ oraz $JA \subseteq A(J + \bar{J}^2) \subseteq J$, a więc $J \lhd A$. ■

Nie wszystkie algebry spełniające Stwierdzenie 2.4 należą do klasy $\mathcal{C}$.

Przykład 2.5. Niech $F = K/M$, gdzie K jest pierścieniem przemiennym z 1, zaś M - ideałem maksymalnym w K. Rozważmy algebrę $A = xF[x]/x^3F[x]$ i przez $\bar{x}$ oznaczmy obraz x w A. Zauważmy, że K-ideały w A to dokładnie F-ideały. Jedynymi F-ideałami algebry A są A, $\bar{x}A$ oraz $\bar{0}$. Nietrudno sprawdzić, że algebra A spełnia warunki Stwierdzenia 2.4, ale $A^2 \neq A^3$, co oznacza, że $A \notin \mathcal{C}$. ■

Podobnie jak w [5] nietrudno jest udowodnić, że jeśli A jest pierścieniem idempotentnym (tzn. $A = A^2$) i A spełnia założenia Stwierdzenia 2.4, to $A \in \mathcal{C}$.

Klasa $\mathcal{C}$, jak się dalej przekonamy, pojawia się naturalnie przy badaniu różnych zagadnień dotyczących filialności (w szczególności pokrywa się z klasą algebr filialnych spełniających pewne dodatkowe założenia, na przykład Twierdzenia 2.43, Twierdzenie 4.5). Podamy teraz pewne jej charakteryzacje i własności, które będą wykorzystywane w kilku miejscach pracy.

Oznaczmy przez $[a] = Aa + aA + AaA$.

Twierdzenie 2.6. *Dla dowolnej algebry A następujące warunki są równoważne:*

(i) Dla każdego $I \lhd A$, $AI = I^3 = IA$*;*

(ii) Dla każdego $I \lhd A$ *i dowolnego całkowitego* $n \geqslant 2$, $AI = I^n = IA$*;*

(iii) Dla każdego $a \in A$, $[a] = [a]^2$*;*

(iv) Dla każdego $a \in A$, $Aa + aA \subseteq AaA = (AaA)^2$*;*

(v) Dla każdego $I \lhd A$, $AI + IA \subseteq AIA = (AIA)^2$*;*

(vi) Dla każdego $I \lhd A$, $AI = AI^2 = IA = I^2A$*.*

Dowód: $(i) \Rightarrow (ii)$. Oczywiście $I^2 \subseteq AI$, więc z (i) wynika, że $I^2 \subseteq AI = I^3$. Zatem $I^2 = I^3 = AI = IA$. Dalej $I^3 = I^2I = I^3I = I^4 = \ldots = I^{n-1}I = I^n$. Z tych zależności oczywiście wynika (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Załóżmy (ii) i niech $a \in A$ oraz $I = A^\star aA^\star$. Wówczas wykorzystując warunek (ii) dla $n = 6$ otrzymujemy, że $AaA^\star = (A^\star aA^\star)^6 \subseteq (AaA)^2$, a więc $AaA^\star = (AaA)^2$. Podobnie $A^\star aA = (AaA)^2$, co ostatecznie implikuje, że $[a] = A^\star aA + AaA^\star = (AaA)^2 \subseteq [a]^2$. Zatem $[a] = [a]^2$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Zauważmy, że dla każdego $a \in A$, $[a]^3 \subseteq AaA$. Jeśli $[a] = [a]^2$, to $[a] = [a]^3 \subseteq AaA \subseteq [a]$. Stąd otrzymujemy, że $[a] = AaA$, a więc $aA + Aa \subseteq AaA$ i $AaA = (AaA)^2$.

Implikacja $(iv) \Rightarrow (v)$ jest oczywista.

$(v) \Rightarrow (vi)$. Zauważmy, że $(AIA)^2 \subseteq AI^2 \subseteq AI$. Zakładając (iii) otrzymujemy, że $AI \subseteq AI^2$, a stąd $AI = AI^2$. Podobnie dowodzimy, że $IA = I^2A$. Dalej zaś $I^2A = I(IA) \subseteq AI = AI^2$, a więc $I^2A \subseteq AI^2$. Analogicznie dowodzimy, że $AI^2 \subseteq I^2A$, co daje warunek (vi).

$(vi) \Rightarrow (i)$. Oczywiście jeśli $AI = AI^2$, to również $AI = AI^2 = AI^3$. Zatem $I^3 \subseteq AI = AI^3 \subseteq I^3$, a więc $AI = I^3$. Podobnie $IA = I^3$.

■

Nietrudno sprawdzić, że klasa $\mathcal{C}$ jest homomorficznie zamknięta. Opiszemy teraz inne jej własności.

Stwierdzenie 2.7. *a) Jeśli* $I \lhd A$ *i* $A \in \mathcal{C}$*, to* $I \in \mathcal{C}$*.*

b) Jeśli $A \in \mathcal{C}$ *i* $I \lhd A$*, to* $\sum_{i\in I} A(i) = \sum_{i\in I}(i)^2$*.*

c) Jeśli $A \in \mathcal{C}$*, to* $\beta(A) = a_A(A) \subseteq Z(A)$*, gdzie* $a_A(A)$ *jest anihilatorem, zaś* $Z(A)$ *centrum algebry* A*. Jeśli* $a_A(A) \neq Z(A)$*, to* A *może być homomorficznie odwzorowany na algebrę z jedynką.*

d) Algebry przemienne w klasie $\mathcal{C}$ *są zredukowane wtedy i tylko wtedy, gdy są silnie regularne.*

Dowód: *a*) Mamy wykazać, że jeśli $J \lhd I \lhd A$, to $JI = J^3 = IJ$. Wiemy jednak ze Stwierdzenia 2.4, że A jest algebrą filialną, dlatego też $J \lhd A$. Ponieważ $A \in \mathcal{C}$, więc $AJ = JA = J^3$. Teraz $J^3 \subseteq JIJ \subseteq IJ \subseteq AJ \subseteq J^3$. Stąd $IJ = J^3$. Analogicznie pokazujemy, że $JI = J^3$. Zatem $I \in \mathcal{C}$.

b) Wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2.6 (*ii*).

c) Ponieważ $A \in \mathcal{C}$ oraz $I \lhd A$, więc z Twierdzenia 2.6 (*ii*) wynika, że jeśli I jest ideałem nilpotentnym, to $AI = 0 = IA$. Zatem, jeśli B jest sumą ideałów nilpotentnych algebry A, to $BA = 0 = AB$. W szczególności $B^2 = 0$ i algebra A/B jest β-półprosta. Stąd $\beta(A) = B = a_A(A)$. Oczywiście $a_A(A) \subseteq Z(A)$.
Jeśli zaś $a_A(A) \neq Z(A)$, to z faktu, że $a_A(A) = \beta(A)$ wynika, że $Z(A') \neq 0$ dla pewnego pierwszego obrazu A' algebry A. Niech $0 \neq r \in Z(A')$. Ponieważ niezerowe elementy centralne algebry pierwszej są regularne, więc r jest elementem regularnym w A'. Z Twierdzenia 2.6 (*ii*) zastosowanego do $I = (r)$ łatwo otrzymujemy, że $A'r = A'r^2$. Niech $e \in A'$ będzie takim elementem, że $r^2 = er^2$. Wówczas dla każdego $x \in A'$, $(x - xe)r^2 = 0 = (x - ex)r^2$. Ponieważ r jest elementem regularnym, więc $xe = x = ex$. Zatem e jest jedynką algebry A', co kończy dowód punktu *c*).

d) Ponieważ A jest algebrą przemienną, więc dla dowolnego $a \in A$, $A^\star a$ jest ideałem w A. Z założenia A jest algebrą zredukowaną należącą do klasy $\mathcal{C}$, dlatego też na mocy Twierdzenia 2.6 (*ii*) dla $n = 4$, $Aa = A^\star a^4 \subseteq Aa^3$. Stąd w szczególności wynika, że $a^2 = xa^3$, dla pewnego $x \in A$. Zatem $(a - xa^2)a = 0$, a także $(a - xa^2)^2 = 0$. Ponieważ A jest algebrą zredukowaną, więc $a - xa^2 = 0$, co dowodzi, że A jest algebrą silnie regularną. Implikacja przeciwna jest oczywista. ■

W kontekście Stwierdzenia 2.4 naturalnie pojawia się pytanie, czy jeśli dla dowolnego ideału lewostronnego L algebry A, $AL = L^2$, to A jest algebrą lewostronnie filialną. Następujący przykład pokazuje, że tak nie jest.

Przykład 2.8. Niech D będzie prostą dziedziną z 1, która nie jest pierścieniem z dzieleniem i niech F oznacza centrum D. Wiadomo, że F jest ciałem i oczywiście D jest F-algebrą (por. [29]). Niech $0 \neq a$ będzie elementem nieodwracalnym w D oraz $R = Da$. Oczywiście R jest dziedziną bez 1, która jest F-algebrą prostą. Istotnie, jeśli $0 \neq I \lhd R$, to z tego, że D jest dziedziną prostą oraz R jest niezerowym lewostronnym ideałem w D wynika, że $RID = D$. Stąd $R = DR = RIDR \subseteq RIR \subseteq I$, czyli $I = R$. Zatem R jest algebrą prostą.

Niech teraz $0 \neq L <_l R$. Zauważmy, że $RLRL = RL$ oraz $RL \supseteq L^2 \supseteq (RL)^2 = (RLR)L = RL$. Stąd $RL = L^2$. Pokażemy teraz, że R nie jest F-algebrą lewostronnie filialną. Nietrudno sprawdzić, że $Ra^2 + Fa <_l Ra <_l R$. Gdyby R było algebrą lewostronnie filialną, to mielibyśmy, że $Ra^2 + Fa <_l R$.

W szczególności istniałyby takie elementy $y \in R$ oraz $f \in F$, że $a \cdot a = ya^2 + fa$. Ponieważ R jest dziedziną, więc mielibyśmy $a = ya + f$. Stąd otrzymujemy, że (w D) $a(1-y) = f$, co przeczy nieodwracalności a. ■

Ten sam przykład pokazuje, że zamiana L^2 na L^3 w warunku $AL = L^2$ nic nie zmieni. Również w tym przypadku nie otrzymamy lewostronnej filialności algebry A.

W Twierdzeniu 2.44 opiszemy pewną klasę, którą można uznać za odpowiednik klasy $\mathcal{C}$ dla lewostronnej filialności. Do dowodu tego twierdzenia będziemy potrzebowali wyników, które udowodnimy w dalszych częściach pracy.

Kolejny przykład pokaże, że nie jest prawdą, również to, że algebry, w których wszystkie ideały lewostronne są idempotentne, są lewostronnie filialne.

Przykład 2.9. Niech $F = K/M$, gdzie M jest ideałem maksymalnym K. Rozważmy K-algebrę $R = M_2(F)$. Nietrudno zauważyć, że wszystkie ideały lewostronne R są idempotentne, natomiast $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l \begin{pmatrix} F & F \\ F & F \end{pmatrix} = R$, ale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} \not<_l R$. Zatem R nie jest algebrą lewostronnie filialną. ■

Silniejszym warunkiem, który już gwarantuje lewostronną filialność algebry jest założenie, że lewostronnie osiągalne podpierścienie są idempotentne. Wiadomo jednak (por. Stwierdzenie 1.31), że klasa takich algebr pokrywa się z klasą algebr silnie regularnych. W tym kontekście można więc powiedzieć, że z punktu widzenia filialności i lewostronnej filialności, klasa algebr silnie regularnych dla lewostronnej filialności jest odpowiednikiem klasy algebr podidempotentnych w odniesieniu do filialności.

Paragraf ten zakończymy kilkoma uwagami dotyczącymi związków (czy raczej ich braku) pomiędzy klasami algebr filialnych, lewostronnie filialnych i prawostronnie filialnych. Oczywiście algebry, które są lewostronnie i prawostronnie filialne są również algebrami filialnymi. Natomiast z filialności algebry nie musi wynikać jej lewostronna filialność. Algebra z Przykładu 2.9 jest filialna (bo jest algebrą prostą), ale jak wykazaliśmy powyżej nie jest lewostronnie filialna. Dotyczy to nawet algebr z klasy $\mathcal{C}$. Bowiem, jak to wynika z Twierdzenia 2.20 (które zastanie udowodnione w dalszej części pracy), proste dziedziny należą do klasy $\mathcal{C}$, ale są lewostronnie filialne tylko wtedy, gdy są algebrami z dzieleniem.

W kolejnym przykładzie wykażemy, że również lewostronna filialność algebry nie gwarantuje jej filialności (a więc i prawostronnej filialności).

Przykład 2.10. Niech $F_0 = K/M$, gdzie M jest ideałem maksymalnym K oraz niech $F_0 \subseteq F$ będzie rozszerzeniem ciał. F_0 i F mają naturalną strukturę K-algebry. Rozważmy podalgebrę $R = \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$ algebry $M_2(F)$. Zauważmy, że jeśli $J <_l L <_l R$, to $L = R$ lub $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$, gdzie A jest F_0-podprzestrzenią F. W obu przypadkach $J <_l R$. Zatem R jest algebrą lewostronnie filialną.
Jeśli $F \neq F_0$, to $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_0 & 0 \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} \lhd R$, ale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_0 & 0 \end{pmatrix}$ nie jest ideałem w R. Wobec tego, w tym przypadku R nie jest algebrą filialną.

Jeśli zaś $F_0 = F$ i $0 \neq J \lhd I \lhd R$, to $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$ lub $J = R$, a więc w tym przypadku R jest pierścieniem filialnym. ■

2.2 Charakteryzacje algebr filialnych i algebr lewostronnie filialnych

W tym paragrafie przedstawimy podstawowe charakteryzacje filialnych i lewostronnie filialnych K-algebr, które będą wielokrotnie wykorzystywane w różnych miejscach pracy. Rozpoczniemy od różnych, równoważnych charakteryzacji algebr filialnych. Większość z nich jest znana i była uzyskana przez różnych autorów w przypadku pierścieni (por. [8], [17], [40], [48]). Dowody w przypadku algebr nie różnią się zasadniczo od dowodów dla pierścieni.

Twierdzenie 2.11. *Dla dowolnej K-algebry A równoważne są warunki:*

(i) *A jest algebrą filialną;*

(ii) *Dla dowolnego $a \in A$, $(a) = (a)^2 + Ka$;*

(iii) *Dla dowolnego $a \in A$ i dowolnej liczby naturalnej n, $(a)^n = (a)^{n+1} + Ka^n$;*

(iv) *Jeśli S jest podalgebrą ideału I algebry A, to dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$, $I^n + S \lhd A$;*

(v) *Istnieje taka liczba naturalna $n \geqslant 2$, że jeśli S jest podalgebrą ideału I algebry A, to $I^n + S \lhd A$;*

(vi) Jeśli S jest podalgebrą ideału I algebry A, to istnieje taka liczba naturalna $n \geqslant 2$, że $I^n + S \lhd A$.

Dowód: $(i) \Rightarrow (ii)$. Zauważmy, że $(a)^2 + Ka \lhd (a) \lhd A$. Ponieważ A jest algebrą filialną, więc $(a)^2 + Ka \lhd A$. Oczywiście $a \in (a)^2 + Ka \subseteq (a)$, a zatem $(a)^2 + Ka = (a)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Zauważmy, że jeśli dla dowolnego $a \in A$, $(a) = (a)^2 + Ka$, to dla dowolnej liczby naturalnej n, $(a)^{n+1} + Ka^n \subseteq (a)^n$ i na podstawie (ii), $(a)^n = ((a)^2 + Ka)^n \subseteq (a)^{n+1} + Ka^n$. Zatem $(a)^{n+1} + Ka^n = (a)^n$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem n. Zauważmy najpierw, że z (iii) wynika, że dla dowolnego $s \in S$, $(s)^2 + Ks \lhd A$. Dlatego też dla dowolnego $a \in A$, $as, sa \in (s)^2 + Ks \subseteq I^2 + S$. Stąd $I^2 + S \lhd A$, co dowodzi (iv) dla $n = 2$. Załóżmy więc, że $n \geqslant 3$ i warunek (iv) jest spełniony dla liczb mniejszych od n. Zatem $J = I^{n-1} + S \lhd A$ oraz $J^2 + S \lhd A$. Oczywiście $J^2 + S \subseteq I^n + S$. W efekcie $AS + SA \subseteq J^2 + S \subseteq I^n + S$. Stąd oraz z tego, że $I^n \lhd A$ wynika natychmiast, że $I^n + S \lhd A$.

Implikacje $(iv) \Rightarrow (v)$ oraz $(v) \Rightarrow (vi)$ są oczywiste.

Pozostaje wykazać implikację $(vi) \Rightarrow (i)$. Załóżmy, że $J \lhd I \lhd A$. Z lematu Andrunakiewicza wynika, że $\bar{J}^3 \subseteq J$, gdzie $\bar{J}$ jest ideałem A generowanym przez J. Z (vi) zaś wiadomo, że istnieje taka liczba naturalna $n \geqslant 2$, że $\bar{J}^n + J \lhd A$. Zatem $JA + AJ \subseteq \bar{J}^n + J$ oraz jeśli $n \geqslant 3$, to $\bar{J}^n + J \subseteq J$. Jeśli więc $n \geqslant 3$, to $J \lhd A$. Załóżmy teraz, że $n = 2$. Stosując (vi) do ideału $\bar{J}^2 + J$ otrzymamy, że dla pewnej liczby naturalnej $m \geqslant 2$, $(\bar{J}^2 + J)^m + J \lhd A$. Oczywiście $(\bar{J}^2 + J)^m \subseteq \bar{J}^3 + J \subseteq J$. Stąd uzyskujemy, że $J \lhd A$. ■

Z warunku (iii) powyższej charakteryzacji otrzymujemy natychmiast

Wniosek 2.12. *Jeśli A jest filialną nil algebrą, to dla dowolnego $a \in A$, istnieje taka liczba naturalna n, że $(a)^n = (a)^{n+1}$.*

Wykorzystując zaś (iv) powyższego twierdzenia możemy udowodnić następujący

Wniosek 2.13. *Jeżeli S jest podalgebrą algebry filialnej A zawartą w $W(A)$, to $S \lhd A$.*

Dowód: Ponieważ $S \subseteq W(A)$, więc dla dowolnego elementu $s \in S$ istnieje taki ideał nilpotentny I algebry A, że $s \in I$. Załóżmy, że n jest taką liczbą naturalną, że $I^n = 0$. Oczywiście podalgebra T algebry A generowana przez element s jest zawarta zarówno w I, jak i w S. Z Twierdzenia 2.11 (iv) wynika, że $T = I^n + T \lhd A$. Zatem $sA + As \subseteq TA + AT \subseteq T \subseteq S$. Istotnie więc $S \lhd A$. ■

W kolejnym twierdzeniu podamy charakteryzacje algebr lewostronnie filialnych. Równoważność (i) oraz (ii) była udowodniona w przypadku pierścieni w pracy [40]. Natomiast pozostałe równoważności (również w przypadku pierścieni) zostały wykazane w [19].

Twierdzenie 2.14. *Dla dowolnej K-algebry A następujące warunki są równoważne:*

(i) A jest algebrą lewostronnie filialną;

(ii) Dla dowolnego $a \in A$, $A^\star a = A^\star a^2 + Ka$;

(iii) Jeśli S jest taką podalgebrą algebry A, że $AS^2 \subseteq S$, to $S <_l A$;

(iv) Jeśli S jest taką podalgebrą algebry A, że dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$, $AS^n \subseteq S$, to $S <_l A$;

(v) Jeśli S jest taką podalgebrą algebry A, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$, $AS^n \subseteq S$, to $S <_l A$.

Dowód: $(i) \Rightarrow (ii)$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że $A^\star a^2 + Ka <_l A^\star a <_l A$. Zakładając (i) otrzymujemy, że $A^\star a^2 + Ka <_l A$. Oczywiście $a \in A^\star a^2 + Ka$, dlatego też ideał lewostronny $A^\star a$ algebry A generowany przez a jest zawarty w $A^\star a^2 + Ka$. Inkluzja przeciwna jest oczywista.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Jeśli $AS^2 \subseteq S$, to dla dowolnego $s \in S$, $As^2 \subseteq S$. Zakładając więc (ii) uzyskujemy, że $As \subseteq S$ co dowodzi, że $S <_l A$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Załóżmy, że $AS^n \subseteq S$ dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ i n jest najmniejszą liczbą naturalną, która spełnia ten warunek. Jeśli $n = 2$, to z (iii), $S <_l A$. Załóżmy więc, że $n \geqslant 3$. Wówczas $A(S^{n-1})^2 = AS^nS^{n-2} \subseteq SS^{n-2} = S^{n-1}$. Stosując (iii) do S^{n-1} otrzymujemy, że $S^{n-1} <_l A$. Zatem $AS^{n-1} \subseteq S^{n-1} \subseteq S$, co przeczy minimalności n. W efekcie $n = 2$ i $S <_l A$.

Implikacja $(iv) \Rightarrow (v)$ jest oczywista.

Pozostaje wykazać implikację $(v) \Rightarrow (i)$. Załóżmy, że $J <_l I <_l A$. Oczywiście $AJ^2 \subseteq IJ \subseteq J$. Stosując (v) otrzymujemy, że $J <_l A$, co dowodzi, że A jest algebrą lewostronnie filialną. ■

Analogicznie charakteryzujemy algebry prawostronnie filialne. Wówczas dla przykładu warunek (ii) Twierdzenia 2.14 ma postać: dla dowolnego $a \in A$, $aA^\star = a^2A^\star + Ka$.

Z Twierdzenie 2.14 otrzymujemy pewne własności algebr lewostronnie filialnych.

Stwierdzenie 2.15. *Niech A będzie algebrą lewostronnie filialną. Wówczas* *(i)* *Jeśli a jest elementem nilpotentnym o stopniu nilpotentności n, to ideał algebry A generowany przez a jest ideałem nilpotentnym o stopniu nilpotentności n.*

(ii) *Radykał pierwszy $\beta(A)$ jest równy sumie ideałów nilpotentnych algebry A oraz jest równy zbiorowi nilpotentnych elementów algebry A. W szczególności A jest algebrą półpierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona zredukowana.*

(iii) *Każda podalgebra $\beta(A)$ jest lewostronnym ideałem algebry A.*

Dowód: (i) Niech S będzie podalgebrą A generowaną przez a. Oczywiście $S^n = 0$. Na mocy Twierdzenia 2.14 (iv), $S <_l A$. Stąd $A^\star a \subseteq S$ i $(A^\star a A^\star)^n \subseteq (A^\star a)^n A^\star \subseteq S^n A^\star = 0$, a więc ideał $A^\star a A^\star$ jest nilpotentny.

(ii) jest konsekwencją (i).

(iii) Niech S będzie podalgebrą $\beta(A)$ i niech $s \in S$. Podalgebra T algebry A generowana przez element s jest nilpotentna. Zatem z Twierdzenia 2.14 (iv), $T <_l A$. Stąd $As \subseteq T \subseteq S$, a więc $S <_l A$. ■

Z warunku (i) Stwierdzenia 2.15 natychmiast wynika następujący

Wniosek 2.16. *Jeśli algebra A jest lewostronnie filialna to $\mathcal{N}(A) = W(A)$.*

Wiadomo, że istnieją proste, idempotenetne nil algebry (por. [42]). Oczywiście algebry proste są filialne. Zatem tego Wniosku nie można rozszerzyć na przypadek algebr filialnych.

