Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Mariusz Baryło

Stochastyczne Układy Cząstek

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy

prof. dr hab. Andrzej Palczewski

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Kwiecień 2009

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

. . . .

data *podpis autora rozprawy*

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

. . . .

data *podpis promotora rozprawy*

Streszczenie

Niniejsza rozprawa poświęcona jest dynamice układu cząstek poruszających się zgodnie z zasadami dynamiki Newtona ze stochastycznym zaburzeniem położeń i pędów, przy założeniu, że cząstki oddziałują poprzez gładki potencjał odpychający, nie dopuszczający do ich zderzeń. Wykazane zostało istnienie potoku stochastycznego, czyli rozwiązania układu równań stochastycznych opisujących ruch cząstek w przestrzeni fazowej oraz udowodniona ciągła zależność oraz różniczkowalność rozwiązania względem danych początkowych. Ponadto wyprowadzony został stochastyczny odpowiednik równania Liouville'a oraz przy jego użyciu wyprowadzono stochastyczną wersję hierarchii BBGKY dla analizowanego układu cząstek. Omówiona została ponadto kwestia istnienia miary niezmienniczej dla rozpatrywanego układu.

Słowa kluczowe: Stochastyczne układy cząstek, potok stochastyczny, stochastyczne równanie Liouville'a, stochastyczna hierarchia BBGKY.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 70F10; Secondary: 60H15, 37C40.

Abstract

The thesis is devoted to dynamics of stochastic system of particles moving according to Newton's Laws of Motion, with additional stochastic perturbations of position and momentum of each particle. We assume that particles are interacting through smooth repulsive potential, not admitting any collisions between different particles. Existence of the stochastic flow for the system mentioned above was proved, as well as continuity and differentiability of solution with respect to initial datum. Stochastic Liouville equation and the stochastic BBGKY hierarchy were established. Moreover the problem of existence of invariant measure for the system was discussed.

Keywords and phrases: Stochastic particles systems, stochastic flow, stochastic Liouville equation, stochastic BBGKY hierarchy.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 70F10; Secondary: 60H15, 37C40.

Spis treści

Wstęp

Już ponad 150 lat temu, w drugiej połowie XVIIIw., rozpoczął się dynamiczny rozwój kinetycznej teorii gazów i mechaniki statystycznej. Przez dziesięciolecia wprowadzano coraz bogatszy aparat pojęciowy, służący do analizowania układów cząstek (omawiamy go pokrótce w podrozdziale 1.1). Jednym z kluczowych narzędzi zarówno mechaniki klasycznej, jak i statystycznej, jest tzw. równanie Liouville'a, opisujące ewolucję w czasie funkcji gęstości rozkładu położenia układu cząstek w przestrzeni fazowej (czyli ewolucję funkcji opisującej gęstość rozkładu prawdopodobieństwa, że analizowany układ cząstek będzie znajdował się po pewnym czasie w zadanym obszarze i cząstki będą miały prędkości z pewnego zakresu). Z równania tego można wyprowadzić związki opisujące dynamikę funkcji gęstości rozkładu położenia w przestrzeni fazowej wybranego podukładu cząstek – jest to tzw. hierarchia BBGKY (od nazwisk uczonych, zajmujących się tym problemem: N. N. Bogolubowa, M. Borna, H. S. Greena, J. G. Kirkwooda oraz J. Yvona).

Głównym celem niniejszej rozprawy jest podanie hierarchii BBGKY dla układu cząstek, oddziałujących zgodnie z zasadami dynamiki Newtona poprzez gładki potencjał odpychający (i nie dopuszczający do zderzeń cząstek), jednak ze stochastycznymi zaburzeniami położenia i pędu każdej z cząstek. W rozdziale pierwszym zawarty został krótki opis historii mechaniki statystycznej oraz hierarchii BBGKY, zwięzłe omówienie otrzymanych w rozprawie wyników, a także sformułowanie analizowanego problemu. Kolejny rozdział poświęcony jest problemowi istnienia potoku stochastycznego (stochastic flow) dla analizowanego układu cząstek (czyli rozwiązania stochastycznego układu równań w odpowiedniej przestrzeni) – wykazane jest najpierw ogólne twierdzenie dotyczące istnienia potoku, a następnie pokazano, że rozpatrywany układ spełnia założenia tego twierdzenia. Rozdział trzeci zawiera omówienie dwóch własności rozwiązania zagadnienia: ciągłą zależność oraz różniczkowalność względem warunku początkowego. Rozdział kolejny wprowadza pojęcie półgrupy operatorów, stowarzyszonej z rozwiązaniem zagadnienia oraz zawiera wyprowadzenie stochastycznej wersji równania Liouville'a dla analizowanego układu. W rozdziale piątym przy użyciu równania Liouville'a wyprowadzamy hierarchię BBGKY dla stochastycznego układu cząstek i zwracamy uwagę na różnice i podobieństwa względem hierarchii BBGKY w przypadku klasycznym. Ostatni rozdział zawiera dyskusję kwestii istnienia miary niezmienniczej dla półgrupy operatorów stowarzyszonych z rozwiązaniem analizowanego zagadnienia – w wyprowadzeniu równania Liouville'a oraz hierarchii BBGKY założyliśmy po prostu jej istnienie. Omawiamy znane sytuacje, gdy miara ta istnieje (oraz posiada na ogół gęstość względem miary Lebesgue'a, zadaną w najprostszych przypadkach jawnym wzorem) oraz pokazujemy, że dla analizowanego w niniejszej rozprawie układu cząstek można wykazać istnienie miary niezmienniczej na pewnym obszarze, nie będącym jednak całą przestrzenią fazową.

Podziękowania Chciałbym w tym miejscu wyrazić swoją wdzięczność Promotorowi mojej pracy, prof. Andrzejowi Palczewskiemu. Przede wszystkim dziękuję za lata sprawowanej nade mną opieki naukowej, za cierpliwość i gotowość do dyskutowania na temat licznych problemów, związanych z pracą. Rozprawa niniejsza nie powstałaby bez jego pomocy: profesor Palczewski zaproponował przede wszystkim postać modelu, który rozważam w rozprawie, a następnie przez kolejne lata pomagał w nadaniu niniejszej pracy ostatecznego kształtu, udzielając licznych wskazówek i sugerując sposoby możliwego podejścia do analizy problemów, omawianych w rozprawie.

Oznaczenia

W rozprawie używane będą następujące oznaczenia:

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ – zbiór liczb rzeczywistych, naturalnych;
- Card A – moc zbioru A;
- N – liczba poruszających się cząstek;
- $a \wedge b = \min\{a, b\}$;
- q_i – wektor z przestrzeni $\mathbb{R}^3$, opisujący położenie i–tej cząstki, $i \in \{1, \ldots, N\}$;
- p_i – wektor z przestrzeni $\mathbb{R}^3$, opisujący pęd i-tej cząstki, $i \in \{1, \ldots, N\}$;
- m – masa każdej z cząstek ($m > 0$);
- W_N – przestrzeń „zabronionych” położeń układu N cząstek w przestrzeni $\mathbb{R}^3$: $W_N = \Big\{(q_1, \ldots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N} \colon |q_i - q_j| = 0$ dla co najmniej jednej pary (i, j) takich, że $i \neq j$ oraz $i, j \in \{1, \ldots, N\}\Big\}$;
- $\Gamma = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N$ – przestrzeń fazowa, w której porusza się układ N cząstek;
- $\Gamma_0 = (\mathbb{R}^{3N} \backslash W_N) \times \mathbb{R}^{3N}$ – przestrzeń dopuszczalnych położeń początkowych układu cząstek w przestrzeni fazowej;
- Φ – potencjał oddziaływania cząstek (funkcja $\Phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$);
- k_i – siła działająca na i-tą cząstkę, $k_i = -\sum_{l \neq i} \nabla\Phi(q_i - q_l)$;
- x_i – wektor położenia i-tej cząstki w przestrzeni $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $x_i = (q_i, p_i)$;
- $X = (x_1, \ldots, x_N) \in \Gamma$ – wektor położenia układu cząstek w przestrzeni fazowej;
- $X(t, x)$ – proces stochastyczny, będący rozwiązaniem całkowym rozpatrywanego zagadnienia z warunkiem początkowym $x \in \Gamma$;
- $b_i = (\frac{p_i}{m}, k_i) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ – wektor prędkości i-tej cząstki oraz siły, działającej na tę cząstkę;
- $b = (b_1, \ldots, b_N) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N$ – wektor prędkości oraz sił działających na kolejne cząstki;
- v_i, z_i – niezależne standardowe procesy Wienera w $\mathbb{R}^3$ (odpowiadające za zaburzenia położenia oraz pędu i-tej cząstki);
- $w_i = (v_i, z_i)$ – standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}^6$, odpowiadający za zaburzenia położenia oraz pędu i-tej cząstki;
- η_i, ξ_i – zmienności odpowiadające procesom v_i oraz z_i odpowiednio (są to macierze diagonalne 3×3 o nieujemnych elementach);
- Θ – macierz dyfuzji, odpowiadająca za zaburzenia położeń i pędów układu cząstek; jest to macierz diagonalna, nieujemnie określona, na której przekątnej znajdują się kolejno klatki $\Big(\theta_i\Big)_{1 \leqslant i \leqslant N}$, gdzie $\theta_i = \begin{pmatrix} \eta_i & 0 \\ 0 & \xi_i \end{pmatrix}$;

- $W = (w_1, \ldots, w_N)$ – $6N$-wymiarowy standardowy proces Wienera w przestrzeni fazowej, zdefiniowany na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o wartościach w $\mathbb{R}^{6N}$;
- $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ – prawostronnie ciągła filtracja w przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ taka, że $\mathcal{F}_0$ zawiera wszystkie zbiory o mierze $\mathbb{P}$ równej zero;
- $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)$ – przestrzeń L^2 (ze standardową normą) funkcji określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i o wartościach w przestrzeni Γ;
- $C_W\Big([0,T]; L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)\Big)$ – przestrzeń wszystkich ciągłych przekształceń $F\colon [0,T] \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)$ adaptowanych do procesu Wienera W;
- $|\cdot|$ – norma euklidesowa (zarówno w $\mathbb{R}^3$, jak i w Γ); norma p-ta;
- $\|\cdot\|$ – norma macierzowa (norma Frobeniusa);
- $\|\cdot\|_{C_W} \equiv \|\cdot\|_{C_W\big([0,T];L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\Gamma)\big)} = \Big(\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big(|\cdot|^2\big)\Big)^{1/2}$ – norma w przestrzeni $C_W\Big([0,T]; L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)\Big)$;
- $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x_d)^{\alpha_d}}$, gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$;
- $\|f\|_m = \sup_{x\in D} \frac{|f(x)|}{1+|x|} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in D} |D^\alpha f(x)|$;
- $\|f\|_{m+\delta} = \|f\|_m + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\delta}$;
- $\|f\|_{m:K} = \sup_{x\in K} \frac{|f(x)|}{1+|x|} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)|$;
- $\|f\|_{m+\delta:K} = \|f\|_{m:K} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y\in K\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\delta}$;
- $\|g\|^{\sim}_m = \sup_{x,y\in\mathbb{D}} \frac{|g(x,y)|}{(1+|x|)(1+|y|)} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{x,y\in\mathbb{D}} |D^\alpha_x D^\alpha_y g(x,y)|$;
- $\|g\|^{\sim}_{m:K} = \sup_{x,y\in K} \frac{|g(x,y)|}{(1+|x|)(1+|y|)} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{x,y\in K} |D^\alpha_x D^\alpha_y g(x,y)|$;
- $\|g\|^{\sim}_{\delta:K} = \sup_{\substack{x,y,x',y'\in K\\ x\neq x', y\neq y'}} \frac{|g(x,y)-g(x',y)-g(x,y')+g(x',y')|}{|x-x'|^\delta |y-y'|^\delta}$;
- $\|g\|^{\sim}_{m+\delta:K} = \|g\|^{\sim}_{m:K} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha_x D^\alpha_y g\|^{\sim}_{\delta:K}$;
- C – klasa ciągłych funkcji $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$;
- $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ – klasa ciągłych funkcji $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$;
- C^m – klasa funkcji $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ m-krotnie różniczkowalnych z ciągłymi pochodnymi cząstkowymi rzędu m;
- $C^{m,\delta}$ – klasa funkcji $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ takich, że $f \in C^m$ oraz pochodne cząstkowe $D^\alpha f$, $|\alpha| = m$, są δ–Hölderowsko ciągłe;
- $C^{m,\delta}$ – klasa funkcji $f\colon \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}$ takich, że $f(\cdot,t) \in C^{m,\delta}$ oraz dodatkowo dla dowolnego zwartego podzbioru $K \subset \mathbb{R}^d$ spełniony jest warunek: $\int_0^T \|f(\cdot,t)\|_{m+\delta:K}\, dt < +\infty$;
- $\widetilde{C}$ – klasa ciągłych funkcji $g\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$;
- $\widetilde{C}^m$ – klasa funkcji m-krotnie różniczkowalnych względem zmiennej x oraz y;
- $\widetilde{C}^{m,\delta}$ – klasa funkcji $g\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ takich, że $\|g\|^{\sim}_{m+\delta:K}$ jest skończona dla dowolnego zwartego podzbioru K dziedziny;
- $\widetilde{C}^{m,\delta}$ – klasa funkcji $g\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}$ takich, że $g(\cdot,\cdot,t) \in \widetilde{C}^{m,\delta}$ oraz dodatkowo dla dowolnego zwartego podzbioru $K \subset \mathbb{R}^d$ spełniony jest warunek: $\int_0^T \|g(\cdot,\cdot,t)\|^{\sim}_{m+\delta:K}\, dt < +\infty$;
- klasa $B_b^{0,1}$ lokalnej charakterystyki $\big(a(x,y,t), b(x,t)\big)$ semimartyngałów:

- proces stochastyczny $a(x,y,t) \in B_b^{0,1}$, to znaczy $a(x,y,t)$ jest procesem prognozowalnym (lub posiada taką modyfikację) o wartościach w $\widetilde{C}^{0,1}$ oraz $\int_0^T \|a(\cdot,\cdot,t)\|_{\widetilde{0+1}}\,dt < +\infty$ dla prawie wszystkich ω;
- proces stochastyczny $b(x,t) \in B_b^{0,1}$, to znaczy $b(x,t)$ jest procesem prognozowalnym (lub posiada taką modyfikację) o wartościach w $C^{0,1}$ oraz $\int_0^T \|b(\cdot,t)\|_{0+1}\,dt < +\infty$ dla prawie wszystkich ω;

- klasa $B_{ub}^{0,1}$ lokalnej charakterystyki $\big(a(x,y,t), b(x,t)\big)$ semimartyngałów:
  - proces stochastyczny $a(x,y,t) \in B_b^{0,1}$ oraz dodatkowo istnieje stała c taka, że dla dowolnego t $\|a(\cdot,\cdot,t)\|_{\widetilde{0+1}} \leqslant c$ dla prawie wszystkich ω;
  - proces stochastyczny $b(x,t) \in B_b^{0,1}$ oraz dodatkowo istnieje stała c taka, że dla dowolnego t $\|b(\cdot,t)\|_{0+1} \leqslant c$ dla prawie wszystkich ω;
- $\varphi_{s,t}(x,\omega),\ s,t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^d$ – ciągłe pole losowe o wartościach w $\mathbb{R}^d$, zdefiniowane na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- $B_b(A) = \{f \colon A \to A$ t.że f – borelowska i ograniczona$\}$;
- $C_b(A)$ – domknięta podprzestrzeń przestrzeni $B_b(A)$, zawierająca wszystkie ograniczone i jednostajnie ciągłe funkcje $f \colon A \to A$;
- $C_b^2(A)$ – klasa funkcji $f \colon A \to A$ dwukrotnie różniczkowalnych z jednostajnie ciągłą i ograniczoną drugą pochodną $D^2 f$ oraz z normą
  $\|f\|_2 \colon = \sup_{x\in A} |f(x)| + \sup_{x\in A} |Df(x)| + \sup_{x\in A} \|D^2 f(x)\|$.

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1. Krótki rys historyczny

Za twórcę kinetycznej teorii gazów uważa się Daniela Bernoulli'ego, który jako pierwszy przeniósł na ścisły grunt naukowy ideę cząsteczkowej budowy materii, wprowadzając w roku 1738 w dziele *Hydrodynamica* [3] model gazu złożonego ze zderzających się sprężyście cząstek, poruszających się zgodnie z prawami mechaniki klasycznej (co było rozwinięciem idei sięgającej czasów starożytnej Grecji) oraz wyjaśnił zjawisko ciśnienia gazu. Później przez okres ponad stu lat idea ta była rozwijana przez kolejnych uczonych (m.in. Johna Herapatha, Johna Jamesa Waterstone'a, Augusta Karla Kröniga i Jamesa Joule'a). Kolejnym wkładem w rozwój teorii kinetycznej była praca Rudolfa Clausiusa [16] z 1857 roku, w której wprowadził on ideę uśrednienia prędkości wszystkich cząstek gazu. W kolejnej swej pracy z roku 1858 [17] wprowadził on pojęcie średniej drogi swobodnej i 2 lata później James Clerk Maxwell [37], korzystając z tego pomysłu, rozwinął podstawy teorii procesów transportu. Wyprowadził on też, stosując rozumowanie heurystyczne, funkcję rozkładu prędkości, noszącą obecnie nazwę pochodzącą od jego nazwiska. Maxwell był też bliski sformułowania równania ewolucji dla rozkładu prędkości dla gazu w stanie równowagi, jednak ten krok został wykonany w 1872 roku przez Ludwiga Boltzmanna [5], który w końcowej części swej pracy wprowadził również pomysł rozpatrywania zamiast konkretnego układu cząstek tzw. zespół kanoniczny (*canonical ensemble*), czyli zbiór bardzo wielu układów (izolowanych, zamkniętych bądź otwartych[1]), charakteryzujących się pewnymi stałymi parametrami (np. energią, temperaturą, liczbą cząstek). Idea układów kanonicznych została jednak spopularyzowana i usystematyzowana dopiero przez amerykańskiego fizyka – Josiaha Willarda Gibbsa, w jego klasycznej książce [27] z 1902 roku. Gibbs jest uważany za twórcę pojęcia termodynamiki statystycznej oraz za jednego z ojców mechaniki statystycznej. Uważa się jednak [45], iż siła nowego spojrzenia Gibbsa na zagadnienie oddziałujących cząstek nie leży we wprowadzeniu idei zespołów, lecz rozkładów kanonicznych oraz wielkich rozkładów kanonicznych, u których podłoża leży rozważenie pojedynczego układu oraz nadanie mu tych właściwości, które są spełnione w całym zespole układów z prawdopodobieństwem bliskim jedności. Rozważania na gruncie mechaniki statystycznej napotkały jednak niebawem sporą przeszkodę: dzięki swej teorii Boltzmann starał się wyjaśnić nieodwracalność procesów w gazie, pokazując, że zderzenia cząsteczek powodują wzrost entropii gazu. Teoria ta jednak została zaatakowana przez niektórych

[1] Układ izolowany nie wymienia z otoczeniem ani ciepła, ani materii, układ zamknięty nie wymienia z otoczeniem materii, ale wymienia ciepło, zaś układ otwarty wymienia z otoczeniem zarówno ciepło, jak i materię.

fizyków i matematyków w latach 90–tych XIX w., ponieważ wydawała się prowadzić do paradoksalnych wyników. M. in. Josef Loschmidt [36] zwrócił w 1876 roku uwagę na fakt, iż ruch cząstek z jednej strony jest procesem nieodwracalnym w czasie (powoduje on wzrost entropii), ale z drugiej strony opisywany jest on przy pomocy dynamiki, która jest względem czasu symetryczna – gdyby odwrócić kierunek ruchu cząstek, to układ powróciłby do swego pierwotnego stanu (tzw. paradoks Loschmidta albo paradoks odwracalności). Podobny argument został użyty przez Williama Thomsona (Lorda Kelvina) dwa lata wcześniej. Później, w 1896 roku Ernst Zermelo opublikował krytykę mechanicznej teorii ciepła [51], odwołując się do twierdzenia Poincaré o powrocie, z którego wynika iż układ cząstek powróci dowolnie blisko swego wcześniejszego stanu (skąd niemożliwe jest wyłączne wzrastanie entropii). Uczeni ci odrzucili nowatorskie prace Boltzmanna[2] i dopiero po jego samobójczej śmierci w 1906 roku dzięki doświadczeniom z ruchami Browna oraz opublikowanym pracom Alberta Einsteina [23], [24] oraz Mariana Smoluchowskiego [48] ostatecznie potwierdzono cząsteczkową budowę materii. Wśród prac doświadczalnych wykonanych po 1906 roku, decydujące znaczenie miały prace Jean Baptiste Perrina [42], [43] ogłoszone w roku 1908. Jego starannie wykonane pomiary były zgodne z wynikami otrzymanymi przez Einsteina i Smoluchowskiego. Zgodność ta była ostatecznym potwierdzeniem poprawności kinetycznego wyjaśnienia ruchów Browna i zadecydowała o uznaniu w nauce realnego istnienia atomów. Główny przeciwnik teorii atomistycznej, Wilhelm Friedrich Ostwald, uznał (dzięki wynikom Perrina) w roku 1908 realne istnienie atomów [39].

Tak więc ostatecznie idee Boltzmanna zostały w środowisku uczonych powszechnie zaakceptowane i rozwijane były na przestrzeni kolejnego stulecia. Równanie Boltzmanna stało się wygodnym narzędziem do badania właściwości gazów rozrzedzonych. W 1912 roku David Hilbert [31] wyprowadził wzory na aproksymację rozwiązań równania Boltzmanna przy pomocy rozwinięcia w szereg zależny od parametru odwrotnie proporcjonalnego do gęstości gazu. W latach 1916–1917 Sidney Chapman [15] i David Enskog [25] niezależnie otrzymali przybliżone rozwiązania równania Boltzmanna, poprawne dla dostatecznie gęstych gazów.

Na przestrzeni kolejnych lat ukazywały się prace, dające coraz dokładniejsze rezultaty w kwestii istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania Boltzmanna: Torsten Carleman (1933) [9], Dietrich Morgenstern (1954) [38], Aleksandr Yakovlevich Povzner (1962) [46], Leif Arkeryd (1972) [1] [2], Ronald DiPerna & Pierre-Louis Lions (1989) [21].

Dużo wcześniej (bo już w XIXw.) pojawiło się natomiast elementarne pojęcie (zarówno w klasycznej mechanice hamiltonowskiej, jak i mechanice statystycznej), mianowicie tzw. równanie Liouville'a. Opisuje ono ewolucję w czasie funkcji rozkładu położenia cząstek w przestrzeni fazowej (czyli ewolucję funkcji opisującej prawdopodobieństwo że analizowany układ cząstek będzie znajdował się po pewnym czasie w zadanym obszarze i cząstki będą miały prędkości z pewnego zakresu). Dzięki niemu można analizować następnie wybrane podukłady cząstek, wprowadzając nowe funkcje rozkładu

[2] Sam Boltzmann jednak nie zraził się tymi zarzutami, lecz uznał je tylko za ważny wkład we właściwe zrozumienie problemu wzrastającej entropii. Wyjaśnił również [6], że zmniejszenie entropii jest możliwe, lecz jest niewyobrażalnie wręcz nieprawdopodobne – pokazuje to dobrze choćby oszacowanie średniego czasu powrotu centymetra sześciennego gazu do stanu początkowego: jest to około 10^{19} sekund, czyli w przybliżeniu 317 miliardów lat.

wybranych grup cząstek. W latach 1946-1947 ukazały się prace Nikołaja Nikołajewicza Bogolubowa [4], Maxa Borna & Herberta S. Greena [7], [8], Johna G. Kirkwooda [33], a wcześniej również J. Yvona [50], dotyczące równań dynamiki kul oddziałujących poprzez gładki potencjał. Nieco później podobne prace, dotyczące jednak dynamiki sztywnych kul doznających zderzeń sprężystych, opublikował H. Grad [28], [29], a po nim Carlo Cercignani [10], który w 1972 roku nadał tzw. hierarchii BBGKY (od pierwszych liter nazwisk osób, które opublikowały na ten temat prace) jawną i precyzyjną postać.

Od tego czasu zagadnieniem tym zajmowało się wielu uczonych i zostały opracowane liczne metody analizy równań tejże hierarchii. Wiadomo np., że w ogólności hierarchia BBGKY jest układem nieskończenie wielu równań różniczkowo-całkowych dla nieskończonego ciągu funkcji rozkładu. Dla układów o skończonej liczbie cząstek hierarchia ta składa się ze skończonej liczby równań i jest w klasycznym przypadku równoważna równaniu Liouville'a, natomiast w ujęciu kwantowym równoważna jest równaniu von Neumanna. W mechanice statystycznej wszystkie możliwe stany układu cząstek opisane są przez rozwiązania hierarchii BBGKY. Dzięki niej można opisywać zarówno stany równowagi, jak i stany nierównowagowe. Korzystając z hierarchii BBGKY można też ściśle wyprowadzić rozmaite równania kinetyczne (m.in. równanie Boltzmanna). Jako pierwszy zrobił to Bogolubow [4]. Chociażby tylko z powyższych przykładów widać już, że hierarchię BBGKY można nazwać podstawowym pojęciem statystycznej teorii układów cząstek.

W roku 1962 Ryogo Kubo [34] zaproponował inne podejście do analizy zachowania układów cząstek (rozumianych jako pewne układy dynamiczne). Założył on, iż dany jest hamiltonian, składający się ze składnika „standardowego" oraz pewnego stochastycznego zaburzenia i podał postać równania Liouville'a dla takiego układu. W ostatnich latach prof. A. Palczewski zaproponował uogólnienie podejścia Kubo: połączenie klasycznej dynamiki newtonowskiej (bez zakładania istnienia hamiltonianu) ze stochastycznymi zaburzeniami [41].

Pod kierunkiem prof. Palczewskiego zajmuję się obecnie analizą takiego układu cząstek, których ruch opisany jest klasycznymi równaniami Newtona z dodatkowymi członami stochastycznymi, przy założeniu, że cząstki oddziałują ze sobą poprzez odpowiednio gładki odpychający potencjał, nie dopuszczający do zderzeń.

Warto w tym miejscu zaznaczyć, iż zaburzenia losowe układów cząstek są bardzo istotnym i występującym w rzeczywistości zjawiskiem. Spójrzmy chociażby na układy laboratoryjne, które praktycznie nigdy nie są całkowicie izolowane od wpływu otoczenia. Niemal zawsze występują czy to resztkowe pola, czy np. drgania wywołane przez ludzi lub pobliski ruch uliczny, itp. Również komputerowe symulacje metodą dynamiki molekularnej podlegają zaburzeniom losowym, wynikającym tym razem z błędów zaokrąglania w arytmetyce komputera. Widać więc, iż badanie wpływu przypadkowych zaburzeń na zachowanie układów cząstek jest istotne z praktycznego punktu widzenia. Bardzo cenne wydaje się więc być znalezienie odpowiedzi na pytanie, do jakiego stopnia losowe zaburzenia mogą zmienić przebieg rozumowań przeprowadzanych w przypadku klasycznym.

1.2. Wyniki zawarte w rozprawie

W niniejszej rozprawie spróbujemy wyprowadzić zależności między funkcjami gęstości rozkładów prawdopodobieństwa położenia układu s cząstek w przestrzeni fazowej dla $s = 1, 2, \ldots, N$ przy założeniu, iż cząstki poruszają się w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i oddziałują na siebie poprzez pewien gładki potencjał odpychający, nie dopuszczający do ich zderzeń oraz ponadto wpływają na ich pęd i położenie dodatkowe losowe zaburzenia. Będzie to zatem uogólnienie na przypadek stochastyczny hierarchii BBGKY dla układu cząstek, oddziałujących poprzez gładki potencjał. W tym celu wyprowadzimy stochastyczne równanie Liouville'a (dla funkcji gęstości rozkładu położenia układu cząstek w przestrzeni fazowej), za pomocą którego następnie (metodą analogiczną do przypadku klasycznego) wyprowadzimy stochastyczną hierarchię BBGKY. Najpierw jednak musimy wykazać, że istnieje potok stochastyczny (stochastic flow), związany z analizowanym układem, czyli prościej mówiąc, musimy wykazać, że dany układ posiada w odpowiedniej przestrzeni rozwiązanie. Na końcu przyjrzymy się jeszcze kwestii istnienia miary niezmienniczej dla analizowanego układu (jeżeli nie zakładamy istnienia hamiltonianu, nie możemy twierdzić, że niezmiennicza będzie miara Lebesgue'a, jak to ma miejsce w przypadku klasycznym).
Sprecyzujmy teraz zagadnienie, którym będziemy się dalej zajmować.

1.3. Sformułowanie zagadnienia oraz podanie założeń o parametrach modelu

Rozważać będziemy układ $N \geqslant 2$ cząstek, które uważamy za punkty materialne o masie $m > 0$, poruszające się w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Cząstki te poruszają się zatem w przestrzeni fazowej $\Gamma = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N$, gdzie pierwsza składowa każdego z N czynników iloczynu kartezjańskiego odpowiada za wektor położenia cząstki, zaś druga za wektor jej pędu.
Jeżeli cząstki miałyby dodatnie średnice σ, to należałoby wprowadzić zbiór W_N zabronionych położeń układu N cząstek w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (odpowiadających przenikaniu się cząstek), tzn.

$$W_N = \Big\{(q_1, \ldots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N} \colon |q_i - q_j| < \sigma \text{ dla co najmniej jednej pary } (i, j) \\ \text{takich, że } \; i \neq j \text{ oraz } i, j \in \{1, \ldots, N\}\Big\}.$$

Wtedy

$$\Gamma_0 = (\mathbb{R}^{3N} \backslash W_N) \times \mathbb{R}^{3N} \tag{1.1}$$

byłaby przestrzenią dopuszczalnych położeń początkowych układu cząstek w przestrzeni fazowej.

W dalszym ciągu, nawet dla $\sigma = 0$ (punkty materialne), będziemy zakładali, że początkowa konfiguracja cząstek nie dopuszcza ich stykania się, tzn. punkty materialne się nie pokrywają. Oznacza to, że także w przypadku punktów materialnych będziemy rozważali przestrzeń Γ_0 z tym, że w naszym przypadku

$$W_N = \Big\{(q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N} \colon |q_i - q_j| = 0 \text{ dla co najmniej jednej pary } (i,j) \\ \text{takich, że } \ i \neq j \text{ oraz } i,j \in \{1, \dots, N\}\Big\}.$$

Wprowadźmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i załóżmy, że jest ona wyposażona w prawostronnie ciągłą filtrację $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ taką, że $\mathcal{F}_0$ zawiera wszystkie zbiory o mierze $\mathbb{P}$ równej zero.
Stan naszego układu będzie opisywany przez funkcję $P(t, q_1, p_1, \dots, q_N, p_N, \omega)$, gdzie q_i oznacza położenie, zaś p_i pęd i-tej cząstki, zaś $\omega \in \Omega$. Funkcji tej nadamy później (w rozdziale 4) sens gęstości losowej dla analizowanego układu cząstek.
Załóżmy, że układ bez zaburzeń stochastycznych posiada hamiltonian, tzn. funkcję $H \colon \Gamma \to \mathbb{R}$, opisującą energię układu cząstek. Hamiltonian jest dany w naszym przypadku wzorem

$$H(q_1, p_1, \dots, q_N, p_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \Phi(q_i - q_j), \tag{1.2}$$

gdzie $\Phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ jest energią potencjalną[3] oddziaływania cząstek, spełniającą następujące warunki:

$$\begin{aligned}
i)\ & \Phi(q) = m\widetilde{\Phi}(|q|), \text{ gdzie potencjał } \widetilde{\Phi} \colon \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\
& \text{(potencjał sferycznie symetryczny)}, \\
ii)\ & \widetilde{\Phi} \text{ jest ograniczona na } \mathbb{R}_+ \text{ i jej pochodna też jest na } \mathbb{R}_+ \text{ ograniczona}, \\
iii)\ & \widetilde{\Phi} \in C^3(\mathbb{R}_+), \\
iv)\ & \widetilde{\Phi}(0) = 0, \\
v)\ & \left|\widetilde{\Phi}'(q_1) - \widetilde{\Phi}'(q_2)\right| \leqslant L_1 |q_1 - q_2|, \text{ dla } q_1,\ q_2 \in \mathbb{R}_+, \\
vi)\ & D^3\Phi \text{ jest ograniczona na } \mathbb{R}^3.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Rozpatrywana energia potencjalna opisuje zatem odpychanie cząstek (nieujemność) i może być ona traktowana jako modyfikacja klasy C^3 (taka, aby dostać odpowiednio duże maksimum lokalne dla pewnego $\overline{q} > 0$ oraz spadek $\Phi(q)$ do zera przy $q \to 0^+$) potencjałów elektrostatycznych $\widetilde{\Phi}(|q|) = \frac{kQ}{|q|}$, bądź potencjałów van der Waalsa postaci $\widetilde{\Phi}(|q|) = \frac{A}{|q|^{12}}$, $A > 0$, bądź potencjałów postaci $\widetilde{\Phi}(|q|) = Ae^{-B|q|}$, $A, B > 0$.
Przykładem funkcji $\widetilde{\Phi}$, spełniającej założenia (1.3), może być $\widetilde{\Phi}(|q|) = A|q|^2 e^{-B|q|^2}$ dla dowolnych $A, B > 0$, czyli tzw. *zmodyfikowany odpychający potencjał gaussowski*.
Zakładamy tu, że potencjał opisuje odpychanie na tyle silne, że w przypadku deterministycznym niemożliwe byłyby zderzenia poruszających się cząstek.
Zakładamy również, że ruch wszystkich cząstek opisany jest następującym układem

[3] Jeżeli masa cząstki jest jednostkowa, to energia potencjalna może być utożsamiona z potencjałem; w ogólności potencjał to energia potencjalna podzielona przez masę cząstki.

równań (uogólnieniem równań Hamiltona na przypadek cząstek, doznających losowych brownowskich zaburzeń)[4]:

$$\begin{cases} dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dt + \eta_i\,dv_i, \\ dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dt + \xi_i\,dz_i, \end{cases} \tag{1.4}$$

gdzie, jak widzimy z postaci hamiltonianu (1.2),

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \equiv \frac{p_i}{m}$$

jest prędkością i-tej cząstki, zaś

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} \equiv -\sum_{l\neq i} \nabla\Phi(q_i - q_l)$$

jest siłą, działającą na i-tą cząstkę.
v_i oraz z_i są niezależnymi standardowymi procesami Wienera w $\mathbb{R}^3$, zaś η_i oraz ξ_i – stałymi rzeczywistymi macierzami diagonalnymi wymiaru 3 (takimi samymi dla każdej cząstki, tzn. $\eta_i = \eta_j$ oraz $\xi_i = \xi_j$ dla $i, j \in \{1, \ldots, N\}$):

$$\eta_i = \begin{pmatrix} \eta_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{i_2} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{i3} \end{pmatrix}, \quad \xi_i = \begin{pmatrix} \xi_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{i_2} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{i3} \end{pmatrix},$$

przy czym $\eta_{ik} \geqslant 0,\ \xi_{ik} \geqslant 0$ dla $i \in \{1, \ldots, N\},\ k \in \{1, 2, 3\}$.
Zakładamy zatem, że w dowolnym momencie każda ze współrzędnych zarówno położenia, jak i pędu każdej z cząstek może zostać zaburzona w niezależny od pozostałych sposób zgodnie z rozkładem gaussowskim (zadanym przez jednowymiarowe procesy Wienera). Macierze η_i oraz ξ_i możemy uznać więc za współczynniki dyfuzji dla pędu i położenia każdej z cząstek.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na problem możliwego zbliżania się cząstek do siebie (i w efekcie pokrywania się punktów materialnych). Jakkolwiek dynamika stochastyczna, przyjęta w modelu, nie wyklucza takich zdarzeń, to jednak łatwo jest pokazać, iż prawdopodobieństwo takich zdarzeń jest zerowe. Dla przypadku sztywnych kul ($\sigma > 0$) problem ten rozwiązał A. S. Sznitman [49]. W tym celu wprowadzamy (za Sznitmanem, [49], str. 668) niemalejący ciąg $\mathcal{F}_t$-mierzalnych momentów stopu $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ oraz niemalejący ciąg $\mathcal{F}_{\tau_n}$-mierzalnych podzbiorów $J_1, \ldots, J_N$ zbioru $\{1, \ldots, N\}$ postaci

$$\tau_1 = \inf\Big\{s \geqslant 0\colon \exists_{j\neq i}\ |q_i(s) - q_j(s)| \leqslant \sigma\Big\}$$

$$J_1 = \Big\{i \in \{1, \ldots, N\}\colon \exists_{j\neq i}\ |q_i(\tau_1) - q_j(\tau_1)| \leqslant \sigma\Big\}$$

[4] Dla uproszczenia zapisu pomijamy w notacji (tam gdzie to nie powoduje niejasności) zależność p_i, q_i, v_i oraz z_i od czasu.

oraz dalej indukcyjnie

$$\tau_{n+1} = \inf\Big\{s \geqslant \tau_n \colon \exists_{\substack{j\neq i \\ i\in\{1,\ldots,N\}\setminus J_n}} |q_i(s) - q_j(s)| \leqslant \sigma\Big\}$$

$$J_{n+1} = J_n \cup \Big\{i \in \{1,\ldots,N\}\setminus J_n \colon \exists_{\substack{j\neq i \\ j\in\{1,\ldots,N\}\setminus J_n}} |q_i(\tau_{n+1}) - q_j(\tau_{n+1})| \leqslant \sigma\Big\},$$

przy czym przyjmuje się, że jeśli $\tau_{n+1} = +\infty$, to $J_{n+1} = J_n$.

Wówczas prawdziwy jest następujący lemat ([49], Lemma 2.1, str. 668):

Lemat 1.1. *Dla $n \geqslant 1$ prawdziwe są inkluzje*

$$\{\tau_n < +\infty\} \subset \{\tau_n < \tau_{n+1}\},$$

$$\{0 < \tau_n < +\infty\} \subset \{\mathit{Card} J_{n+1} = \mathit{Card} J_n + 2\} \quad \mathbb{P} - p.n.$$

Dowód lematu jest prawdziwy także w przypadku rozważanego przez nas układu cząstek, ponieważ jedyną szczególną własnością, niezbędną do pokazania prawdziwości tezy, jest ciągłość trajektorii rozważanego procesu (u nas $q(\cdot)$). Ponieważ w rozdziale drugim wykażemy, że rozwiązanie zagadnienia (1.4) tworzy stochastyczny potok homeomorfizmów, tym samym zapewnia to prawdziwość powyższego lematu.

Natychmiastowym wnioskiem z lematu 1.1 jest fakt, że ciąg (τ_n) musi być ściśle rosnący, o ile τ_n są skończone. Ponadto jedynie skończona liczba wyrazów tego ciągu może być skończona. Pokazuje to, że przy rozważaniu prawdopodobieństwa zaistnienia danych konfiguracji cząstek w przestrzeni fazowej możemy zaniedbać nadmierne zbliżanie się cząstek i ich pokrywanie się.

Podsumujmy teraz poczynione na temat naszego modelu założenia.

Założenia o rozpatrywanym modelu (H1):

1) Mamy dany układ $N \geqslant 2$ poruszających się w $\mathbb{R}^3$ cząstek o masie $m > 0$, traktowanych jako punkty materialne.
2) Cząstki te poruszają się w przestrzeni fazowej $\Gamma = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N$, gdzie pierwsza składowa każdego z N czynników iloczynu kartezjańskiego odpowiada za wektor położenia cząstki, zaś druga za wektor jej pędu.
3) Konfiguracja początkowa układu cząstek należy do podzbioru Γ_0 przestrzeni fazowej Γ, zadanego równością (1.1).
4) Mamy daną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wyposażoną w prawostronnie ciągłą filtrację $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ taką, że $\mathcal{F}_0$ zawiera wszystkie zbiory o mierze $\mathbb{P}$ równej zero.
5) Stan układu jest opisywany przez funkcję $P(t, q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N, \omega)$, gdzie q_i oznacza położenie, zaś p_i pęd i-tej cząstki, $\omega \in \Omega$; P jest zatem gęstością losową dla analizowanego układu cząstek.

Założenia o hamiltonianie (H2):

1) Dla rozpatrywanego układu istnieje (deterministyczny) hamiltonian $H \colon \Gamma \to \mathbb{R}$, opisujący energię układu cząstek, dany wzorem

$$H(q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \Phi(q_i - q_j), \tag{1.5}$$

gdzie $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ jest energią potencjalną oddziaływania cząstek, spełniającą następujące warunki:

2) $\Phi(q) = m\widetilde{\Phi}(|q|)$, gdzie potencjał $\widetilde{\Phi}\colon \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (potencjał sferycznie symetryczny),
3) $\widetilde{\Phi}$ jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$ i jej pochodna też jest na $\mathbb{R}_+$ ograniczona,
4) $\widetilde{\Phi} \in C^3(\mathbb{R}_+)$,
5) $\widetilde{\Phi}(0) = 0$,
6) $\left|\widetilde{\Phi}'(q_1) - \widetilde{\Phi}'(q_2)\right| \leqslant L_1|q_1 - q_2|$ dla $q_1,\ q_2 \in \mathbb{R}_+$,
7) $D^3\Phi$ jest ograniczona na $\mathbb{R}^3$,
8) potencjał $\widetilde{\Phi}$ opisuje odpychanie na tyle silne, że niemożliwe są zderzenia poruszających się cząstek.

Założenia o zaburzeniach stochastycznych (H3):

1) W dowolnym momencie każda ze współrzędnych zarówno położenia, jak i pędu każdej z cząstek może zostać zaburzona w niezależny od pozostałych sposób zgodnie z rozkładem gaussowskim, zadanym przez niezależne standardowe procesy Wienera v_i oraz z_i w $\mathbb{R}^3$,
2) procesy $v_1, z_1, \ldots, v_N,\ z_N$ tworzą $6N$-wymiarowy proces Wienera,
3) współczynnik dyfuzji w równaniu stochastycznym opisującym zmianę położenia i-tej cząstki w czasie wynosi η_i, gdzie η_i to stała rzeczywista macierz diagonalna wymiaru 3 (taka sama dla każdej cząstki), postaci
$$\eta_i = \begin{pmatrix} \eta_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{i_2} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{i3} \end{pmatrix},$$
gdzie $\eta_{ik} \geqslant 0$ dla $i \in \{1, \ldots, N\},\ k \in \{1, 2, 3\}$,
4) współczynnik dyfuzji w równaniu stochastycznym opisującym zmianę pędu i-tej cząstki w czasie wynosi ξ_i, gdzie ξ_i jest stałą rzeczywistą macierzą diagonalną wymiaru 3 (taką samą dla każdej cząstki), postaci
$$\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{i_2} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{i3} \end{pmatrix},$$
gdzie $\xi_{ik} \geqslant 0$ dla $i \in \{1, \ldots, N\},\ k \in \{1, 2, 3\}$.

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia: $X = (x_1, \ldots, x_N) \in \Gamma$ będzie oznaczać wektor położenia cząstek w przestrzeni fazowej, tzn. każde $x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ jest parą (q_i, p_i). Ponadto niech $b = (b_1, \ldots, b_N) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N$ będzie wektorem o współrzędnych $b_i = (\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ oraz $W = (w_1, \ldots, w_N)$ – $6N$-wymiarowym standardowym procesem Wienera w przestrzeni fazowej, zdefiniowanym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i wartościach w $\mathbb{R}^{6N}$, przy czym oczywiście $w_i = (v_i, z_i)$.