Ponadto z charakteryzacji algebr lewostronnie filialnych otrzymujemy również

Stwierdzenie 2.17. *Jeśli A jest taką algebrą, że $A\beta(A) = 0$ oraz $A/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną, to A jest algebrą lewostronnie filialną.*

Dowód: Niech $a \in A$. Ponieważ $A/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną, więc istnieją takie $x \in A$ oraz $b \in \beta(A)$, że $a = xa^2 + b$. Z założenia $A\beta(A) = 0$, a zatem $Aa = A(xa^2 + b) \subseteq Aa^2$. Ostatecznie, $A^\star a \subseteq Aa^2 + Ka$, a stąd $A^\star a = A^\star a^2 + Ka$, co należało dowieść. ■

2.3 Lewostronnie filialne algebry półpierwsze

W Stwierdzeniu 2.15 (ii) zostało w szczególności pokazane, że półpierwsze algebry lewostronnie filialne są algebrami zredukowanymi. W tym paragrafie opiszemy strukturę takich algebr.

Rozpoczniemy od charakteryzacji lewostronnie filialnych algebr zredukowanych.

Twierdzenie 2.18. *Zredukowana algebra A jest lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in A$, $aA^\star a + Ka = aA^\star$.*

Dowód: Załóżmy, że A jest algebrą lewostronnie filialną. Wówczas z Twierdzenia 2.14 (ii), $A^\star a^2 + Ka = A^\star a$ dla każdego $a \in A$. Mnożąc obie strony równości przez a, otrzymujemy $aA^\star a^2 + Ka^2 = aA^\star a$. Stąd zaś, dla każdego $x \in A^\star$ istnieją takie $y \in A^\star$ oraz $k \in K$, że $axa = aya^2 + ka^2$. Zatem $(ax - aya - ka)a = 0$ i dalej $(ax - aya - ka)^2 = 0$. Ponieważ A jest algebrą zredukowaną, więc $ax = aya + ka$, czyli $aA^\star \subseteq aA^\star a + Ka$.

Podobnie dowodzimy implikację przeciwną. Jeżeli założymy, że dla każdego $a \in A$, $aA^\star a + Ka = aA^\star$, to dla każdego $x \in A^\star$ istnieją takie $y \in A^\star$ oraz $k \in K$, że $axa = aya^2 + ka^2$. Stąd wynika, że $a(xa - ya^2 + ka) = 0$, a dalej $(xa - ya^2 + ka)^2 = 0$. Korzystając ze zredukowania algebry A otrzymujemy, że $xa = ya^2 + ka$, czyli $A^\star a = A^\star a^2 + Ka$. Na mocy Twierdzenia 2.14, A jest zatem algebrą lewostronnie filialną. ■

Możemy analogicznie scharakteryzować zredukowane algebry prawostronnie filialne. Wówczas otrzymamy następujący warunek: dla każdego $a \in A$, $aA^\star a + Ka = A^\star a$.

Z warunku, że dla każdego $a \in A$, $aA^\star a + Ka = aA^\star$ nie wynika, że A jest algebrą zredukowaną. Jako przykład możemy tu podać algebrę A z zerowym mnożeniem. Natomiast, półpierwsze algebry spełniające ten warunek są algebrami zredukowanymi. Załóżmy, że A jest algebrą półpierwszą i $a^2 = 0$ dla pewnego $a \in A$. Wykorzystując warunek $aA^\star a + Ka = aA^\star$ otrzymujemy, że $0 = (aA^\star a + Ka)aA^\star = (aA^\star)^2$. Ponieważ A jest algebrą półpierwszą, więc $a = 0$.

Z Twierdzenia 2.18 wynika następujący

Wniosek 2.19. *Zredukowana lewostronnie filialna algebra A jest lewostronnie duo, tzn. lewostronne ideały algebry A są również ideałami dwustronnymi.*

Dowód: Jeśli $I <_l A$ i A jest zredukowaną algebrą lewostronnie filialną, to z charakteryzacji uzyskanej w Twierdzeniu 2.18, dla każdego $i \in I$, $iA^\star = iA^\star i + Ki \subseteq I$. Zatem I jest także ideałem prawostronnym algebry A. ■

Teraz podamy charakteryzację pierwszych algebr lewostronnie filialnych, która będzie odgrywała istotną rolę w uzyskaniu głównego twierdzenia strukturalnego tego paragrafu.

Twierdzenie 2.20. *Algebra pierwsza A jest lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest przemienną filialną dziedziną lub algebrą z dzieleniem.*

Dowód: Jeśli A jest pierwszą algebrą lewostronnie filialną, to ze Stwierdzenia 2.15 (ii) wynika, że A jest algebrą zredukowaną. Wówczas na mocy Stwierdzenia 1.26, A jest dziedziną. Ponieważ A jest ideałem istotnym algebry $A^\star$, więc ze Stwierdzenia 1.27 (iii) wynika, że również $A^\star$ jest dziedziną. Algebra A jest lewostronnie filialna, dlatego też dla każdego $a \in A$, $A^\star a^2 + Ka = A^\star a$. Algebra $A^\star$ jest dziedziną, a zatem dla każdego $0 \neq a \in A$, $A^\star a + K \cdot 1 = A^\star$. Jeśli I jest niezerowym ideałem algebry A, to dla każdego $0 \neq a \in I$, $A^\star = A^\star a + K \cdot 1 \subseteq I + K \cdot 1$. Zatem $A^\star = I + K \cdot 1$. Otrzymujemy więc, że algebra ilorazowa A/I jest przemienna. Niech $H(A)$ będzie rdzeniem algebry A. Ponieważ $A/H(A)$ jest sumą podprostą algebr A/I, gdzie I przebiega zbiór niezerowych ideałów w A, więc $A/H(A)$ jest algebrą przemienną. Oczywiście $H(A)$ jest lewostronnie filialną algebrą pierwszą. Zatem, jeśli $H(A) \neq 0$, to $H(A)$ jest prostą dziedziną lewostronnie filialną. Z Wniosku 2.19 otrzymujemy, że $H(A)$ nie zawiera niewłaściwych ideałów lewostronnych. Na mocy Twierdzenia 1.7, $H(A)$ jest więc algebrą z dzieleniem, a w szczególności $H(A)$ zawiera jedynkę. Ze Stwierdzenia 1.1, $A = H(A) \oplus J$ dla pewnego ideału J algebry A. Ponieważ A jest algebrą pierwszą, więc $J = 0$. Ostatecznie jeśli $H(A) \neq 0$, to A jest algebrą z dzieleniem. Jeśli zaś $H(A) = 0$, to A jest przemienną dziedziną. ■

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy

Wniosek 2.21. *Półpierwsza algebra lewostronnie filialna jest sumą podprostą algebr, które są algebrami z dzieleniem lub przemiennymi dziedzinami.*

Struktura filialnych, przemiennych dziedzin jest złożona. Była ona szczegółowo badana przez Andruszkiewicza w [6], gdzie uzyskano ich klasyfikację.

Kolejne twierdzenie, które udowodnimy będzie opisywało strukturę lewostronnie filialnych algebr zredukowanych. W dowodzie tego twierdzenia strukturalnego wykorzystamy następujące

Stwierdzenie 2.22. *Jeśli ideał I algebry A jest algebrą silnie regularną oraz A/I jest algebrą lewostronnie filialną, to algebra A jest również lewostronnie filialna.*

Dowód: Załóżmy, że $J <_l L <_l A$. Ponieważ A/I jest algebrą lewostronnie filialną, więc z faktu, że $(J+I)/I <_l (L+I)/I <_l A/I$ wynika, że $(J+I)/I <_l A/I$. Zatem $A^\star J + I = J + I$. Ponadto $J \cap I <_l L \cap I <_l I$. Ponieważ I jest algebrą silnie regularną, więc jest również algebrą filialną. Wówczas na mocy filialności oraz ze Stwierdzenia 1.32 (ii) oraz (iii), $J \cap I <_l I$ i $(J \cap I)^2 = J \cap I$. Również $(A^\star J \cap I)^2 = A^\star J \cap I <_l I$, i z silnej regularności I oraz Twierdzenia 1.32 (i) wynika, że $A^\star J \cap I \lhd I$. Ponieważ $A(A^\star J \cap I) = A(A^\star J \cap I)^2 \subseteq AI(A^\star J \cap I) \subseteq A^\star J \cap I$ i podobnie $(A^\star J \cap I)A \subseteq A^\star J \cap I$, więc $A^\star J \cap I \lhd A$.

Zauważmy, że $J \cap I = (J \cap I)^2 \subseteq (A^\star J \cap I)J \subseteq A^\star J^2 \cap I \subseteq J \cap I$. Zatem $J \cap I = (A^\star J \cap I)J$. Ponieważ $A^\star J \cap I \lhd A$, więc $J \cap I \subseteq (A^\star J \cap I)(A^\star J \cap I) \subseteq (A^\star J \cap I)J = J \cap I$. Ponadto $(A^\star J \cap I)^2 = A^\star J \cap I$, dlatego też $A^\star J \cap I = J \cap I$. Stąd, a także z równości $A^\star J + I = J + I$ otrzymujemy, że $A^\star J = A^\star J \cap (A^\star J + I) = A^\star J \cap (J + I) = J + (A^\star J \cap I) = J + (J \cap I) = J$. W konsekwencji $J <_l A$. ∎

Twierdzenie 2.23. *Dla dowolnej algebry A następujące warunki są równoważne*

(i) A jest zredukowaną algebrą lewostronnie filialną;

(ii) A zawiera taki ideał I, że I jest algebrą silnie regularną i A/I jest przemienną, zredukowaną algebrą filialną;

(iii) $A/\mathcal{S}(A)$ jest przemienną, zredukowaną algebrą filialną, gdzie $\mathcal{S}(A)$ jest radykałem silnie regularnym algebry A.

Dowód: Załóżmy, że A spełnia warunek (i). Niech $I = \bigcap\{T \lhd A \mid A/T$ jest przemienną dziedziną$\}$. Oczywiście A/I jest sumą podprostą przemiennych dziedzin, więc jest przemienną filialną algebrą zredukowaną. Chcemy pokazać, że I jest algebrą silnie regularną. W tym celu korzystając z Twierdzenia 1.34 wystarczy udowodnić, że jeśli P jest właściwym ideałem pierwszym I, to I/P jest algebrą z dzieleniem. Jeżeli tak nie jest, to na podstawie Twierdzenia 2.20, I/P jest przemienną filialną dziedziną. Zauważmy, że (por. Stwierdzenie 2.15 (ii)) $P \lhd A$ i A/P jest algebrą zredukowaną. Ponieważ algebra I/P jest przemienna, więc dla dowolnych $x, y \in I/P$ i $a \in A/P$, pary elementów ax, y oraz ya, x są ze sobą przemienne. W efekcie $axy = yax = xya$. Stąd wynika, że $(I/P)^2$ jest zawarte w centrum algebry A/P. Jeśli $c \in (I/P)^2$, to dla dowolnych $a_1, a_2 \in A/P$, $ca_1a_2 = a_1ca_2 = a_2a_1c = ca_2a_1$, czyli $c(a_1a_2 - a_2a_1) = 0$. Ponieważ algebra A/I jest przemienna, więc dla dowolnych $a_1, a_2 \in A/P$, $a_1a_2 - a_2a_1 \in I/P$. W efekcie $r = (a_1a_2 - a_2a_1)^2 \in (I/P)^2$. Stąd otrzymujemy, że $(a_1a_2 - a_2a_1)^3 = r(a_1a_2 - a_2a_1) = 0$. Algebra A/P jest zredukowana, więc $a_1a_2 = a_2a_1$. Zatem A/P jest algebrą przemienną. Z definicji I wynika, że P nie może być ideałem właściwym I, co jest sprzeczne z założeniem. Ostatecznie I jest algebrą silnie regularną, więc A spełnia warunek (ii).

Załóżmy teraz, że zachodzi warunek (ii). Oczywiście $I \subseteq \mathcal{S}(A)$ i $A/\mathcal{S}(A)$ jest filialną algebrą przemienną. Pozostaje wykazać, że $A/\mathcal{S}(A)$ jest algebrą zredukowaną. Niech $a \in A$ i $s = a^2 \in \mathcal{S}(A)$. Ponieważ $\mathcal{S}(A)$ jest algebrą silnie regularną, więc na mocy Stwierdzenia 1.29 istnieje taki idempotent $e \in \mathcal{S}(A)$, że $\mathcal{S}(A)^\star s = \mathcal{S}(A)e$. Wiadomo również, że idempotenty w algebrze silnie regularnej są centralne (Stwierdzenie 1.32 (iv)). Stąd otrzymujemy, że $\mathcal{S}(A)e \lhd A$ i e jest jedynką w algebrze $\mathcal{S}(A)e$. Zatem ze Stwierdzenia 1.1,

$A = \mathcal{S}(A)e \oplus J$ dla pewnego ideału J algebry A. Ponieważ $s \in \mathcal{S}(A)^\star s$, więc obraz a' elementu a w naturalnym rzutowaniu algebry A na J jest elementem nilpotentnym. Jednak algebra A jest zredukowana, dlatego też $a' = 0$ i $a \in \mathcal{S}(A)^\star s \subseteq \mathcal{S}(A)$. Wobec tego $A/\mathcal{S}(A)$ jest algebrą zredukowaną, co należało pokazać.

Implikacja $(iii) \Longrightarrow (i)$ przy wykorzystaniu Twierdzenia 2.22 jest oczywista. ■

Zauważmy, że warunek (iii) powyższego twierdzenia jest lewo-prawo symetryczny. Zatem charakteryzuje on również półpierwsze algebry prawostronnie filialne. W efekcie uzyskujemy

Wniosek 2.24. *Dla dowolnej algebry zredukowanej A następujące warunki są równoważne*

(i) A jest algebrą lewostronnie filialną;

(ii) Dla każdego $a \in A$, $aA^\star = aA^\star a + Ka$;

(iii) Dla każdego $a \in A$, $A^\star a = aA^\star a + Ka$;

(iv) A jest algebrą prawostronnie filialną.

2.4 Filialne i lewostronnie filialne algebry β-radykalne

W Stwierdzeniu 2.15 (iii) wykazaliśmy, że w β-radykalnych lewostronnie filialnych algebrach, podalgebry są lewostronnymi ideałami. W tym paragrafie udowodnimy, że β-radykalne algebry filialne są H-algebrami (tzn. wszystkie ich podalgebry są ideałami). Dowód tego faktu jest znacznie bardziej skomplikowany. Rozpoczniemy od zbadania pewnych specyficznych K-algebr, które nazywamy $\star$-algebrami. Algebry te są narzędziem, które wykorzystamy by wykazać, że β-radykalne algebry filialne są H-algebrami.

Definicja 2.25. K-algebrę A nazywamy **$\star$-algebrą**, gdy spełnia ona warunek:

($\star$) jeśli $a \in A$ i $k \in K$ oraz $k^2a = 0$, to $ka = 0$.

Oczywiście, jeśli K jest ciałem, to dowolna K-algebra jest $\star$-algebrą. Ogólniej, mamy następujące wyniki.

Stwierdzenie 2.26. *Jeśli $I \lhd K$, to K/I jest $\star$-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy I jest ideałem półpierwszym.*

Dowód: Dla dowolnego $k \in K$ oraz dowolnego $a \in K$ w K/I traktowanym jako K-moduł, $k^2(a+I) = I$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k^2 a \in I$. Wobec tego otrzymujemy, że $(ka)^2 \in I$. Jeśli więc I jest ideałem półpierwszym, to $ka \in I$, co oznacza, że w K-module K/I, $k(a+I) = I$. Zatem K/I jest $\star$-algebrą.

Załóżmy teraz, że dla pewnego $k \in K$, $k^2 \in I$. Wówczas w K-module K/I, $k^2(1+I) = I$. Jeśli K/I jest $\star$-algebrą, to $k(1+I) = I$. Stąd $k \in I$, co oznacza, że I jest ideałem półpierwszym. ■

Stwierdzenie 2.27. *Dowolna K-algebra A jest $\star$-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy K jest pierścieniem silnie regularnym.*

Dowód: Załóżmy, że dowolna K-algebra A jest $\star$-algebrą. Niech $k \in K$ i $I = Kk^2$. Oczywiście K/I jest K-algebrą, dlatego też zgodnie z założeniem jest ona $\star$-algebrą. Zatem na podstawie Stwierdzenia 2.26, I jest ideałem półpierwszym w K. Ponieważ $(Kk)^2 \subseteq I$, więc $Kk \subseteq I$. W efekcie $k \in I$, czyli istnieje takie $x \in K$, że $k = xk^2$. To dowodzi, że K jest pierścieniem silnie regularnym.

Załóżmy teraz, że K jest pierścieniem silnie regularnym oraz A jest dowolną K-algebrą. Niech dla pewnych $k \in K$ oraz $a \in A$, $k^2 a = 0$. Ponieważ K jest pierścieniem silnie regularnym, więc istnieje takie $x \in K$, że $k = xk^2$. Zatem $ka = xk^2 a = 0$, a wobec tego A jest $\star$-algebrą. ■

Bardzo istotną rolę w naszych dalszych badaniach odegra następująca prosta obserwacja

Stwierdzenie 2.28. *Dla dowolnej algebry A, $A/W(A)$ jest $\star$-algebrą.*

Dowód: Załóżmy, że dla pewnych $k \in K$ oraz $a \in A$, $k^2 a \in W(A)$. Oczywiście $k^2 a$ należy do pewnego ideału nilpotentenego I algebry A. Zauważmy, że $(A^\star kaA^\star)^2 = A^\star k^2 aA^\star aA^\star$, a więc $(A^\star kaA^\star)^2 \subseteq I$. Zatem $A^\star kaA^\star$ jest ideałem nilpotentnym A, co dowodzi, że $ka \in W(A)$. Istotnie, więc $A/W(A)$ jest $\star$-algebrą. ■

Zajmiemy się teraz badaniem struktury β-radykalnych filialnych lub lewostronnie filialnych $\star$-algebr.

Twierdzenie 2.29. *Jeśli lewostronnie filialna lub filialna β-radykalna K-algebra A jest $\star$-algebrą, to $A^3 = 0$*

Dowód: Załóżmy najpierw, że A jest algebrą nilpotentną. Niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której $A^n = 0$. Jeśli $n \geqslant 4$, to dla każdego $a \in A^{n-2}$, $(a)^2 = 0$. Korzystając z Twierdzeń 2.11 (*ii*) i 2.14 (*ii*) otrzymujemy, że $(a) = Ka$, gdy A jest algebrą filialną oraz $A^\star a = Ka$, gdy A jest algebrą lewostronnie filialną. W obu przypadkach, dla każdego $x \in A$ istnieje $k \in K$, takie że $xa = ka$. Zatem w $A^\star$, $(x-k)a = 0$, a także $(x^2-k^2)a = (x+k)(x-k)a = 0$. W efekcie $x^2a = k^2a$. Ponieważ jednak, $A^n = 0$ i $a \in A^{n-2}$, więc $k^2a = x^2a = 0$. Jednak A jest $\star$-algebrą, dlatego też otrzymujemy, że $ka = 0$. Zatem $xa = 0$ i z dowolności x oraz $a \in A^{n-2}$ wynika, że $A^{n-1} = AA^{n-2} = 0$, co przeczy założeniu, że n jest najmniejsze. Musi więc być $n \leqslant 3$.

Niech teraz A będzie dowolną β-radykalną filialną lub lewostronnie filialną $\star$-algebrą. Na mocy lematu Zorna istnieje maksymalny ideał M w rodzinie ideałów I algebry A, takich że $I^3 = 0$. Jeśli $A \neq M$, to w A/M istnieje niezerowy ideał nilpotentny J/M. Ponieważ J/M jest ideałem nilpotentnym oraz $M^3 = 0$, to J też jest ideałem nilpotentnym. Ponadto J jest filialną lub lewostronnie filialną $\star$-algebrą. Zatem z pierwszej części dowodu wynika, że $J^3 = 0$. Otrzymujemy sprzeczność z maksymalnością M, więc $A = M$, co oznacza, że $A^3 = 0$ ■

Z Twierdzeń 2.29 oraz 2.11 (iv) wynika

Wniosek 2.30. *β-radykalna $\star$-algebra A jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest H-algebrą.*

Można zapytać, czy Twierdzenie 2.29 da się uogólnić (lub w jakim stopniu) na dowolne algebry β-radykalne. Jak pokażemy w Rozdziale 4 pewne uogólnienia istnieją w przypadku pierścieni (czyli $\mathbb{Z}$-algebr). Wykażemy tam, że co prawda β-radykalne filialne $\mathbb{Z}$-algebry nie muszą być nilpotentne, ale są one S-nilpotentne, skąd wynika, że jeśli są one idempotentne, to są zerowe. Faktu tego nie można uogólnić na algebry nad dowolnym pierścieniem. W następnym przykładzie pokażemy, że dla pewnych pierścieni K istnieją K-algebry przemienne A z 1 takie, że $\beta(A) \neq 0$ i $\beta(A)^2 = \beta(A)$. Wykorzystamy w tym celu tzw. algebrę Zassenhausa (por. [24]).

Przykład 2.31. Niech F będzie ciałem, zaś K przestrzenią liniową nad F, której bazę tworzy zbiór symboli x_α, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ i $0 \leqslant \alpha < 1$. Zatem każdy element w K jest jednoznaczną skończoną kombinacją liniową postaci $\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots \lambda_n x_{\alpha_n}$, gdzie $\lambda_i \in F$, $x_{\alpha_i} \in X$.
Mnożenie elementów bazowych jest określone następująco:

$$x_\alpha x_\beta = x_{\alpha+\beta}, \text{ gdy } \alpha+\beta < 1$$

$$x_\alpha x_\beta = 0, \text{ gdy } \alpha+\beta \geqslant 1.$$

Nietrudno sprawdzić, że K jest pierścieniem przemiennym, w którym $x_0 = 1$. Niech A będzie podalgebrą K generowaną przez x_α, $0 < \alpha < 1$. Oczywiście wszystkie K-podalgebry A są ideałami w K. Dla dowolnego $0 < \alpha < 1$, $x_\alpha = x_{\alpha/2} \cdot x_{\alpha/2}$, skąd wynika, że A^2 zawiera wszystkie elementy bazowe x_α.

Zatem $A = A^2$. Ponadto wszystkie elementy w A są nilpotentne. Zatem A jest K-algebrą filialną, $A \in \beta$ oraz $A^2 = A$. ■

Podamy teraz inną charakteryzację β-radykalnych $\star$-algebr lewostronnie filialnych.

Twierdzenie 2.32. *Dla dowolnej β-radykalnej $\star$-algebry A następujące warunki są równoważne*

(i) A jest algebrą lewostronnie filialną;

(ii) $A^3 = 0$ oraz dla każdego $a \in A$, $Aa = Ka^2$.