Przy powyższych oznaczeniach układ równań (1.4) można napisać (przy uwzględnieniu warunku początkowego $x \in \Gamma_0$) w postaci
$$\begin{cases} dX(t) = b\Big(X(t)\Big)\,dt + \Theta\,dW(t),\ t \geqslant 0 \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{1.6}$$

Ponieważ zakładamy, że wszystkich $6N$ procesów Wienera, składających się na $6N$-wymiarowy proces Wienera, jest niezależnych, to wynika stąd, iż Θ jest macierzą nieujemnie określoną, w której na przekątnej znajdują się klatki θ_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, gdzie $\theta_i = \begin{pmatrix} \eta_i & 0 \\ 0 & \xi_i \end{pmatrix}$.

Wprowadźmy teraz przestrzeń

$$C_W\Big([0,T]; L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)\Big),$$

która jest przestrzenią ciągłych przekształceń $F\colon [0,T] \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)$ adaptowanych do W, tzn. $F(s)$ jest $\mathcal{F}_s$–mierzalne dla dowolnego $s \in [0,T]$.

Normę euklidesową w Γ oznaczamy symbolem $|\cdot|$. To samo oznaczenie będzie również używane dla normy euklidesowej w $\mathbb{R}^3$ (to, która norma jest aktualnie używana będzie wynikało z postaci elementu, którego norma będzie wyznaczana). $C_W\Big([0,T]; L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)\Big)$ wyposażona w normę

$$\|F\|_{C_W\left([0,T];L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\Gamma)\right)} = \Big(\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\Big(|F(t)|^2\Big)\Big)^{1/2} \tag{1.7}$$

jest przestrzenią Banacha i nazywana jest przestrzenią procesów adaptowanych na $[0,T]$ o wartościach w Γ, ciągłych w sensie średniokwadratowym.[5]

Wówczas przez rozwiązanie całkowe (ang. *mild solution*) zagadnienia (1.6) będziemy rozumieć proces stochastyczny na $C_W\Big([0,T]; L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)\Big)$ taki, że

$$X(t) = x + \int_0^t b(X(s))\,ds + \int_0^t \Theta\, dW(s), \;\; t \geqslant 0. \tag{1.8}$$

[5] Dla skrócenia zapisu normę w tej przestrzeni będziemy oznaczać przez $\|\cdot\|_{C_W}$.

Rozdział 2

Istnienie potoku stochastycznego (*stochastic flow*)

2.1. Definicje i podstawowe lematy

Wykażemy najpierw, że układ równań stochastycznych postaci (1.4), opisujący ruch układu N cząstek w $\mathbb{R}^3$ z gładkim potencjałem oddziaływań Φ, dla dowolnego warunku początkowego posiada jednoznaczne rozwiązanie i ponadto rodzina rozwiązań posiada modyfikację, będącą stochastycznym potokiem homeomorfizmów (odpowiednie definicje zostaną podane poniżej). Terminologia z tego rozdziału oparta jest na książce [35].

Dla danego wielowskaźnika $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, o całkowitych nieujemnych współrzędnych, definiujemy operator różniczkowania D_x^α, albo krócej D^α w standardowy sposób:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_d)^{\alpha_d}},$$

gdzie $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$.

Przez C^m będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji o pewnej dziedzinie zawartej w $\mathbb{R}^d$ i wartościach rzeczywistych, różniczkowalnych m-krotnie w sposób ciągły.

Definicja 2.1. *Niech $\mathbb{D}$ będzie obszarem w $\mathbb{R}^d$, $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, zaś $0 < \delta \leqslant 1,\ m \in \mathbb{N}$.*

Powiemy, że $f \in C^{m,\delta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in C^m$ oraz wszystkie pochodne $D^\alpha f,\ |\alpha| = m$ są δ–Hölderowsko ciągłe.

Wprowadźmy też dwie normy, których będziemy dalej używać:

$$\|f\|_m = \sup_{x\in\mathbb{D}} \frac{|f(x)|}{1+|x|} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in\mathbb{D}} |D^\alpha f(x)| \tag{2.1}$$

oraz

$$\|f\|_{m+\delta} = \|f\|_m + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{D}\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\delta}. \tag{2.2}$$

Dodatkowo przydadzą nam się seminormy (K oznacza dowolny zwarty podzbiór obszaru $\mathbb{D}$):

$$\|f\|_{m:K} = \sup_{x\in K} \frac{|f(x)|}{1+|x|} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)| \tag{2.3}$$

oraz

$$\|f\|_{m+\delta:K} = \|f\|_{m:K} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y\in K\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\delta} \tag{2.4}$$

(są to oczywiście seminormy, gdyż bez trudu można wskazać funkcje niezerowe, określone na całym obszarze $\mathbb{D}$, które dają w $\|\cdot\|_{m:K}$ oraz $\|\cdot\|_{m+\delta:K}$ wartości zerowe).

Wprowadzona wcześniej definicja 2.1 rozszerza się też na funkcje zależne dodatkowo od parametru czasowego:

Definicja 2.2. *Niech $\mathbb{D}$ będzie obszarem w $\mathbb{R}^d$, $f\colon \mathbb{D}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ – funkcją ciągłą, zaś $0<\delta\leqslant 1$, $m\in\mathbb{N}$.*

Powiemy, że $f\in C^{m,\delta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $t\in[0,T]$ funkcja $f(t)\equiv f(\cdot,t)$ należy do $C^{m,\delta}$ (w sensie definicji 2.1) oraz dodatkowo dla dowolnego zwartego podzbioru K obszaru $\mathbb{D}$ spełniony jest warunek: $\int_0^T\|f(\cdot,t)\|_{m+\delta:K}\,dt<+\infty$.

Potrzebujemy jeszcze analogicznych pojęć dla funkcji zależnych od dwóch zmiennych przestrzennych:

Definicja 2.3. *Niech $\mathbb{D}$ będzie obszarem w $\mathbb{R}^d$, $g\colon\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$.*

Powiemy, że $g\in\widetilde{C}^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy g jest m-krotnie różniczkowalna względem każdej zmiennej x oraz y.

Dla takich funkcji zdefiniować możemy normę

$$\|g\|_m^{\sim}=\sup_{x,y\in\mathbb{D}}\frac{|g(x,y)|}{(1+|x|)(1+|y|)}+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x,y\in\mathbb{D}}|D_x^\alpha D_y^\alpha g(x,y)|. \tag{2.5}$$

Dodatkowo użyjemy jeszcze następującej seminormy:

$$\|g\|_{m+\delta:K}^{\sim}=\|g\|_{m:K}^{\sim}+\sum_{|\alpha|=m}|D_x^\alpha D_y^\alpha g|_{\delta:K}^{\sim}, \tag{2.6}$$

gdzie obie seminormy po prawej stronie powyższej równości zdefiniowane są następująco:

$$\|g\|_{m:K}^{\sim}=\sup_{x,y\in K}\frac{|g(x,y)|}{(1+|x|)(1+|y|)}+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x,y\in K}|D_x^\alpha D_y^\alpha g(x,y)|, \tag{2.7}$$

zaś

$$\|g\|_{\delta:K}^{\sim}=\sup_{\substack{x,y,x',y'\in K\\ x\neq x',y\neq y'}}\frac{|g(x,y)-g(x',y)-g(x,y')+g(x',y')|}{|x-x'|^\delta|y-y'|^\delta}. \tag{2.8}$$

Uwaga. Jeżeli w symbolach powyższych trzech seminorm (2.6, 2.7 oraz 2.8) nie występowałaby litera K w dolnym indeksie, oznacza to, że suprema brane są po całym obszarze $\mathbb{D}$.

Możemy teraz sformułować kolejną definicję:

Definicja 2.4. *Niech $\mathbb{D}$ będzie obszarem w $\mathbb{R}^d$, $g\colon\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{R}$, zaś $0<\delta\leqslant 1$, $m\in\mathbb{N}$.*

Powiemy, że $g\in\widetilde{C}^{m,\delta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|g\|_{m+\delta:K}$ jest skończona dla dowolnego zwartego podzbioru K obszaru $\mathbb{D}$.

Podobnie jak dla funkcji zależnych od jednej zmiennej przestrzennej, wprowadzimy odpowiednie definicje dla funkcji dwóch zmiennych przestrzennych zależnych dodatkowo od parametru czasowego:

Definicja 2.5. *Niech $\mathbb{D}$ będzie obszarem w $\mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{D}\times\mathbb{D}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ – funkcją ciągłą, zaś $0<\delta\leqslant 1$, $m\in\mathbb{N}$.*

Powiemy, że $g\in\widetilde{C}^{m,\delta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $t\in[0,T]$ funkcja $g(t)\equiv g(\cdot,\cdot,t)$ należy do przestrzeni $\widetilde{C}^{m,\delta}$ (w sensie definicji 2.4) oraz dodatkowo $\int_0^T \|g(\cdot,\cdot,t)\|^{\sim}_{m+\delta:K}\,dt<+\infty$ dla dowolnego zwartego podzbioru K obszaru $\mathbb{D}$.

Użyjemy teraz wprowadzonego aparatu do analizy procesów stochastycznych.

Przypomnijmy najpierw podstawowe definicje oraz nierówności, które będą pomocne w dalszych rozważaniach:

Definicja 2.6. *Niech S będzie przestrzenią polską, zaś $\mathbb{D}$ – obszarem w $\mathbb{R}^d$. Zbiór zmiennych losowych $X(x)$, $x\in\mathbb{D}$ o wartościach w S nazywamy polem losowym o parametrze $\mathbb{D}$. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem chwil czasu, tzn. $\mathbb{T}=[t_1,t_2]$ dla pewnych $t_2\geqslant t_1\geqslant 0$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ lub $\mathbb{T}=[t_1,+\infty)$, $t_1\geqslant 0$, $t_1\in\mathbb{R}$. Jeżeli $\mathbb{D}=\mathbb{T}$, to pole losowe nazywamy procesem stochastycznym.*

Definicja 2.7. *Proces stochastyczny X_t o wartościach rzeczywistych, adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_t)$ taki, że dla dowolnego t zmienna losowa X_t jest całkowalna, nazywamy*
- *martyngałem, jeżeli $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]=X_s$ p.n. dla dowolnych $t>s$;*
- *podmartyngałem, jeżeli $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]\geqslant X_s$ p.n. dla dowolnych $t>s$.*

Definicja 2.8. *Ciągły proces stochastyczny X_t o wartościach rzeczywistych, adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, nazwiemy martyngałem lokalnym, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rosnący ciąg (τ_n) momentów stopu takich, że $\mathbb{P}(\tau_n<T)\to 0$ gdy $n\to\infty$ oraz każdy proces zastopowany $X_t^{\tau_n}\equiv X_{t\wedge\tau_n}$ jest martyngałem.*

Lemat 2.9. *(Nierówność Dooba, [35], Theorem 1.2.7, str. 9) Niech X_t, $t\in[0,T]$ będzie nieujemnym podmartyngałem. Wówczas dla dowolnego $p>1$ mamy*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leqslant t}(X_s)^p\Big]\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}\Big[(X_t)^p\Big]\qquad \textit{dla wszystkich } t\in[0,T].$$

Definicja 2.10. *Nawiasem skośnym (ang.: quadratic variation) ciągłego martyngału lokalnego M_t nazywamy taki ciągły niemalejący proces $\langle M\rangle_t$, że $M_t^2-\langle M\rangle_t$ jest martyngałem lokalnym.*

Definicja 2.11. *Wzajemnym nawiasem skośnym (ang.: joint quadratic variation) ciągłych martyngałów lokalnych M_t i N_t nazywamy taki ciągły niemalejący proces $\langle M,N\rangle_t$, że $M_tN_t-\langle M,N\rangle_t$ jest martyngałem lokalnym.*

Lemat 2.12. *(Nierówność Burkholdera, [35], Theorem 2.3.12, str. 66) Niech $p\geqslant 2$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą, zaś M_t niech będzie dowolnym ciągłym martyngałem takim, że $M_0=0$ oraz $\mathbb{E}\Big[|M_T|^p\Big]<+\infty$. Wówczas istnieją stałe dodatnie C_1 oraz C_2 (zależne tylko od p) takie, że dla dowolnego $t\in[0,T]$ zachodzą nierówności*

$$C_1\mathbb{E}\Big[\langle M\rangle_t^{p/2}\Big]\leqslant\mathbb{E}\Big[|M_t|^p\Big]\leqslant C_2\mathbb{E}\Big[\langle M\rangle_t^{p/2}\Big].$$

Lemat 2.13. *(Nierówność Gronwalla, [40], twierdzenie 3.9, str. 83) Niech na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ będzie dana nieujemna, całkowalna funkcja ciągła $u(t)$ taka, że nierówność*

$$u(t) \leqslant a + b\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds$$

zachodzi dla $t > t_0$, $t_0, t \in J$, gdzie $a \geqslant 0$, $b > 0$. Wówczas nierówność

$$u(t) \leqslant a e^{b(t-t_0)}$$

zachodzi dla wszystkich $t \in J$, $t > t_0$.

Teraz przedstawimy różniczkową wersję nierówności Gronwalla, która również będzie przydatna przy dowodzie jednego z lematów.

Lemat 2.14. *(Nierówność Gronwalla (postać różniczkowa), [26], str. 595) Niech na przedziale $[0, T]$ dana będzie dana nieujemna, absolutnie ciągła funkcja $\eta(\cdot)$ taka, że dla p.w. $t \in [0, T]$ spełniona jest nierówność różniczkowa*

$$\eta'(t) \leqslant \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

gdzie ϕ i ψ są nieujemnymi funkcjami całkowalnymi na $[0, T]$. Wówczas dla $t \in [0, T]$ spełniona jest nierówność

$$\eta(t) \leqslant e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\Big[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\Big].$$

Jeżeli $F(x, t, \omega)$ jest rodziną procesów stochastycznych o wartościach rzeczywistych, zależnych od parametru $x \in \mathbb{D}$, gdzie $\mathbb{D}$ jest pewnych obszarem w $\mathbb{R}^d$, to możemy na tę rodzinę patrzeć, jak na pole losowe z dwoma parametrami: x oraz t. Jeśli dla dowolnego t $F(x, t, \omega)$ jest ciągłą funkcją zmiennej x dla prawie wszystkich ω (czyli p.n.), to możemy patrzeć na $F(\cdot, t, \omega)$ jak na proces stochastyczny o wartościach w C – przestrzeni funkcji ciągłych z $\mathbb{D}$ w $\mathbb{R}$. Jeśli $F(x, t, \omega)$ jest dla dowolnego t m-krotnie różniczkowalną funkcją zmiennej x p.n., to można na nią patrzeć, jak na proces stochastyczny o wartościach w C^m. Jeżeli $F(x, t, \omega)$ jest ciągłym procesem o wartościach w C^m, nazywa się go ciągłym C^m-procesem. Jeżeli $F(x, t, \omega)$ należy dla dowolnego t do przestrzeni $C^{m,\delta}$ p.n., to można na nią patrzeć, jak na proces stochastyczny o wartościach w $C^{m,\delta}$. Jeżeli $F(x, t, \omega)$ jest ciągłym procesem stochastycznym o wartościach w $C^{m,\delta}$, to nazywamy go ciągłym $C^{m,\delta}$-procesem.

Jeżeli $G(x, y, t, \omega)$ jest rodziną procesów stochastycznych o wartościach rzeczywistych, zależnych od parametrów $x, y \in \mathbb{D}$, gdzie $\mathbb{D}$ jest pewnych obszarem w $\mathbb{R}^d$, to możemy na tę rodzinę patrzeć, jak na pole losowe z trzema parametrami: x, y oraz t. Jeśli $G(x, y, t, \omega)$ dla dowolnego t jest ciągłą funkcją zmiennych x oraz y p.n., to możemy patrzeć na $G(\cdot, \cdot, t, \omega)$ jak na proces stochastyczny o wartościach w $\widetilde{C}$ – przestrzeni funkcji ciągłych z $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ w $\mathbb{R}$. Jeśli $G(x, y, t, \omega)$ dla dowolnego t jest m-krotnie różniczkowalną funkcją zmiennych x oraz y p.n., to można na nią patrzeć, jak na proces stochastyczny o wartościach w $\widetilde{C}^m$. Jeżeli $G(x, y, t, \omega)$ jest ciągłym procesem o wartościach w $\widetilde{C}^m$,

nazywa się go ciągłym $\widetilde{C}^m$-procesem. Jeżeli $G(x,y,t,\omega)$ dla dowolnego t należy do przestrzeni $\widetilde{C}^{m,\delta}$ p.n., to można na nią patrzeć, jak na proces stochastyczny o wartościach w $\widetilde{C}^{m,\delta}$. Jeżeli $G(x,y,t,\omega)$ jest ciągłym procesem stochastycznym o wartościach w $\widetilde{C}^{m,\delta}$, to nazywamy go ciągłym $\widetilde{C}^{m,\delta}$-procesem.
Uwaga. W dalszych rozważaniach dla uproszczenia zapisu pomijamy argument ω procesów stochastycznych.

Definicja 2.15. *Niech $\{F(x,t),\ x\in\mathbb{D}\}$ będzie rodziną ciągłych semimartyngałów, tzn. procesów stochastycznych o rozkładzie $F(x,t)=M(x,t)+B(x,t)$, gdzie $M(x,t)$ jest rodziną ciągłych martyngałów lokalnych, zaś $B(x,t)$ – rodziną ciągłych procesów o wahaniu skończonym (tzn. dających się np. zapisać w postaci różnicy dwóch procesów rosnących).*

Załóżmy, że $B(x,t)$ można zapisać w postaci

$$B(x,t)=\int\limits_0^t b(x,s)\,ds,$$

gdzie $b(x,t)$ jest (dla dowolnego $x\in\mathbb{D}$) pewnym procesem prognozowalnym, zaś wzajemny nawias skośny martyngałów lokalnych $M(x,t)$ oraz $M(y,t)$ ma postać

$$\langle M(x,\cdot),M(y,\cdot)\rangle_t=A(x,y,t)=\int\limits_0^t a(x,y,r)\,dr,$$

gdzie $a(x,y,t)$ jest (dla dowolnych $x,y\in\mathbb{D}$) pewnym procesem prognozowalnym.

Wówczas parę $\big(a(x,y,t),b(x,t)\big)$ nazwiemy lokalną charakterystyką rodziny semimartyngałów $\{F(x,t),\ x\in\mathbb{D}\}$.

Jeżeli $F(x,t)=\big(F^1(x,t),\dots,F^d(x,t)\big)$ jest ciągłym semimartyngałem o wartościach w przestrzeni $C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, to wówczas oczywiście mamy rozkład

$$F^i(x,t)=M^i(x,t)+B^i(x,t),\quad i\in\{1,\dots,d\}$$

i ponadto

$$\langle M^i(x,\cdot),M^j(y,\cdot)\rangle_t=A^{ij}(x,y,t)=\int\limits_0^t a^{ij}(x,y,r)\,dr,\quad i,j\in\{1,\dots,d\}$$

oraz

$$B^i(x,t)=\int\limits_0^t b^i(x,s)\,ds,\quad i\in\{1,\dots,d\}$$

zatem b jest procesem o wartościach wektorowych, zaś a – o wartościach macierzowych.

Warto jeszcze zauważyć, że z definicji procesu $a(x,y,t)$ wynika, że musi on być symetryczny względem zamiany zmiennych x oraz y (ponieważ wzajemny nawias skośny jest symetryczny).

Poniżej przedstawiamy definicje, opisujące pewne klasy charakterystyk semimartyngałów. Zaznaczmy jeszcze, że wprowadza się również klasy ogólniejsze, np. $B_b^{m,\delta}$, $B_{ub}^{m,\delta}$ (patrz: [35], str. 79–101), nas jednak będą interesowały jedynie ich konkretne elementy.

Definicja 2.16. *Powiemy, że proces $a(x, y, t) \in B_b^{0,1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on procesem prognozowalnym (lub posiada taką modyfikację) o wartościach w $\widetilde{C}^{0,1}$ oraz $\int_0^T \|a(\cdot,\cdot,t)\|_{0+1}^{\sim} \, dt < +\infty$ p.n.*

Definicja 2.17. *Powiemy, że proces $b(x,t) \in B_b^{0,1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b(x,t)$ jest procesem prognozowalnym (lub posiada taką modyfikację) o wartościach w $C^{0,1}$ oraz $\int_0^T \|b(\cdot,t)\|_{0+1} \, dt < +\infty$ p.n.*

Definicja 2.18. *Powiemy że lokalna charakterystyka $\big(a(x,y,t), b(x,t)\big) \in B_b^{0,1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a(x,y,t) \in B_b^{0,1}$ oraz $b(x,t) \in B_b^{0,1}$.*

Teraz analogiczne definicje, opisujące nieco węższą niż $B_b^{0,1}$ klasę charakterystyk.

Definicja 2.19. *Powiemy, że proces $a(x,y,t) \in B_{ub}^{0,1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on procesem prognozowalnym (lub posiada taką modyfikację) o wartościach w $\widetilde{C}^{0,1}$ oraz $\int_0^T \|a(\cdot,\cdot,t)\|_{0+1}^{\sim} \, dt < +\infty$ p.n., a ponadto istnieje nieujemna stała c taka, że dla dowolnego t nierówność $\|a(\cdot,\cdot,t)\|_{0+1}^{\sim} \leqslant c$ spełniona jest p.n.*

Definicja 2.20. *Powiemy, że proces $b(x,t) \in B_{ub}^{0,1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b(x,t)$ jest procesem prognozowalnym o wartościach w $C^{0,1}$ oraz $\int_0^T \|b(\cdot,t)\|_{0+1} \, dt < +\infty$ p.n., a ponadto istnieje nieujemna stała c taka, że dla dowolnego t nierówność $\|b(\cdot,t)\|_{0+1} \leqslant c$ spełniona jest p.n.*

Definicja 2.21. *Powiemy że lokalna charakterystyka $\big(a(x,y,t), b(x,t)\big) \in B_{ub}^{0,1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a(x,y,t) \in B_{ub}^{0,1}$ oraz $b(x,t) \in B_{ub}^{0,1}$.*

Załóżmy, że rodzina semimartyngałów $\{F(x,t),\ x \in \mathbb{D}\}$ posiada lokalną charakterystykę $\big(a(x,y,t), b(x,t)\big)$ oraz rozkład $F(x,t) = M(x,t) + B(x,t)$. Wówczas całka stochastyczna Itô z ciągłego procesu prognozowalnego f_t o wartościach w $\mathbb{D}$, o jądrze $F(x,dt)$, zdefiniowana jest wzorem

$$\int_0^t F(f_s, ds) = \int_0^t M(f_s, ds) + \int_0^t b(f_s, s) \, ds$$

i rozumiemy ją jako następującą granicę (według prawdopodobieństwa):

$$\int_0^t F(f_s, ds) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=0}^{l-1} \Big\{ F(f_{t_k \wedge t}, t_{k+1} \wedge t) - F(f_{t_k \wedge t}, t_k \wedge t) \Big\},$$

gdzie $\Delta = \{0 = t_0 < \ldots < t_l = T\}$.
Rozważać będziemy równania stochastyczne postaci:

$$\varphi_t = x_0 + \int_{t_0}^t F(\varphi_s, ds). \tag{2.9}$$

Definicja 2.22. *Niech $t_0 \in [0,T]$ i $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Powiemy, że ciągły proces φ_t o wartościach w $\mathbb{R}^d$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, adaptowany do $\mathcal{F}_t$ nazwiemy rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego Itô, o jądrze $F(x,t)$, startującego z x_0 w chwili t_0, jeśli spełnia on równanie* (2.9).

2.2. Twierdzenie o istnieniu rozwiązania

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 2.23. *Niech $F(x,t)$ będzie ciągłym semimartyngałem o wartościach w $C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ i lokalnej charakterystyce należącej do $B^{0,1}_{ub}$. Wówczas dla dowolnych t_0 i x_0 równanie (2.9) posiada jednoznaczne rozwiązanie (w sensie definicji 2.22).*

Prawdziwość powyższego twierdzenia wynika z szeregu lematów, udowodnionych poniżej. Jest to adaptacja lematów, pochodzących z [35], na potrzeby założeń istotnych dla naszego układu cząstek; przedstawiamy poniżej ich szczegółowe dowody (w [35] dowody są na ogół przedstawione w wersjach skróconych bądź są pominięte).

Lemat 2.24. *Jeżeli lokalna charakterystyka $\big(a(x,y,t),b(x,t)\big)$ semimartyngału należy do klasy $B^{0,1}_{ub}$, to istnieje stała K taka, że dla każdego t i dowolnych $x,y\in\mathbb{R}^d$ spełnione są p.n. nierówności*

$$\begin{aligned} |b(x,t)-b(y,t)| &\leqslant K\cdot|x-y|,\\ |b(x,t)| &\leqslant K\cdot(1+|x|),\\ \|a(x,y,t)\| &\leqslant K\cdot(1+|x|)(1+|y|),\\ \|a(x,x,t)-2a(x,y,t)+a(y,y,t)\| &\leqslant K\cdot|x-y|^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dowód. Jeżeli lokalna charakterystyka $\big(a(x,y,t),b(x,t)\big)$ semimartyngału należy do klasy $B^{0,1}_{ub}$, to w szczególności obie normy: $\|a(\cdot,\cdot,t)\|^{\sim}_{0+1}$ oraz $\|b(\cdot,t)\|_{0+1}$, muszą być ograniczone p.n. dla dowolnego t. Wyznaczmy te normy:

$$\|b(\cdot,t)\|_{0+1}=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{|b(x,t)|}{1+|x|}+\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^d\\ x\neq y}}\frac{|b(x,t)-b(y,t)|}{|x-y|},$$

$$\begin{aligned}\|a(\cdot,\cdot,t)\|^{\sim}_{0+1}=&\sup_{x,y\in\mathbb{R}^d}\frac{\|a(x,y,t)\|}{(1+|x|)(1+|y|)}\\ &+\sup_{\substack{x,y,x',y'\in\mathbb{R}^d\\ x\neq x',y\neq y'}}\frac{\|a(x,y,t)-a(x',y,t)-a(x,y',t)+a(x',y',t)\|}{|x-x'||y-y'|}.\end{aligned}$$

Ich ograniczoność oznacza, iż ich poszczególne składniki muszą być ograniczone, zatem muszą istnieć stałe $K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4$ takie, że p.n. spełnione są nierówności

$$\begin{aligned} |b(x,t)-b(y,t)| &\leqslant K_1\cdot|x-y|,\\ |b(x,t)| &\leqslant K_2\cdot(1+|x|),\\ \|a(x,y,t)\| &\leqslant K_3\cdot(1+|x|)(1+|y|),\\ \|a(x,y,t)-a(x',y,t)-a(x,y',t)+a(x',y',t)\| &\leqslant K_4\cdot|x-x'||y-y'| \end{aligned}$$

dla wszystkich t oraz dla wszystkich $x,y,x',y'\in\mathbb{R}^d$.
Przyjmując w ostatniej nierówności $x'=y$ oraz $y'=x$ dostajemy warunek

$$\|a(x,y,t)-a(y,y,t)-a(x,x,t)+a(y,x,t)\|\leqslant K_4\cdot|x-y|^2$$

i korzystając z symetrii a (patrz: uwaga na stronie 27) dostajemy ostatecznie nierówność

$$\|2a(x,y,t) - a(y,y,t) - a(x,x,t)\| \leqslant K_4 \cdot |x-y|^2.$$

Przyjmując $K = \max(K_1, K_2, K_3, K_4)$ możemy zapisać powyższe nierówności w jednolitej formie:

$$\begin{aligned} |b(x,t) - b(y,t)| &\leqslant K \cdot |x-y|, \\ |b(x,t)| &\leqslant K \cdot (1+|x|), \\ \|a(x,y,t)\| &\leqslant K \cdot (1+|x|)(1+|y|), \\ \|a(x,x,t) - 2a(x,y,t) + a(y,y,t)\| &\leqslant K \cdot |x-y|^2. \end{aligned}$$

□

Lemat 2.25. *Załóżmy, że $M(x,t)$, $x \in \mathbb{D}$ oraz $N(x,t)$, $x \in \mathbb{D}$ będą rodzinami martyngałów całkowalnymi z kwadratem, o ciągłych lokalnych charakterystykach $a^M(x,t)$ oraz $a^N(x,t)$ odpowiednio, oraz o ciągłej łącznej lokalnej charakterystyce $a^{MN}(x,y,t)$ (tzn. wzajemny nawias skośny $\langle M(x,\cdot), N(y,\cdot)\rangle_t$ równy jest $\int_0^t a^{MN}(x,y,t)\,dt$). Niech ponadto f oraz g będą procesami prognozowalnymi, spełniającymi warunki całkowalności:*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T a^M(f_r, f_r, r)\,dr\right] < +\infty, \qquad \mathbb{E}\left[\int_0^T a^N(g_r, g_r, r)\,dr\right] < +\infty. \tag{2.11}$$

Wówczas wzajemny nawias skośny całek stochastycznych Itô z procesów f i g o jądrach $M(x,dt)$ i $N(y,dt)$ odpowiednio wynosi

$$\left\langle \int_0^{\cdot} M(f_s, ds), \int_0^{\cdot} N(g_s, ds) \right\rangle_t = \int_0^t a^{MN}(f_r, g_r, r)\,dr. \tag{2.12}$$

Dowód. Udowodnimy ten wzór najpierw w przypadku, gdy procesy f i g są procesami elementarnymi. Możemy bez straty ogólności założyć, że oba procesy f oraz g mają wspólne momenty skoków, tzn. że istnieje ciąg momentów $0 = t_0 < \ldots < t_l = T$ taki, że dla każdego $t \in [t_k, t_{k+1})$ zachodzi $f_t = f_{t_k}$ oraz $g_t = g_{t_k}$. Możemy również założyć, że $s = t_i$ oraz $t = t_j$ dla pewnych liczb i oraz j (dołączając je w razie potrzeby do danego podziału). Wówczas możemy napisać:

$$\begin{aligned} \int_0^t M(f_r, dr) &= \sum_{k=0}^{j-1} \Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big], \\ \int_0^s M(f_r, dr) &= \sum_{k=0}^{i-1} \Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big], \\ \int_0^t N(g_r, dr) &= \sum_{k=0}^{j-1} \Big[N(g_{t_k}, t_{k+1}) - N(g_{t_k}, t_k)\Big], \\ \int_0^s N(g_r, dr) &= \sum_{k=0}^{i-1} \Big[N(g_{t_k}, t_{k+1}) - N(g_{t_k}, t_k)\Big], \end{aligned}$$

skąd wynikają kolejne związki:

$$\int_s^t M(f_r, dr) = \sum_{k=i}^{j-1} \Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big] \tag{2.13}$$

oraz

$$\int_s^t N(g_r, dr) = \sum_{k=i}^{j-1} \Big[N(g_{t_k}, t_{k+1}) - N(g_{t_k}, t_k)\Big]. \tag{2.14}$$

Możemy zatem napisać, korzystając z równań (2.13) i (2.14) oraz dodając w standardowy sposób dodatkową warunkową wartość oczekiwaną i wyciągając przed nią mierzalne zmienne losowe:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\int_s^t M(f_r, dr) \cdot \int_s^t N(g_r, dr)\Big|\mathcal{F}_s\Big] \\
&= \sum_{i\leqslant h,k\leqslant j-1} \mathbb{E}\Big\{\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big] \cdot \Big[N(g_{t_h}, t_{h+1}) - N(g_{t_h}, t_h)\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\} \\
&= \sum_{\substack{i\leqslant h,k\leqslant j-1\\ h<k}} \mathbb{E}\Big\{\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big] \cdot \Big[N(g_{t_h}, t_{h+1}) - N(g_{t_h}, t_h)\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\} \\
&+ \sum_{\substack{i\leqslant h,k\leqslant j-1\\ h>k}} \mathbb{E}\Big\{\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big] \cdot \Big[N(g_{t_h}, t_{h+1}) - N(g_{t_h}, t_h)\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\} \\
&+ \sum_{i\leqslant k\leqslant j-1} \mathbb{E}\Big\{\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big] \cdot \Big[N(g_{t_k}, t_{k+1}) - N(g_{t_k}, t_k)\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\} \\
&= \sum_{\substack{i\leqslant h,k\leqslant j-1\\ h<k}} \mathbb{E}\Big\{\mathbb{E}\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big] \cdot \Big[N(g_{t_h}, t_{h+1}) - N(g_{t_h}, t_h)\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\} \\
&+ \sum_{\substack{i\leqslant h,k\leqslant j-1\\ h>k}} \mathbb{E}\Big\{\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big] \cdot \mathbb{E}\Big[N(g_{t_h}, t_{h+1}) - N(g_{t_h}, t_h)\Big|\mathcal{F}_{t_h}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\} \\
&+ \sum_{i\leqslant k\leqslant j-1} \mathbb{E}\Big\{\mathbb{E}\Big[\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big] \cdot \Big[N(g_{t_k}, t_{k+1}) - N(g_{t_k}, t_k)\Big]\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\}.
\end{aligned}$$

Jednak z uwagi na martyngałowość procesów M i N wyrażenia:

$$\mathbb{E}\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)|\mathcal{F}_{t_k}\Big] \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}\Big[N(g_{t_h}, t_{h+1}) - N(g_{t_h}, t_h)|\mathcal{F}_{t_h}\Big]$$

są równe zeru.

Mamy więc związek:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\int_s^t M(f_r, dr) \cdot \int_s^t N(g_r, dr)\Big|\mathcal{F}_s\Big] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \mathbb{E}\Big\{\mathbb{E}\Big[\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big] \cdot \Big[N(g_{t_k}, t_{k+1}) - N(g_{t_k}, t_k)\Big]\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Przyjrzyjmy się bliżej wyrażeniu

$$\mathbb{E}\Big[\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big] \cdot \Big[N(g_{t_k}, t_{k+1}) - N(g_{t_k}, t_k)\Big]\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big].$$

Możemy zapisać je w postaci

$$\mathbb{E}\Big[\Big[M(x, t_{k+1}) - M(x, t_k)\Big] \cdot \Big[N(y, t_{k+1}) - N(y, t_k)\Big]\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big]\Big|_{x=f_{t_k}, y=g_{t_k}}.$$

Ponieważ jednak zachodzi też związek

$$\mathbb{E}\Big[\int_{t_k}^{t_{k+1}} a^{MN}(f_r, g_r, r)\, dr\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_{t_k}^{t_{k+1}} a^{MN}(x, y, r)\, dr\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big]\Big|_{x=f_{t_k}, y=g_{t_k}},$$

to jeżeli zauważymy, iż tożsamość

$$\mathbb{E}\Big[\int_{t_k}^{t_{k+1}} a^{MN}(x, y, r)\, dr\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big] = \mathbb{E}\Big[\Big[M(x, t_{k+1}) - M(x, t_k)\Big] \cdot \Big[N(y, t_{k+1}) - N(y, t_k)\Big]\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big]$$

jest natychmiastową konsekwencją związku wzajemnego nawiasu skośnego z łączną lokalną charakterystyką i że jest ona prawdziwa dla każdego $k \in \{i, \ldots, j-1\}$, to otrzymamy stąd równość

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big[M(f_{t_k}, t_{k+1}) - M(f_{t_k}, t_k)\Big] \cdot \Big[N(g_{t_k}, t_{k+1}) - N(g_{t_k}, t_k)\Big]\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big]& \\ = \mathbb{E}\Big[\int_{t_k}^{t_{k+1}} a^{MN}(f_r, g_r, r)\, dr\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big].&\end{aligned} \tag{2.16}$$

Łącząc (2.15) oraz (2.16) dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\int_s^t M(f_r, dr) \cdot \int_s^t N(g_r, dr)\Big|\mathcal{F}_s\Big]& \\ = \sum_{k=i}^{j-1} \mathbb{E}\Big\{\mathbb{E}\Big[\int_{t_k}^{t_{k+1}} a^{MN}(f_r, g_r, r)\, dr\Big|\mathcal{F}_{t_k}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big\}.&\end{aligned} \tag{2.17}$$

Jednak ostatnie wyrażenie jest oczywiście (z uwagi na zawieranie się σ-ciał) równe

$$\sum_{k=i}^{j-1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_k}^{t_{k+1}} a^{MN}(f_r, g_r, r)\, dr\Big|\mathcal{F}_s\Big],$$

co dalej jest równe

$$\mathbb{E}\Big[\int_s^t a^{MN}(f_r, g_r, r)\, dr\Big|\mathcal{F}_s\Big].$$

Pokazaliśmy więc, że

$$\mathbb{E}\Big[\int_s^t M(f_r, dr) \cdot \int_s^t N(g_r, dr)\Big|\mathcal{F}_s\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_s^t a^{MN}(f_r, g_r, r)\, dr\Big|\mathcal{F}_s\Big],$$

o ile M oraz N są martyngałami całkowalnymi z kwadratem oraz f i g są procesami elementarnymi. Pokazuje to, iż przy takich założeniach proces

$$\int_0^t M(f_r, dr) \cdot \int_0^t N(g_r, dr) - \int_0^t a^{MN}(f_r, g_r, r)\, dr$$

jest martyngałem, co jest równoważne warunkowi (2.12), który mieliśmy pokazać.

Niech teraz f oraz g będą procesami prognozowalnymi, spełniającymi warunki (2.11), o wartościach w pewnym zwartym zbiorze $K \subset \mathbb{D}$. Wówczas (dzięki założeniu o całkowalności) istnieją ciągi (f^n) oraz (g^n) procesów elementarnych, adaptowanych do filtracji $\mathcal{F}_t$, o wartościach w K, takie, że spełnione są warunki

$$\int_0^T \Big[a^M(f_r^n, f_r^n, r) - 2a^M(f_r^n, f_r^m, r) + a^M(f_r^m, f_r^m, r)\Big]\, dr \to 0 \quad \text{p.n.} \tag{2.18}$$

oraz

$$\int_0^T \Big[a^N(g_r^n, g_r^n, r) - 2a^N(g_r^n, g_r^m, r) + a^N(g_r^m, g_r^m, r)\Big]\, dr \to 0 \quad \text{p.n.} \tag{2.19}$$

gdy $m, n \to \infty$.

Zauważmy jednak, że zachodzi związek

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \int_0^{\cdot} M(f_r^n, dr) - \int_0^{\cdot} M(f_r^m, dr)\Big\rangle_T \\
=&\Big\langle \int_0^{\cdot} M(f_r^n, dr) - \int_0^{\cdot} M(f_r^m, dr), \int_0^{\cdot} M(f_r^n, dr) - \int_0^{\cdot} M(f_r^m, dr)\Big\rangle_T \\
=&\Big\langle \int_0^{\cdot} M(f_r^n, dr)\Big\rangle_T - 2\Big\langle \int_0^{\cdot} M(f_r^n, dr), \int_0^{\cdot} M(f_r^m, dr)\Big\rangle_T + \Big\langle \int_0^{\cdot} M(f_r^m, dr)\Big\rangle_T \\
=&\int_0^T \Big[a^M(f_r^n, f_r^n, r) - 2a^M(f_r^n, f_r^m, r) + a^M(f_r^m, f_r^m, r)\Big]\, dr
\end{aligned}$$

(tak samo dla martyngału N), zatem warunki (2.18) i (2.19) pokazują, że

$$\Big\langle \int_0^{\cdot} M(f_r^n, dr) - \int_0^{\cdot} M(f_r^m, dr)\Big\rangle_T \to 0 \quad \text{p.n.}$$

oraz

$$\Big\langle \int_0^{\cdot} N(g_r^n, dr) - \int_0^{\cdot} N(g_r^m, dr)\Big\rangle_T \to 0 \quad \text{p.n.}$$

Zatem ciąg $\left(\int_0^T M(f_r^n, dr)\right)$ zbiega jednostajnie według prawdopodobieństwa do ciągłego martyngału lokalnego $\int_0^T M(f_r, dr)$. Tak samo ciąg $\left(\int_0^T N(g_r^n, dr)\right)$ zbiega jednostajnie według prawdopodobieństwa do ciągłego martyngału lokalnego $\int_0^T N(g_r, dr)$. Dzięki ciągłości procesu $a^{MN}(x, y, t)$ mamy oczywiście zbieżność $\int_0^t a^{MN}(f_r^n, g_r^n, r)\, dr$ do $\int_0^t a^{MN}(f_r, g_r, r)\, dr$.

Pozostaje jeszcze przypadek ogólny: załóżmy, że f i g są (ustalonymi) procesami prognozowalnymi, spełniającymi warunki (2.11). Niech wówczas (K_n) będzie ciągiem zwartych podzbiorów obszaru $\mathbb{D}$ takim, że $K_n \nearrow \mathbb{D}$. Zdefiniujmy obcięcia f^n i g^n procesów f i g do zbioru K_n w następujący sposób:

$$f_t^n = \begin{cases} f_t \text{ gdy } f_t \in K_n \\ x_0 \text{ gdy } f_t \in \mathbb{D} \setminus K_n \end{cases} \tag{2.20}$$

$$g_t^n = \begin{cases} g_t \text{ gdy } g_t \in K_n \\ x_0 \text{ gdy } g_t \in \mathbb{D} \setminus K_n \end{cases} \tag{2.21}$$

gdzie x_0 jest pewnym ustalonym punktem zbioru K_n.
Wówczas tak określone ciągi (f_t^n) oraz (g_t^n) mają już wartości w zbiorze zwartym K_n, zatem spełniają znów warunki (2.18) i (2.19). Zatem ciągi $\left(\int_0^T M(f_r^n, dr)\right)$ i $\left(\int_0^T N(g_r^n, dr)\right)$ zbiegają jednostajnie według prawdopodobieństwa do ciągłych martyngałów lokalnych $\int_0^T M(f_r, dr)$ i $\int_0^T N(g_r, dr)$ odpowiednio.

□

Stwierdzenie 2.26. *Załóżmy, że lokalna charakterystyka* $\big(a(x,y,t), b(x,t)\big)$ *semimartyngału* $F(x,t)$ *należy do klasy* $B_{ub}^{0,1}$. *Niech ciąg* $(\varphi_t^n)_{n=0}^{\infty}$ *ciągłych, adaptowanych do filtracji* $(\mathcal{F}_t)$ *procesów będzie zdefiniowany w następujący sposób:*

$$\begin{aligned} \varphi_t^0 &= x_0, \\ \varphi_t^n &= x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\varphi_s^{n-1}, ds), \qquad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Wówczas ciąg $(\varphi_t^n)_{n=0}^{\infty}$ *jest jednostajnie (względem* t*) zbieżny w* L^p *dla dowolnego* $p \geqslant 2$. *Jego granica* φ_t *jest rozwiązaniem równania* (2.9).

Dowód. Zapiszmy postać równania rekurencyjnego, opisującego n-ty wyraz konstruowanego ciągu, w dokładniejszej postaci:

$$\varphi_t^n = x_0 + \int_{t_0}^{t} M(\varphi_s^{n-1}, ds) + \int_{t_0}^{t} b(\varphi_s^{n-1}, s)\, ds.$$

Możemy więc napisać

$$\varphi_t^{n+1} - \varphi_t^n = \int_{t_0}^{t} M(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{t} M(\varphi_s^{n-1}, ds) + \int_{t_0}^{t} \Big\{ b(\varphi_s^n, s) - b(\varphi_s^{n-1}, s) \Big\}\, ds.$$

Chcemy pokazać zbieżność ciągu (φ_t^n) w L^p. W tym celu oszacujemy najpierw wielkość $\mathbb{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}|\varphi_u^{n+1}-\varphi_u^n|^p\Big]$ dla ustalonego, dowolnego $p\geqslant 2$.