Dowód: Załóżmy, że A spełnia (i). Na podstawie Twierdzenia 2.29, $A^3 = 0$. Stąd, jak również z lewostronnej filialności A (por. Twierdzenie 2.14 (ii)) wynika, że dla dowolnego $a \in A$, $A^\star a = Ka + Ka^2$. Zatem dla dowolnego $x \in A$, $xa = ka + ma^2$ dla pewnych $k, m \in K$. Mnożąc tę równość z prawej strony przez a, z lewej zaś przez x dostajemy odpowiednio $ka^2 = 0$ oraz $kxa = 0$. Zatem mnożąc wyjściową równość przez k otrzymujemy $0 = kxa = k^2a + kma^2 = k^2a$. Ponieważ A jest $(\star)$-algebrą, więc $ka = 0$. W efekcie xa należy do Ka^2. Oczywiście Ka^2 jest zawarte w Aa. Warunek (ii) jest zatem spełniony.

Zakładając (ii) otrzymamy, że $A^\star a = Ka + Ka^2 \subseteq Ka + A^\star a^2 \subseteq A^\star a$. Zatem $A^\star a = Ka + A^\star a^2$. Na mocy Twierdzenia 2.14, A jest algebrą lewostronnie filialną.

Definicja 2.33. K-algebrę A nazywamy **beztorsyjną** jeśli dla dowolnego $a \in A$ oraz dla dowolnego $k \in K$ z tego, że $ka = 0$ wynika, że $k = 0$ lub $a = 0$.

Nietrudno zauważyć, że algebry beztorsyjne są $\star$-algebrami i że wszystkie algebry są beztorsyjne wtedy i tylko wtedy, gdy K jest ciałem. Dla beztorsyjnych, lewostronnie filialnych lub filialnych β-radykalnych K-algebr, gdy K nie jest ciałem, otrzymujemy następujące wzmocnienie Twierdzenia 2.32.

Twierdzenie 2.34. *Załóżmy, że K nie jest ciałem oraz A jest beztorsyjną algebrą β-radykalną. Wówczas A jest algebrą lewostronnie filialną lub filialną wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = 0$.*

Dowód: Załóżmy, że A spełnia założenia twierdzenia. Niech $0 \neq a \in A$. Z Twierdzenia 2.29 wynika, że $A^3 = 0$. Oczywiście $S = Ka + Ka^2$ jest podalgebrą algebry A, a na podstawie Twierdzenia 2.15 (iii), S jest lewostronnym ideałem A. Ponieważ K nie jest ciałem, więc K zawiera niezerowy element

nieodwracalny m. Zauważmy, że $K(ma + ma^2) + Km^2a^2$ jest podalgebrą algebry A, a zatem lewostronnym ideałem A. W szczególności $ma^2 = a(ma + ma^2) = \alpha(ma + ma^2) + \beta m^2a^2$ dla pewnych $\alpha, \beta \in K$. Mnożąc obie strony równości przez a otrzymujemy $0 = \alpha ma^2$. Z beztorsyjności algebry A, jak również z tego, że $m \neq 0$ dostajemy, że $\alpha a^2 = 0$. Zatem $ma^2 = \alpha ma + \beta m^2a^2$. Mnożąc tę równość przez α i korzystając z tego, że $\alpha a^2 = 0$ uzyskamy, że $\alpha^2 ma = 0$. Ponieważ $m \neq 0$ oraz $a \neq 0$, więc z beztorsyjności A wynika, że $\alpha = 0$. Zatem $ma^2 = \beta m^2a^2$, czyli $m(1 - \beta m)a^2 = 0$. Ponieważ m jest nieodwracalne, więc $1 - \beta m \neq 0$. W efekcie z beztorsyjności A wynika, że $a^2 = 0$. Dlatego też $Ka = Ka + Ka^2 <_l A$, czyli $Aa \subseteq Ka$. Wówczas, dla każdego $b \in A$ istnieje takie $k \in K$, że $ba = ka$. Mnożąc tę równość przez b otrzymujemy $0 = bba = kba$. Zatem z beztorsyjności A dostajemy, że $k = 0$ lub $ba = 0$. W obu jednak przypadkach, z równości $ba = ka$ wynika, że $ba = 0$. Ponieważ elementy a, b były dowolne, więc otrzymujemy, że $A^2 = 0$, co należało dowieść.
Implikacja przeciwna jest oczywista. ■

Dla dowolnego ciała K nietrudno jest wskazać nilpotentne K-algebry filialne, które nie są algebrami z zerowym mnożeniem, a więc założenie w Twierdzeniu 2.34, że K nie jest ciałem jest istotne.

Przykład 2.35. Rozważmy algebrę z Przykładu 2.5, gdy K jest ciałem, czyli $A = xK[x]/x^3K[x]$. Oczywiście A jest K-algebrą dwuwymiarową. Jeśli $0 \neq I \lhd J \lhd A$ i $I \neq J$, to $J = A$. Zatem $I \lhd A$. Algebra A jest więc filialna. ■

Twierdzenie 2.36. *Dowolna β-radykalna algebra filialna A jest H-algebrą.*

Dowód: Niech S będzie dowolną podalgebrą A. Dzieląc A przez największy ideał A zawarty w S możemy założyć, że S nie zawiera niezerowych ideałów A. Z Wniosku 2.13 wynika, że podalgebry zawarte w $W(A)$ są ideałami w A. Zatem $S \cap W(A) = 0$, a także $SW(A)$ oraz $W(A)S$ są ideałami w A. Na podstawie Stwierdzenia 2.28, $A/W(A)$ jest $\star$-algebrą, zaś z Twierdzenia 2.29 otrzymujemy, że $A^3 \subseteq W(A)$, a więc $S^3 = 0$. Ponadto $(W(A)+S)/W(A)$ jest podalgebrą filialnej algebry nilpotentnej $A/W(A)$, dlatego też na podstawie Wniosku 2.13, $S+W(A) \lhd A$. Załóżmy, że $S^2 = 0$. Wówczas $S \lhd S + SW(A)S \lhd S + SW(A) + W(A)S \lhd S + W(A) \lhd A$, a więc $S \lhd A$. Jeśli zaś $S^2 \neq 0$, to $S' = S^2 \neq 0$. Ponieważ $S^3 = 0$, więc $S'^2 = 0$. Oczywiście $S' \subseteq S$, a zatem S' nie zawiera niezerowych ideałów A. Jednakże, z tego co udowodniliśmy wyżej, wynika, że S' jest ideałem w A. Zatem $S' = 0$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. ■

Z Twierdzenia 2.36 wynika natychmiast

Wniosek 2.37. *Dowolna β-radykalna algebra filialna jest lewostronnie filialna.*

W Rozdziale 4 podamy przykład nilpotentnego pierścienia (czyli $\mathbb{Z}$-algebry) lewostronnie filialnego, który nie jest filialny. Tak więc w obrębie β-radykalnych pierścieni klasa pierścieni filialnych jest ostro zawarta w klasie pierścieni lewostronnie filialnych. W Rozdziale 3 wykażemy, że gdy K jest ciałem, to klasy β-radykalnych K-algebr filialnych, lewostronnie filialnych i prawostronnie filialnych się pokrywają.

2.5 Zachowanie się filialności i lewostronnej filialności przy typowych konstrukcjach

2.5.1 Rozszerzenia ideałowe

Przykłady 2.2 oraz 2.3 pokazują, że klasy algebr filialnych i lewostronnie filialnych nad pierścieniem przemiennym K z jedynką nie są zamknięte na sumy proste, a także na operację dołączania jedynki. Tym bardziej więc nie są zamknięte na rozszerzenia, tzn. z tego, że $I \lhd A$ oraz I i A/I są algebrami filialnymi (lewostronnie filialnymi), nie wynika ogólnie, że A jest algebrą filialną (lewostronnie filialną). Jednak, jeśli I lub A/I spełniają pewne dodatkowe warunki, taka implikacja zachodzi. Teraz zajmiemy się opisem takich sytuacji. W pracy [8] było udowodnione, że jeśli I jest pierścieniem podidempotentnym (jak wiemy pierścienie takie są filialne) oraz $I \lhd R$ i R/I jest pierścieniem filialnym, to również R jest pierścieniem filialnym (por. [8], Proposition 3). Zostało tam również pokazane, że pierścień R jest podidempotentny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{Z} \oplus R$ jest pierścieniem filialnym (por. [8], Proposition 4). Zatem klasa pierścieni $\{I \mid I \lhd R, R/I\text{-pierścień filialny} \Rightarrow R\text{-pierścień filialny}\}$ jest równa klasie pierścieni podidempotentnych. Pojawia się pytanie, czy wyniki te możemy przenieść na przypadek ogólny, czyli klasę algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym K.

Pokażemy, że pierwszy z tych faktów przenosi się praktycznie z tym samym dowodem.

Stwierdzenie 2.38. *Jeśli $I \lhd A$, I jest algebrą podidempotentną oraz A/I jest algebrą filialną, to algebra A też jest filialna.*

Dowód: Załóżmy, że $L \lhd M \lhd A$. Wówczas $(L+I)/I \lhd (M+I)/I \lhd A/I$. Z filialności algebry A/I wynika, że $L + I \lhd A$. W efekcie $L + I = \bar{L} + I$, gdzie $\bar{L}$ jest ideałem w A generowanym przez L. Ponieważ I jest algebrą podidempotentną, więc $(\bar{L}\cap I)^2 = \bar{L}\cap I$. Z lematu Andrunakiewicza $(\bar{L}\cap I)^3 \subseteq$

$L \cap I$, a zatem $\bar{L} \cap I = L \cap I$. Stąd oraz z równości $L \cap I = \bar{L} + I$ otrzymujemy, że $L = \bar{L}$. Ostatecznie $L \lhd A$. ∎

Ze Stwierdzenia 2.38 wynika oczywiście, że jeśli A jest algebrą podidempotentną, to $K \oplus A$ jest algebrą filialną. Jednak nie dla dowolnego K prawdziwa jest implikacja odwrotna. Jeśli bowiem pierścień przemienny K jest podidempotentny (czyli silnie regularny), to ze Stwierdzenia 2.38 wynika, że dla dowolnej algebry filialnej A, $K \oplus A$ jest algebrą filialną. W szczególności $K \oplus K^0$ jest algebrą filialną. Zatem w przypadku, gdy K jest pierścieniem silnie regularnym, z faktu, że $K \oplus A$ jest algebrą filialną nie wynika, że A jest algebrą podidempotentną. W efekcie wspomnianego wyżej Proposition 4 z pracy [8] nie można bezpośrednio rozszerzyć na K-algebry dla dowolnego K.

Podobne wyniki możemy uzyskać dla lewostronnej filialności. Odpowiednikiem Stwierdzenia 2.38 jest udowodnione w paragrafie 2.3, Stwierdzenie 2.22 (które, przypomnijmy, odgrywa istotną rolę w opisie struktury półpierwszych algebr lewostronnie filialnych).

W pracy [19] było udowodnione, że A jest pierścieniem silnie regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{Z} \oplus A$ jest pierścieniem lewostronnie filialnym (por. [19], Corollary 3.3). Podobnie jak dla algebr filialnych wynik ten nie rozszerza się na dowolne algebry.

Wiadomo (por. Przykład 2.3), że w przypadku ogólnym, czyli algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym K, filialność (lewostronna filialność) nie zachowuje się przy operacji dołączenia do nich jedynki. Jednak przy założeniu, że K jest ciałem, własność ta zachodzi. Dowód tego faktu dla filialności jest łatwiejszy i w tym przypadku można powiedzieć więcej, co przedstawimy poniżej. Natomiast dowód w przypadku lewostronnej filialności wymaga dodatkowych wyników i zostanie przedstawiony w Rozdziale 3.

Udowodnimy najpierw następujące

Stwierdzenie 2.39. *Załóżmy, że $A \lhd B$. Jeśli A jest algebra filialną, zaś B/A - algebrą podidempotentną oraz ideały algebry A są ideałami w B, to również B jest algebrą filialną.*

Dowód: Załóżmy, że $I \lhd J \lhd B$. Niech T będzie największym ideałem A zawartym w I. Z założenia T jest również ideałem w B i oczywiście $A/T \lhd B/T$. Naturalnie A/T jest algebrą filialną, zaś $(B/T)/(A/T) \simeq B/A$ jest algebrą podidempotentną oraz ideały w A/T są ideałami w B/T. Możemy więc założyć, że $T = 0$. Rozważmy teraz $I \cap A \lhd J \cap A \lhd A$. Ponieważ A jest algebrą filialną, więc $I \cap A \lhd A$. Zatem $I \cap A = 0$. Ponadto $(I + A)/A \lhd B/A$ i z twierdzenia o izomorfizmie $(I + A)/A \simeq I/I \cap A = I$. Z założenia, że

B/A jest algebrą podidempotentną wynika, że $I^2 = I$. Stąd zaś i z lematu Andrunakiewicza otrzymujemy, że $I \lhd B$, co należało dowieść. ■

Wniosek 2.40. *K jest pierścieniem silnie regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej algebry filialnej A, również $A^\star$ jest algebrą filialną.*

Dowód: Oczywiście ideały algebry A są także ideałami w $A^\star$. Jeśli K jest pierścieniem silnie regularnym, to $A^\star/A$ jest algebrą podidempotentną. Zatem implikacja ($\Rightarrow$) wynika natychmiast ze Stwierdzenia 2.39. Aby udowodnić implikację przeciwną wystarczy pokazać, że każdy ideał w K jest idempotentny. Załóżmy, że $I \lhd K$ oraz $I^2 \neq I$. Nietrudno pokazać, że $((K/I^2))^0)^\star \simeq \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in K/I^2\}$. Ponadto $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in I/I^2\} \lhd \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in I/I^2\} \lhd \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in K/I^2\}$. Jeśli więc $\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in K/I^2\}$ jest algebrą filialną, to $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in I/I^2\} \lhd \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in K/I^2\}$. Wówczas dla dowolnego $a \in I/I^2$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in I/I^2\}$. Zatem $a = 0$. To oznacza, że $I/I^2 = 0$. Stąd zaś $I = I^2$, wobec tego K jest pierścieniem silnie regularnym. ■

2.5.2 Sumy proste, wielomiany, macierze

Teraz opiszemy filialność i lewostronną filialność algebr otrzymanych za pomocą typowych konstrukcji, takich jak sumy proste, algebry macierzy, czy algebry wielomianów. Ważną rolę w tym opisie odegra omówiona w paragrafie 2.1 podklasa klasy algebr filialnych $\mathcal{C} = \{A \mid \text{dla każdego } I \lhd A, AI = I^3 = IA\}$.

Przykład 2.2 pokazał, że klasy algebr filialnych i lewostronnie filialnych nie są zamknięte na sumy proste. Okazuje się, że opisanie filialności sum prostych jest skomplikowane. Zauważmy, że nawet suma prosta algebry filialnej oraz algebry z zerowym mnożeniem nie musi być filialna.

Przykład 2.41. Niech $A = \mathbb{Z}_4 \oplus {\mathbb{Z}_2}^0$. Wówczas $\mathbb{Z}(2,1) \lhd 2\mathbb{Z}_4 \oplus {\mathbb{Z}_2}^0 \lhd A$, ale $(2,1)(1,1) = (2,0) \notin \mathbb{Z}(2,1)$. Stąd $\mathbb{Z}(2,1) \ntriangleleft A$, a zatem A nie jest algebrą filialną. ■

Dwa kolejne wyniki pokażą, że klasa $\mathcal{C}$ jest największą podklasą klasy algebr filialnych, która jest zamknięta ze względu na sumy proste lub przejście do macierzy.

Stwierdzenie 2.42. *(i) Jeśli $A, B \in \mathcal{C}$, to $A \oplus B \in \mathcal{C}$.*

(ii) Jeśli $A \in \mathcal{C}$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$, algebra $n \times n$-macierzy $R = M_n(A)$ nad algebrą A również należy do klasy $\mathcal{C}$.

Dowód: (i) Niech $I \lhd A \oplus B$ oraz niech $\bar{I}$ będzie ideałem w $A^\star \oplus B^\star$ generowanym przez I. Oczywiście $\bar{I} = J_1 \oplus J_2$ dla pewnych $J_1 \lhd A$ i $J_2 \lhd B$. Ponieważ $A, B \in \mathcal{C}$, więc z Twierdzenia 2.6 (ii) dla $n = 9$, $AJ_1 = {J_1}^9 = J_1A$, $BJ_2 = {J_2}^9 = J_2B$. Stąd $(A \oplus B)\bar{I} = \bar{I}^9 = \bar{I}(A \oplus B)$. Z lematu Andrunakiewicza $\bar{I}^3 \subseteq \bar{I}$, dlatego też $(A \oplus B)I \subseteq (A \oplus B)\bar{I} = \bar{I}^9 \subseteq I^3$. Zatem $(A \oplus B)I = I^3$. Podobnie otrzymujemy, że $I(A \oplus B) = I^3$.

(ii) Niech $I \lhd R = M_n(A)$. Ideał $\bar{I}$ w $M_n(A^\star)$ generowany przez I jest równy $M_n(J)$ dla pewnego $J \lhd A$. Z założenia $A \in \mathcal{C}$, więc $AJ = J^9 = JA$, jak również $A\bar{I} = \bar{I}^9 = \bar{I}A$. Z lematu Andrunakiewicza $(\bar{I})^3 \subseteq I$ i ostatecznie $RI = I^3 = IR$. ■

Twierdzenie 2.43. *Dla danej algebry A i liczby całkowitej $n \geqslant 2$ równoważne są następujące warunki*

(i) $A \in \mathcal{C}$;

(ii) $A \oplus A$ jest algebrą filialną;

(iii) $M_n(A)$ jest algebrą filialną.

Dowód: Implikacje $(i) \Rightarrow (ii)$ oraz $(i) \Rightarrow (iii)$ są prostą konsekwencją wyników otrzymanych w Stwierdzeniu 2.42 oraz faktu, że klasa $\mathcal{C}$ jest zawarta w klasie algebr filialnych (por. Stwierdzenie 2.4).

Wykażemy teraz implikacje $(ii) \Rightarrow (i)$ oraz $(iii) \Rightarrow (i)$. Niech $I \lhd A$. Przechodząc do algebry ilorazowej A/I^3 możemy założyć, że $I^3 = 0$. Wówczas należy udowodnić, że $AI = IA = 0$. Oczywiście $S = \{(i, i) \mid i \in I\}$ jest podalgebrą nilpotentnego ideału $I \oplus I$ algebry $A \oplus A$. Zakładając (ii) mamy, że $A \oplus A$ jest algebrą filialną, więc na mocy Twierdzenia 2.36, $S \lhd A \oplus A$. Dlatego też dla dowolnego $a \in A$ oraz $i \in I$, $(a, 0)(i, i) = (ai, 0) = (j, j)$ dla pewnego $j \in I$. Stąd $ai = 0$. Zatem $AI = 0$ i podobnie $IA = 0$.

Zauważmy teraz, że również $T = Ie_{11}$, gdzie e_{11} jest macierzą w $M_n(A^\star)$, która w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie ma „jedynkę", zaś w pozostałych miejscach „zera", jest podalgebrą nilpotentnego ideału $M_n(I)$ w $M_n(A)$. Zatem jeśli założymy (iii) podobnie jak wyżej $T \lhd M_n(A)$, co implikuje, że $AI = IA = 0$ i kończy dowód twierdzenia. ■

W pracy [8] (Proposition 6) było pokazane, że $A \oplus A$ jest pierścieniem filialnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in A$, $[a] = [a]^2$. W Twierdzeniu 2.6 udowodniliśmy, że algebra spełniająca taki warunek należy do klasy

$\mathcal{C}$. Zatem Twierdzenie 2.43 w szczególności daje inny dowód Proposition 6 z [8] wymagający mniejszej ilości rachunków na elementach.

W kolejnym twierdzeniu scharakteryzujemy algebry A, dla których $A \oplus A$ jest algebrą lewostronnie filialną.

Twierdzenie 2.44. *Dla danej algebry A następujące warunki są równoważne*

(i) $A \oplus A$ *jest algebrą lewostronnie filialną;*

(ii) *Dla każdego* $a \in A$, $Aa = Aa^2$*;*

(iii) *Dla każdego* $L <_l A$, $AL = L^3$ *i A jest algebrą lewostronnie filialną;*

(iv) *Dla każdego* $L <_l A$ *i dla każdego całkowitego* $n \geqslant 2$, $AL = L^n$ *i A jest algebrą lewostronnie filialną;*

(v) $A\beta(A) = 0$ *oraz* $A/\beta(A)$ *jest algebrą silnie regularną.*

Dowód: $(i) \Rightarrow (ii)$. Zauważmy, że $S = \{(x,x) \mid x \in Ka\} + Aa^2 \oplus Aa^2 <_l Aa \oplus Aa <_l A \oplus A$. Ponieważ $A \oplus A$ jest algebrą lewostronnie filialną, więc $S <_l A \oplus A$. W szczególności $Aa \oplus 0 = (A,0)(a,a) \subseteq S$. Zatem dla każdego $t \in A$ istnieją takie elementy $x \in Ka$ oraz $y, z \in Aa^2$, że $(ta, 0) = (x,x) + (y,z)$. Stąd otrzymujemy, że $ta \in Aa^2$ i w konsekwencji $Aa = Aa^2$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Niech $a \in L <_l R$. Wówczas z (ii) wynika, że $Aa = Aa^2 = Aa^3 \subseteq L^3$, a więc $AL = L^3$. Ponadto zauważmy, że dla dowolnego $x \in A$, $A^\star x^2 + Kx = Ax^2 + Kx^2 + Kx = Ax + Kx = A^\star x$. Z Twierdzenia 2.14 wynika zatem, że A jest algebrą lewostronnie filialną.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Ponieważ $L^3 \subseteq L^2 \subseteq AL$ i $AL = L^3$, więc $AL = L^2 = L^3$. Oczywiście równość $L^2 = L^3$ implikuje dalej, że dla każdego całkowitego $n \geqslant 2$, $L^n = L^2$. Otrzymujemy więc (iv).

$(iv) \Rightarrow (v)$. Jeśli L jest lewostronnym ideałem nilpotentnym algebry A, to z (iv) otrzymujemy, że $AL = 0$. Stąd łatwo wynika, że $A\beta(A) = 0$. Rozważmy algebrę ilorazową $\bar{A} = A/\beta(A)$. Jest to półpierwsza algebra lewostronnie filialna, więc na mocy Stwierdzenia 2.15 (ii), $\bar{A}$ jest algebrą zredukowaną. Oczywiście dla każdego $T <_l \bar{A}$ z (iv) wynika, że $\bar{A}T = T^3$. Z Twierdzenia 2.23 wynika, że $\bar{A}$ zawiera taki ideał silnie regularny I, że $\bar{A}/I$ jest przemienną, zredukowaną algebrą filialną. Algebra $\bar{A}/I \in \mathcal{C}$, a więc na mocy Stwierdzenia 2.7 $d)$ jest ona silnie regularna. Ostatecznie, również $A/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną.