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}|\varphi_u^{n+1}-\varphi_u^n|^p\Big]= \\ \mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{t}M(\varphi_s^n,ds)-\int_{t_0}^{t}M(\varphi_s^{n-1},ds)+\int_{t_0}^{t}\Big\{b(\varphi_s^n,s)-b(\varphi_s^{n-1},s)\Big\}\,ds\right|^p\right]. \tag{2.23}$$

Skorzystamy teraz z elementarnej nierówności

$$|x+y|^p\leqslant 2^p(|x|^p+|y|^p),$$

prawdziwej dla dowolnej normy $|\cdot|$, dowolnego $p>0$ oraz dowolnych x, y. Prawą stronę równania (2.23) możemy zatem oszacować z góry przez wyrażenie

$$2^p\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{u}M(\varphi_s^n,ds)-\int_{t_0}^{u}M(\varphi_s^{n-1},ds)\right|^p\right] \\ +2^p\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{u}\Big\{b(\varphi_s^n,s)-b(\varphi_s^{n-1},s)\Big\}\,ds\right|^p\right]. \tag{2.24}$$

Zajmiemy się najpierw pierwszym składnikiem powyższej sumy. Przede wszystkim zapiszmy go „po współrzędnych” (opuszczając na razie współczynnik liczbowy). Mamy

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{u}M(\varphi_s^n,ds)-\int_{t_0}^{u}M(\varphi_s^{n-1},ds)\right|^p\right] \\ =\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}\sum_{i=1}^{d}\left|\int_{t_0}^{u}M^i(\varphi_s^n,ds)-\int_{t_0}^{u}M^i(\varphi_s^{n-1},ds)\right|^p\right] \\ \leqslant\sum_{i=1}^{d}\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{u}M^i(\varphi_s^n,ds)-\int_{t_0}^{u}M^i(\varphi_s^{n-1},ds)\right|^p\right]. \tag{2.25}$$

Zauważmy, że różnica całek stochastycznych, jako różnica dwóch martyngałów, jest martyngałem, zatem jej moduł, podniesiony do potęgi p-tej jest nieujemnym podmartyngałem (funkcja $x\to|x|^p$ jest dla $p\geqslant 1$ wypukła, więc wynika to łatwo z nierówności Jensena zastosowanej do procesu X_t i funkcji $f(x)=|x|^p$). Możemy więc (dla każdej współrzędnej) skorzystać z nierówności Dooba (lemat 2.9), otrzymując:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{u}M^i(\varphi_s^n,ds)-\int_{t_0}^{u}M^i(\varphi_s^{n-1},ds)\right|^p\right] \\ \leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}\left[\left|\int_{t_0}^{t}M^i(\varphi_s^n,ds)-\int_{t_0}^{t}M^i(\varphi_s^{n-1},ds)\right|^p\right]. \tag{2.26}$$

Prawą stronę powyższej nierówności oszacujemy jeszcze przy pomocy nierówności Burkholdera (lemat 2.12)

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[\left|\int_{t_0}^{t} M^i(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{t} M^i(\varphi_s^{n-1}, ds)\right|^p\right] \\ \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[\left\langle \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^{n-1}, ds)\right\rangle_t^{p/2}\right].\end{aligned} \tag{2.27}$$

Zauważmy, że na mocy lematu 2.25 mamy zależności:

$$\begin{aligned}&\left\langle \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^{n-1}, ds)\right\rangle_t \\ =&\left\langle \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^{n-1}, ds), \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^{n-1}, ds)\right\rangle_t \\ =&\left\langle \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^n, ds), \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^n, ds)\right\rangle_t - 2\left\langle \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^{n-1}, ds), \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^n, ds)\right\rangle_t \\ +&\left\langle \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^{n-1}, ds), \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^{n-1}, ds)\right\rangle_t \\ =&\int_{t_0}^{t} \left[a^{ii}(\varphi_s^n, \varphi_s^n, s) - 2a^{ii}(\varphi_s^n, \varphi_s^{n-1}, s) + a^{ii}(\varphi^{n-1}, \varphi_s^{n-1}, s)\right] ds\end{aligned} \tag{2.28}$$

Dzięki lematowi 2.24 możemy dalej szacować:

$$\int_{t_0}^{t} \left[a^{ii}(\varphi_s^n, \varphi_s^n, s) - 2a^{ii}(\varphi_s^n, \varphi_s^{n-1}, s) + a^{ii}(\varphi^{n-1}, \varphi_s^{n-1}, s)\right] ds \leqslant K \int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s^{n-1}|^2\, ds. \tag{2.29}$$

Skorzystaliśmy przy tym z oczywistej nierówności

$$\begin{aligned}&a^{ii}(\varphi_s^n, \varphi_s^n, s) - 2a^{ii}(\varphi_s^n, \varphi_s^{n-1}, s) + a^{ii}(\varphi^{n-1}, \varphi_s^{n-1}, s) \\ &\qquad \leqslant \|a(\varphi_s^n, \varphi_s^n, s) - 2a(\varphi_s^n \varphi_s^{n-1}, s) + a(\varphi^{n-1}, \varphi_s^{n-1}, s)\|.\end{aligned}$$

Z nierówności Höldera (możemy ją w poniższej postaci zastosować o ile $p > 2$, czyli $\frac{p}{2} > 1$)[1] mamy dalej

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s^{n-1}|^2\, ds &= \int_{t_0}^{t} 1 \cdot |\varphi_s^n - \varphi_s^{n-1}|^2\, ds \\ &\leqslant \left(\int_{t_0}^{t} 1^{\frac{p}{p-2}}\, ds\right)^{1-\frac{2}{p}} \cdot \left(\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s^{n-1}|^p\, ds\right)^{2/p} \\ &= |t-t_0|^{\frac{p-2}{p}} \cdot \left(\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s^{n-1}|^p\, ds\right)^{2/p}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Zatem, uwzględniając (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.29) i (2.30), pierwszy składnik sumy (2.24) możemy dla $p > 2$ oszacować w następujący sposób:

$$\begin{aligned}&2^p \mathbb{E}\left[\sup_{t_0 \leqslant u \leqslant t} \left|\int_{t_0}^{u} M(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{u} M(\varphi_s^{n-1}, ds)\right|^p\right] \\ &\leqslant 2^p \cdot \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \cdot d \cdot \mathbb{E}\left[K \cdot |t-t_0|^{\frac{p-2}{p}} \cdot \left(\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s^{n-1}|^p\, ds\right)^{2/p}\right]^{p/2} \\ &= d \cdot \left(\frac{2\sqrt{K}p}{p-1}\right)^p \cdot |t-t_0|^{\frac{p}{2}-1} \cdot \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s^{n-1}|^p\, ds\right].\end{aligned} \tag{2.31}$$

Zwróćmy uwagę, iż w przypadku $p = 2$ mamy szacowanie podobne (dzięki związkom (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) i (2.29)):

$$\begin{aligned}&4\mathbb{E}\left[\sup_{t_0 \leqslant u \leqslant t} \left|\int_{t_0}^{u} M(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{u} M(\varphi_s^{n-1}, ds)\right|^2\right] \\ &\qquad \leqslant 16 \cdot K \cdot d \cdot \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s^{n-1}|^2\, ds\right].\end{aligned} \tag{2.32}$$

Warto zauważyć, że nierówność powyższą można traktować jako szczególny przypadek nierówności (2.31) przy $p = 2$.

---

[1] Dla $p = 2$ nie musimy wykonywać żadnego dodatkowego szacowania.

Teraz zajmiemy się oszacowaniem drugiego składnika sumy (2.24). Mamy

$$\begin{aligned}
&2^p\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{u}\left\{b(\varphi_s^n,s)-b(\varphi_s^{n-1},s)\right\}ds\right|^p\right]\\
&\qquad\leqslant 2^p\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}\left(\int_{t_0}^{u}\left|b(\varphi_s^n,s)-b(\varphi_s^{n-1},s)\right|ds\right)^p\right]\\
&\qquad\leqslant 2^p\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_0}^{t}\left|b(\varphi_s^n,s)-b(\varphi_s^{n-1},s)\right|ds\right)^p\right].
\end{aligned}\tag{2.33}$$

Dzięki lematowi 2.24 mamy

$$\begin{aligned}
&2^p\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_0}^{t}\left|b(\varphi_s^n,s)-b(\varphi_s^{n-1},s)\right|ds\right)^p\right]\\
&\qquad\leqslant 2^p\cdot\mathbb{E}\left[\left(K\cdot\int_{t_0}^{t}\left|\varphi_s^n-\varphi_s^{n-1}\right|ds\right)^p\right]
\end{aligned}\tag{2.34}$$

i stosując nierówność Höldera dostajemy

$$\begin{aligned}
&2^p\cdot K^p\cdot\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_0}^{t}\left|\varphi_s^n-\varphi_s^{n-1}\right|ds\right)^p\right]\\
&\leqslant 2^p\cdot K^p\cdot\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_0}^{t}1^{\frac{p}{p-1}}\,ds\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{t_0}^{t}\left|\varphi_s^n-\varphi_s^{n-1}\right|^p ds\right)^{1/p}\right]^p\\
&\qquad=2^p\cdot K^p\cdot|t-t_0|^{p-1}\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t}\left|\varphi_s^n-\varphi_s^{n-1}\right|^p ds\right].
\end{aligned}\tag{2.35}$$

Zatem na mocy (2.33), (2.34) i (2.35) mamy:

$$\begin{aligned}
&2^p\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{u}\left\{b(\varphi_s^n,s)-b(\varphi_s^{n-1},s)\right\}ds\right|^p\right]\\
&\qquad\leqslant 2^p\cdot K^p\cdot|t-t_0|^{p-1}\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t}\left|\varphi_s^n-\varphi_s^{n-1}\right|^p ds\right].
\end{aligned}\tag{2.36}$$

Łącząc wyniki (2.23), (2.24), (2.31) oraz (2.36) dostajemy ostatecznie

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}|\varphi_u^{n+1}-\varphi_u^n|^p\Big]\leqslant C_1\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t}\left|\varphi_s^n-\varphi_s^{n-1}\right|^p ds\right],\tag{2.37}$$

gdzie C_1 jest pewną stałą dodatnią, zależną jedynie od K, p, d, t_0 oraz T (wyrażenie $|t-t_0|$, obecne dla $p>2$, może być oszacowane przez wielkość $|T-t_0|$, niezależną

od t). Powyższa nierówność jest więc prawdziwa dla wszystkich n oraz wszystkich $t \in [t_0, T]$.
Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$\rho_t^{(n)} = \mathbb{E}\Big[\sup_{t_0 \leqslant u \leqslant t} |\varphi_u^{n+1} - \varphi_u^n|^p\Big],$$

to nierówność (2.37) będziemy mogli zapisać w postaci

$$\rho_t^{(n)} \leqslant C_1 \int_{t_0}^{t} \rho_s^{(n-1)}\, ds.$$

Iterując tę nierówność n-krotnie dostaniemy

$$\rho_t^{(n)} \leqslant C_1^n \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \rho_{t_n}^{(0)}\, dt_n \dots dt_1.$$

Zauważmy, że $\rho_t^{(0)}$ jest niemalejącą funkcją argumentu t, zatem możemy szacować

$$C_1^n \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \rho_{t_n}^{(0)}\, dt_n \dots dt_1 \leqslant C_1^n \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \rho_t^{(0)}\, dt_n \dots dt_1,$$

zaś całka wielokrotna występująca powyżej jest równa

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \dots dt_1 = \frac{(t-t_0)^n}{n!}$$

(jest to miara n-wymiarowego sympleksu), prawdziwe jest więc szacowanie

$$\rho_t^{(n)} \leqslant C_1^n \cdot \frac{(t-t_0)^n}{n!} \cdot \rho_t^{(0)}. \tag{2.38}$$

Zauważmy, że dzięki powyższej nierówności mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\sup_{t_0 \leqslant u \leqslant t} |\varphi_u^{n+1} - \varphi_u^n|^p\Big]^{1/p} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \Big[C_1^n \cdot \frac{(t-t_0)^n}{n!} \cdot \rho_t^{(0)}\Big]^{1/p},$$

a szereg występujący po prawej stronie jest oczywiście zbieżny.
Wynika stąd, że

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t_0 \leqslant u \leqslant t} |\varphi_u^{n+1} - \varphi_u^n|^p\right]^{1/p} < \infty. \tag{2.39}$$

Zatem ciąg (φ_t^n) jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[t_0, T]$ oraz w normie L^p dla $p \geqslant 2$. Oznaczmy jego granicę przez φ_t. Jest to zatem ciągły proces stochastyczny, adaptowany do $\mathcal{F}_t$.

Pozostaje pokazać, że tak otrzymany proces φ_t jest rzeczywiście rozwiązaniem równania (2.9). W tym celu wystarczy pokazać, że ciąg całek $\int_{t_0}^t F(\varphi_s^n, ds)$ zbiega w L^p

przy $p \geqslant 2$ do całki $\int_{t_0}^t F(\varphi_s, ds)$.
Należy zatem zbadać zbieżność w L^p ciągu:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} F(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{t} F(\varphi_s, ds) \\ = \left[\int_{t_0}^{t} M(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{t} M(\varphi_s, ds)\right] + \left[\int_{t_0}^{t} b(\varphi_s^n, s)\, ds - \int_{t_0}^{t} b(\varphi_s, s)\, ds\right].\end{aligned} \tag{2.40}$$

Dzięki nierówności Minkowskiego wystarczy oczywiście pokazać zbieżność w L^p każdej z różnic po prawej stronie równości (2.40) z osobna.
Rzeczywiście, powtarzając rozumowanie z nierówności (2.28) i (2.29) dostajemy

$$\sum_{i=1}^{d} \left\langle \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^{\cdot} M^i(\varphi_s, ds) \right\rangle_t \leqslant K \cdot d \cdot \int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s|^2\, ds \tag{2.41}$$

i widzimy, że prawa strona powyższej nierówności zbiega przy $n \to \infty$ do zera w $L^{p/2}$ (por. szacowanie (2.30)). Jednak dzięki nierówności Burkholdera (lemat 2.12) wynika stąd, że ciąg martyngałów $\left(\int_{t_0}^t M(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^t M(\varphi_s, ds)\right)$ zbiega w L^p.
Podobnie szacujemy z lematu 2.24, a następnie nierówności Höldera:

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_0}^{t} b(\varphi_s^n, s)\, ds - \int_{t_0}^{t} b(\varphi_s, s)\, ds\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} K|\varphi_s^n - \varphi_s|\, ds\right| \\ \leqslant K\left(\int_{t_0}^{t} 1^2\, ds\right)^{1/2}\left(\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s|^2\, ds\right)^{1/2} = K \cdot |t - t_0|^{1/2} \cdot \left(\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s|^2\, ds\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Dzięki szacowaniu (nierówność Höldera)

$$\begin{aligned}\left(\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s|^2\, ds\right)^{1/2} &\leqslant \left(\left[\int_{t_0}^{t} \left(|\varphi_s^n - \varphi_s|^2\right)^{p/2} ds\right]^{2/p} \left[\int_{t_0}^{t} 1^{\frac{p}{p-2}}\, ds\right]^{1-\frac{2}{p}}\right)^{1/2} \\ &= \left[\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^n - \varphi_s|^p\, ds\right]^{1/p} |t - t_0|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}},\end{aligned} \tag{2.43}$$

prawdziwemu dla dowolnego $p > 2$ widzimy, że ciąg procesów $\left(\int_{t_0}^t b(\varphi_s^n, s)\, ds - \int_{t_0}^t b(\varphi_s, s)\, ds\right)$ jest zbieżny w L^p przy $p > 2$. Dla $p = 2$ zbieżność w L^2 wynika już bezpośrednio z nierówności (2.42). Zatem wykazaliśmy zbieżność do zera w L^p dla $p \geqslant 2$ ciągu $\left(\int_{t_0}^t F(\varphi_s^n, ds) - \int_{t_0}^t F(\varphi_s, ds)\right)$, co oznacza, że φ_t jest rozwiązaniem równania (2.9).

□

Dzięki stwierdzeniu 2.26 wiemy, że równanie (2.9) posiada rozwiązanie, będące granicą ciągu opisanego rekurencyjnie:

$$\begin{aligned}
\varphi_t^0 &= x_0, \\
\varphi_t^n &= x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\varphi_s^{n-1}, ds), \qquad n = 1, 2, \ldots .
\end{aligned}$$

To, co pozostaje do wykazania, to jedyność takiego rozwiązania. Najpierw musimy wykazać jeszcze jeden pomocniczy, techniczny lemat.

Lemat 2.27. *Niech F oraz G będą ciągłymi semimartyngałami o lokalnych charakterystykach należących do klasy $B_{ub}^{0,1}$. Załóżmy, że spełniona jest równość $F(x,\cdot) = G(x,\cdot)$ p.n. dla wszystkich $x \in U$, gdzie U jest otwartym podzbiorem $\mathbb{D}$. Niech f_t oraz g_t będą procesami prognozowalnymi o wartościach w $\mathbb{R}^d$ takimi, że dla dowolnego $t < \overline{\sigma}$ ($\overline{\sigma}$ jest tu ustalonym momentem stopu) zachodzi $f_t = g_t$ oraz procesy te przyjmują wartości z U. Wówczas zachodzą związki*

$$\int_{t_0}^{t\wedge\overline{\sigma}} F(f_s, ds) = \int_{t_0}^{t\wedge\overline{\sigma}} G(g_s, ds) = \int_{t_0}^{t} F^{\overline{\sigma}}(f_s, ds) = \int_{t_0}^{t} G^{\overline{\sigma}}(g_s, ds),$$

gdzie $F^{\overline{\sigma}}(x,t) = F(x, t\wedge\overline{\sigma})$, $G^{\overline{\sigma}}(x,t) = G(x, t\wedge\overline{\sigma})$.

Dowód. Udowodnimy ten wzór najpierw w przypadku, gdy procesy f_t i g_t są procesami elementarnymi. Możemy bez straty ogólności założyć, że oba procesy mają wspólne momenty skoków, tzn. istnieje ciąg momentów $0 = r_0 < \ldots < r_l = T$ taki, że dla każdego $t \in [r_k, r_{k+1})$ zachodzi $f_t = f_{r_k}$ oraz $g_t = g_{r_k}$. Możemy również założyć, że $t_0 = r_i$ oraz $t = r_j$ dla pewnych liczb i oraz j (dołączając je w razie potrzeby do danego podziału). Wówczas możemy napisać:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t\wedge\overline{\sigma}} F(f_s, ds) &= \sum_{k=i}^{l-1} \Big[F(f_{r_k\wedge t\wedge\overline{\sigma}}, r_{k+1}\wedge t\wedge\overline{\sigma}) - F(f_{r_k\wedge t\wedge\overline{\sigma}}, r_k\wedge\overline{\sigma})\Big], \\
\int_{t_0}^{t\wedge\overline{\sigma}} G(g_s, ds) &= \sum_{k=i}^{l-1} \Big[G(g_{r_k\wedge t\wedge\overline{\sigma}}, r_{k+1}\wedge t\wedge\overline{\sigma}) - G(g_{r_k\wedge t\wedge\overline{\sigma}}, r_k\wedge t\wedge\overline{\sigma})\Big],
\end{aligned} \tag{2.44}$$

natomiast z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} F^{\overline{\sigma}}(f_s, ds) &= \sum_{k=i}^{l-1} \Big[F^{\overline{\sigma}}(f_{r_k\wedge t}, r_{k+1}\wedge t) - F^{\overline{\sigma}}(f_{r_k\wedge t}, r_k\wedge t)\Big], \\
\int_{t_0}^{t} G^{\overline{\sigma}}(g_s, ds) &= \sum_{k=i}^{l-1} \Big[G^{\overline{\sigma}}(g_{r_k\wedge t}, r_{k+1}\wedge t) - G^{\overline{\sigma}}(g_{r_k\wedge t}, r_k\wedge t)\Big],
\end{aligned}$$

co, korzystając z postaci procesów $F^{\overline{\sigma}}$ i $G^{\overline{\sigma}}$, dalej można przekształcić następująco:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} F^{\overline{\sigma}}(f_s, ds) &= \sum_{k=i}^{l-1} \Big[F(f_{r_k\wedge t}, r_{k+1}\wedge t\wedge\overline{\sigma}) - F(f_{r_k\wedge t}, r_k\wedge t\wedge\overline{\sigma})\Big],\\ \int_{t_0}^{t} G^{\overline{\sigma}}(g_s, ds) &= \sum_{k=i}^{l-1} \Big[G(g_{r_k\wedge t}, r_{k+1}\wedge t\wedge\overline{\sigma}) - G(g_{r_k\wedge t}, r_k\wedge t\wedge\overline{\sigma})\Big].\end{aligned} \tag{2.45}$$

Ponieważ jednak mamy $t < \overline{\sigma}$, to widzimy, że wyrażenia po prawych stronach równości (2.44) i (2.45) są równe. Ponieważ procesy f_t i g_t przyjmują wartości w U, zaś na U procesy F i G są równe, widzimy, że wszystkie wyrażenia stojące po prawych stronach (2.44) i (2.45) są równe.
Jeżeli teraz f_t i g_t są dowolnymi procesami prognozowalnymi, to istnieją ciągi procesów elementarnych (f_t^n) oraz (g_t^n), zbieżnych w L^p dla dowolnego $p \geqslant 2$ do f_t i g_t odpowiednio. Ponieważ jednak F jest ciągłym semimartyngałem o lokalnej charakterystyce należącej do klasy $B_{ub}^{0,1}$, to powtarzając rozumowanie z dowodu stwierdzenia 2.26 otrzymujemy oszacowanie:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t\wedge\overline{\sigma}} \left|\int_{t_0}^{u} F(f_s^n, ds) - \int_{t_0}^{u} F(f_s, ds)\right|^p\right] \leqslant C\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t\wedge\overline{\sigma}} |f_s^n - f_s|^p\, ds\right],$$

z którego wynika jednostajna względem t zbieżność f_t^n do f_t w L^p. Identyczny wynik oczywiście mamy dla semimartyngału G. Oczywiście analogiczny argument działa dla całek $\int_{t_0}^t F^{\overline{\sigma}}(f_s^n, ds)$ oraz $\int_{t_0}^t G^{\overline{\sigma}}(g_s^n, ds)$. Stąd dostajemy tezę.

□

Do wykazania jednoznaczności rozwiązania równania (2.9) potrzebujemy jeszcze ostatniego lematu:

Lemat 2.28. *Niech φ_t będzie rozwiązaniem zagadnienia* (2.9)*, skonstruowanym jako granica ciągu (φ_t^n), będącego rozwiązaniem zagadnienia* (2.22) *ze stwierdzenia 2.26. Niech ψ_t będzie rozwiązaniem równania Itô*

$$\psi_t = x_0 + \int_{t_0}^{t} G(\psi_s, ds)$$

o jądrze będącym ciągłym semimartyngałem G o wartościach w $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ i lokalnej charakterystyce klasy $B_{ub}^{0,1}$. Załóżmy, że równość $G(x,\cdot) = F(x,\cdot)$ spełniona jest dla wszystkich $x \in U$, gdzie U jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^d$. Wówczas $\varphi_t = \psi_t$ dla wszystkich $t < \tau$, gdzie $\tau = \Big(\inf\{t > t_0 \colon \psi_t \in \overline{U}^c\}\Big) \wedge T$.

Dowód. Rozważmy procesy zastopowane: $\varphi_t^\tau = \varphi_{t\wedge\tau}$ oraz $\psi_t^\tau = \psi_{t\wedge\tau}$. Ponieważ na mocy lematu 2.27 zachodzi

$$\int_{t_0}^{t\wedge\tau} G(\psi_s^\tau, ds) = \int_{t_0}^{t\wedge\tau} F(\psi_s^\tau, ds),$$

to możemy napisać:

$$\varphi_t^\tau - \psi_t^\tau = \int_{t_0}^{t\wedge\tau} F(\varphi_s^\tau, ds) - \int_{t_0}^{t\wedge\tau} F(\psi_s^\tau, ds).$$

Szacując teraz identycznie, jak przy dowodzie stwierdzenia 2.26 (równania i nierówności 2.23–2.37) otrzymujemy związek

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t} |\varphi_u^\tau - \psi_u^\tau|^p\Big] \leqslant C_1\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t\wedge\tau} |\varphi_s^\tau - \psi_s^\tau|^p\, ds\right], \tag{2.46}$$

gdzie C_1 jest stałą niezależną od t. Jeżeli oznaczymy lewą stronę nierówności (2.46) przez ρ_t, to ponieważ prawdziwe są szacowania

$$\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t\wedge\tau} |\varphi_s^\tau - \psi_s^\tau|^p\, ds\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t} |\varphi_s^\tau - \psi_s^\tau|^p\, ds\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t} \sup_{t_0\leqslant u\leqslant s} |\varphi_u^\tau - \psi_u^\tau|^p\, ds\right],$$

możemy napisać:

$$\rho_t \leqslant \int_{t_0}^{t} \rho_s\, ds.$$

Dzięki nierówności Gronwalla (lemat 2.13) dostajemy, że $\rho_t = 0$ dla każdego $t \in [t_0, T]$. Zatem $\varphi_t^\tau = \psi_t^\tau$, skąd dostajemy, iż $\varphi_t = \psi_t$ dla $t < \tau$, czyli tezę naszego lematu.

□

Dzięki stwierdzeniu 2.26 oraz lematom 2.27 i 2.28 twierdzenie 2.23 zostało ostatecznie udowodnione.
Uwaga. Twierdzenie 2.23 prawdziwe jest też przy nieco ogólniejszych założeniach (patrz: [35], str. 101-104), jednak podana i udowodniona powyżej wersja wystarcza w zupełności do analizy rozważanego przez nas modelu.

2.3. Potok stochastyczny–twierdzenie o istnieniu

Możemy już w tym miejscu przystąpić do zdefiniowania najistotniejszego pojęcia w niniejszym rozdziale – potoku stochastycznego (stochastic flow).

Definicja 2.29. *Niech $\varphi_{s,t}(x,\omega),\ s,t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^d$ będzie ciągłym polem losowym o wartościach w $\mathbb{R}^d$, zdefiniowanym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wówczas dla p.w. ω $\varphi_{s,t}(\omega) \equiv \varphi_{s,t}(\cdot,\omega)$ definiuje ciągłe przekształcenie $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dla dowolnych s i t. Nazywamy je stochastycznym potokiem homeomorfizmów, jeśli istnieje zbiór $\mathcal{N}$ miary zero w Ω taki, że dla dowolnego $\omega \in \mathcal{N}^c$ rodzina ciągłych przekształceń $\{\varphi_{s,t}(\omega)\colon s,t \in [0,T]\}$ definiuje potok homeomorfizmów, tzn spełnia warunki:*
 $i)$ $\varphi_{s,u}(\omega) = \varphi_{t,u}(\omega) \circ \varphi_{s,t}(\omega)\ \forall s,t,u \in [0,T]$,
 $ii)$ $\varphi_{s,s}(\omega) = Id(\omega)\ \forall s \in [0,T]$,

$iii)$ przekształcenie $\varphi_{s,t}(\omega)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest homeomorfizmem „na” $\forall s,t \in [0,T]$.

Niech G będzie zbiorem wszystkich homeomorfizmów $\mathbb{R}^d$. Zdefiniujmy iloczyn elementów $\varphi,\ \psi \in G$ jako złożenie $\varphi \circ \psi$. Wówczas G staje się grupą z działaniem „$\circ$”.
Wprowadźmy w G metrykę

$$d(\varphi,\psi) = \rho(\varphi,\psi) + \rho(\varphi^{-1},\psi^{-1}),$$

gdzie

$$\rho(\varphi,\psi) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \cdot \frac{\sup_{|x|\leqslant N} |\varphi(x)-\psi(x)|}{1+\sup_{|x|\leqslant N} |\varphi(x)-\psi(x)|}.$$

G z metryką d jest zupełną grupą topologiczną. Potok stochastyczny homeomorfizmów można uważać za ciągłe pole losowe o wartościach w G, spełniające warunki $i)$ oraz $ii)$. Nazywamy go (ciągłym) potokiem stochastycznym o wartościach w G.

Ciągłe pole losowe $\varphi_{s,t},\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ o wartościach w G, spełniające $i)$ oraz $ii)$ nazywamy *potokiem stochastycznym forward* (w odróżnieniu od potoku stochastycznego backward $\varphi_{s,t},\ 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$).
Twierdzenie 2.23 dało wynik, mówiący, że jeśli napiszemy równanie

$$\varphi_t = x + \int_s^t F(\varphi_r, dr)$$

to (przy odpowiednich założeniach) posiada ono jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych s,x. Oznaczmy to rozwiązanie przez $\varphi_{s,t}(x),\ t \geqslant s$.
Wprowadźmy jeszcze dwie definicje, niezbędne do właściwego zrozumienia treści kolejnego twierdzenia:

Definicja 2.30. *Rodzina ciągłych semimartyngałów $F(x,t),\ x \in D$ o rozkładzie $F(x,t) = M(x,t) + B(x,t)$ należy do klasy $C^{k,\delta}$ (jest rodziną $C^{k,\delta}$-semimartyngałów), jeśli $M(x,t)$ jest ciągłym $C^{k,\delta}$-martyngałem lokalnym i $B(x,t)$ jest ciągłym $C^{k,\delta}$-procesem (patrz: str. 26) takim, że $D_x^\alpha B(x,t),\ x \in D, |\alpha| \leqslant k$ są procesami o wahaniu skończonym.*

Definicja 2.31. *Potok stochastyczny forward $\varphi_{s,t}$ o wartościach w G nazwiemy potokiem $C^{k,\delta}$-semimartyngałów, jeśli $\forall s\ \varphi_{s,t},\ t \in [s,T]$ jest ciągłym $C^{k,\delta}$- semimartyngałem, adaptowanym do $(\mathcal{F}_{s,t})_{t\in[s,T]}$-filtracji generowanej przez potok $\varphi_{s,t}$.*

Prawdziwe jest następujące twierdzenie ([35], Theorem 4.5.1 (i), str. 155):

Twierdzenie 2.32. *Załóżmy, że lokalna charakterystyka ciągłego semimartyngału $F(x,t)$ należy do $B_{ub}^{0,1}$. Wówczas istnieje modyfikacja rodziny rozwiązań oznaczonych przez $\varphi_{s,t}(x)$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ taka, że jest to stochastyczny potok homeomorfizmów forward. Ponadto dla dowolnego s rodzina $\varphi_{s,t},\ t \in [s,T]$ jest potokiem $C^{0,\gamma}$- semimartyngałów dla dowolnego $\gamma < 1$.*

Uwaga. Powyższe twierdzenie sformułowane jest w [35] dla lokalnej charakterystyki należącej do klasy $B_b^{0,1}$, ponieważ jednak $B_{ub}^{0,1} \subset B_b^{0,1}$, więc twierdzenie w powyższym sformułowaniu pozostaje prawdziwe. W rozważanym przez nas przypadku, jak wykażemy, lokalna charakterystyka należy do klasy $B_{ub}^{0,1}$, zatem wystarczy nam takie właśnie założenie.

2.4. Wyniki dla analizowanego układu cząstek

Przejdziemy teraz do analizy powyższych warunków dla przypadku oddziałujących poprzez gładki potencjał cząstek.

Zakładamy, że ruch wszystkich cząstek opisany jest następującym układem równań (1.4) z hamiltonianem (1.2), odpychanymi poprzez gładki potencjał, spełniający warunki (1.3).

W naszym przypadku układ (1.6) (równoważny układowi (1.4)) przybiera postać

$$\varphi_t = x_0 + \int_0^t b(\varphi_r)\,dr + \int_0^t \Theta\,dW_r, \tag{2.47}$$

czyli u nas

$$b(x,s) \equiv b(x)$$

oraz

$$\int_0^t M(\varphi_r, dr) = \int_0^t \Theta\,dW_r,$$

co równoważnie można zapisać, jako

$$M(x,s) \equiv \Theta \cdot W_s.$$

Obliczmy jeszcze:

$$A(x,y,t) = \langle M(x,\cdot), M(y,\cdot)\rangle_t = \langle \Theta W_\cdot, \Theta W_\cdot\rangle_t = \text{ (z uwagi na stałość macierzy } \Theta)$$

$$= \langle \int_0^{\cdot} \Theta\,dW_r, \int_0^{\cdot} \Theta\,dW_r\rangle_t = \int_0^t \Theta\Theta^*\,d\langle W_\cdot, W_\cdot\rangle_r = \int_0^t \Theta\Theta^*\,dr$$

Zatem u nas

$$a(x,y,t) = \Theta\Theta^* \quad \text{(jest to macierz o stałych współczynnikach)}$$

Czyli lokalna charakterystyka naszego procesu (pokażemy poniżej, że jest on semimartyngałem) jest postaci $(\Theta\Theta^*, b(x))$, gdzie

$$b(x) \equiv b\left((q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N)^T\right) = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{m} \\ -\sum_{j\neq 1} \nabla\Phi(q_1 - q_j) \\ \vdots \\ \frac{p_N}{m} \\ -\sum_{j\neq N} \nabla\Phi(q_N - q_j) \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

Widzimy zatem (dzięki założeniom (1.3) o potencjale Φ), że $b(\cdot)$ jest funkcją ciągłą. Pokażemy teraz, iż jest to funkcja lipschitzowska.

Zauważmy na wstępie, że warunek (1.3) $v)$ jest równoważny lipschitzowskości ze stałą L_1 gradientu oryginalnego potencjału Φ.

Rzeczywiście, jeżeli $\Phi(q) = \widetilde{\Phi}(|q|)$, to mamy związek

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \widetilde{\Phi}'(|q|) \cdot \frac{\partial |q|}{\partial q_i} = \widetilde{\Phi}'(|q|) \cdot \frac{q_i}{|q|} \quad \text{dla } q \neq [0,0,0],$$

z którego wynika natychmiast, że

$$\nabla \Phi(q) = \widetilde{\Phi}'(|q|) \cdot \frac{q}{|q|} \quad \text{dla } q \neq [0,0,0].$$

Widać stąd, że norma gradientu potencjału Φ jest równa modułowi pochodnej potencjału $\widetilde{\Phi}$, zatem lipschitzowskość jednego ze stałą L_1 równoważna jest lipschitzowskości drugiego z taką samą stałą. Podobnie rzecz się ma z ograniczonością – ograniczoność $\nabla\Phi$ na $\mathbb{R}^{6N}$ równoważna jest ograniczoności $\widetilde{\Phi}'$ na $\mathbb{R}_+$. Obserwację tę wykorzystamy dalej przy dowodzie lematów 2.33 i 3.2.

Lemat 2.33. *Przy poczynionych wcześniej założeniach* (1.3) *o potencjale* Φ *funkcja* $b(\cdot)$, *zdefiniowana wzorem* (2.48)*, jest lipschitzowska z pewną stałą dodatnią* $L = L(m, N, L_1)$ *(*L_1 *to stała Lipschitza dla* $\widetilde{\Phi}'$*, patrz:* (1.3) v*)).*

Dowód. Przypomnijmy, iż

$$b(x) \equiv b\left((q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N)^T\right) = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{m} \\ -\sum_{j\neq 1} \nabla\Phi(q_1 - q_j) \\ \vdots \\ \frac{p_N}{m} \\ -\sum_{j\neq N} \nabla\Phi(q_N - q_j) \end{pmatrix}.$$

Zatem dla dowolnych $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^{6N}$ możemy napisać:

$$\begin{aligned} |b(x) - b(\overline{x})| &= \left| \begin{pmatrix} \frac{p_1}{m} \\ -\sum_{j\neq 1} \nabla\Phi(q_1 - q_j) \\ \vdots \\ \frac{p_N}{m} \\ -\sum_{j\neq N} \nabla\Phi(q_N - q_j) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\overline{p}_1}{m} \\ -\sum_{j\neq 1} \nabla\Phi(\overline{q}_1 - \overline{q}_j) \\ \vdots \\ \frac{\overline{p}_N}{m} \\ -\sum_{j\neq N} \nabla\Phi(\overline{q}_N - \overline{q}_j) \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \frac{p_1 - \overline{p}_1}{m} \\ \sum_{j\neq 1} \left[\nabla\Phi(\overline{q}_1 - \overline{q}_j) - \nabla\Phi(q_1 - q_j)\right] \\ \vdots \\ \frac{p_N - \overline{p}_N}{m} \\ \sum_{j\neq N} \left[\nabla\Phi(\overline{q}_N - \overline{q}_j) - \nabla\Phi(q_N - q_j)\right] \end{pmatrix} \right| \\ &= \left[\frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{N} |p_i - \overline{p}_i|^2 + \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j\neq i} \left[\nabla\Phi(\overline{q}_i - \overline{q}_j) - \nabla\Phi(q_i - q_j)\right] \right|^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Będziemy chcieli pokazać, że powyższe wyrażenie można oszacować z góry przez

$$L \left[\sum_{i=1}^{N} |p_i - \overline{p}_i|^2 + \sum_{i=1}^{N} |\overline{q}_i - q_i|^2 \right]^{1/2}$$

dla pewnej stałej dodatniej L. W tym celu szacujemy

$$\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+\sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{j\neq i}\Big[\nabla\Phi(\overline{q}_i-\overline{q}_j)-\nabla\Phi(q_i-q_j)\Big]\right|^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$\Big($nierówność trójkąta$\Big)$

$$\leqslant\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j\neq i}\Big|\nabla\Phi(\overline{q}_i-\overline{q}_j)-\nabla\Phi(q_i-q_j)\Big|\right)^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$\Big($lipschitzowskość $\nabla\Phi\Big)$

$$\leqslant\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j\neq i}L_1\Big|(\overline{q}_i-\overline{q}_j)-(q_i-q_j)\Big|\right)^2\right]^{1/2}$$

$$=\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j\neq i}L_1\Big|(\overline{q}_i-q_i)-(\overline{q}_j-q_j)\Big|\right)^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$\Big($ nierówność $|u-v|\leqslant|u|+|v|\Big)$

$$\leqslant\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+L_1^2\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j\neq i}\Big(|\overline{q}_i-q_i|+|\overline{q}_j-q_j|\Big)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$=\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+L_1^2\sum_{i=1}^{N}\left((N-1)|\overline{q}_i-q_i|+\sum_{j\neq i}|\overline{q}_j-q_j|\right)^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$\Big($ nierówność $(a+b)^2\leqslant 2\cdot(a^2+b^2)\Big)$

$$\leqslant\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+2L_1^2\sum_{i=1}^{N}\left((N-1)^2|\overline{q}_i-q_i|^2+\Big(\sum_{j\neq i}|\overline{q}_j-q_j|\Big)^2\right)\right]^{1/2}$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+2L_1^2\sum_{i=1}^{N}\left((N-1)^2|\overline{q}_i-q_i|^2+\Big(\sum_{j=1}^{N}|\overline{q}_j-q_j|\Big)^2\right)\right]^{1/2}$$

$$=\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+2L_1^2(N-1)^2\sum_{i=1}^{N}|\overline{q}_i-q_i|^2+2L_1^2N\Big(\sum_{j=1}^{N}|\overline{q}_j-q_j|\Big)^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$\Big($ nierówność $(\sum_{i=1}^{N}|a_i|)^2\leqslant N\sum_{i=1}^{N}|a_i|^2\Big)$

$$\leqslant\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+2L_1^2(N-1)^2\sum_{i=1}^{N}|\overline{q}_i-q_i|^2+2L_1^2N^2\sum_{j=1}^{N}|\overline{q}_j-q_j|^2\right]^{1/2}$$

$$=\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+2L_1^2(2N^2-2N+1)\sum_{i=1}^{N}|\overline{q}_i-q_i|^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant L\left[\sum_{i=1}^{N}|p_i-\overline{p}_i|^2+\sum_{i=1}^{N}|\overline{q}_i-q_i|^2\right]^{1/2} \quad \text{dla } L=\max\left\{\frac{1}{m},L_1\sqrt{2(2N^2-2N+1)}\right\}.$$

□

Z lematu 2.33 wynika w szczególności, że funkcja $b(\cdot)$ ma wahanie skończone. Zatem dzięki temu, iż proces $\Theta\cdot W_s$ jest ciągłym martyngałem wynika, że proces $F(x,t)$ jest ciągłym semimartyngałem.

Teraz pozostało zatem sprawdzenie, że lokalna charakterystyka tego semimartyngału należy do klasy $B^{0,1}_{ub}$. W ten sposób pokażemy spełnienie założeń twierdzeń 2.23 oraz 2.32 i dowiedziemy ostatecznie istnienia jednoznacznego rozwiązania zagadnienia (1.4) oraz istnienia modyfikacji tego rozwiązania, będącej stochastycznym potokiem homeomorfizmów forward.

Twierdzenie 2.34. *Jeżeli spełnione są założenia (H1), (H2) oraz (H3), to układ* (1.6) *z hamiltonianem* (1.2) *posiada dla dowolnego warunku początkowego* $x\in\Gamma_0$ *jednoznaczne rozwiązanie.*[2] *Ponadto istnieje modyfikacja rodziny rozwiązań tego układu, będąca stochastycznym potokiem homeomorfizmów forward.*

Dowód. Musimy najpierw pokazać, że $a\in B^{0,1}_{ub}$, co równoważne jest temu, iż $a(x,y,t)$ jest procesem prognozowalnym o wartościach w $\widetilde{C}^{0,1}$ oraz spełniona jest nierówność $\int_0^T\|a(\cdot,\cdot,t)\|^{\sim}_{0+1}\,dt<\infty$ i dodatkowo istnieje stała c taka, że dla dowolnego t nierówność $\|a(\cdot,\cdot,t)\|^{\sim}_{0+1}\leqslant c$ jest spełniona p.n. W naszym przypadku $a(x,y,t)\equiv\Theta\Theta^*$ i jest to macierz o stałych współczynnikach, jest to zatem proces prognozowalny. Również $a(x,y,t)\in\widetilde{C}^{0,1}$, gdyż dla dowolnego t zachodzi $a\in C^0\left(\mathbb{R}^{6N}\times\mathbb{R}^{6N}\right)$ i a jest lipschitzowski (co równoważne jest warunkowi z definicji 2.1 mówiącemu, iż pochodne $D^\alpha a,\ |\alpha|=m$ są δ–Hölderowsko ciągłe, gdzie w naszym przypadku $m=0,\ \delta=1$). Dalej mamy (ze wzorów (2.5) oraz (2.6))

$$\|a\|^{\sim}_0=\|\Theta\Theta^*\|^{\sim}_0=\sup_{x,y\in\mathbb{R}^{6N}}\frac{\|\Theta\Theta^*\|}{(1+|x|)(1+|y|)}=\|\Theta\Theta^*\|=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}(\eta^4_{ij}+\xi^4_{ij})=\alpha$$

oraz

$$\|a\|^{\sim}_{0+1}=\alpha+\sup_{\substack{x,y,x',y'\in\mathbb{R}^{6N}\\ x\neq x',y\neq y'}}\frac{\|\Theta\Theta^*-\Theta\Theta^*-\Theta\Theta^*+\Theta\Theta^*\|}{|x-x'||y-y'|}=\alpha.$$

Ponadto

$$\int_0^T\|a\|^{\sim}_{0+1}\,dt=\int_0^T\alpha\,dt=\alpha T<+\infty.$$

Widzimy więc, że $a\in B^{0,1}_{ub}$.

Teraz należy jeszcze sprawdzić, czy $b(x,t)$ jest procesem prognozowalnym o wartościach w $C^{0,1}$ i czy $\int_0^T\|b(\cdot,t)\|_{0+1}\,dt<+\infty$.