$(v) \Rightarrow (i)$. Dobrze wiadomo, że $\beta(A \oplus A) = \beta(A) \oplus \beta(A)$. Dlatego też z (v), $(A \oplus A)\beta(A \oplus A) = 0$. Ponadto $(A \oplus A)/\beta(A \oplus A) \simeq A/\beta(A) \oplus A/\beta(A)$. Klasa algebr silnie regularnych jest zamknięta ze względu na sumy proste, a więc $(A \oplus A)/\beta(A \oplus A)$ jest algebrą silnie regularną. Zatem na mocy Stwierdzenia

2.17 otrzymujemy, że $A \oplus A$ jest algebrą lewostronnie filialną, co kończy dowód. ■

Zauważmy, że klasa algebr spełniająca powyższe twierdzenie jest największą podklasą klasy algebr lewostronnie filialnych, która jest zamknięta ze względu na sumy proste.

Na zakończenie tego paragrafu scharakteryzujemy lewostronnie filialne algebry macierzy oraz filialne i lewostronnie filialne algebry wielomianów.

Twierdzenie 2.45. *Dla dowolnej algebry A i całkowitego $n \geqslant 2$, algebra macierzy $M_n(A)$ jest lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = 0$.*

Dowód: Zauważmy, że Ae_{21}, gdzie e_{21} jest takim elementem $M_n(A^\star)$, że w drugim wierszu i pierwszej kolumnie jest „jedynka”, zaś w pozostałych miejscach są „zera”, jest nilpotentną podalgebrą $M_n(A)$. Zatem na mocy Stwierdzenia 2.15 (*iii*), jeśli $M_n(A)$ jest algebrą lewostronnie filialną, to $Ae_{21} <_l M_n(A)$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = 0$. ■

Twierdzenie 2.46. *Dla dowolnej algebry A, algebra wielomianów $A[x]$ jest filialna lub lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = 0$.*

Dowód: Niech $a \in A$. Nietrudno sprawdzić, że $I = K(ax^2+ax^3)+x^4A[x] \lhd x^2A[x] \lhd A[x]$. Ponieważ $A[x]$ jest algebrą filialną lub lewostronnie filialną, więc $I <_l A[x]$. W szczególności dla każdego $r \in A$, $rx(ax^2+ax^3) \in I$. Zatem istnieje takie $k \in K$, że $rax^3 - k(ax^2+ax^3) \in x^4A[x]$. Stąd $ka = 0$ i $ra = 0$, a więc $A^2 = 0$. Implikacja przeciwna jest oczywista. ■

2.5.3 Konteksty Mority

W paragrafie 1.1.2 przedstawiona została definicja i typowe przykłady kontekstów Mority. Jak się okazuje zbadanie filialności kontekstów Mority w ogólnym przypadku jest bardzo trudne. Jednak w pewnych dla nas użytecznych sytuacjach można tę kwestię rozstrzygnąć.

Twierdzenie 2.47. *Jeśli A jest pierścieniem lewostronnie fililanym, zaś M jest prawostronnym A-modułem podzielnym (tzn. dla każdego $0 \neq a \in A, Ma = M$), to kontekst Mority $R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$ jest pierścieniem lewostronnie filialnym.*

Dowód: Załóżmy, że A jest pierścieniem lewostronnie filialnym, zaś M jest prawostronnym A-modułem podzielnym. Aby udowodnić, że R jest pierścieniem lewostronnie filialnym należy pokazać, że dla dowolnego $r = \begin{pmatrix} a & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \in$

R, $Rr = Rr^2 + \mathbb{Z}r^2 + \mathbb{Z}r$. Zatem wykażemy, że dla każdego $b \in A$ oraz każdego $n \in M$ istnieją takie elementy $c \in A$, $k \in M$ oraz $p, s \in \mathbb{Z}$, że
$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ma & 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ma & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}.$$
Stąd zaś, że dla każdego $b \in A$ oraz $n \in M$ istnieją takie $c \in A$, $k \in M$ i $p, s \in \mathbb{Z}$, że

(1) $ba = ca^2 + pa^2 + sa$ oraz

(2) $na = ka^2 + pma + sm$.

Jest to oczywiste, gdy $a = 0$. Jeśli zaś $a \neq 0$, to ponieważ A jest pierścieniem lewostronnie filialnym, ze Stwierdzenia 2.14 wynika, że istnieje takie $c \in A$ oraz $p, s \in \mathbb{Z}$, że $ba = ca^2 + pa^2 + sa$. Zatem zachodzi warunek (1). Niech $u = na - pma - sm$. Ponieważ $Ma = M$, więc istnieje takie $x \in M$, że $xa = u$ oraz takie $k \in M$, że $x = ka$. Stąd $ka^2 = xa = u$ i dalej $ka^2 = na - pma - sm$. Ostatecznie, $na = ka^2 + pma + sm$, czyli zachodzi warunek (2). ■

Twierdzenie 2.48. *Załóżmy, że A jest dziedziną z 1, zaś M jest prawostronnym A-modułem. Wówczas kontekst Mority $R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$ jest pierścieniem prawostronnie filialnym wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień A jest prawostronnie filialny oraz dla każdego $m \in M$, $mA = \mathbb{Z}m$.*

Dowód: Załóżmy na początek, że R jest pierścieniem prawostronnie filialnym. Wówczas dla dowolnego elementu $r = \begin{pmatrix} a & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}$ z dualnej wersji Stwierdzenia 2.14 (*ii*) wynika, że $rR = r^2R + \mathbb{Z}r^2 + \mathbb{Z}r$. Zatem dla dowolnych $x \in A$ oraz $n \in M$ istnieją takie $y \in A$, $k \in M$ oraz $p, s \in \mathbb{Z}$, że
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ma & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}.$$
Stąd zaś otrzymujemy, że dla dowolnych $x \in A$, $n \in M$, istnieją takie $y \in A$, $k \in M$ oraz $p, s \in \mathbb{Z}$, że

(1) $ax = a^2y + pa^2 + sa$ oraz

(2) $mx = may + pma + sm$.

Ponieważ warunek (1) zachodzi dla dowolnego $a \in A$, więc $aA = a^2A + \mathbb{Z}a^2 + \mathbb{Z}a$. Na mocy dualnej wersji Stwierdzenia 2.14, A jest pierścieniem prawostronnie filialnym.

Rozważając $a = 0$ w warunku (2) otrzymujemy, że dla każdego $x \in A$ istnieje takie $s \in \mathbb{Z}$, że $mx = sm$. Z dowolności m otrzymujemy, że $mA \subseteq \mathbb{Z}m$. Ponieważ pierścień A jest z 1, więc inkluzja przeciwna jest oczywista.

Załóżmy teraz, że A jest pierścieniem prawostronnie filialnym oraz dla każdego $m \in M$, $mA = \mathbb{Z}m$. Musimy pokazać, że zachodzą wówczas warunki (1) i (2). Oczywiście warunki te są spełnione dla $a = 0$. Jeśli $a \neq 0$, to z prawostronnej filialności pierścienia A natychmiast wynika warunek (1). Ponieważ A jest dziedziną, więc jeśli $a \neq 0$, to $x = ay + pa + s$. Stąd zaś dla każdego $x \in A$, $mx = m(ay + pa + s) = may + pma + sm$, a zatem również warunek (2) jest spełniony, co kończy dowód. ■

Przykładem kontekstu Mority, który spełnia warunki Twierdzeń 2.47 i 2.48 jest pierścień $R = \begin{pmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ \mathbb{Z}_{p^\infty} & 0 \end{pmatrix}$, w którym $\mathcal{P}$ oznacza pierścień liczb całkowitych p-adycznych (por. [14]), zaś $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ - addytywną p-grupę quasicykliczną. W pracy [6] Andruszkiewicz udowodnił, że pierścień liczb całkowitych p-adycznych jest pierścieniem filialnym. Ponadto zauważył, że przemienne dziedziny filialne są izomorficzne z podpierścieniami pierścienia liczb p-adycznych. Wiadomo, że pierścień endomorfizmów grupy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ jest izomorficzny z $\mathcal{P}$ (por. [31]). Zatem możemy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ traktować jako prawostronny $\mathcal{P}$-moduł (dla dowolnego $a \in \mathcal{P}$ i dowolnego $x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, $xa = a(x)$, gdzie a jest traktowane jako endomorfizm $\mathbb{Z}_{p^\infty}$). Ponadto, dla dowolnego $0 \neq a \in \mathcal{P}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty} a = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, dlatego też jest to moduł podzielny. Z Twierdzeń 2.47 oraz 2.48, wynika więc, że R jest pierścieniem lewostronnie i prawostronnie filialnym.

Jak się okazuje, założenie o tym, że pierścień A w Twierdzeniu 2.48 jest dziedziną, odgrywa kluczową rolę. Kolejny przykład pokaże, że to twierdzenie nie rozszerza się na przypadek, gdy A jest pierścieniem silnie regularnym.

Przykład 2.49. Załóżmy, że F jest ciałem, którego charakterystyka jest różna od 2. Niech $A = \{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F\}$. Łatwo pokazać, że A jest podalgebrą algebry macierzy wymiaru 3×3 nad ciałem F. Zauważmy, że $T = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F\}$ jest algebrą silnie regularną, bowiem $T \simeq F \oplus F$. Ponadto $M = \{\begin{pmatrix} c, & d \end{pmatrix} \mid c, d \in F\}$ ma naturalną strukturę prawostronnego T-modułu i algebra A jest izomorficzna z kontekstem Mority $\begin{pmatrix} T & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$.

Zauważmy, że $\beta(A) = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \mid c, d \in F\}$ oraz $A/\beta(A) \simeq F \oplus F$, więc $A/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną. Oczywiście $A\beta(A) = 0$. Zatem na podstawie Stwierdzenia 2.17, A jest algebrą lewostronnie filialną.

Zauważmy teraz, że $I = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c \in F\} \lhd \beta(A) \lhd A$, ale $I \ntriangleleft A$.

Zatem A nie jest algebrą filialną i w efekcie nie jest algebrą prawostronnie filialną.

Warto zauważyć, że założenie podzielności modułu M w Twierdzeniu 2.47 nie jest warunkiem koniecznym, a wystarczającym.

W przypadku, gdy charakterystyka ciała F jest równa 2, algebra A nie jest algebrą lewostronnie filialną. Gdyby bowiem tak było, to każda podalgebra $\beta(A) = \{\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \mid a, c, d \in F\}$ byłaby lewostronnym ideałem w A, co nie jest spełnione dla podalgebry $I = \{\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in F\}$.

Rozdział 3

Filialne i lewostronnie filialne algebry nad ciałem

W poprzednim rozdziale rozważaliśmy algebry nad dowolnym pierścieniem przemiennym z 1. Teraz zajmiemy się przypadkiem algebr nad ciałem. Przy takim założeniu nietrudno jest pokazać, że półpierwsze algebry są lewostronnie filialne wtedy i tylko wtedy, gdy są one algebrami silnie regularnymi. Wykażemy to w pierwszym, krótkim paragrafie. Trudniej jest opisać algebry β-radykalne. Temu zagadnieniu poświęcimy drugi paragraf. Otrzymamy w nim praktycznie pełną klasyfikację takich algebr zależną od klasyfikacji pewnych form kwadratowych (dokładniej klasyfikacji form izotropowych) w zależności od ciała.

Główną część tego rozdziału (trzeci paragraf) stanowi klasyfikacja w przypadku ogólnym. Oczywiście wykorzystujemy tutaj wcześniej uzyskane wyniki dotyczące algebr półpierwszych i β-radykalnych. Wymaga to jednak jeszcze sporo dodatkowego wysiłku. Uzyskana klasyfikacja jest kompletna w przypadku algebr skończenie wymiarowych (modulo wyżej wspomniane klasyfikacje form kwadratowych).

W czwartym paragrafie podajemy opis struktury algebr, które są filialne i lewostronnie filialne. Dowodzimy też, że w przypadku algebr nad ciałem z filialności i lewostronnej filialności wynika ich prawostronna filialność.

W tym rozdziale pisząc „algebra” mamy na myśli algebrę nad ciałem F. Symbolem $dim_F A$ oznaczamy wymiar algebry A nad ciałem F.

3.1 Półpierwsze lewostronnie filialne algebry nad ciałem

Twierdzenie 3.1. *Algebra jest półpierwsza i lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest silnie regularna.*

Dowód: Załóżmy, że A jest półpierwszą algebrą lewostronnie filialną. Ze Stwierdzenia 2.15 (*ii*) wynika, że A jest algebrą zredukowaną. Korzystając ze Stwierdzenia 1.27 (*ii*) otrzymujemy, że $A^\star$ jest również algebrą zredukowaną.

Ze Stwierdzenia 2.14 wynika, że dla każdego $a \in A$, $A^\star a^2 = A^\star a^4 + Fa^2$. Wówczas $a^3 = xa^4 + \alpha a^2$ dla pewnego $x \in A$ oraz $\alpha \in F$. Dlatego też $(a - xa^2 - \alpha)a^2 = 0$, a z Wniosku 1.25 otrzymujemy, że $(a - xa^2 - \alpha)a = 0$. Stąd, jeśli $\alpha \neq 0$, to $a \in A^\star a^2$. Jeśli zaś $\alpha = 0$, to $(a - xa^2)a = 0$ i $(1 - xa)a^2 = 0$. Wykorzystując ponownie Wniosek 1.25 otrzymujemy, że $(1 - xa)a = 0$. W obu przypadkach $a \in A^\star a^2 = (A^\star a)a \subseteq (A^\star A^\star a^2)a \subseteq Aa^2$. Algebra A jest zatem silnie regularna.
Implikacja przeciwna jest oczywista. ■

3.2 β-radykalne filialne i lewostronnie filialne algebry nad ciałem

W Rozdziale 2 zostało pokazane, że z filialności algebr β-radykalnych wynika ich lewostronna filialność. Ten paragraf rozpoczniemy od udowodnienia twierdzenia, które w szczególności pokaże, że w obrębie β-radykalnych algebr nad ciałem klasy algebr lewostronnie filialnych, filialnych i H-algebr się pokrywają.

Twierdzenie 3.2. *Dla danej β-radykalnej algebry A nad ciałem F następujące warunki są równoważne*

(*i*) *A jest algebrą filialną;*

(*ii*) *A jest algebrą lewostronnie filialną;*

(*iii*) $A^3 = 0$ *i dla każdego* $a \in A$, $Aa = Fa^2$;

(*iv*) $A^3 = 0$ *i dla każdego* $x \in A$, $Ax = xA = Fx^2$;

(*v*) *A jest H-algebrą.*

Dowód: Implikacje $(i) \Rightarrow (ii)$ oraz $(ii) \Rightarrow (iii)$ zostały udowodnione we Wniosku 2.37 i Twierdzeniu 2.32 dla algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym z 1.

Implikacje $(iv) \Rightarrow (v)$ oraz $(v) \Rightarrow (i)$ są oczywiste.

Pozostaje więc wykazać, że $(iii) \Rightarrow (iv)$. Załóżmy, że A spełnia (iii). Chcemy pokazać, że dla każdego $y \in A$, $xy \in Fx^2$. Zauważmy, że jeżeli podstawimy w (iii) $a = y$, to otrzymamy, że $xy = \alpha y^2$ dla pewnego $\alpha \in F$. Jeśli $\alpha = 0$, to $xy = 0$, więc $xy \in Fx^2$. Załóżmy, że $\alpha \neq 0$. Wówczas $xy - \alpha y^2 = 0$ i $(x - \alpha y)^2 = (x - \alpha y)x = x^2 - \alpha yx$. Jeżeli w (iii) podstawimy $a = x - \alpha y$, to otrzymamy, że $x(x - \alpha y) \in F(x - \alpha y)^2 = F(x^2 - \alpha yx)$. Po podstawieniu zaś $a = x$ dostaniemy $yx \in Fx^2$. Stąd $x(x - \alpha y) \in F(x^2 - \alpha yx) \subseteq Fx^2$. Ostatecznie $\alpha xy \in Fx^2$, a ponieważ $\alpha \neq 0$, więc $xy \in Fx^2$. ■

Zauważmy, że Twierdzenie 3.2 nie zachodzi w przypadku pierścieni. Przykładem jest pierścień $R = n\mathbb{Z}/n^k\mathbb{Z}$, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 2$, zaś $k \geqslant 4$. Pierścień ten jest obrazem homomorficznym ideału pierścienia $\mathbb{Z}$. Jest więc to pierścień filialny, ale $R^3 \neq 0$. Wiadomo również, że pierścienie lewostronnie filialne o stopniu nilpotentności 3 nie muszą być filialne, co zostanie pokazane w Rozdziale 4 (Przykład 4.13). Zatem pierścienie te nie są H-pierścieniami.

Wyżej uzyskaliśmy, że wszystkie lewostronnie filialne algebry β-radykalne są H-algebrami. Opisem struktury H-algebr zajmował się Liu Shao Xue w pracy [36]. Uzyskane przez niego wyniki dotyczą również β-radykalnych lewostronnie filialnych algebr nad ciałem. Z Twierdzenia 3.2 można otrzymać większość wyników uzyskanych przez Liu Shao-Xue. Teraz pokażemy jak bazując na tym twierdzeniu można krócej i prościej uzyskać główny wynik z jego pracy.

Twierdzenie 3.3 (por. Theorem 1, [36]). *β-radykalna algebra A jest H-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = 0$ lub $A = B \oplus C$, gdzie $C^2 = 0$, $B^2 = Fb$ dla pewnego $0 \neq b \in B$ takiego, że $Bb = bB = 0$ oraz dla każdego $x \in B \setminus Fb$, $x^2 \neq 0$.*

Dowód: Niech A będzie H-algebrą oraz x, y będą takimi elementami algebry A, że $x^2 \neq 0 \neq y^2$. Jeśli $xy \neq 0$ lub $yx \neq 0$, to z warunku (iii) Twierdzenia 3.2 otrzymujemy, że $Fxy + Fyx = Fx^2 = Fy^2$. Jeśli zaś $xy = yx = 0$, to $x^2 = x(x + y) \in F(x + y)^2 = F(x^2 + y^2)$, czyli $x^2 = \alpha(x^2 + y^2)$ dla pewnego $\alpha \in F$. Wobec tego $(\alpha - 1)x^2 = \alpha y^2$, skąd po uwzględnieniu, że $x^2 \neq 0 \neq y^2$ wynika, że i w tym przypadku $Fx^2 = Fy^2$. Zatem $A^2 = 0$ lub istnieje $a \in A$ takie, że $A^2 = Fa^2 \neq 0$. Z warunku (iii) Twierdzenia 3.2 otrzymujemy, że $T = \{x \in A \mid x^2 = 0\} = \{x \in A \mid xA = Ax = 0\}$ i $a^2 \in T$. Połóżmy $b = a^2$ oraz niech C będzie maksymalną F-podprzestrzenią przestrzeni T, która nie zawiera elementu b. Niech B będzie dopełnieniem podprzestrzeni

C w A, zawierającym element b. Wówczas A jest sumą prostą przestrzeni B i C. Oczywiście B i C są algebrami spełniającymi warunki opisane w twierdzeniu.

Wykażemy teraz implikację przeciwną. Jeśli $A^2 = 0$, to oczywiście A jest H-algebrą. Załóżmy więc, że $A = B \oplus C$, gdzie B, C oraz b są takie jak w sformułowaniu twierdzenia. Niech S będzie podalgebrą A. Oczywiście $S^2 \subseteq B^2 = Fb$. Ponieważ $dim_F(Fb) = 1$, więc $S^2 = Fb$ lub $S^2 = 0$. W pierwszym przypadku $AS + SA \subseteq A^2 = B^2 \oplus C^2 = B^2 = Fb = S^2 \subseteq S$, dlatego też $S \lhd A$. Załóżmy teraz, że $S^2 = 0$. Wówczas dla dowolnego $s \in S$ istnieją takie $x \in B$ oraz $c \in C$, że $s = x + c$. Zatem $0 = s^2 = x^2 + c^2 = x^2$. Z założenia wynika więc, że $x \in Fb$. W efekcie $S \subseteq Fb \oplus C$. Stąd zaś, $AS + SA \subseteq (B \oplus C)(Fb \oplus C) = Bb = 0$. Również w tym przypadku $S \lhd A$. ■

Z Twierdzenia 3.3 wynika, że dowolna β-radykalna algebra lewostronnie filialna jest sumą prostą algebry trywialnej (z zerowym mnożeniem) oraz algebry nierozkładalnej tzn. takiej, która nie jest izomorficzna z sumą prostą dwóch niezerowych algebr. Zatem problem klasyfikacji β-radykalnych algebr lewostronnie filialnych sprowadza się do klasyfikacji algebr nierozkładalnych. Wykażemy, że to jest równoważne klasyfikacji pewnych form kwadratowych. Końcowa część tego paragrafu będzie dotyczyła tego zagadnienia.

Definicja 3.4. Formę kwadratową $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} f_{ij}x_ix_j$ zmiennych $x_1, \dots, x_n$ nad ciałem F nazywamy **izotropową**, jeśli istnieją takie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, nie wszystkie równe 0, że $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} f_{ij}\alpha_i\alpha_j = 0$.

Wówczas otrzymujemy

Stwierdzenie 3.5. *Jeśli dowolna forma kwadratowa zmiennych $x_1, \dots, x_n$ nad ciałem F jest izotropowa i A jest nierozkładalną, β-radykalną H-algebrą, to $dim_F A \leqslant n$.*

Dowód: Jeśli $A^2 = 0$, to ponieważ A jest nierozkładalna, więc $dim_F A \leqslant 1$. Załóżmy, że $A^2 \neq 0$. Wówczas na podstawie Twierdzenia 3.3 istnieje takie $0 \neq a \in A$, że $A^2 = Fa^2 \neq 0$. Jeśli $dim_F A > n$, to istnieją takie elementy $e_1, e_2, \dots, e_n \in A$, że $a^2, e_1, e_2, \dots, e_n$ są liniowo niezależne. Ponieważ $A^2 = Fa^2$, więc dla dowolnych $1 \leqslant i, j \leqslant n$ istnieją takie $f_{ij} \in F$, że $e_ie_j = f_{ij}a^2$. Z założenia forma kwadratowa $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} f_{ij}x_ix_j$ jest izotropowa, wobec tego istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, nie wszystkie równe 0 takie, że $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} f_{ij}\alpha_i\alpha_j = 0$. Stąd otrzymujemy, że $(\alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_ne_n)^2 = 0$. Wiemy jednak, że $x^2 \neq 0$ dla każdego $0 \neq x \in A \setminus Fa^2$. Zatem $\alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_ne_n \in Fa^2$, a więc elementy $a^2, e_1, \dots, e_n$ są liniowo zależne. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $dim_F A \leqslant n$. ■

Oczywiście, gdy F jest ciałem algebraicznie domkniętym, to założenie powyższego stwierdzenia zachodzi dla $n = 2$, co było zauważone przez Liu Shao-Xue. W przypadku, gdy F jest ciałem liczb rzeczywistych nie każda forma kwadratowa jest izotropowa (takimi są oczywiście formy $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ dla dowolnego n). Liu Shao-Xue w pracy [36] pokazał, że dla każdego n istnieje jedna, z dokładnością do izomorfizmu, rzeczywista przemienna n-wymiarowa β-radykalna H-algebra.

Wiadomo (por. [37]), że jeśli ciało jest skończone, to każda forma kwadratowa stopnia większego lub równego 3 jest izotropowa. Stąd wynika, że dla wszystkich algebr nad ciałem skończonym zachodzi Stwierdzenie 3.5. Zatem wymiar dowolnej nierozkładalnej β-radykalnej lewostronnie filialnej algebry nad ciałem skończonym jest mniejszy lub równy 3.

Łatwo zauważyć, że niezerowa β-radykalna algebra nierozkładalna ma wymiar mniejszy lub równy 2 wtedy i tylko wtedy, gdy $A \simeq xF[x]/x^2F[x]$ lub $A \simeq xF[x]/x^3F[x]$. Zatem, aby opisać β-radykalne H-algebry nad ciałem skończonym wystarczy tylko jeszcze opisać algebry nierozkładalne wymiaru 3, co zrobimy w następnym stwierdzeniu.

Stwierdzenie 3.6. *Załóżmy, że A jest β-radykalną, nierozkładalną algebrą wymiaru 3 nad F. Wówczas A jest H-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) istnieją $0 \neq \alpha \in F$, $\beta \in F$ takie, że równanie $1 + \beta t + \alpha t^2 = 0$ nie ma rozwiązań w ciele F;

(ii) A ma taką bazę e_1, e_2, e_3, że $e_1^2 = e_3$, $e_2^2 = \alpha e_3$, $e_1 e_2 = 0$, $e_2 e_1 = \beta e_3$ oraz $e_i e_3 = e_3 e_i = 0$.

Dowód: Załóżmy, że A jest nierozkładalną β-radykalną H-algebrą oraz $dim_F A = 3$. Z Twierdzenia 3.3 wynika, że istnieje takie $e_1 \in A$, że $e_3 = e_1^2 \neq 0$ i $A^2 = Fe_3$. Nietrudno sprawdzić, że jeśli $dim_F A = 3$, to istnieje takie $0 \neq e_2$, że $e_1 e_2 = 0$ oraz elementy e_1, e_2, e_3 tworzą bazę A. Ponadto, ponieważ dla każdego $x \in A \setminus Fe_3$, $x^2 \neq 0$, więc istnieje taki element $0 \neq \alpha \in F$, że $e_2^2 = \alpha e_3$ i z tego, że $A^2 = Fe_3$ wynika, że istnieje takie $\beta \in F$, że $e_2 e_1 = \beta e_3$. Dlatego, że $A^3 = 0$, to $e_i e_3 = e_3 e_i = 0$ dla $i = 1, 2, 3$. Niech f będzie dowolnym elementem F i $x = e_1 + f e_2$. Oczywiście $x \in A \setminus Fe_3$. Zatem $x^2 = (e_1 + f e_2)^2 = e_1^2 + f e_1 e_2 + f^2 e_2^2 = e_3 + f\beta e_3 + f^2 \alpha e_3 = (1 + f\beta + f^2\alpha) e_3 \neq 0$. W konsekwencji $1 + \beta f + \alpha f^2 \neq 0$, a więc równanie $1 + \beta t + \alpha t^2 = 0$ nie ma rozwiązania w F.

Nietrudno zauważyć, że dowód implikacji przeciwnej można sprowadzić do pokazania, że dla dowolnych $f_1, f_2 \in F$, jeśli $(f_1 e_1 + f_2 e_2)^2 = 0$, to $f_1 = f_2 = 0$.

Zauważmy, że $(f_1 e_1 + f_2 e_2)^2 = f_1^2 e_3 + f_2 f_1 \beta e_3 + f_2^2 \alpha e_3 = (f_1^2 + f_2 f_1 \beta + f_2^2 \alpha) e_3$. Jeśli $(f_1 e_1 + f_2 e_2)^2 = 0$, to $f_1^2 + f_2 f_1 \beta + f_2^2 \alpha = 0$. Zatem jeśli $f_1 = 0$, to z faktu, że $\alpha \neq 0$ wynika, że $f_2 = 0$. Jeżeli $f_1 \neq 0$, to $1 + \frac{f_2}{f_1}\beta + (\frac{f_2}{f_1})^2 = 0$. Zatem równanie $1 + \beta t + \alpha t^2 = 0$ miałoby rozwiązanie w F (a mianowicie $\frac{f_2}{f_1}$), co jest sprzeczne z założeniem. ■

Wykorzystując Twierdzenie 3.3, Stwierdzenia 3.5 i 3.6 oraz fakt, że formy kwadratowe trzech zmiennych nad ciałami skończonymi są izotropowe (por. [37]) natychmiast otrzymujemy kompletną klasyfikację β-radykalnych H-algebr nad ciałami skończonymi.

Wniosek 3.7. *β-radykalna algebra nad ciałem skończonym F jest H-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $A \simeq B \oplus C$, gdzie $B^2 = 0$, zaś $C = 0$ lub $C \simeq xF[x]/x^3F[x]$ lub C jest izomorficzna z algebrą opisaną w Stwierdzeniu 3.6.*

3.3 Struktura lewostronnie filialnych algebr nad ciałem - przypadek ogólny

W tym paragrafie badamy dowolne lewostronnie filialne algebry nad ciałem. Otrzymamy w szczególności kompletny opis skończenie wymiarowych algebr tego typu.

Rozpoczniemy od dwóch faktów pomocniczych

Lemat 3.8. *Jeśli A jest algebrą lewostronnie filialną, to dla dowolnego idempotenta $e \in A$, $e\beta(A) = 0$ lub $ea = a$ dla każdego $a \in \beta(A)$.*

Dowód: Wykażemy najpierw, że dla dowolnego $a \in \beta(A)$, $ea = 0$ lub $ea = a$. Niech $a \in \beta(A)$. Z Twierdzenia 3.2 wynika, że $a^3 = 0$ oraz $Fa + Fa^2 <_l A$. Stąd otrzymujemy, że $ea = \alpha a + \beta a^2$ dla pewnych $\alpha, \beta \in F$.
Jeśli $\alpha = 0$, to $ea = e(ea) = \beta(ea)a = \beta^2 a^3 = 0$.
Jeśli zaś $\alpha \neq 0$ i $a^2 \neq 0$, to $\alpha a + \beta a^2 = ea = e(ea) = e(\alpha a + \beta a^2) = \alpha(\alpha a + \beta a^2) + \beta(\alpha a + \beta a^2)a = \alpha^2 a + 2\alpha\beta a^2$. Ponieważ $a^2 \neq 0$ i $a^3 = 0$, więc a i a^2 są liniowo niezależne nad ciałem F. Zatem $\alpha^2 = \alpha$ i $\beta = 2\alpha\beta$. Otrzymujemy, że $\alpha = 1$ i $\beta = 0$, a stąd $ea = a$.
Rozważmy ostatni przypadek, gdy $\alpha \neq 0$, $a \neq 0$ i $a^2 = 0$. Wówczas $ea = \alpha a$ i $ea = e(ea) = \alpha^2 a$. Stąd $\alpha = \alpha^2$, a zatem $\alpha = 1$ i ostatecznie $ea = a$.
We wszystkich przypadkach dla dowolnego $a \in \beta(A)$, $ea = a$ lub $ea = 0$.

Załóżmy, że $e\beta(A) \neq 0$. Wówczas istnieje taki element $0 \neq x \in \beta(A)$, że $ex = x$. Rozważmy dowolne $a \in \beta(A)$. Korzystając z tego co wykazaliśmy wcześniej dostajemy, że $x + ea = e(x + a) = x + a$ lub $x + ea = e(x + a) = 0$. Zauważmy, że jeśli ma miejsce drugi przypadek, to $ea = -x \neq 0$, a więc z tego co udowodniliśmy wyżej wynika, że $ea = a$. W pierwszym przypadku oczywiście $ea = a$. Zatem dla dowolnego $a \in \beta(A)$, $ea = a$, co kończy dowód. ■

Lemat 3.9. *Jeśli A jest lewostronnie filialną algebrą, to dla każdego $x \in A$ istnieją takie $y \in A$ oraz idempotent $e \in A$, że $x - xyx$, $yx - e$, $x - xe \in \beta(A)$.*

Dowód: Na podstawie Twierdzenia 3.1, $A/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną. Stąd dla każdego $x \in A$ istnieje takie $y \in A$, że $x - xyx \in \beta(A)$. Ponadto $yx + \beta(A)$ jest idempotentem w $A/\beta(A)$. Zatem na podstawie Twierdzenia 1.11 istnieje taki idempotent $e \in A$, że $yx - e \in \beta(A)$. Ostatecznie, $x - xe = x - xyx + x(yx - e) \in \beta(A)$. ■

Wykorzystując powyższe lematy możemy opisać strukturę algebr lewostronnie filialnych.

Twierdzenie 3.10. *Algebra A jest lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) *algebra $A/\beta(A)$ jest silnie regularna;*

(ii) *$\beta(A)$ jest H-algebrą;*

(iii) *zachodzi jeden z następujących warunków:*

(1) $A = l_A(\beta(A)) + \beta(A)$;

(2) $A = Fe + l_A(\beta(A)) + \beta(A)$, *gdzie* $\beta(A) \neq 0$, *zaś* e *jest idempotentem algebry* A *takim, że* $eb = b$ *dla każdego* $b \in \beta(A)$.

Dowód: Załóżmy, że A jest algebrą lewostronnie filialną. Z Twierdzenia 3.1 wynika, że $A/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną, natomiast z Twierdzenia 3.2, że $\beta(A)$ jest H-algebrą. Zatem warunki (i) oraz (ii) są spełnione. Pozostaje więc wykazać, że A spełnia *(1)* lub *(2)* w (iii).

Jeśli $\beta(A) = 0$, to oczywiście $A = l_A(\beta(A))$ i warunek *(1)* zachodzi. Załóżmy więc, że istnieje $0 \neq a \in \beta(A)$. Możemy założyć, że $a^2 = 0$. Na mocy Twierdzenia 3.2, $\beta(A) \subseteq l_A(a)$. Ponieważ A jest algebrą lewostronnie filialną, więc $Fa <_l A$. Zauważmy, że odwzorowanie $f : A \longrightarrow Fa$ określone za pomocą wzoru $f(x) = xa$ jest przekształceniem F-liniowym. Oczywiście $kerf = l_A(a)$ i z twierdzenia o izomorfizmie (dla przekształceń liniowych) $A/kerf \simeq Aa \subseteq Fa$. Ponadto $dim_F(Aa) \leqslant dim(Fa) = 1$. Stąd $dim_F(Aa) = 0$, gdy $l_A(a) = A$ lub $codim_F(l_A(a)) = 1$, gdy $dim_F(Aa) = 1$ (gdzie $codim_F(l_A(a))$ rozumiemy jako wymiar przestrzeni ilorazowej $A/l_A(a)$). Jeśli zachodzi drugi przypadek, to istnieje takie $x \in A \backslash l_A(a)$, że $Fx + l_A(a) = A$. Na mocy Lematu 3.9 istnieje taki idempotent $e \in A$, że $x - xe \in \beta(A)$. Ponieważ $\beta(A)a = 0$, więc $(x - xe)a = 0$. Stąd, jak również z tego, że $xa \neq 0$ wynika, że $ea \neq 0$. Zatem z Lematu 3.8, $eb = b$ dla każdego $b \in \beta(A)$. Ponadto $e \notin l_A(a)$, czyli $A = Fe + l_A(a)$.

Z tego co uzyskaliśmy wyżej wynika, że aby udowodnić, że A spełnia *(1)* lub *(2)* wystarczy wykazać, że $l_A(a) \subseteq l_A(\beta(A)) + \beta(A)$. Niech $s \in l_A(a)$. Z Lematu 3.9 otrzymujemy, że istnieją $y \in A$ i idempotent $g \in A$ takie, że $s - sys \in \beta(A)$ i $ys - g \in \beta(A)$. Również $sys - sg = s(ys - g) \in \beta(A)$. Ponieważ $\beta(A)a = 0$, $sa = 0$ oraz $ys - g \in \beta(A)$, więc $-ga = ysa - ga = (ys - g)a = 0$. Z Lematu 3.8 wynika, że $g\beta(A) = 0$. Zatem $sg \in l_A(\beta(A))$. Z powyższych zależności otrzymujemy, że $s = s - sys + sys - sg + sg \in l_A(\beta(A)) + \beta(A)$. Każda lewostronnie filialna algebra spełnia więc warunki $(i) - (iii)$.

Udowodnimy teraz, że każda algebra spełniająca warunki $(i) - (iii)$ jest lewostronnie fililana. Niech $J <_l L <_l A$. Z Twierdzenia 3.2 oraz założeń o A wynika, że $J \cap \beta(A) <_l A$. Weźmy $j \in J$. Ponieważ algebra $A/\beta(A)$ jest silnie regularna, więc istnieją takie $x \in A$ i $b \in \beta(A)$, że $j - xj^2 = b$. Zauważmy, że $j - xj^2 \in J$, skąd wynika, że $b \in J \cap \beta(A)$. Otrzymujemy, że $Axj^2 \subseteq J$ i $Ab \subseteq J$. W konsekwencji $Aj \subseteq J$. Pokazaliśmy zatem, że A jest algebrą lewostronnie filialną. ■

Oczywiście dla algebr prawostronnie filialnych zachodzi dualna wersja Twierdzenia 3.10. Warunki (i) oraz (ii) są autodualne, natomiast warunki *(1)* i *(2)* w (iii) przybierają następującą postać:

(1′) $A = r_A(\beta(A)) + \beta(A)$;

(2′) $A = Fe + r_A(\beta(A)) + \beta(A)$, gdzie $\beta(A) \neq 0$, zaś e jest takim elementem idempotentnym algebry A, że $be = b$ dla każdego $b \in \beta(A)$.

Teraz opiszemy strukturę algebr spełniających warunek (iii) *(2)* Twierdzenia 3.10.

Twierdzenie 3.11. *Lewostronnie filialna algebra A spełnia warunek (iii) (2) Twierdzenia 3.10 wtedy i tylko wtedy, gdy* $A \simeq \begin{pmatrix} S^\star & M \\ 0 & T \end{pmatrix}$, *gdzie S jest lewostronnie filialną algebrą postaci $S = l_S(\beta(S)) + \beta(S)$ i $\beta(S) \neq 0$, T jest algebrą silnie regularną, M jest $(S^\star, T)$-bimodułem, który jest unitarny jako lewostronny $S^\star$-moduł i $SM = 0$.*

Dowód: Załóżmy, że algebra A spełnia warunek (iii) *(2)* Twierdzenia 3.10. Rozważmy $Fe + S$, gdzie $S = el_A(\beta(A))e + e\beta(A)e$. Oczywiście dla każdego $s \in S$, $es = se = s$. Ponieważ $S \subseteq l_A(\beta(A)) + \beta(A)$ oraz $\beta(A) \neq 0$ i $eb = b$ dla dowolnego $b \in \beta(A)$, więc e nie należy do S. Istotnie, gdyby $e = u + v$, gdzie $u \in l_A(\beta(A))$ oraz $v \in \beta(A)$, to dla dowolnego $0 \neq b \in \beta(A)$ byłoby

$b = eb = (u+v)b = vb$ i dalej $b = vb = v^2 b = \ldots = 0$, gdyż v jest elementem nilpotentnym. Wynika stąd oraz z założonej postaci A, że $eAe \simeq S^\star$. Dalej zauważmy, że $e\beta(A)e \lhd S$, a stąd $\beta(eAe) = e\beta(A)e \subseteq \beta(S)$. Ponieważ S jest podalgebrą A, zaś A jest algebrą lewostronnie filialną, to ze Stwierdzenia 2.15 *(iii)* wynika, że $\beta(S)$ jest ideałem A, a więc $\beta(S) \subseteq \beta(A)$. Ponadto $\beta(S)$ jest zawarte w eAe, a zatem $\beta(S) \subseteq \beta(A) \cap eAe = e\beta(A)e$ co pokazuje, że $\beta(S) = e\beta(A)e$. Zauważmy, że $el_A(\beta(A))ee\beta(A)e \subseteq el_A(\beta(A))\beta(A)e = 0$, a więc $el_A(\beta(A))e \subseteq l_S(\beta(S))$. Zatem $S = l_S(\beta(S)) + \beta(S)$.
Zauważmy, że $((1-e)Ae)^2 = 0$, gdzie $(1-e)x$ rozumiemy jako $x - ex$. Z lewostronnej filialności algebry A wynika, że $(1-e)Ae \subseteq \beta(A)$. Z założenia, że dla każdego elementu $b \in \beta(A)$, $eb = b$ oraz z tego, że $e(1-e)A = 0$ otrzymujemy, że $(1-e)A \cap \beta(A) = 0$. W szczególności $(1-e)Ae \subseteq (1-e)Ae \cap \beta(A) = 0$ oraz $(1-e)A(1-e) \cap \beta(A) = 0$. Rozważmy zbiór $M = eA(1-e)$. Łatwo zauważyć, że $M^2 = 0$, a więc $M \subseteq \beta(A)$ i na mocy Twierdzenia 3.2, $\beta(A)M = 0$. To zaś implikuje, że $SM = 0$. Z rozkładu Pierce'a (por. Stwierdzenie 1.10), $A = eAe + (1-e)Ae + eA(1-e) + (1-e)A(1-e)$. Ponieważ $(1-e)Ae = 0$ oraz $eA(1-e) \in \beta(A)$, więc $A/\beta(A) = (eAe + \beta(A))/\beta(A) \oplus ((1-e)A(1-e) + \beta(A))/\beta(A)$. Mamy $\beta(eAe) = e\beta(A)e$. Zatem $(eAe + \beta(A))/\beta(A) \simeq (eAe)/(eAe \cap \beta(A)) = (eAe)/(e\beta(A)e) \simeq \bar{e}(A/\beta(A))\bar{e}$, gdzie $\bar{e}$ jest idempotentem w $A/\beta(A)$. Również $((1-e)A(1-e) + \beta(A))/\beta(A) \simeq ((1-e)A(1-e))/(\beta(A) \cap (1-e)A(1-e)) = (1-e)A(1-e)$. Zatem $A/\beta(A) \simeq e(A/\beta(A))e \oplus (1-e)A(1-e)$. Ponieważ $T = (1-e)A(1-e)$ jest izomorficzne z ideałem w $A/\beta(A)$, więc T jest algebrą silnie regularną. Oczywiście M jest $(S^\star, T)$-bimodułem, który jest unitarny jako lewostronny $S^\star$-moduł. Wykorzystując własności rozkładu Pierce'a dla algebry A (por. komentarz po Stwierdzeniu 1.10) otrzymujemy, że $A \simeq \begin{pmatrix} S^\star & M \\ 0 & T \end{pmatrix}$, co należało wykazać.

Udowodnimy teraz implikację przeciwną. Oznaczmy $\begin{pmatrix} S^\star & M \\ 0 & T \end{pmatrix}$ przez W. Łatwo zauważyć, że $\beta(W) = \begin{pmatrix} \beta(S) & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \beta(S) \oplus M^0$, gdzie M^0 jest algebrą z zerowym mnożeniem określonym na M. Oczywistym jest, że $W/\beta(W)$ jest algebrą silnie regularną.
Ponadto $l_W(\beta(W)) = \begin{pmatrix} l_S(\beta(S)) & M \\ 0 & T \end{pmatrix}$. Z tego, że $S = l_S(\beta(S)) + \beta(S)$ otrzymujemy że $W = F\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + l_W(\beta(W)) + \beta(W)$.
Zatem $W = \begin{pmatrix} S^\star & M \\ 0 & T \end{pmatrix}$ spełnia warunek *(2)* Twierdzenia 3.10. ■

Możemy również opisać bardziej dokładnie strukturę algebr spełniających warunek *(iii) (1)* Twierdzenia 3.10 przy założeniu, że $A/\beta(A)$ jest algebrą skończenie wymiarową.

Twierdzenie 3.12. *Niech A będzie algebrą, dla której $dim_F(A/\beta(A)) < \infty$. Algebra A spełnia warunek (iii) (1) Twierdzenia 3.10 wtedy i tylko wtedy, gdy $A \simeq \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \oplus B$, gdzie T jest skończenie wymiarową algebrą silnie regularną z jedynką, M jest prawostronnym T-modułem unitarnym, zaś B jest nilpotentną algebrą lewostronnie filialną.*

Dowód: Załóżmy, że A spełnia warunek *(iii) (1)* Twierdzenia 3.10 oraz $dim_F(A/\beta(A)) < \infty$. Ponieważ algebra A jest lewostronnie filialna, więc na podstawie Twierdzenia 3.2, $(\beta(A))^3 = 0$. Z założenia $A = l_A(\beta(A)) + \beta(A)$, dlatego też $A^2\beta(A) = 0$.
Ponieważ $dim_F(A/(\beta(A))) < \infty$, więc z Twierdzenia Wedderburna wynika, że $A/\beta(A)$ ma jedynkę f. Z Twierdzenia 1.11, w A istnieje taki idempotent e, że $f = e + \beta(A)$. Wówczas $A = eA + \beta(A)$. Zauważmy, że jeśli $ex \in eA \cap \beta(A)$ dla $x \in \beta(A)$, to $e\beta(A) = e^2\beta(A) \subseteq A^2\beta(A)$. Ponieważ z założenia $A = l_A(\beta(A)) + \beta(A)$ i z lewostronnej filialności A na podstawie Twierdzenia 3.2, $\beta(A)^3 = 0$, więc $A^2\beta(A) = 0$. W efekcie $e(ex) = ex$ i $ex = 0$. Stąd wynika, że $eA \cap \beta(A) = 0$. To oraz silna regularność $A/\beta(A)$ implikują, że eA jest algebrą silnie regularną. Jak wiadomo idempotenty w algebrach zredukowanych są centralne (Stwierdzenie 1.32), wobec tego e jest jedynką eA. Zatem $eA = eAe$.
Rozważmy teraz $B = \{r - re \mid r \in \beta(A)\}$. Jest to podalgebra A. Oczywiście $B \subseteq \beta(A)$. Z lewostronnej filialności algebry A na podstawie Twierdzenia 3.2 wynika, że $B \lhd \beta(A)$. Ponadto $eAB = BeA = 0$, a więc $B \lhd A$. Łatwo sprawdzić, że również $eA + \beta(A)e \lhd A$. Oczywiście $(eA + \beta(A)) \cap B = 0$ i $A = eA + \beta(A)e + B$. Stąd $A = (eA + \beta(A)e) \oplus B$. To w szczególności pokazuje, że $M = \beta(A)e$ jest prawostronnym T-modułem unitarnym, gdzie $T = eA$. Teraz łatwo zauważyć, że $A \simeq \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \oplus B$.
Implikacja w stronę przeciwną jest oczywista. ∎

Wykorzystując opis struktury lewostronnie filialnych algebr nad ciałem (Twierdzenie 3.10), na zakończenie tego paragrafu udowodnimy następujące stwierdzenie zapowiedziane w części 2.5.1

Stwierdzenie 3.13. *Jeśli A jest algebrą lewostronnie filialną, to również algebra $A^\star$ jest lewostronnie filialna.*

Dowód: Wykażemy lewostronną filialność algebry $A^\star$ sprawdzając warunki Twierdzenia 3.10. Oczywiście $\beta(A) = \beta(A^\star)$. Ponieważ A jest algebrą lewostronnie filialną, więc na mocy Twierdzenia 3.10, $\beta(A^\star)$ jest H-algebrą. Ponadto $A/\beta(A) \lhd A^\star/\beta(A^\star)$, a stąd $(A^\star/\beta(A^\star))/(A/\beta(A)) \simeq F$. Ponieważ F oraz $A/\beta(A)$ są algebrami silnie regularnymi, więc również $A^\star/\beta(A^\star)$ jest algebrą silnie regularną. Załóżmy teraz, że algebra A spełnia warunek *(iii) (1)* Twierdzenia 3.10. Wówczas $A = l_A(\beta(A)) + \beta(A)$, a stąd $A^\star = A + F \cdot 1 = l_A(\beta(A^\star)) + \beta(A^\star) + Fe$, gdzie $e = 1$. Zatem $A^\star$ spełnia warunek *(iii) (2)* Twierdzenia 3.10. Zostaje pokazać, że jeśli algebra A spełnia warunek *(2)*, to algebra $A^\star$ spełnia warunek *(1)* tegoż twierdzenia. Zauważmy, że $1 - e \in l_{A^\star}(\beta(A^\star))$, bowiem dla każdego $b \in \beta(A^\star)$, $b(1-e) = b - be = 0$. Oczywiście $A^\star = A + F \cdot 1$ i dalej $A^\star = Fe + F(1-e) + A$. Ponieważ $A = Fe + l_A(\beta(A)) + \beta(A)$, więc $A^\star \subseteq Fe + l_{A^\star}(\beta(A^\star) + l_A(\beta(A)) + \beta(A) \subseteq Fe + l_{A^\star}(\beta(A)) + \beta(A^\star)$. Zatem $A^\star = Fe + l_{A^\star}(\beta(A^\star) + \beta(A^\star)$. Ostatecznie $A^\star$ jest algebrą lewostronnie filialną. ■

3.4 Klasyfikacja algebr, które są filialne i lewostronnie filialne

W poprzednich paragrafach zostało pokazane, że półpierwsze algebry lewostronnie filialne są filialne oraz, że β-radykalne algebry są lewostronnie filialne wtedy i tylko wtedy, gdy są filialne.