Wiadomo, że w ogólności proces adaptowany, lewostronnie ciągły jest procesem prognozowalnym ([20], Proposition 3.6, str. 76). U nas proces $b(x,t)\equiv b(x)$ jest adaptowany

[2] Oczywiście jeżeli chcemy nadać rozwiązaniu sens fizyczny, to warunek początkowy x powinien należeć do Γ_0; jednak twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli założymy tylko, iż warunek początkowy x należy do całej przestrzeni fazowej Γ.

i nawet ciągły, zatem jest prognozowalny.
Teraz należy sprawdzić jeszcze, czy $b(x,t)$ jest $C^{0,1}$-procesem (patrz: str. 26).
Wiemy, że funkcja $b(\cdot)$ jest ciągła. Aby $b(\cdot) \in C^{0,1}$ musi jeszcze być to funkcja lipschitzowska, to jednak mamy zagwarantowane dzięki lematowi 2.33.
Ostatnim warunkiem, który należy pokazać, jest

$$\int_0^T \|b(\cdot,t)\|_{0+1}\, dt < +\infty.$$

Z uwagi na niezależność funkcji b od czasu powyższy warunek będzie spełniony, jeżeli $\|b(\cdot,t)\|_{0+1}$ będzie skończona.
Mamy jednak

$$\|b(\cdot,t)\|_{0+1} = \sup_{x\in\mathbb{R}^{6N}} \frac{|b(x)|}{1+|x|} + \sup_{x,y\in\mathbb{R}^{6N}} \frac{|b(x)-b(y)|}{|x-y|}.$$

Ponieważ $b(\cdot)$ jest funkcją lipschitzowską, to norma ta jest skończona, gdyż jej drugi składnik jest ograniczony przez stałą Lipschitza, zaś pierwszy można oszacować tak:

$$\forall x,y \quad |b(x)-b(y)| \leqslant L|x-y| \Longrightarrow |b(x)-b(0)| \leqslant L|x| \Longrightarrow |b(x)|-|b(0)| \leqslant L|x|$$
$$\Longrightarrow |b(x)| \leqslant L|x| + |b(0)| \leqslant K(1+|x|), \tag{2.49}$$

gdzie $K = \max(L, |b(0)|)$.[3]
Zatem $b(\cdot) \in B^{0,1}_{ub}$. Spełnione są więc założenia twierdzeń 2.23 i 2.32.

□

[3] W rzeczywistości dzięki założeniu (1.3) $iv)$ zachodzi $b(0) = 0$, zatem można przyjąć $K = L$.

Rozdział 3

Niektóre własności rozwiązania zagadnienia

3.1. Ciągła zależność rozwiązania od warunku początkowego

Będziemy zajmować się w dalszym ciągu układem równań (1.4), opisującym ruch $N \geqslant 2$ cząstek w $\mathbb{R}^3$, oddziałujących poprzez gładki potencjał Φ, spełniający warunki (1.3).
Wiemy już z poprzedniego rozdziału, że układ równań (1.6) posiada jednoznaczne rozwiązanie (którego modyfikacja tworzy stochastyczny potok homeomorfizmów forward). Pokażemy teraz, że rozwiązanie to zależy w sposób ciągły od warunku początkowego. Przez $X(t,x)$ oznaczać będziemy rozwiązanie całkowe[1] zagadnienia (1.6) z warunkiem początkowym $X(0) = x$, gdzie $x \in \Gamma_0$.

Stwierdzenie 3.1. *Jeżeli funkcja wektorowa b, dana wzorem* (2.48)*, jest lipschitzowska ze stałą $L > 0$, to przyrost w przedziale czasu $[0,T]$ wartości procesu $X(t,x)$, spełniającego równanie* (1.8)*, względem zmiennych z przestrzeni fazowej, szacuje się w następujący sposób:*

$$\|X(t,x) - X(t,y)\|_{C_W} \leqslant \sqrt{2}e^{L^2T^2}|x-y|, \; x,y \in \Gamma_0, \tag{3.1}$$

gdzie $\|\cdot\|_{C_W} \equiv \|\cdot\|_{C_W\left([0,T];L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\Gamma)\right)}$ jest normą w przestrzeni procesów adaptowanych do W, ciągłych w sensie średniokwadratowym (patrz (1.7)*).*

Dowód. Dla $t \in [0,T]$ mamy, korzystając z równania (1.8),

$$X(t,x) - X(t,y) = x - y + \int_0^t \Big[b(X(s,x)) - b(X(s,y))\Big]\, ds,$$

zatem możemy szacować:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X(t,x) - X(t,y)|^2 &= \mathbb{E}\left|x - y + \int_0^t \Big[b(X(s,x)) - b(X(s,y))\Big]\, ds\right|^2 \\ &\leqslant 2|x-y|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \Big[b(X(s,x)) - b(X(s,y))\Big]\, ds\right|^2.\end{aligned} \tag{3.2}$$

[1] Czyli, przypomnijmy, proces stochastyczny, należący do przestrzeni $C_W\big([0,T];L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\Gamma)\big)$.

Zauważmy, że jeżeli mamy funkcję o wartościach wektorowych, to dla całki z niej również mamy szacowanie podobne, jak dla całki z funkcji rzeczywistej:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^t f(s)\,ds\right| &= \left[\sum_{i=1}^d \left(\int_0^t f_i(s)\,ds\right)^2\right]^{1/2} \leqslant \text{(nierówność Höldera z } g \equiv 1)\\
&\leqslant \left[\sum_{i=1}^d \left(\int_0^t f_i^2(s)\,ds\right)\left(\int_0^t 1^2\,ds\right)\right]^{1/2} = \sqrt{t}\left[\sum_{i=1}^d \int_0^t f_i^2(s)\,ds\right]^{1/2}\\
&= \sqrt{t}\left[\int_0^t \sum_{i=1}^d f_i^2(s)\,ds\right]^{1/2} = \sqrt{t}\left[\int_0^t |f(s)|^2\,ds\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Zapiszmy powyższą nierówność w dogodnej do zastosowań postaci:

$$
\left|\int_0^t f(s)\,ds\right|^2 \leqslant t\int_0^t |f(s)|^2\,ds. \tag{3.3}
$$

Wykorzystując nierówność (3.3) możemy dalej szacować wyrażenie (3.2):

$$
\begin{aligned}
&2|x-y|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \Big[b(X(s,x)) - b(X(s,y))\Big]\,ds\right|^2\\
&\qquad\leqslant 2|x-y|^2 + 2t\cdot\mathbb{E}\int_0^t \Big|b(X(s,x)) - b(X(s,y))\Big|^2\,ds\\
&\qquad\qquad\leqslant 2|x-y|^2 + 2tL^2\mathbb{E}\int_0^t \Big|X(s,x) - X(s,y)\Big|^2\,ds.
\end{aligned}
$$

Zatem pokazaliśmy nierówność (po wejściu z wartością oczekiwaną pod całkę):

$$
\mathbb{E}|X(t,x) - X(t,y)|^2 \leqslant 2|x-y|^2 + 2tL^2\int_0^t \mathbb{E}\Big|X(s,x) - X(s,y)\Big|^2\,ds. \tag{3.4}
$$

Stosując teraz do (3.4) nierówność Gronwalla (lemat 2.13), otrzymujemy:

$$
\mathbb{E}|X(t,x) - X(t,y)|^2 \leqslant 2|x-y|^2 e^{2t^2L^2}.
$$

Ponieważ jednak

$$
\|X(t,x) - X(t,y)\|_{C_W} = \left(\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\Big(|X(t,x) - X(t,y)|^2\Big)\right)^{1/2},
$$

to mamy ostatecznie szacowanie

$$
\|X(t,x) - X(t,y)\|_{C_W} \leqslant \left(\sup_{t\in[0,T]} 2|x-y|^2 e^{2t^2L^2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}e^{L^2T^2}|x-y|.
$$

$\square$

3.2. Różniczkowalność rozwiązania względem warunku początkowego

Okazuje się, że przy nieco mocniejszych założeniach o funkcji $b(\cdot)$ rozwiązanie zagadnienia (1.6) posiada pochodną względem warunku początkowego. Mianowicie musimy wiedzieć, że $b(\cdot)$ należy do przestrzeni $C_b^2(\Gamma)$ funkcji $f\colon \Gamma \to \Gamma$ dwukrotnie różniczkowalnych z jednostajnie ciągłą i ograniczoną drugą pochodną $D^2 f$ oraz z normą

$$\|f\|_2 \colon = \sup_{x\in\Gamma} |f(x)| + \sup_{x\in\Gamma} |Df(x)| + \sup_{x\in\Gamma} \|D^2 f(x)\|. \tag{3.5}$$

Okazuje się, że przy założeniach (1.3) poczynionych o potencjale Φ, funkcja $b(\cdot)$ należy do przestrzeni $C_b^2(\Gamma)$. Mówi o tym kolejny lemat.

Lemat 3.2. *Jeżeli potencjał Φ spełnia założenia* (1.3)*, to funkcja wektorowa $b(\cdot)$, zdefiniowana wzorem* (2.48)*, należy do przestrzeni $C_b^2(\Gamma)$.*

Dowód. Przypomnijmy, iż założyliśmy że $\widetilde{\Phi}$ należy do przestrzeni funkcji klasy C^2 na $\mathbb{R}_+$. Ponieważ również mamy założoną lipschitzowskość $\widetilde{\Phi}'$, to stąd wynika oczywiście ograniczoność drugiej pochodnej funkcji $\widetilde{\Phi}$. Ponieważ mamy założoną ograniczoność trzeciej różniczki Φ (co równoważne jest ograniczoności trzeciej pochodnej Φ' – rozumowanie podobne do poniższych uzasadnień tej równoważności dla pierwszej i drugiej pochodnej), to wynika stąd, że druga pochodna $\widetilde{\Phi}$ jest jednostajnie ciągła. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, ograniczoność $\widetilde{\Phi}'$ równoważna jest ograniczoności $\nabla\Phi$. Ograniczoność $\widetilde{\Phi}$ jest oczywiście równoważna ograniczoności Φ. Aby pokazać taką równoważność dla drugich pochodnych musimy uzależnić drugie pochodne cząstkowe funkcji Φ od drugiej pochodnej funkcji $\widetilde{\Phi}$.
Wiemy, że

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_i} = \widetilde{\Phi}'(|q|)\cdot\frac{q_i}{|q|}.$$

Obliczmy zatem dalej

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_j\partial q_i}(q) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\widetilde{\Phi}'(|q|)\cdot\frac{q_i}{|q|}\right) = \widetilde{\Phi}''(|q|)\cdot\frac{q_j q_i}{|q|^2} + \widetilde{\Phi}'(|q|)\cdot\frac{\delta_{ij}|q| - q_i\cdot\frac{q_j}{|q|}}{|q|^2}.$$

Zatem możemy oszacować

$$\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_j\partial q_i}(q)\right| \leqslant \left|\widetilde{\Phi}''(|q|)\cdot\frac{q_j q_i}{|q|^2}\right| + \left|\widetilde{\Phi}'(|q|)\cdot\frac{\delta_{ij}|q| - q_i\cdot\frac{q_j}{|q|}}{|q|^2}\right|.$$

Pierwszy składnik szacujemy łatwo tak:

$$\left|\widetilde{\Phi}''(|q|)\cdot\frac{q_j q_i}{|q|^2}\right| \leqslant \left|\widetilde{\Phi}''(|q|)\right|\cdot\left|\frac{q_j q_i}{q_i^2+q_j^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\widetilde{\Phi}''(|q|)\right|$$

Drugi składnik zaś szacujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{\Phi}'(|q|)\cdot\frac{\delta_{ij}|q|-q_i\cdot\frac{q_j}{|q|}}{|q|^2}\right| &= \left|\frac{\widetilde{\Phi}'(|q|)}{|q|}\right|\cdot\left|\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{|q|^2}\right|\\ &\leqslant \left|\frac{\widetilde{\Phi}'(|q|)}{|q|}\right|\left(1+\frac{|q_iq_j|}{|q|^2}\right)\leqslant\frac{3}{2}\left|\frac{\widetilde{\Phi}'(|q|)}{|q|}\right|\\ &\leqslant\frac{3}{2}L_1\left(\text{na mocy założeń (1.3) } iv) \text{ i (1.3) } v) \text{ o funkcji } \widetilde{\Phi}\right).\end{aligned}$$

Zatem mamy już wykazaną ograniczoność drugiej różniczki Φ. Stąd już wynika ograniczoność pierwszej różniczki funkcji b (pochodne cząstkowe współrzędnych funkcji odpowiadające pędom są stałe, więc istotne są tylko pochodne cząstkowe funkcji zawierających gradienty Φ, a te są drugimi pochodnymi cząstkowymi funkcji Φ). Aby wykazać ograniczoność drugiej różniczki b trzeba jeszcze mieć ograniczoność trzeciej różniczki Φ, którą założyliśmy. To kończy dowód.

□

Teraz możemy już sformułować twierdzenie o różniczkowalności rozwiązania zagadnienia (1.6) względem wartości początkowej. Najpierw przypomnimy jeszcze ogólną definicję różniczkowalności w przestrzeniach Banacha:

Definicja 3.3. *Niech f będzie odwzorowaniem między dwiema przestrzeniami Banacha $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{Y}$, określonym w otoczeniu punktu $x\in\mathcal{X}$. Powiemy, że f jest różniczkowalne w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie liniowe ciągłe $D_xf\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ takie, że*

$$f(x+u)-f(x)-(D_xf)(u)=o(u)\quad \textit{przy } u\to 0,$$

co oznacza, że

$$\lim_{u\to 0}\frac{\|f(x+u)-f(x)-(D_xf)(u)\|_{\mathcal{Y}}}{\|u\|_{\mathcal{X}}}=0$$

Twierdzenie 3.4. *Jeżeli funkcja $b(\cdot)$ jest lipschitzowska ze stałą $L>0$ i ponadto należy do przestrzeni $C_b^2(\Gamma)$, to rozwiązanie $X(t,x)$ zagadnienia* (1.6) *jest różniczkowalne względem x w przestrzeni Banacha $C_W\Big([0,T];L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\Gamma)\Big)$ i dla dowolnego wektora $h\in\Gamma$ zachodzi wzór*

$$DX(t,x)\cdot h=\eta^h(t,x)\quad \textit{p.n.},[2] \tag{3.6}$$

gdzie $\eta^h(t,x)$ jest (jedynym) rozwiązaniem równania całkowego

$$\eta^h(t,x)=h+\int_0^t Db(X(s,x))\cdot\eta^h(s,x)\,ds,\ t\geqslant 0\quad \textit{p.n.} \tag{3.7}$$

Ponadto

$$\|\eta^h(t,x)\|_{C_W}\leqslant\sqrt{2}e^{L^2T^2}|h|,\ x\in\Gamma. \tag{3.8}$$

[2] $\eta^h(t,x)$ jest p.n. pochodną kierunkową w chwili t w punkcie x rozwiązania X w kierunku wektora h.

Dowód. W dowodzie będziemy naśladować rozumowanie z [18] – Theorem 3.6, str. 65.

Jeśli $\eta^h(t,x)$ jest rozwiązaniem równania całkowego (3.7), to możemy je oszacować w analogiczny sposób, jak przy dowodzie stwierdzenia 3.1:

$$\mathbb{E}\Big|\eta^h(t,x)\Big|^2 = \mathbb{E}\Big|h + \int_0^t Db(X(s,x))\cdot\eta^h(s,x)\,ds\Big|^2$$

$$\leqslant 2|h|^2 + 2\mathbb{E}\Big|\int_0^t Db(X(s,x))\cdot\eta^h(s,x)\,ds\Big|^2$$

$$\leqslant 2|h|^2 + 2t\mathbb{E}\Bigg[\int_0^t \Big|Db(X(s,x))\cdot\eta^h(s,x)\Big|^2\,ds\Bigg]$$

$$\leqslant \text{(nierówność dla normy macierzy } Db) \ 2|h|^2 + 2t\mathbb{E}\Bigg[\int_0^t \Big\|Db(X(s,x))\Big\|^2\Big|\eta^h(s,x)\Big|^2\,ds\Bigg]$$

i dzięki lipschitzowskości b ze stałą L jej różniczka ma normę nie przekraczającą L, skąd mamy dalsze szacowanie

$$2|h|^2 + 2t\mathbb{E}\Bigg[\int_0^t \Big\|Db(X(s,x))\Big\|^2\Big|\eta^h(s,x)\Big|^2\,ds\Bigg]$$

$$\leqslant 2|h|^2 + 2tL^2\mathbb{E}\Bigg[\int_0^t \Big|\eta^h(s,x)\Big|^2\,ds\Bigg].$$

Pokazaliśmy więc nierówność (po wejściu z wartością oczekiwaną pod całkę):

$$\mathbb{E}\Big|\eta^h(t,x)\Big|^2 \leqslant 2|h|^2 + 2tL^2\Bigg[\int_0^t \mathbb{E}\Big|\eta^h(s,x)\Big|^2\,ds\Bigg],$$

zatem z nierówności Gronwalla (lemat 2.13) dostajemy:

$$\mathbb{E}\Big|\eta^h(t,x)\Big|^2 \leqslant 2|h|^2 e^{2L^2t^2}. \tag{3.9}$$

Stąd mamy oszacowanie

$$\|\eta^h(t,x)\|_{C_W} \leqslant \left(\sup_{t\in[0,T]} 2|h|^2 e^{2L^2t^2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}e^{L^2T^2}|h|, \tag{3.10}$$

co daje nam (3.8).

Teraz pokażemy, że proces $\eta^h(t,x)$, będący rozwiązaniem równania (3.7), spełnia równanie (3.6).

Ustalmy $T > 0$, $x \in \Gamma$ oraz wektor $h \in \Gamma$ taki, że $|h| \leqslant 1$. Pokażemy, że istnieje stała $C_T > 0$ taka, że

$$\|X(t,x+h) - X(t,x) - \eta^h(t,x)\|_{C_W} \leqslant C_T|h|^2 \tag{3.11}$$

(która to nierówność w myśl definicji 3.3 pociąga za sobą warunek (3.6)).
Wprowadzając oznaczenie

$$r^h(t,x) = X(t,x+h) - X(t,x) - \eta^h(t,x) \tag{3.12}$$

widzimy, że $r^h(t,x)$ spełnia równanie (po uwzględnieniu związku (1.8)):

$$\begin{aligned} r^h(t,x) &= x + h + \int_0^t b(X(s,x+h))\,ds - x - \int_0^t b(X(s,x))\,ds - \eta^h(t,x) \\ &= \int_0^t \Big[b(X(s,x+h)) - b(X(s,x))\Big]\,ds - \int_0^t Db(X(s,x))\cdot\eta^h(s,x)\,ds. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Możemy dalej przekształcić pierwszą całkę w następujący sposób (zmieniając po drodze zmienne):

$$\begin{aligned} \int_0^t \Big[b(X(s,x+h)) - b(X(s,x))\Big]\,ds &= \int_0^t \left[\int_0^{X(s,x+h)-X(s,x)} Db(y + X(s,x))\,dy\right] ds \\ &\quad \Big(\text{podstawiamy } y = \xi\cdot\Big(X(s,x+h) - X(s,x)\Big)\Big) \\ &= \int_0^t \left\{\int_0^1 Db\Big[\xi\Big(X(s,x+h)-X(s,x)\Big) + X(s,x)\Big]\cdot\Big(X(s,x+h)-X(s,x)\Big)\,d\xi\right\} ds \\ &= \int_0^t \left\{\int_0^1 Db\Big[\xi X(s,x+h) + (1-\xi)X(s,x)\Big]\,d\xi\right\}\cdot\Big(X(s,x+h)-X(s,x)\Big)\,ds. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Funkcja r^h zatem (dzięki związkom (3.12), (3.13), (3.14)) daje się zapisać w postaci

$$r^h(t,x) = \int_0^t \left[\int_0^1 Db(\rho(\xi,s))\,d\xi\right]\cdot(r^h(s,x) + \eta^h(s,x))\,ds - \int_0^t Db(X(s,x))\cdot\eta^h(s,x)\,ds,$$

gdzie $\rho(\xi,s) = \xi X(s,x+h) + (1-\xi)X(s,x)$.
Przepiszemy tę równość w jeszcze innej postaci, dogodnej do dalszych rozważań:

$$\begin{aligned} r^h(t,x) = &\int_0^t \left[\int_0^1 Db(\rho(\xi,s))\,d\xi\right]\cdot r^h(s,x)\,ds \\ &+ \int_0^t \left\{\int_0^1 \Big[Db(\rho(\xi,s)) - Db(X(s,x))\Big]\,d\xi\right\}\cdot\eta^h(s,x)\,ds. \end{aligned}$$

Będziemy chcieli oszacować normę $\|\cdot\|_{C_W}$ powyższego wyrażenia. W tym celu obliczmy wartość oczekiwaną kwadratu jego normy (w Γ). Podobnie, jak przy kilku wcześniejszych rachunkach najpierw oszacujemy kwadrat normy sumy dwóch wyrażeń przez sumę podwojonych kwadratów ich norm. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant 2\mathbb{E}&\left|\int_0^t \left[\int_0^1 Db(\rho(\xi,s))\,d\xi\right]\cdot r^h(s,x)\,ds\right|^2\\ &+ 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \left\{\int_0^1 \Big[Db(\rho(\xi,s)) - Db(X(s,x))\Big]\,d\xi\right\}\cdot \eta^h(s,x)\,ds\right|^2.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Korzystając dwukrotnie z nierówności (3.3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant 2t\mathbb{E}&\int_0^t \left|\left[\int_0^1 Db(\rho(\xi,s))\,d\xi\right]\cdot r^h(s,x)\right|^2 ds\\ &+ 2t\mathbb{E}\int_0^t \left|\left\{\int_0^1 \Big[Db(\rho(\xi,s)) - Db(X(s,x))\Big]\,d\xi\right\}\cdot \eta^h(s,x)\right|^2 ds.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Dzięki nierówności dla norm macierzy mamy dalej:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant 2t\mathbb{E}&\int_0^t \left\|\int_0^1 Db(\rho(\xi,s))\,d\xi\right\|^2\cdot \left|r^h(s,x)\right|^2 ds\\ &+ 2t\mathbb{E}\int_0^t \left\|\int_0^1 \Big[Db(\rho(\xi,s)) - Db(X(s,x))\Big]\,d\xi\right\|^2\cdot \left|\eta^h(s,x)\right|^2 ds.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Oszacujemy jeszcze wyrażenia podcałkowe. Najpierw z pierwszej całki:

$$\left\|\int_0^1 Db(\rho(\xi,s))\,d\xi\right\|^2 \leqslant \int_0^1 \left\|Db(\rho(\xi,s))\right\|^2 d\xi \leqslant L^2. \tag{3.18}$$