Przykładem półpierwszej algebry filialnej, która nie jest lewostronnie filialna jest algebra 2×2-macierzy nad F. Wiadomo również, że w ogólnym przypadku lewostronnie filialna algebra nie musi być filialna, co pokazuje Przykład 2.49.

Oczywistym jest, że algebry, które są jednocześnie lewostronnie i prawostronnie filialne, są również filialne. W przypadku algebr nad ciałem otrzymujemy więcej.

Twierdzenie 3.14. *Każda algebra A, która jest lewostronnie filialna i filialna jest także prawostronnie filialna.*

Dowód: Załóżmy, że $K <_r I <_r A$. Oczywiście $K \cap \beta(A)$ jest podalgebrą w $\beta(A)$. Zatem z Twierdzenia 3.2 wynika, że $K \cap \beta(A)$ jest ideałem w $\beta(A)$, a ponieważ A jest algebrą filialną, więc $K \cap \beta(A) \lhd A$. Rozważając algebrę ilorazową $A/(K \cap \beta(A))$ możemy założyć, że $K \cap \beta(A) = 0$. Ponieważ $A/\beta(A)$ jest algebrą półpierwszą lewostronnie filialną, więc na podstawie Twierdzenia 3.1, A jest algebrą silnie regularną. Ponadto $(K+\beta(A))/\beta(A) <_r$

$(I+\beta(A))/\beta(A) <_r A/\beta(A)$ i $(K+\beta(A))/\beta(A) \simeq K/(K\cap\beta(A)) = K$ oraz $K = K^2$. Zatem $KA = K^2A \subseteq KI \subseteq K$, co należało dowieść. ■

Analogicznie dowodzimy, że każda algebra, która jest prawostronnie filialna i filialna jest również lewostronnie filialna.

Teraz opiszemy strukturę algebr, które są filialne i lewostronnie filialne. Rozpoczniemy od następującego stwierdzenia, w którym $\mathcal{S}(A)$ oznacza silnie regularny radykał algebry A.

Stwierdzenie 3.15. *Jeśli A jest taką algebrą, że $A\beta(A) = 0 = \beta(A)A$ i algebra $A/\beta(A)$ jest silnie regularna, to $A = \mathcal{S}(A) \oplus \beta(A)$.*

Dowód: Oczywistym jest, że $\mathcal{S}(A) \cap \beta(A) = 0$. Niech $a \in A$. Ponieważ $A/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną i $(aA+\beta(A))/\beta(A)$ jest jej prawostronnym ideałem głównym, więc istnieje taki idempotent $t \in A/\beta(A)$, że $(aA+\beta(A))/\beta(A) = t\cdot A/\beta(A)$ (por. Stwierdzenie 1.29). Ponadto z tego, że $\beta(A)$ jest nil ideałem wynika, że idempotent t możemy podnieść do idempotenta e w A tzn. istnieje $A \ni e = e^2$, że $t = e+\beta(A)$. Stąd otrzymujemy, że $eA+\beta(A) = aA+\beta(A)$. Zauważmy, że jeśli dla pewnego $x \in A$, $ex \in \beta(A)$, to $ex = e(ex) \in A\beta(A) = 0$. Zatem $eA \cap \beta(A) = 0$. Z założenia, że $A/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną wynika, że $(eA+\beta(A))/\beta(A) \lhd A/\beta(A)$. Stąd $A(eA) \subseteq eA+\beta(A)$, a ponieważ $eA \simeq (eA+\beta(A))/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną, więc $A(eA) = A(eA)^2 = (AeA)(eA) \subseteq (eA+\beta(A))(eA) \subseteq eA$. Zatem $eA \lhd A$ i $eA \subseteq \mathcal{S}(A)$. Ostatecznie $a \in eA+\beta(A) \subseteq \mathcal{S}(A)+\beta(A)$, co dowodzi, że $A = \mathcal{S}(A) \oplus \beta(A)$. ■

Podamy teraz twierdzenie opisujące strukturę lewostronnie i prawostronnie filialnych algebr (równoważnie, filialnych i lewostronnie (prawostronnie) filialnych).

Twierdzenie 3.16. *Algebra A jest lewostronnie i prawostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta(A)$ jest H-algebrą i zachodzi jeden z natępujących warunków:*

(i) $A = \mathcal{S}(A) \oplus \beta(A)$;

(ii) $A = Ff + (\mathcal{S}(A) \oplus \beta(A))$, *gdzie* $\beta(A) \neq 0$ *i* $f \in A$ *jest takim idempotentem, że* $fb = 0$ *i* $bf = b$ *dla każdego* $b \in \beta(A)$;

(iii) $A = Fe + (\mathcal{S}(A) \oplus \beta(A))$, *gdzie* $\beta(A) \neq 0$ *i* $e \in A$ *jest takim idempotentem, że* $be = 0$ *i* $eb = b$ *dla każdego* $b \in \beta(A)$;

(iv) $A = Fe + Ff + (\mathcal{S}(A) \oplus \beta(A))$, *gdzie* $\beta(A) \neq 0$ *i* $e, f \in A$ *są takimi idempotentami, że* $be = 0$ *i* $eb = b$ *oraz* $bf = b$ *i* $fb = 0$ *dla każdego* $b \in \beta(A)$.

Dowód: Załóżmy, że A jest algebrą prawostronnie i lewostronnie filialną. Na podstawie Twierdzenia 3.10 otrzymujemy, że $A/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną, $\beta(A)$ jest H-algebrą oraz zachodzi jeden z warunków

(1) $A = l_A(\beta(A)) + \beta(A)$

lub

(2) $A = Fe + l_A(\beta(A)) + \beta(A)$, gdzie $\beta(A) \neq 0$ i e jest takim idempotentem algebry A, że $eb = b$ dla każdego $b \in \beta(A)$.

Załóżmy na początku, że A spełnia warunek *(1)*.
Oczywiście $I = l_A(\beta(A)) \lhd A$ oraz $\beta(I) = I \cap \beta(A)$. Z Twierdzenia 1.21 wynika, że $\mathcal{S}(I) \subseteq \mathcal{S}(A)$. Ponadto $\mathcal{S}(A) = (\mathcal{S}(A))^3 \subseteq (I + \beta(A))^3 \subseteq I + (\beta(A))^3 = I$. Zatem $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(I)$. Oczywiście, $I/\beta(I)$ jest algebrą silnie regularną oraz $I\beta(I) = 0$. Jeśli dodatkowo założymy, że $\beta(I)I = 0$, to ze Stwierdzenia 3.15 otrzymamy, że $I = \mathcal{S}(I) \oplus \beta(I)$. Z założenia $A = I + \beta(A) = \mathcal{S}(I) + \beta(I) + \beta(A) = \mathcal{S}(A) + \beta(A)$ oraz $\mathcal{S}(A) \cap \beta(A) = 0$, dlatego też $A = \mathcal{S}(A) \oplus \beta(A)$, co dowodzi (i).
Załóżmy teraz, że $\beta(I)I \neq 0$. Ponieważ I jest ideałem A, więc I jest algebrą lewostronnie i prawostronnie filialną. Zatem z dualnej wersji Twierdzenia 3.10 wynika, że I spełnia warunek *(1)* lub *(2)*. Załóżmy najpierw, że spełnia *(1)*, czyli $I = r_I(\beta(I)) + \beta(I)$. Wówczas $\beta(I)I = \beta(I)(r_I(\beta(I)) + \beta(I)) = \beta(I)r_I(\beta(I)) + (\beta(I))^2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem I spełnia warunek *(2)*, a więc $I = Ff + r_I(\beta(I)) + \beta(I)$, gdzie $\beta(I) \neq 0$ oraz $f \in I$ jest takim idempotentem, że $bf = b$ dla każdego $b \in \beta(I)$. Niech teraz $K = r_I(\beta(I))$. Zauważmy, że $K \lhd I$ oraz $\beta(K) \subseteq \beta(I)$, a więc $\beta(K)K = 0$. Ponadto, $K \lhd A$ oraz $\beta(K) \subseteq \beta(A)$ i $K \subseteq I$, więc $K\beta(K) \subseteq K\beta(A) \subseteq I\beta(A) = l_A(\beta(A))\beta(A) = 0$. Zatem ze Stwierdzenia 3.15, $K = \mathcal{S}(K) \oplus \beta(K)$. Stąd $I = Ff + \mathcal{S}(K) + \beta(K) + \beta(I) \subseteq Ff + \mathcal{S}(I) + \beta(I)$. Ponadto $\mathcal{S}(I) \cap \beta(I) = 0$, więc $I = Ff + (\mathcal{S}(I) \oplus \beta(I))$ dla takiego idempotenta $f \in I$, że $bf = b$ dla $b \in \beta(I)$. Ponieważ A jest algebrą prawostronnie filialną, więc na podstawie dualnej wersji Lematu 3.8, dla każdego idempotenta $f \in A$, $fb = b$ dla dowolnego $b \in \beta(A)$. Z założenia A spełnia *(1)*, więc $A = I + \beta(A) = (Ff + \mathcal{S}(I) + \beta(I) + \beta(A) \subseteq Ff + \mathcal{S}(A) + \beta(A)$. Oczywiście $\mathcal{S}(A) \cap \beta(A) = 0$, więc $A = Ff + (\mathcal{S}(A) \oplus \beta(A))$, a zatem spełniony jest warunek (ii).

Załóżmy teraz, że algebra A spełnia warunek *(2)*, a więc $A = Fe + I + \beta(A)$, gdzie $\beta(A) \neq 0$ oraz $e \in A$ jest takim idempotentem, że $eb = b$ dla $b \in \beta(A)$. W pierwszej części dowodu pokazaliśmy, że $\mathcal{S}(I + \beta(A)) = \mathcal{S}(I)$.

Na podstawie Twierdzenia 3.2 dla każdego $x \in \beta(A)$ jeżeli $x^2 = 0$, to $(I + \beta(A))x = 0$. Stąd dla pewnego $\alpha \in F$ i $t \in I + \beta(A)$ jeśli $u = \alpha e + t \in \mathcal{S}(A)$, to $\alpha x = \alpha ex + tx = \alpha ex = ux \in \mathcal{S}(A) \cap \beta(A) = 0$. Otrzymujemy więc, że $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(I + \beta(A)) = \mathcal{S}(I)$. Teraz zaś używając tych samych argumentów wykorzystywanych przy założeniu warunku (1) dla $I + \beta(A)$ otrzymujemy, że algebra A spełnia warunek (iii) lub (iv).

Jeśli zaś A spełnia warunki (i), (ii) lub (iii), to korzystając z Twierdzenia 3.10 lub jego dualnej wersji, natychmiast otrzymujemy, że algebra A jest lewostronnie i prawostronnie filialna. Jeśli zaś A spełnia warunek (iv), to $l_A(\beta(A)) \supseteq Ff + \mathcal{S}(A)$ i $eb = b$ dla każdego $b \in \beta(A)$. Zatem na mocy Twierdzenia 3.10, A jest algebrą lewostronnie filialną. Podobnie, $r_A(\beta(A)) \supseteq Ff + \mathcal{S}(A)$ i $bf = b$ dla każdego $b \in \beta(A)$. Wykorzystując więc dualną wersję Twierdzenia 3.10 otrzymujemy, że A jest algebrą prawostronnie filialną, co kończy dowód twierdzenia. ■

Rozdział 4

Filialne i lewostronnie filialne pierścienie

W tym rozdziale zajmiemy sie dokładniej zbadaniem filialności i lewostronnej filialności pierścieni, czyli $\mathbb{Z}$-algebr. Wykażemy, że pewne wyniki uzyskane w przypadku algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym K z 1 można w tym przypadku wzmocnić, ale jednak nie aż tak jak było to możliwe w przypadku, gdy K jest ciałem.

Rozdział składa się z dwóch paragrafów. W pierwszym bada się filialność i lewostronną filialność pewnych specyficznych pierścieni, tzw. T-pierścieni. Wyodrębnienie tej klasy pozwala na ujednolicenie i uogólnienie wyników na temat filialności i lewostronnej filialności pierścieni uzyskanych w różnych pracach. Otrzymujemy w szczególności rozszerzenie wyników Tzintzisa z [46, 47]. Badania te prowadzą do opisu pewnych wyróżnionych klas pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych. Pokazuje się mianowicie, że w obrębie T-pierścieni, pierścienie filialne pokrywają się z klasą $\mathcal{C}$, zaś lewostronnie filialne z klasą $\{R \mid Ra = Ra^2$ dla każdego $a \in R\}$. Otrzymujemy również opis filialnych i lewostronnie filialnych pierścieni, które są algebrami nad ciałem, które nie jest skończonym ciałem prostym. Wyniki tego typu w przypadku pierścieni filialnych były uzyskane w pracach [5, 8]. Tutaj przedstawiamy ich wzmocnienie i ujednolicenie. Dzięki badaniom nad T-pierścieniami otrzymujemy też opis struktury pierścieni, w których żaden niezerowy obraz homomorficzny nie jest filialny (lewostronnie filialny). Takie właśnie pierścienie były badane przez Tzintzisa w [46, 47]. Tutaj uzyskujemy rozszerzenia i inne dowody jego wyników.

Paragraf drugi tego rozdziału dotyczy związków pomiędzy klasami pierścieni filialnych, lewostronnie filialnych i prawostronnie filialnych. Jak wiemy z wyników przedstawionych w Rozdziale 2, ogólnie żadna z tych klas nie pokrywa się z inną. Więcej uzyskaliśmy w przypadku algebr nad ciałem. W Rozdziale 3 między innymi zostało pokazane, że pojęcia filialności, lewostronnej i prawostronnej filialności są równoważne w obrębie algebr β-radykalnych. Zostało tam również udowodnione, że z filialności i lewostronnej filialności algebr nad ciałem wynika ich prawostronna filialność. Sporą niespodzianką (w kontekście wcześniej otrzymanych wyników) są przykłady dowodzące, że implikacja ta nie zachodzi w przypadku pierścieni.

4.1 T-pierścienie i ich zastosowania

W paragrafie tym badamy filialność i lewostronną filialność pewnej klasy pierścieni, które nazywamy T-pierścieniami. Uogólniają one pierścienie badane przez Tzintzisa w [46, 47]. Głównym uzyskanym wynikiem jest Twierdzenie 4.5, w którym uzyskujemy opis pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych z tej klasy. Stosując ten opis jesteśmy w stanie uogólnić i ujednolicić dowody wyników otrzymanych w różnych pracach.

4.1.1 Charakteryzacja i własności T-pierścieni

Rozpoczniemy od definicji i pewnych charakteryzacji T-pierścieni.

Definicja 4.1. Pierścień R nazywamy T**-pierścieniem**, jeśli dla dowolnej liczby pierwszej p, R nie można odwzorować homomorficznie ani na pierścień $\mathbb{Z}_p$, ani na pierścień $\mathbb{Z}_p^0$.

Oczywiście dla dowolnej liczby pierwszej p, $\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{Z}_p^0 \simeq p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Zatem, zarówno $\mathbb{Z}_p$ jak i $\mathbb{Z}_p^0$ są obrazami homomorficznymi ideałów $\mathbb{Z}$. Jeżeli więc R nie można odwzorować homomorficznie na niezerowy obraz homomorficzny ideału pierścienia $\mathbb{Z}$, to nie można go też odwzorować ani na $\mathbb{Z}_p$, ani na $\mathbb{Z}_p^0$, a więc R jest T-pierścieniem.

Na odwrót, grupa addytywna obrazu homomorficznego A dowolnego ideału pierścienia $\mathbb{Z}$ jest cykliczna. Pierścień A można więc odwzorować homomorficznie na $\mathbb{Z}_p$ lub na $\mathbb{Z}_p^0$ dla pewnej liczby pierwszej p.

Zatem otrzymujemy, że R jest T-pierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy nie można go odwzorować homomorficznie na niezerowy obraz homomorficzny ideału pierścienia $\mathbb{Z}$. Ta charakteryzacja T-pierścieni pokrywa się z warunkiem 2 Lemma 2.3 w pracy [47]. Wobec tego pierścienie rozważane w Lemma 2.3 pracy [47] są T-pierścieniami. Wynik ten odgrywał kluczową rolę w badaniach prowadzonych przez Tzintzisa w [47]. Poniżej uzyskamy jego wzmocnienie (por. Stwierdzenie 4.3).

Podamy teraz bardziej specyficzną charakteryzację T-pierścieni, dzięki której można uogólnić wyniki otrzymane przez Tzintzisa.

Stwierdzenie 4.2. *R jest T-pierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego właściwego lewostronnego ideału L w R grupa addytywna lewostronnego R-modułu R/L nie jest cykliczna.*

Dowód: Implikacja ($\Leftarrow$) jest oczywista. Załóżmy więc, że L jest właściwym ideałem lewostronnym pierścienia R i addytywna grupa R/L jest cykliczna. Wynika stąd w szczególności, że istnieje taki lewostronny ideał maksymalny M pierścienia R, że $L \subseteq M$. Oczywiście grupa addytywna R-modułu R/M jest również cykliczna.

Jeżeli $R^2 \subseteq M$, to $M \lhd R$ i wówczas $R/M \simeq \mathbb{Z}_p^0$ dla pewnej liczby pierwszej p, co jest sprzeczne z założeniem, że R jest T-pierścieniem. Zatem $R^2 \nsubseteq M$. Wówczas z maksymalności M wynika, że $R = M + R^2$, a więc $R(R/M) = R/M$. Niech a będzie generatorem grupy addytywnej R/M, to znaczy $R/M = \mathbb{Z}a$. Ponieważ R/M jest R-modułem prostym i $R(R/M) = R/M$, więc $Ra = R/M$. Ponadto $A = \{x \in R \mid xa = 0\} = \{x \in R \mid x\mathbb{Z}a = 0\} = \{x \in R \mid x(R/M) = 0\}$. Oczywiście $A \lhd R$ oraz A jest jądrem homomorfizmu R-modułów $f : R \to Ra$ określonego za pomocą wzoru $f(x) = xa$, a więc mamy następujące równości i izomorfizmy R-modułów $R/M = Ra \simeq R/\{x \in R \mid xa = 0\} = R/A$. Stąd oraz z wcześniejszych obserwacji wynika, że grupa addytywna pierścienia R/A jest cykliczna oraz, że jest to pierścień prosty i idempotenty. To łatwo dowodzi, że pierścień ten jest izomorficzny z $\mathbb{Z}_p$ dla pewnej liczby pierwszej p, co jest sprzeczne z założeniem, że R jest T-pierścieniem. ■

Stwierdzenie 4.3. *Załóżmy, że R jest T-pierścieniem. Jeśli dla pewnego $a \in R$ i liczby naturalnej $n \geqslant 2$, $Ra^{n-1} \subseteq \mathbb{Z}a^{n-1} + R^\star a^n$, to $Ra^{n-1} = Ra^n$.*

Dowód: Zauważmy, że $R^\star a^n \subseteq Ra^{n-1}$. Oczywiście addytywna grupa ilorazowa $(R^\star a^n + \mathbb{Z}a^{n-1})/(R^\star a^n)$ jest cykliczna. Z założenia $Ra^{n-1} \subseteq \mathbb{Z}a^{n-1} + R^\star a^n$, mamy inkluzję grup addytywnych $(Ra^{n-1})/(R^\star a^n) \subseteq (R^\star a^n + \mathbb{Z}a^{n-1})/(R^\star a^n)$. Zatem grupa addytywna R-modułu $Ra^{n-1}/R^\star a^n$ jest cykliczna. Odwzorowanie $f(x) = xa^{n-1} + R^\star a^n$ jest epimorfizmem R-modułu R na $Ra^{n-1}/R^\star a^n$. Jądro tego epimorfizmu $kerf = \{x \in R \mid xa^{n-1} \in R^\star a^n\}$ jest lewostronnym ideałem w R. Ponieważ $(R^\star a^n + \mathbb{Z}a^{n-1})/R^\star a^n \simeq \mathbb{Z}a^{n-1}/(R^\star a^n \cap \mathbb{Z}a^{n-1})$, więc grupa addytywna R-modułu $R/kerf$ jest cykliczna. Jednak R jest T-pierścieniem, dlatego też na podstawie Stwierdzenia 4.2, $R = kerf$ i $Ra^{n-1} = R^\star a^n = \mathbb{Z}a^n + Ra^n$. Stąd wynika, że grupa addytywna R-modułu Ra^{n-1}/Ra^n jest cykliczna. Teraz odwzorowanie $g : R \to Ra^{n-1}/Ra^n$ zdefiniowane za pomocą wzoru $g(x) = xa^{n-1} + Ra^n$ jest epimorfizmem R-modułów. Jądro $kerg$ jest lewostronnym ideałem R i grupa addytywna R-modułu $R/kerg$ jest cykliczna. Ponieważ R jest T-pierścieniem, więc $kerg = R$. Zatem $Ra^{n-1} = Ra^n$, co należało dowieść. ■

W Lemma 2.3 z [47] uzyskuje się przy tych samych założeniach, co w Stwierdzeniu 4.3, że $Ra^{n-1} \subseteq R^{\star}a^n$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Zauważmy, że jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $R = x\mathbb{Z}_p[x]/x^3\mathbb{Z}_p[x]$, to dla każdego $a \in R$, $Ra = R^{\star}a^2$. Jednak $R^2 = R(x+x^3\mathbb{Z}_p[x]) \neq R(x+x^3\mathbb{Z}_p[x])^2 = R^3 = 0$. Wynik uzyskany w Stwierdzeniu 4.3 jest więc silniejszy niż w Lemma 2.3 z [47].

Klasa T-pierścieni jest obszerna. Należą do niej na przykład idempotentne pierścienie radykalne w sensie Jacobsona. Zauważmy też, że na przykład dla dowolnego pierścienia idempotentnego R, $M_n(R)$, gdy $n \geqslant 2$ jest T-pierścieniem. Istotnie z idempotentności R wynika, że pierścień $M_n(R)$ jest także idempotentny, a więc nie można $M_n(R)$ odwzorować homomorficznie na $\mathbb{Z}_p^0$. Gdyby $M_n(R)$ można było odwzorować homomorficznie na $\mathbb{Z}_p$, to $M_n(R)$ zawierałby ideał I taki, że $M_n(R)/I \simeq \mathbb{Z}_p$. Oczywiście ideał I jest pierwszy, więc ze Stwierdzenia 1.16 (*iii*) otrzymujemy, że $I = M_n(J)$ dla pewnego $J \lhd R$ i $\mathbb{Z}_p \simeq M_n(R)/I \simeq M_n(R/J)$, co prowadzi do sprzeczności (gdyż, np. $M_n(R/J)$ nie jest dziedziną).

Poniżej opiszemy T-pierścienie, które są algebrami nad ciałem.

Stwierdzenie 4.4. *Niech A będzie algebrą nad ciałem F i chF oznacza charakterystykę F.*

(i) Jeśli $chF = 0$, to A jest T-pierścieniem.

(ii) Jeśli $chF = q > 0$, ale F nie jest izomorficzne z $\mathbb{Z}_q$, to A jest T-pierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy $A = A^2$.

Dowód: Wykażemy najpierw, że w każdym przypadku A nie można odwzorować homomorficznie na $\mathbb{Z}_p$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Jeśli bowiem taki homomorfizm istnieje, to pierścień A zawiera taki ideał I, że $A/I \simeq \mathbb{Z}_p$. Wówczas I jest ideałem pierwszym w A, a więc również F-ideałem (por. Stwierdzenie 1.16 (*ii*)). Zatem A/I jest F-algebrą. W efekcie $p =\mid A/I \mid=\mid F \mid^{dim_F(A/I)}$ (używamy tutaj oznaczenia $\mid X \mid$ na moc zbioru X). Wynika stąd, że $\mid F \mid= p$, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem o ciele F. Aby więc wykazać (*i*) oraz implikację ($\Leftarrow$) w (*ii*) wystarczy udowodnić, że dla żadnej liczby pierwszej p, A nie można odwzorować homomorficznie na $\mathbb{Z}_p^0$. Jest to oczywiste w przypadku (*ii*), gdyż $A = A^2$. Dla dowodu (*i*) wystarczy zauważyć, że jeśli $chF = 0$, to A^+ jest grupą podzielną. Nie można więc jej odwzorować homomorficznie na grupę $\mathbb{Z}_p^+$, która jest cykliczna.

Pozostała do wykazania implikacja ($\Rightarrow$) w (*ii*). Załóżmy, że charakterystyka F jest równa q oraz $A \neq A^2$. Wówczas A/A^2 jest niezerową $\mathbb{Z}_q$-algebrą z zerowym mnożeniem. Można więc ją, a w konsekwencji i A, odwzorować homomorficznie na $\mathbb{Z}_q^0$. Zatem algebra A nie jest T-pierścieniem. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. ■

4.1.2 T-pierścienie filialne i lewostronnie filialne

Stwierdzenie 4.3 pozwala opisać filialne i lewostronnie filialne T-pierścienie. Daje to wzmocnienie wyników uzyskanych w pracach [46] i [47].

Twierdzenie 4.5. *Niech R będzie T-pierścieniem. Wówczas*

(i) R jest pierścieniem lewostronnie filialnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in R$, $Ra = Ra^2$;

(ii) R jest pierścieniem filialnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $I \lhd R$, $RI = I^3 = IR$.

Dowód: (i) Jeżeli R jest pierścieniem lewostronnie filialnym, to na podstawie Twierdzenia 2.14, $\mathbb{Z}a + R^\star a^2 <_l R$. Zatem $Ra \subseteq \mathbb{Z}a + R^\star a^2$ i na mocy Stwierdzenia 4.3 zastosowanego w przypadku gdy $n = 2$, otrzymujemy, że $Ra = Ra^2$. Implikacja w stronę przeciwną wynika z Twierdzenia 2.44.

(ii) Niech teraz $I \lhd R$. Przechodząc do pierścienia ilorazowego R/I^3 można założyć, że $I^3 = 0$ i wówczas należy wykazać, że $RI = 0 = IR$. Niech $a \in I$. Zauważmy, że $\mathbb{Z}a + R^\star a^2 \lhd \mathbb{Z}a + I^2 \lhd I \lhd R$. Jeśli więc pierścień jest filialny, to $\mathbb{Z}a + R^\star a^2 \lhd R$. Zatem podobnie jak w (i), na mocy Stwierdzenia 4.3, $Ra = Ra^2$. Stąd $Ra = Raa = Ra^3 = 0$. Z dowolności $a \in I$ wynika, że $RI = 0$. Analogicznie dowodzimy, że $IR = 0$. Implikację przeciwną uzyskujemy zaś na mocy Stwierdzenia 2.4, co kończy dowód. ■

Z punktu (i) powyższego twierdzenia wynikają bezpośrednio wyniki uzyskane przez Tzintzisa dla pierścieni lewostronnie filialnych (por. [47], Lemma 2.4, Proposition 2.5). Natomiast Twierdzenie 4.5 (ii) wzmacnia wyniki Tzintzisa z [46] (por. Lemma 2.4, Corollary 2.5), które dotyczą tylko pierścieni idempotentnych.

Zauważmy, że pierścienie spełniające warunek (ii) Twierdzenia 4.5 należą do klasy $\mathcal{C}$ opisanej w paragrafie 2.1. Zatem ze Stwierdzenia 2.7 $b)$ i $c)$ otrzymujemy

Wniosek 4.6. *Załóżmy, że R jest filialnym T-pierścieniem. Wówczas*

(i) $I^2 = I^3 = IR = RI = \sum_{i \in I} R(i) = \sum_{i \in I} (i)^2$ dla dowolnego $I \lhd R$;

(ii) $\beta(R) = a_R(R) \subseteq Z(R)$. Jeśli $a_R(R) \neq Z(R)$, to R może być homomorficznie odwzorowany na algebrę z 1.

Z Wniosku 4.6 natychmiast wynikają następujące rezultaty uzyskane przez Tzintzisa w pracy [46].

Wniosek 4.7. *Załóżmy, ze R jest niezerowym idempotentnym pierścieniem filialnym. Wówczas*

a) (por. [46], Proposition 2.6) *R nie może być pierścieniem β-radykalnym;*

b) (por. [46], Proposition 2.12) *Jeśli R jest pierścieniem $\mathcal{F}$-radykalnym (tzn. takim, którego nie można odwzorować homomorficznie na ciało) i $A \lhd R$, to A^2 jest pierścieniem idempotentnym i $A^2 = \sum_{a \in A}(a)^2$;*

c) (por. [46], Proposition 2.19) *Jeśli R jest pierścieniem, którego nie można odwzorować na niezerowy pierścień prosty z 1, to $\beta(R) = a_R(R) = Z(R)$.*

Dowód: Ponieważ R jest pierścieniem idempotentnym, więc dla dowolnej liczby pierwszej p nie można go odwzorować homomorficznie na pierścień $\mathbb{Z}_p^0$. Zauważmy, że każde z założeń w a), b) i c) implikuje, że R nie można odwzorować homomorficznie na pierścień $\mathbb{Z}_p$. Zatem w każdym z przypadków R jest T-pierścieniem. W efekcie b) wynika z punktu (i), zaś a) i c) z punktu (ii) Wniosku 4.6. ■

Inny dowód Wniosku 4.7 a) był podany w pracy [20]. Wynika on z tego, że w odróżnieniu od algebr nad ciałem, β-radykalne pierścienie nie muszą być nilpotentne, ale spełniają pewien osłabiony warunek nilpotentności, który teraz przedstawimy.

Definicja 4.8. Pierścień R nazywamy S-**nilpotentnym** jeśli dla każdego niezerowego obrazu homomorficznego R' pierścienia R, $a_{R'}(R') = \{x \in R' \mid R'x = xR' = 0\} \neq 0$.

Twierdzenie 4.9. *Jeśli β-radykalny pierścień R jest lewostronnie filialny, to R jest S-nilpotentny.*

Dowód: Ponieważ klasa β-radykalnych pierścieni filialnych (lewostronnie filialnych) jest homomorficznie zamknięta, więc wystarczy wykazać, że jeśli $R \neq 0$, to $a_R(R) \neq 0$. Jeśli R jest pierścieniem beztorsyjnym, to z Twierdzenia 2.34, $R^2 = 0$, dlatego też w tym przypadku $a_R(R) = R \neq 0$. Załóżmy, że istnieje taka liczba pierwsza p oraz $0 \neq x \in R$, że $px = 0$. Wówczas $pRx = xpR = 0$ i R/pR jest filialną lub lewostronnie filialną $\mathbb{Z}_p$-algebrą. Zatem z Twierdzenia 3.2, $R^3 \subseteq pR$. W efekcie $R^3x = xR^3 = 0$.

Stąd wynika, że $R^ixR^j = 0$ dla dowolnych liczb naturalnych i, j spełniających nierówność $i + j \geqslant 5$. Niech k będzie taką najmniejsza liczbą naturalną, że jeśli $k = i + j$ dla $i, j \in \mathbb{N}$, to $R^i x R^j = 0$. Wówczas dla pewnych liczb naturalnych n, m takich, że $n + m = k - 1$, $T = R^n x R^m \neq 0$. Oczywiście $T \subseteq a_R(R)$, co kończy dowód. ■

Jak wiadomo, β-radykalne algebry filialne są lewostronnie filialne, więc Twierdzenie 4.9 dotyczy też pierścieni filialnych.

Celem badań Tzintzisa (w terminologii używanej w tej rozprawie) były klasy pierścieni $\chi = \{R \mid R$ nie można odwzorować homomorficznie na niezerowy pierścień filialny$\}$ oraz $\chi_l = \{R \mid R$ nie można odwzorować homomorficznie na niezerowy pierścień lewostronnie filialny$\}$. Klasy te są interesujące, bo w jakimś sensie mierzą jak obszerne są klasy pierścieni, które nie są filialne i lewostronnie filialne. Tzintzis wykazał, że $\chi_l = \{R \mid R$ nie można odwzorować homomorficznie ani na niezerowy pierścień z zerowym mnożeniem, ani na pierścień z dzieleniem$\}$. Poniżej pokażemy, że ta charakteryzacja wynika też prosto z rezultatów uzyskanych w tej pracy. Wyniki te pozwalają również opisać dokładniej klasę χ.

Wniosek 4.10. *(i)* $\chi = u_{\mathcal{C}} = \{R \mid R$ *nie można odwzorować homomorficznie na niezerowy pierścień w* $\mathcal{C}\}$.

(ii) ([47], Corollary 2.16 (1)) $\chi_l = u_{\mathcal{D}} = \{R \mid R$ *nie można odwzorować homomorficznie ani na pierścień z dzieleniem, ani na pierścień z zerowym mnożeniem*$\}$.

Dowód: (i) Jak wiemy ze Stwierdzenia 2.4 pierścienie z klasy $\mathcal{C}$ są filialne. Zatem $\chi \subseteq u_{\mathcal{C}}$. Na odwrót, załóżmy, że istnieje pierścień $A \in u_{\mathcal{C}} \setminus \chi$. Wówczas pewien obraz homomorficzny R pierścienia A jest filialny, ale żaden obraz homomorficzny A, a więc i R nie należy do klasy $\mathcal{C}$. Oczywiście $\mathcal{C}$ zawiera pierścienie $\mathbb{Z}_p$ i $\mathbb{Z}_p^0$ dla dowolnej liczby pierwszej p. Zatem R jest filialnym T-pierścieniem. Z Twierdzenia 4.5 (ii) otrzymujemy, że $R \in \mathcal{C}$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $u_{\mathcal{C}} \subseteq \chi$.

(ii) Oczywiście pierścienie z dzieleniem oraz pierścienie z zerowym mnożeniem są w klasie pierścieni lewostronnie filialnych, więc $\chi_l \subseteq u_{\mathcal{D}}$. Na odwrót załóżmy, że istnieje pierścień $A \in u_{\mathcal{D}} \setminus \chi_l$. Wówczas pewien obraz homomorficzny R pierścienia A jest lewostronnie filialny, ale żaden obraz homomorficzny A, zatem również R, nie należy do klasy pierścieni z dzieleniem lub z zerowym mnożeniem. Oczywiście klasa $u_{\mathcal{D}}$ jest zawarta w klasie T-pierścieni. Zatem z Twierdzeń 4.5 (i) i 2.44 wynika, że $R\beta(R) = 0$ oraz $R/\beta(R)$ jest pierścieniem silnie regularnym. Jeśli $R = \beta(R)$, to $R^2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. Jeśli zaś $R \neq \beta(R)$, to z Twierdzenia 1.34 wynika, że $R/\beta(R)$ można odwzorować na pierścień z dzieleniem. Uzyskana sprzeczność dowodzi $\subseteq$. ■

Na mocy Stwierdzenia 4.4 wyniki uzyskane dla filialnych i lewostronnie filialnych T-pierścieni dotyczą również filialnych i lewostronnie filialnych pierścieni, które są algebrami nad ciałem charakterystyki zero. Zatem filialne (lewostronnie filialne) pierścienie, które są algebrami nad ciałem charakterystyki zero mają własności opisane w Stwierdzeniu 4.6. Wykażemy teraz, że te same wyniki można uzyskać odnośnie pierścieni filialnych (lewostronnie filialnych), które są algebrami nad ciałem, które nie jest skończonym ciałem prostym. Zakończymy ten paragraf wynikami dotyczącymi tej sytuacji.

Wszędzie dalej w tym paragrafie F oznacza ciało, które nie jest skończonym ciałem prostym. Zauważmy, że F jest takim ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy F^+ nie jest grupą cykliczną. Istotnie, jeśli grupa F^+ jest cykliczna i jest ona nieskończona, to oczywiście $chF = 0$. Wówczas jednak grupa F^+ jest podzielna, a więc nie może być cykliczna. Jeśli F^+ jest skończoną grupą cykliczną, to $chF = p > 0$. Wówczas $pF = 0$. Stąd wynika, że rząd F^+ jest równy p. To oznacza, że $F \simeq \mathbb{Z}_p$. Implikacja przeciwna jest oczywista, gdyż grupa $(\mathbb{Z}_p)^+$ jest cykliczna.

Stwierdzenie 4.11. *Jeśli R jest F-algebrą i R jest filialny lub lewostronnie filialny jako pierścień, to*

(i) $(\beta(R))^2 = 0$;

(ii) $R\beta(R) = 0$*, gdy R jest pierścieniem lewostronnie filialnym oraz* $R\beta(R) = \beta(R)R = 0$*, gdy R jest pierścieniem filialnym.*

Dowód: Ponieważ dla dowolnego $a \in R$, Ra oraz $\beta(R)a$ są F-przestrzeniami oraz dla każdego $b \in R$, $(\mathbb{Z}b)^+$ jest grupą cykliczną, więc z faktu, że F^+ nie jest grupą cykliczną wynika, że jeśli $Ra \subseteq \mathbb{Z}b$ (odpowiednio $\beta(R)a \subseteq \mathbb{Z}b$), to $Ra = 0$ (odpowiednio $\beta(R)a = 0$).

Niech $x \in \beta(R)$. Ponieważ na podstawie Twierdzenia 3.2 (*iii*), $(\beta(R))^3 = 0$, więc korzystając ze Stwierdzenia 2.15 w przypadku, gdy R jest pierścieniem lewostronnie filialnym lub z Twierdzenia 2.36 w przypadku, gdy R jest pierścieniem filialnym, $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2 <_l R$. Zatem $Rx \subseteq \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}x^2$. Z tego co powiedziano w pierwszym akapicie wynika, że jeśli $\beta(R)x \neq 0$, to $\beta(R)x \nsubseteq \mathbb{Z}x^2$. Zatem istnieją takie $r \in \beta(R)$ oraz $n, m \in \mathbb{Z}$, że $rx = nx + mx^2$ i $nx \neq 0$. Stąd $\beta(R)rx = \beta(R)nx + \beta(R)mx^2$, dlatego też $\beta(R)nx = 0$. Ponieważ $\beta(R)x \neq 0$, więc $n \cdot 1 = 0$, gdzie 1 oznacza jedynkę z ciała F. Stąd jednak wynika, że $nx = 0$. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że $\beta(R)x = 0$. To dowodzi (*i*).

Z (*i*) dla dowolnego $x \in \beta(R)$, $x^2 = 0$. Na podstawie Stwierdzenia 2.15, $\mathbb{Z}x <_l R$, gdy R jest pierścieniem lewostronnie filialnym oraz na podstawie Wniosku 2.37, $\mathbb{Z}x \lhd R$, gdy R jest pierścieniem filialnym. Wobec tego

$Rx \subseteq \mathbb{Z}x$. Z tego, co zauważyliśmy w pierwszym akapicie, $\mathbb{Z}x = 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $R\beta(R) = 0$. Gdy R jest pierścieniem filialnym symetryczne rozumowanie pokazuje, że $\beta(R)R = 0$. To dowodzi (ii). ∎

Zauważmy, że powyższe stwierdzenie nie zachodzi dla algebr nad ciałami, które są izomorficzne z $\mathbb{Z}_p$. Wystarczy rozważyć Przykład 2.35 dla $K = \mathbb{Z}_p$. Oczywiście jest to pierścień filialny i lewostronnie filialny, w którym $\beta(R) = R$, ale $R\beta(R) = x^2\mathbb{Z}_p[x]/x^3\mathbb{Z}_p[x] \neq 0$.

Warto podkreślić, że w przypadku pierścieni lewostronnie filialnych, które są F-algebrami z Twierdzenia 3.1 otrzymujemy dodatkowo, że $R/\beta(R)$ jest pierścieniem silnie regularnym. Na mocy Twierdzenia 2.44 oraz Stwierdzenia 4.11 ma więc miejsce następujący

Wniosek 4.12. *F-algebra R jest lewostronnie filialna jako pierścień wtedy i tylko wtedy, gdy $R\beta(R) = 0$ oraz $R/\beta(R)$ jest algebrą silnie regularną.*

Zauważmy, że jeśli F-algebra R jest filialna jako pierścień, to $R \in \mathcal{C}$. Jeśli bowiem $a \in I$, to z filialności pierścienia R wynika, że $\mathbb{Z}a$ jest ideałem w R. Zatem $Ra \subseteq \mathbb{Z}a$. Używając tych samych argumentów co w dowodzie Stwierdzenia 4.11 otrzymujemy, że dla każdego $a \in I$, $\mathbb{Z}a$ nie zawiera niezerowych F-podprzestrzeni. Zatem $Ra = 0$. Podobnie dowodzimy, że $aR = 0$. Ostatecznie $I^2 = I^3 = RI = IR$, a więc $R \in \mathcal{C}$.

Fakt ten był w słabszej postaci (tzn., że $RI = FI^2 = IR$) udowodniony w przypadku pierścieni filialnych w [8]. W [5] został wzmocniony do wersji pokazanej powyżej. W [5] również było wykazane, że dla dowolnego ideału I pierścienia filialnego R, który jest algebrą nad dowolnym ciałem F, I^2 jest F-ideałem. Ma to miejsce również przy założeniu lewostronnej filialności. Mianowicie dzieląc pierścień R przez największy F-ideał R zawarty w I^2 możemy założyć, że I^2 nie zawiera niezerowych F-ideałów R. Wówczas $FI^3 \subseteq RI^2 \subseteq I^2$. Oczywiście FI^3 jest F-ideałem R, więc $FI^3 = 0$. Zatem na podstawie Stwierdzenia 4.11, $I^2 = 0$.

4.2 Związki pomiędzy filialnością, lewostronną filialnością i prawostronną filialnością pierścieni

W paragrafie 2.1 przedstawiliśmy przykłady pierścieni świadczące o tym, że klasy pierścieni filialnych i lewostronnie (prawostronnie) filialnych są nieporównywalne (tzn. żadna z nich nie jest zawarta w drugiej). Jednak z tego co wykazaliśmy w paragrafach 2.3 oraz 2.4 wynika w szczególności, że w obrębie pierścieni β-radykalnych, klasa pierścieni filialnych jest zawarta w klasie pierścieni lewostronnie (prawostronnie) filialnych, natomiast w obrębie pierścieni półpierwszych mamy inkluzję przeciwną. Pokazaliśmy bowiem, że klasy pierścieni lewostronnie i prawostronnie filialnych pokrywają się, a zatem te pierścienie są zawarte w klasie pierścieni filialnych. Wyniki te inspirują następujące pytania:

1. Czy β-radykalne pierścienie lewostronnie filialne są prawostronnie filialne lub przynajmniej filialne?
2. Czy pierścienie, które są filialne i lewostronnie filialne muszą być prawostronnie filialne?

Okazuje się, że odpowiedzi na oba te pytania są negatywne. Poniżej przedstawimy przykłady o tym świadczące. Na zakończenie tego paragrafu podamy też pewne fakty pokazujące, że przy pewnych dodatkowych założeniach odpowiedź jest pozytywna.

4.2.1 Przykład nilpotentnego pierścienia lewostronnie filialnego, który nie jest filialny

Następujący przykład pokazuje, że nawet dla skończonych pierścieni nilpotentnych lewostronna filialność nie implikuje filialności.

Przykład 4.13. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Zauważmy, że pierścień $p\mathbb{Z}_{p^2} \simeq (\mathbb{Z}_p)^0 \simeq p\mathbb{Z}_{p^3}/p^2\mathbb{Z}_{p^3}$. Ponieważ $(p^2\mathbb{Z}_{p^3})(p\mathbb{Z}_{p^3}) = 0$, więc $p\mathbb{Z}_{p^3}$ ma naturalną strukturę lewostronnego $p\mathbb{Z}_{p^3}/p^2\mathbb{Z}_{p^3}$-modułu, a więc również lewostronnego $p\mathbb{Z}_{p^2}$-modułu. Rozpatrzmy kontekst Mority $R = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (por. Definicja 1.9).

Oczywiście $R^3 = 0$, a zatem R jest pierścieniem nilpotentnym. Zauważmy teraz, że $\begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p^2\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$, ale $\begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p^2\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, a więc $\begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nie jest ideałem pierścienia R. Stąd wynika, że R nie jest pierścieniem filialnym.

Pokażemy teraz, że R jest pierścieniem lewostronnie filialnym, a nawet znacznie więcej, a mianowicie, że każda addytywna podgrupa S pierścienia R jest lewostronnym ideałem R. Niech $I = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p^2\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Jeśli $S \subseteq I$, to $RS = 0$ i w konsekwencji $S <_l R$. Jeśli zaś $S \nsubseteq I$, to $pS = \begin{pmatrix} 0 & p^2\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

R^2. Wobec tego $RS \subseteq R^2 = \begin{pmatrix} 0 & p^2\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = pS \subseteq S$, a zatem i w tym przypadku $S <_l R$.

4.2.2 Przykłady pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych, które nie są prawostronnie filialne

Przykład 4.14. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą, $\mathbb{Z}a$ - nieskończoną (addytywną) grupą cykliczną o generatorze a, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ - p-grupą (addytywną) quasi-cykliczną oraz $\mathbb{Z}_p v$ - jednowymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_p$ generowaną przez v. Niech teraz $R = \mathbb{Z}a \times \mathbb{Z}_{p^\infty} \times \mathbb{Z}_p v$ będzie iloczynem prostym tych grup.

Na R określimy mnożenie w taki sposób, by otrzymać pierścień łączny, który jest lewostronnie filialny i filialny, ale nie jest prawostronnie filialny. Utożsamiając w naturalny sposób $\mathbb{Z}a$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, $\mathbb{Z}_p v$ z ich obrazami w R mamy też, że $R = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}_{p^\infty} + \mathbb{Z}_p v$. Wówczas definiujemy:

1. $a^2 = pa$,
2. dla każdego $x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, $ax = 0$, zaś $xa = px$,
3. $v^2 = s$, $av = s$, gdzie s jest dowolnym niezerowym elementem rzędu p w $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ oraz $va = t$, gdzie t jest dowolnym, ustalonym elementem należącym do $\mathbb{Z}s$,
4. $xy = 0 = yx$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$,
5. dla każdego $x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, $xv = vx = 0$.

Mnożenie to przedłużamy w kanoniczny sposób (przez rozdzielność) na całe R.

Twierdzenie 4.15. *R z tak określonymi działaniami jest łącznym pierścieniem filialnym i lewostronnie, ale nie prawostronnie filialnym.*

Dowód: Rozpoczniemy od wykazania, że pierścień R jest łączny. Elementy w R są postaci $r_i = n_i a + x_i + k_i v$ dla $n_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ oraz $k_i \in \mathbb{Z}_p$. Dla dowolnych $r_1, r_2, r_3 \in R$ chcemy pokazać, że $(r_1 r_2) r_3 = r_1 (r_2 r_3)$. Zauważmy, że lewa strona jest równa $(r_1 r_2) r_3 = [(n_1 a + x_1 + k_1 v)(n_2 a + x_2 + k_2 v)](n_3 a + x_3 + k_3 v) = (p n_1 n_2 a + n_1 k_2 s + p n_2 x_1 + k_1 n_2 t + k_1 k_2 s)(n_3 a + x_3 + k_3 v) = p^2 n_2 n_3 (n_1 a + x_1)$, zaś prawa ma postać $r_1(r_2 r_3) = (n_1 a + x_1 + k_1 v)[(n_2 a + x_2 + k_2 v)(n_3 a + x_3 + k_3 v)] = (n_1 a + x_1 + k_1 v)(p n_2 n_3 a + n_2 k_3 s + p n_3 x_2 + k_2 n_3 t + k_2 k_3 s) = p^2 n_2 n_3 (n_1 a + x_1)$. Zatem lewa strona jest równa prawej, co oznacza, że R jest pierścieniem łącznym.

Załóżmy, że $K <_l L <_l R$. Wykażemy, że $K \lhd R$. Zauważmy, że $\beta(R) = \mathbb{Z}_{p^\infty} + \mathbb{Z}_p v$. Bezpośrednio z definicji mnożenia określonego w R wynika, że każda addytywna podgrupa $K \subseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ jest ideałem w R. Ponadto, $R\beta(R) + \beta(R)R = \mathbb{Z}s$. Jeśli $K \subseteq \beta(R)$, ale $K \nsubseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$, to $K^2 = \mathbb{Z}s$. Stąd wynika, że $KR + RK = \mathbb{Z}s = K^2 \subseteq K$, a zatem $K \lhd R$.

Niech teraz $K \nsubseteq \beta(R)$. Zauważmy, że $T = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}_{p^\infty} \lhd R$, $\beta(T) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ oraz $\mathbb{Z}a$ jest podpierścieniem pierścienia R izomorficznym z $p\mathbb{Z}$. Oczywiście $LK <_l R$ oraz $K^2 \subseteq LK \nsubseteq \beta(R)$. Ponadto, dla każdego $r \in R \setminus \beta(R)$, $\mathbb{Z}_{p^\infty} r$ jest niezerową podzielną podgrupą grupy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, a więc $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty} r$. Stąd wynika, że $\mathbb{Z}_{p^\infty} \subseteq LK \subseteq K$. Nietrudno sprawdzić, że $R/\mathbb{Z}_{p^\infty} \simeq p\mathbb{Z} \oplus {\mathbb{Z}_p}^0$. Oczywiście $\bar{K} = K/\mathbb{Z}_{p^\infty} <_l \bar{L} = L/\mathbb{Z}_{p^\infty} <_l R/\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bar{R}$. Teraz wystarczy wykazać, że po utożsamieniu $\bar{K}$, $\bar{L}$ i $\bar{R}$ z ich obrazami w $p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$, $\bar{K} \lhd \bar{R}$. Jeżeli $(x, y) \in \bar{K}$, to $p(x, y) = (px, 0) \in \bar{K}$. Ponadto, $W = \{x \in p\mathbb{Z} \mid (x, y) \in \bar{K}$ dla pewnego $y \in \mathbb{Z}_p^0\}$ jest ideałem w $p\mathbb{Z}$. Stąd wynika, że $(p\mathbb{Z} \oplus {\mathbb{Z}_p}^0)\bar{K} \subseteq pW \oplus 0 \subseteq \bar{K}$, co oznacza, że $\bar{K} \lhd \bar{R}$. Zatem R jest pierścieniem filialnym i lewostronnie filialnym.

Zostaje pokazać, że pierścień R nie jest prawostronnie filialny. Zauważmy, że $\mathbb{Z}a <_r \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}_{p^\infty} <_r R$, ale $a \cdot v = s \notin \mathbb{Z}a$. Zatem $\mathbb{Z}a$ nie jest prawostronnym ideałem w R, co kończy dowód. ■

Przykład 4.16. Niech $R = \mathbb{Z}a \times \mathbb{Z}_{p^\infty}$ będzie iloczynem prostym nieskończonej grupy cyklicznej $\mathbb{Z}a$ z generatorem a oraz p-grupy quasi-cyklicznej $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Zdefiniujemy na R mnożenie tak, by otrzymać filialny i lewostronnie filialny pierścień łączny, który nie jest prawostronnie filialny. Utożsamiając w kanoniczny sposób $\mathbb{Z}a$ oraz $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ z ich obrazami w R określamy:

1. $a^2 = p^2 a + s$, gdzie s jest dowolnym niezerowym elementem w $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ rzędu p^2,
2. $ax = 0$ oraz $xa = p^2 x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$,
3. $xy = yx = 0$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Przedłużając tak zdefiniowane mnożenie w naturalny sposób (przez rozdzielność) na całe R otrzymujemy następujące

Twierdzenie 4.17. *R z tak określonymi działaniami jest łącznym pierścieniem filialnym i lewostronnie, ale nie prawostronnie filialnym.*

Dowód: Rozpoczniemy od wykazania, że pierścień R jest łączny. Elementy w R są postaci $r_i = n_i a + x_i$ dla $n_i \in \mathbb{Z}$ oraz $x_i \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Udowodnimy, że dla dowolnych $r_1, r_2, r_3 \in R$, $(r_1 r_2) r_3 = r_1(r_2 r_3)$. Lewa strona jest równa $(r_1 r_2) r_3 = [(n_1 a + x_1)(n_2 a + x_2)](n_3 a + x_3) = [n_1 n_2 (p^2 a + s) + n_2 p^2 x_1](n_3 a +$

$x_3) = n_2n_3p^4(n_1a + x_1)$, zaś prawa ma postać $r_1(r_2r_3) = (n_1a + x_1)[(n_2a + x_2)(n_3a+x_3)] = (n_1a+x_1)[n_2n_3(p^2a+s)+n_3p^2x_2] = n_2n_3p^4(n_1a+x_1)$. Zatem lewa strona jest równa stronie prawej.

Załóżmy teraz, że $K <_l L <_l R$. Zauważmy, że $\beta(R) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Bezpośrednio z definicji mnożenia w pierścieniu R wynika, że jeśli $K \subseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$, to $K \lhd R$. Załóżmy więc, że $K \nsubseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Oczywiście $LK <_l R$ i $K^2 \subseteq LK \nsubseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Dla każdego $r \in R \setminus \mathbb{Z}_{p^\infty}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}r$ jest niezerową podzielną podgrupą grupy addytywnej $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, a więc $\mathbb{Z}_{p^\infty}r = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Zatem $\mathbb{Z}_{p^\infty} \subseteq LK \subseteq K$. Oczywiście $K/\mathbb{Z}_{p^\infty} <_l L/\mathbb{Z}_{p^\infty} <_l R/\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Nietrudno zauważyć, że $R/\mathbb{Z}_{p^\infty} \simeq p^2\mathbb{Z}$, a więc jest to przemienny pierścień filialny. Zatem $K/\mathbb{Z}_{p^\infty} \lhd R/\mathbb{Z}_{p^\infty}$, z czego wynika, że $K \lhd R$.

To dowodzi, że każdy lewostronnie osiągalny podpierścień w R jest ideałem w R. Wobec tego R jest pierścieniem filialnym i lewostronnie filialnym.

Zauważmy teraz, że $I = p\mathbb{Z}a <_r p\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}_{p^\infty} \lhd R$, ale $(pa)a = pa^2 + pax = p(p^2a + s) \notin I$. Zatem I nie jest prawostronnym ideałem w R, co oznacza, że R nie jest pierścieniem prawostronnie filialnym. ■

4.2.3 Przypadki pozytywne

Przedstawione wyżej przykłady są specyficzne. Zostały one skonstruowane w wyniku wielu różnych prób, które niejako „wymusiły” taki ich kształt (wydaje się wręcz, że w pewnym sensie są to przykłady jedyne możliwe). Podamy teraz pewne najbardziej naturalne wyniki, wskazujące pewne ograniczenia, które muszą spełniać takie przykłady.

Stwierdzenie 4.18. *Jeśli R jest takim pierścieniem filialnym, że $R/\beta(R)$ jest pierścieniem silnie regularnym, to R jest lewostronnie i prawostronnie filialny.*

Dowód: Załóżmy, że $K <_l L <_l R$. Ponieważ R jest pierścieniem filialnym, więc na podstawie Wniosku 2.13 $K \cap \beta(R) \lhd R$. Przechodząc do pierścienia ilorazowego $R/(K \cap \beta(R))$ możemy założyć, że $K \cap \beta(R) = 0$. Oczywiście $(K + \beta(R))/\beta(R) <_l (L + \beta(R))/\beta(R) <_l R/\beta(R)$, a ponieważ $R/\beta(R)$ jest pierścieniem silnie regularnym, więc $(K + \beta(R))/\beta(R) <_l R/\beta(R)$. Zatem $RK \subseteq K + \beta(R)$ i $(K + \beta(R))/\beta(R) \simeq K/(K \cap \beta(R)) \simeq K$. Na mocy Stwierdzenia 1.32 lewostronne ideały pierścienia silnie regularnego są idempotentne, dlatego też $K^2 = K$. Stąd zaś $RK = RK^2 \subseteq K^2 + \beta(R)K = K + \beta(R)K$ i dalej $\beta(R)K = \beta(R)K^2 \subseteq \beta(R) \cap LK \subseteq \beta(R) \cap K = 0$. Zatem $RK \subseteq K$ i $K <_l R$.
Podobnie dowodzimy prawostronną filialność pierścienia R ■

Twierdzenie 4.19. *Jeśli pierścień torsyjny (tzn. pierścień, którego grupa addytywna jest torsyjna) R jest filialny i lewostronnie filialny, to jest również prawostronnie filialny.*

Dowód: Niech dla dowolnej liczby pierwszej p, $R_p = \{x \in R \mid p^n x = 0$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}\}$. Oczywiście $R_p \triangleleft R$ oraz pR_p jest nil ideałem w R. Z lewostronnej filialności R wynika (por. Stwierdzenie 2.15), że $pR_p \subseteq \beta(R_p)$. W efekcie $R_p/\beta(R_p)$ jest lewostronnie filialną $\mathbb{Z}_p$-algebrą, a zatem z Twierdzenia 3.1 otrzymujemy, że $R_p/\beta(R_p)$ jest pierścieniem silnie regularnym. Ponieważ R jest pierścieniem torsyjnym, więc $R = \bigoplus R_p$. W efekcie $\beta(R) = \bigoplus \beta(R_p)$ i $R/\beta(R)$ jest pierścieniem silnie regularnym. Na mocy Stwierdzenia 4.18, R jest pierścieniem prawostronnie filialnym. ■

Twierdzenie 4.20. *Niech F będzie ciałem, które nie jest skończonym ciałem prostym i niech R będzie F-algebrą. Wówczas R jest pierścieniem filialnym i lewostronnie filialnym wtedy i tylko wtedy, gdy $R = S \oplus T$, gdzie S jest silnie regularnym ideałem R, zaś T jest takim ideałem R, że $T^2 = 0$*

Dowód: ($\Leftarrow$) Załóżmy, że $K <_l L <_l R$. Wówczas z założeń o S i T wynika, że $K = A \oplus B$, gdzie $A <_l S$, zaś B jest podpierścieniem T. Zatem $R(A \oplus B) \subseteq SA \oplus 0 \subseteq A \oplus 0$, a więc K jest lewostronnym ideałem w R. To dowodzi, że R jest pierścieniem lewostronnie filialnym. Nietrudno zauważyć, że warunki określające T i S są lewo-prawo symetryczne. Zatem R jest pierścieniem prawostronnie filialnym.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że pierścień R jest filialny i lewostronnie filialny. Niech $T = \beta(R)$ oraz niech S oznacza silnie regularny radykał pierścienia R. Oczywiście $T \cap S = 0$. Na mocy Twierdzenia 4.12, $RT = 0$ oraz $\bar{R} = R/T$ jest pierścieniem silnie regularnym. Zauważmy teraz, że dla każdego $t \in T$, $\mathbb{Z}t \triangleleft tR^\star \triangleleft R$, a zatem $\mathbb{Z}t \triangleleft R$. Stąd $tR \subseteq \mathbb{Z}t$. Ponieważ tR jest F-podprzestrzenią w R, więc z założeń o F wynika, że $tR = 0$. Zatem $TR = 0$. Niech $r \in R$ oraz $\bar{r}$ będzie obrazem r w $\bar{R}$. Z silnej regularności pierścienia $\bar{R}$ wynika, że istnieje taki idempotent $a \in \bar{R}$, że $\bar{r} \in a\bar{R}$. Korzystając ze Stwierdzenia 1.11 możemy podnieść a do idempotenta e w pierścieniu R. Jeśli dla pewnego $x \in R$, $ex \in T$, to $ex = e(ex) \in RT = 0$, a więc $eR \cap T = 0$. Zatem $\bar{R}$ oraz eR są silnie regularne oraz $(eR + T)/T \triangleleft \bar{R}$. Dlatego też $R(eR) \subseteq eR + T$ i $R(eR) = R(eR)^2 \subseteq (eR + T)eR \subseteq eR + TR = eR$. Stąd otrzymujemy, że $eR \triangleleft R$ i $eR \subseteq S$. Ostatecznie $r \in eR + T \subseteq S + T$, a więc $R = S \oplus T$, co kończy dowód. ■

Warunki charakteryzujące T i S w Twierdzeniu 4.20 są lewo-prawo symetryczne. Zatem otrzymujemy

Wniosek 4.21. *Niech F będzie ciałem, które nie jest skończonym ciałem prostym i niech R będzie F-algebrą. Następujące warunki są równoważne*

(i) R jest pierścieniem filialnym i lewostronnie filialnym;

(ii) R jest pierścieniem filialnym i prawostronnie filialnym;

(iii) R jest pierścieniem lewostronnie i prawostronnie filialnym.

Bibliografia

[1] T. Anderson, N. Divinsky , A. Suliński, *Hereditary radicals in associative and alternative rings*, Canad. J. Math. 17 (1965), pp. 594–603.

[2] ——, *Lower radical properties for associative and alternative rings*, J. London Math. Soc. 41 (1966), pp. 417–424.

[3] V.A. Andrunakievich, *Radicals of associative rings I*, Mat. Sb. 44 (1958), pp. 179–212.

[4] V.A. Andrunakievich, Yu.M. Ryabukhin, *Rings without nilpotent elements and completely prime ideal*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 180 (1968), pp. 9–11.

[5] R.R. Andruszkiewicz, *Podpierścienie osiągalne w pierścieniach łącznych*, Praca doktorska, Uniwersytet Warszawski, 1990.

[6] R.R. Andruszkiewicz, *The classification of intergral domains in which the relation of being an ideal is transitive*, Comm. Algbera 31 (2003), pp. 2067–2093.

[7] R.R. Andruszkiewicz, K. Pryszczepko, *A classification of commutative reduced filial rings*, Comm. Algebra (przyjęta do publikacji).

[8] R.R. Andruszkiewicz, E.R. Puczyłowski, *On filial rings*, Portugal. Math. 45 (1988), pp. 139–149.

[9] ——, *Kurosh's chains of associative rings*, Glasgow Math. J. 32 (1990), pp. 67–69.

[10] R.R. Andruszkiewicz, M. Sobolewska, *Commutative reduced filial rings*, Algebra Discrete Math. 3 (2007), pp. 18–26.

[11] K.I. Beidar, *A chain of Kurosh may have an arbitrary finite length*, Czechoslovak Math. J. 32 (1982), pp. 418–422.

[12] ——, *On questions of B.J. Gardner and A.D. Sands*, J. Austral. Math. Soc., Ser.A 56 (1994), pp. 314–319.

[13] E. Best, O. Taussky, *A class of groups*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 47 (1942), pp. 55–62.

[14] Z.I. Borewicz, I.R. Szafarewicz, *Teoria cziseł*, "Nauka", Moskwa, 1985.

[15] J.C. Cozzens, C. Faith, *Simple Noetherian rings*, Cambridge University Press, Cambridge-New York-Malbourne, 1975.

[16] K. Doerk, M.D. Perez-Ramos, *A criterion for $\mathfrak{F}$-subnormality*, J. Algebra 120 (1989), pp. 416–421.

[17] G. Ehrlich, *Filial rings*, Portugal. Math. 42 (1983-84), pp. 185–194.

[18] B. Farb, R.K. Dennis, *Noncommutative Algebra*, Grad. Texts in Math., 144. Springer-Verlag, New York, 1993.

[19] M. Filipowicz, E.R. Puczyłowski, *Left filial rings*, Algebra Colloq. 11 (2004), pp. 335–344.

[20] ——, *On filial and left filial rings*, Publ. Math. Debrecen 66 (2005), pp. 257–267.

[21] ——, *On the upper radical determined by filial rings*, Acta Math. Hungar. 112 (2006), pp. 227–236.

[22] ——, *The structure of left filial algebras over a field*, Taiwan. J. Math. 13/3 (2009), pp. 1017–1029.

[23] A. Forsythe, N.H. McCoy, *On the commutativity of certain rings*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), pp. 523–526.

[24] B. Gardner, R. Wiegandt, *Radical Theory of Rings*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. 261. Marcel Dekker, Inc., New York, 2004.

[25] W. Gaschutz, *Gruppen, in denen das Normalteilersein transitive ist*, J. Reine Angew. Math 198 (1957), pp. 87–92.

[26] K.R. Goodearl, *Von Neumann regular rings*, Monographs and Studies in Mathematics, 4. Pitman, Boston, Mass-London, 1979.

[27] A.G. Heinicke, *A note on lower radical constructions for associative rings*, Canad. Math. Bull. 11 (1968), pp. 23–30.

[28] I.N. Herstein, *Noncommutative rings*, The Carus Mathematical Monographs 15, Published by The Mathematical Association of America, New York, 1968.

[29] N. Jacobson, *Structure of rings*, American Mathematical Society Colloquium Publication, Vol. 37, Providence, 1964.

[30] A. Jones, J.J. Schaffer, *Concerning the structure of certain rings*, Bol. Fac. Ingen. Agrimens. Montevideo 6 (1957-58), pp. 327–335.

[31] M. Kargapołow, J. Mierzlakow, *Podstawy teorii grup*, PWN, Warszawa, 1989.

[32] J. Krempa, *Some examples of reduced rings*, Algebra Colloq. 3 (1996), pp. 289–300.

[33] R.L. Kruse, *Rings in which all subrings are ideals I*, Canad. J. Math. 20 (1968), pp. 862–871.

[34] T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Grad. Texts in Math., 131. Springer-Verlag, New York, 2001.

[35] J.C. Lennox, S.E. Stonehewer, *Subnormal subgroups of groups*, Oxford Math. Monogr., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1987.

[36] Shao-Xue. Liu, *On algebras in which every subalgebra is an ideal*, Chinese Math.-Acta 5 (1964), pp. 571–577.

[37] O.T. O'Meara, *Introduction to quadratic forms*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[38] E.R. Puczyłowski, *On questions concerning strong radicals of associative rings*, Quaestiones Math. 10 (1987), pp. 321–338.

[39] L. Redei, *Vollidealringe im weiteren Sinn. I*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 3 (1952), pp. 243–268.

[40] A.D. Sands, *On ideals in over-rings*, Publ. Math. Debrecen 35 (1988), pp. 273–279.

[41] ——, *Some subidempotent radicals*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 61, North-Holland, Amsterdam, 1993.

[42] A. Smoktunowicz, *A simple nil ring exists*, Comm. Algebra 30 (2002), pp. 27–59.

[43] F. Szász, *Die ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 13 (1962), pp. 115–132.

[44] F. Szász, R. Wiegandt, *On the dualization of subdirect embeddings*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969), pp. 289–302.

[45] F. Szász, *Radicals of rings*, Akadémiai Kiadó, Budapest and John Wiley & Sons, 1981.

[46] G. Tzintzis, *An almost subidempotent radical property*, Acta Math. Hung. 49 (1987), pp. 173–184.

[47] ——, *A one-sided admissible ideal radical which is almost subidempotent*, Acta Math. Hungar. 49 (1987), pp. 307–314.

[48] S. Veldsman, *Extensions and ideals of rings*, Publ. Math. Debrecen 38 (1991), pp. 297–309.

[49] J. von Neumann, *On regular rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 22 (1936), pp. 707–713.

[50] E.T. Wong, *Regular rings and integral extension of a regular ring*, Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972), pp. 313–315.