Dla drugiej całki zaś korzystając z tw. Lagrange'a o wartości średniej mamy:

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^1 \Big[Db(\rho(\xi,s)) - Db(X(s,x))\Big]\,d\xi\right\|^2 \leqslant \int_0^1 \left\|Db(\rho(\xi,s)) - Db(X(s,x))\right\|^2 d\xi\\ &\leqslant \int_0^1 \left\|D^2b\right\|^2\cdot\left|\xi\cdot(X(s,x+h)-(X(s,x))\right|^2 d\xi\\ &= \left\|D^2b\right\|^2\cdot\left|X(s,x+h)-X(s,x)\right|^2\left|\int_0^1 \xi^2\,d\xi\right|^2 = \frac{1}{9}\left\|D^2b\right\|^2\cdot\left|X(s,x+h)-X(s,x)\right|^2.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Teraz możemy szacować dalej prawą stronę nierówności (3.17) (korzystając z oszacowań (3.18) i (3.19)):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant 2tL^2\mathbb{E}\int\limits_0^t \left|r^h(s,x)\right|^2 ds \\ + \frac{2}{9}t\|D^2b\|^2\mathbb{E}\int\limits_0^t \left|X(s,x+h)-X(s,x)\right|^2\left|\eta^h(s,x)\right|^2 ds.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Ponieważ jednak (patrz (3.12)) $X(s,x+h) - X(s,x) = r^h(s,x) + \eta^h(s,x)$, możemy powyższą nierówność zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant 2tL^2\mathbb{E}\int\limits_0^t \left|r^h(s,x)\right|^2 ds \\ + \frac{2}{9}t\|D^2b\|^2\mathbb{E}\int\limits_0^t \left|r^h(s,x)+\eta^h(s,x)\right|^2\left|\eta^h(s,x)\right|^2 ds.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Raz jeszcze szacując kwadrat normy sumy elementów przez sumę podwojonych kwadratów norm tych elementów dostajemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant 2tL^2\mathbb{E}\int\limits_0^t \left|r^h(s,x)\right|^2 ds \\ + \frac{4}{9}t\|D^2b\|^2\mathbb{E}\int\limits_0^t \left(\left|r^h(s,x)\right|^2 + \left|\eta^h(s,x)\right|^2\right)\left|\eta^h(s,x)\right|^2 ds.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Mamy jednak nierówność (3.9), po uwzględnieniu której możemy napisać

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant 2tL^2\mathbb{E}\int\limits_0^t \left|r^h(s,x)\right|^2 ds \\ + \frac{4}{9}t\|D^2b\|^2\mathbb{E}\int\limits_0^t \left(\left|r^h(s,x)\right|^2 + 2|h|^2e^{2L^2s^2}\right)2|h|^2e^{2L^2s^2} ds.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Ponieważ $s \leqslant T$, to dzięki monotoniczności funkcji exp możemy ostatecznie oszacować:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant 2tL^2\mathbb{E}\int\limits_0^t \left|r^h(s,x)\right|^2 ds \\ + \frac{4}{9}t\|D^2b\|^2\mathbb{E}\int\limits_0^t \left(\left|r^h(s,x)\right|^2 + 2|h|^2e^{2L^2T^2}\right)2|h|^2e^{2L^2T^2} ds,\end{aligned} \tag{3.24}$$

co po uproszczeniu oraz oszacowaniu t przez T przybiera postać

$$\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant 2TL^2\mathbb{E}\int_0^t \left|r^h(s,x)\right|^2 ds + \frac{16}{9}T^2\|D^2b\|^2|h|^4e^{4L^2T^2} + \frac{8}{9}T\|D^2b\|^2|h|^2e^{2L^2T^2}\mathbb{E}\int_0^t \left|r^h(s,x)\right|^2 ds. \tag{3.25}$$

Po uporządkowaniu oraz oszacowaniu normy $\|D^2b\|$ przez $\|b\|_2$ (patrz: (3.5)), a także oszacowaniu normy jednego z wektorów h przez 1 (założenie na str. 55) dostajemy:

$$\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant \Big(2TL^2+\frac{8}{9}T\|b\|_2^2e^{2L^2T^2}\Big)\int_0^t \mathbb{E}\left|r^h(s,x)\right|^2 ds+\frac{16}{9}T^2\|b\|_2^2e^{4L^2T^2}|h|^4. \tag{3.26}$$

Kładąc $\gamma_T := 4Te^{2L^2T^2}$, nierówność (3.26) można zapisać w nieco bardziej przejrzystej formie:

$$\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant \Big(2TL^2 + \frac{2}{9}\gamma_T\|b\|_2^2\Big)\int_0^t \mathbb{E}\left|r^h(s,x)\right|^2 ds + \frac{1}{9}\|b\|_2^2\gamma_T^2|h|^4. \tag{3.27}$$

Z nierówności Gronwalla (lemat 2.13) dostajemy więc oszacowanie

$$\mathbb{E}|r^h(t,x)|^2 \leqslant \frac{1}{9}\|b\|_2^2\gamma_T^2|h|^4e^{\left(2TL^2+\frac{2}{9}\gamma_T\|b\|_2^2\right)t}. \tag{3.28}$$

Biorąc teraz supremum obu stron po $t \in [0,T]$ oraz pierwiastkując dostajemy ostateczny wynik:

$$\|r^h(t,x)\|_{C_W} \leqslant \frac{1}{3}\|b\|_2\gamma_T|h|^2e^{\left(TL^2+\frac{1}{9}\gamma_T\|b\|_2^2\right)T}. \tag{3.29}$$

Przyjmując więc

$$C_T = \frac{1}{3}\|b\|_2\gamma_Te^{\left(TL^2+\frac{1}{9}\gamma_T\|b\|_2^2\right)T}$$

otrzymujemy tezę.
Pozostało jeszcze do wykazania istnienie i jednoznaczność rozwiązania. W tym celu wprowadźmy przekształcenie $\zeta(X)(t)$ zdefiniowane w następujący sposób:

$$\zeta(X)(t) = \int_0^t Db(X(s,x))\cdot\eta^h(s,x)\,ds \qquad \text{dla } X \in C_W,\ t \in [0,T]. \tag{3.30}$$

Widzimy, że jest to przekształcenie przestrzeni Banacha $C_W\Big([0,T];L^2\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\Gamma\right)\Big)$ w nią samą (wynika to z lipschitzowskości funkcji b oraz oszacowania (3.9)). Równanie (3.7) można zapisać teraz w postaci

$$\eta^h(t,x) = h + \zeta(X)(t). \tag{3.31}$$

Prawdziwe są następujące nierówności (korzystamy z nierówności (3.3), (3.9), faktu że $|h| \leqslant 1$ i lipschitzowskości Db, która jest konsekwencją faktu, iż $b \in C_b^2$ – patrz lemat 3.2 i jego dowód):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\zeta(X)-\zeta(Y)|^2 &= \mathbb{E}\left|\int_0^t \Big[Db(X(s)) - Db(Y(s))\Big]\cdot \eta^h(s,x)\,ds\right|^2 \\ &\leqslant t\mathbb{E}\int_0^t \Big|Db(X(s)) - Db(Y(s))\Big|^2 \cdot |\eta^h(s,x)|^2\,ds \\ &\leqslant 2e^{2L^2t^2}\|b\|_2^2 t\mathbb{E}\int_0^t \Big|X(s)-Y(s)\Big|^2\,ds,\end{aligned} \tag{3.32}$$

zatem biorąc supremum po $t \in [0,T]$ oraz pierwiastkując obie strony dostajemy:

$$\|\zeta(X)-\zeta(Y)\|_{C_W} \leqslant e^{L^2T^2}\|b\|_2\sqrt{2T}\|X-Y\|_{C_W}. \tag{3.33}$$

Jeżeli teraz wybierzemy $T_1 \in (0,T]$ takie, że

$$e^{L^2T_1^2}\|b\|_2\sqrt{2T_1} < 1, \tag{3.34}$$

to $\zeta(X)(t)$ będzie kontrakcją na $C_W\Big([0,T_1]; L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\Gamma)\Big)$. A zatem istnieje dokładnie jeden ($\mathbb{P}$-p.n.) proces η^h spełniający warunek (3.30). Wobec tego równanie (3.31) (a zatem i równanie (3.7)) posiada jednoznacznie wyznaczone rozwiązanie na $C_W\Big([0,T_1]; L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\Gamma)\Big)$. Dodatkowego warunku (3.34) można się pozbyć, jeżeli będziemy rozważali równanie (3.7) na przedziałach $[0,T_1]$, $[T_1,2T_1]$ itd., gdzie T_1 jest wybrane tak, by spełniało warunek (3.34) (wówczas długości tych przedziałów, wynoszące T_1, spełniają nierówność (3.34), zatem ζ jest na tych przedziałach kontrakcją). To pokazuje istnienie i jednoznaczność rozwiązania na całym przedziale $[0,T]$.

□

Rozdział 4

Stochastyczne równanie Liouville'a

W rozdziale tym zajmiemy się wyprowadzenia równania, które spełniać musi funkcja gęstości losowej rozkładu położenia układu N cząstek w przestrzeni fazowej. Równanie opisujące ewolucję gęstości rozkładu położenia układu oddziałujących cząstek jest podstawowym narzędziem przy wyprowadzaniu równań opisujących ewolucję w czasie funkcji gęstości dla wybranych podukładów cząstek (tzw. hierarchii BBGKY).
Warto przypomnieć, iż w najprostszym przypadku, dla układu N identycznych cząstek o masie $m > 0$ każda (poruszających się zgodnie z zasadami dynamiki Newtona), których ruch opisany jest (w ujęciu hamiltonowskim) układem równań (p_i to pęd i-tej cząstki, q_i to jej położenie, $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ to prędkość i-tej cząstki, zaś $-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ to działająca na nią siła):

$$\begin{cases} dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dt \\ dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dt \end{cases} \tag{4.1}$$

równanie Liouville'a dla funkcji $P \equiv P(t, X)$, będącej (deterministyczną) gęstością rozkładu położenia cząstek w przestrzeni fazowej przybiera postać (por. [11], str. 11):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \frac{\partial P}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P}{\partial p_i} = 0 \tag{4.2}$$

i po wprowadzeniu oznaczeń $x_i = (q_i, p_i)$, $b_i = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $b(x) = (b_1, \ldots, b_N)$ może zostać zapisane w symbolicznej postaci

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i \cdot P) = 0, \tag{4.3}$$

albo w skrócie:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(b \cdot P) = 0. \tag{4.4}$$

W pracy [34] R. Kubo podał postać stochastycznego równania Liouville'a dla układu cząstek, jednak przy założeniu istnienia hamiltonianu. Z założenia tego wynika fakt, iż dla takiego układu istnieje miara niezmiennicza i jest to miara Lebesgue'a.
W rozdziale tym wyprowadzimy równanie Liouville'a dla układu (1.6), który w ogólności nie musi być układem hamiltonowskim. W związku z tym miara niezmiennicza (której istnienie założymy) nie musi być miarą Lebesgue'a (komentarz odnośnie tej kwestii zamieszczony jest w rozdziale 6).

4.1. Półgrupa operatorów stowarzyszonych z rozwiązaniem zagadnienia

Po wykazaniu istnienia potoku stochastycznego rozwiązań zagadnienia (1.6) (i udowodnieniu jego ciągłości oraz różniczkowalności względem warunku początkowego) możemy wprowadzić rodzinę $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ operatorów $P_t\colon B_b(\Gamma) \to B_b(\Gamma)$,[1] związaną z rozwiązaniem całkowym $X(t,x)$ zagadnienia (1.6):

$$P_t\phi(x) = \mathbb{E}[\phi(X(t,x))],\ \phi \in B_b(\Gamma),\ t \geqslant 0,\ x \in \Gamma, \tag{4.5}$$

gdzie $B_b(\Gamma) = \{f\colon \Gamma \to \Gamma$ t.że f – borelowska i ograniczona$\}$.
Niech $\|\cdot\|_0$ oznacza normę supremum na Γ. Dla dowolnego $t \geqslant 0$ zachodzi oczywiście nierówność

$$\|P_t\phi\|_0 \leqslant \|\phi\|_0,\ \phi \in B_b(\Gamma).$$

Wiadomo, że operatory P_t tworzą półgrupę na $B_b(\Gamma)$. Przypomnijmy, że oznacza to, iż spełniają one następujące warunki:
$i)$ $P_{t+s}\phi(x) = P_t(P_s\phi(x)),\ \phi \in B_b(\Gamma),\ x \in \Gamma,\ s,t \geqslant 0,$
$ii)$ $P_0\phi(x) = \phi(x),\ \phi \in B_b(\Gamma),\ x \in \Gamma.$
Jest to nawet półgrupa fellerowska, tzn. jeśli $\varphi \in C_b(\Gamma)$, to $P_t\phi$ też do tej przestrzeni należy, przy czym $C_b(\Gamma)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $B_b(\Gamma)$, zawierającą wszystkie ograniczone i jednostajnie ciągłe funkcje $f\colon \Gamma \to \Gamma$.
Zauważmy jeszcze, że dla dowolnego borelowskiego podzbioru A zbioru Γ borelowska funkcja $\phi(x) = \mathbf{1}_A(x)$ daje związek

$$P_t\phi(x) = P_t\mathbf{1}_A(x) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X(t,x))] = \mathbb{P}(X(t,x) \in A). \tag{4.6}$$

Okazuje się, że można podać równanie, jakie musi spełniać funkcja $P_t\varphi(\cdot)$, stowarzyszona z rozwiązaniem całkowym zagadnienia (1.6). Jest to tzw. równanie Kołmogorowa. Mówi o tym następujące twierdzenie (Theorem 5.4.2, str. 71, [19]):

Twierdzenie 4.1. *Niech $b(\cdot)$ oraz Θ będą lipschitzowskie oraz niech istnieją stałe dodatnie C_3 i C_4 takie, że*

$$|b(x)| \leqslant C_3(1+|x|) \text{ dla } x \in \Gamma \tag{4.7}$$

oraz

$$|\Theta| \leqslant C_4(1+|x|) \text{ dla } x \in \Gamma, \tag{4.8}$$

a także dodatkowo pierwsze i drugie różniczki $b(\cdot)$ oraz Θ niech będą ciągłe i ograniczone. Ponadto φ niech będzie funkcją z $C_b^2(\Gamma)$. Przy tych założeniach równanie Kołmogorowa backward dla zagadnienia (1.6) *ma postać*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) = \frac{1}{2}tr\Big[\Theta^* v_{xx}(t,x)\Theta\Big] + \Big\langle b(x), v_x(t,x)\Big\rangle,\ t > 0,\ x \in \Gamma \\ v(0,x) = \varphi(x),\ x \in \Gamma \end{cases} \tag{4.9}$$

i posiada dokładnie jedno mocne rozwiązanie, będące funkcją postaci

$$v(t,x) = \mathbb{E}[\varphi(X(t,x))] = P_t\varphi(x),\ t \geqslant 0,\ x \in \Gamma. \tag{4.10}$$

[1] Przypomnijmy, że Γ to przestrzeń fazowa, w której porusza się rozpatrywany układ cząstek; $\Gamma = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N$.

Zauważmy, że macierz Θ jest stała, więc spełnia oczywiście wszystkie założenia. Ponadto zauważmy, że na mocy nierówności (2.49) $b(\cdot)$ spełnia warunek (4.7). Przy dowodzie lematu 3.2 uzasadniliśmy (na mocy założeń o potencjale Φ) ciągłość i ograniczoność pierwszej i drugiej różniczki $b(\cdot)$, co oznacza, iż wszystkie założenia twierdzenia są spełnione.
Podstawiając w powyższym zagadnieniu $\varphi(x) = \mathbf{1}_A(x)$ dla dowolnego $A \in \Gamma$ otrzymalibyśmy (por. (4.6)) rozwiązanie postaci $v(t,x) = \mathbb{P}(X(t,x) \in A)$.
Niestety w przypadku bardziej skomplikowanych funkcji b (również i w przypadku analizowanego w tej pracy układu) nie jest znana postać rozwiązania równania (4.9), nie daje więc ono praktycznej metody szukania rozkładu rozwiązań zagadnienia początkowego.

4.2. Stochastyczne równanie Liouville'a

Możemy teraz już przejść do wyprowadzenia stochastycznej wersji równania Liouville'a, które spełnia funkcja gęstości losowej rozkładu położenia układu N cząstek w przestrzeni fazowej $\Gamma = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N$. W tym celu musimy założyć, iż półgrupa operatorów P_t, danych wzorem (4.5), stowarzyszona z rozwiązaniem zagadnienia (1.6), posiada miarę niezmienniczą μ (określoną na sigma-ciele borelowskich podzbiorów zbioru Γ), tzn. że dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subseteq \Gamma$ oraz dowolnego $t \geqslant 0$ zachodzi związek

$$\mu\Big(P_t^{-1}(A)\Big) = \mu(A). \tag{4.11}$$

Uwaga. W niektórych źródłach podawana jest inna wersja definicji niezmienniczości miary μ, mianowicie:

$$\int_\Gamma P_t\varphi \, d\mu = \int_\Gamma \varphi \, d\mu$$

dla dowolnej ciągłej, ograniczonej funkcji $\varphi\colon \Gamma \to \mathbb{R}$.

Zauważmy jednak, iż przyjmując w tej definicji $\varphi(x) = \mathbf{1}_A(x)$ dla dowolnego borelowskiego $A \subseteq \Gamma$ otrzymujemy warunek

$$\int_\Gamma \mathbb{P}(X(t,x) \in A) \, d\mu = \int_\Gamma \mathbf{1}_A \, d\mu = \mu(A),$$

czyli warunek poprzedni.

Założenie (M) o mierze niezmienniczej μ:
— μ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a[2] i jej gęstość $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ jest funkcją niezmienniczą względem permutacji swoich zmiennych $x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, tzn. spełniony jest warunek $d\mu(X) = g(X)\,dX$ dla pewnej funkcji $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Uwaga. Zauważmy, iż g musi być funkcją symetryczną względem permutacji zmiennych x_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$, opisujących położenie oraz pęd każdej z N cząstek, gdyż dzięki faktowi, iż potencjał Φ jest symetryczny (żadna cząstka nie jest wyróżniona) oraz

[2] Szerszy komentarz odnośnie istnienia takiej miary oraz jej absolutnej ciągłości względem miary Lebesgue'a znajduje się w rozdziale 6.

współczynniki dyfuzji są takie same dla każdej cząstki (patrz: str. 18), mamy symetrię równań, opisujących stan układu.

Przez $\varphi(t, X_0, \omega)$, gdzie $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \times \Gamma \times \Omega \to \Gamma$ oznaczać będziemy stochastyczny potok homeomorfizmów, będący rozwiązaniem zagadnienia (1.6) z warunkiem początkowym $X_0 \in \Gamma$.

Przez $P(t, \cdot, \omega)$ oznaczać będziemy gęstość losową, opisującą gęstość rozkładu prawdopodobieństwa znalezienia się rozpatrywanego układu cząstek w zadanym obszarze przestrzeni fazowej; ściśle rzecz ujmując

$$\mathbb{P}(X(t, X_0) \in A) = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{A} P(t, X, \omega)\, dX\, d\omega \text{ dla } A \in \Gamma.$$

Zakładamy, że warunek początkowy nie jest zadany z absolutną dokładnością, lecz opisany jest on przez gęstość początkową $P_0(\cdot, \omega) \equiv P(0, \cdot, \omega)$.

Po tych wprowadzających uwagach możemy sformułować twierdzenie opisujące ewolucję w czasie (równanie typu Liouville'a) gęstości losowej P rozkładu położenia układu cząstek w przestrzeni fazowej.

Twierdzenie 4.2. *Niech X będzie procesem stochastycznym, należącym do przestrzeni $C_W\Big([0, T]; L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)\Big)$ (patrz: str.21), będącym rozwiązaniem całkowym zagadnienia*

$$\begin{cases} dX(t) = b\big(X(t)\big)\, dt + \Theta\, dW(t), \ t \geqslant 0 \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{4.12}$$

gdzie $X_0 \in \Gamma_0$. Niech $P(t, \cdot, \omega)$ będzie gęstością losową o gęstości początkowej $P_0(\cdot, \omega) \equiv P(0, \cdot, \omega)$. Załóżmy, że półgrupa operatorów, danych wzorem (4.5)*, stowarzyszona z rozwiązaniem zagadnienia* (4.12)*, posiada miarę niezmienniczą μ, spełniającą warunek (M). Wówczas gęstość P spełnia następujące stochastyczne równanie Itô (zwane stochastycznym równaniem Liouville'a):*

$$\begin{aligned} P(t, X, \omega)g(X) = P_0(X) - \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial X}\Big(b(s, X)P(s, X, \omega)g(X)\Big)\, ds \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Theta^*\Theta \frac{\partial^2}{\partial X^2}\Big(P(s, X, \omega)g(X)\Big)\, ds - \int\limits_0^t \Theta \frac{\partial}{\partial X}\Big(P(s, X, \omega)g(X)\Big)\, dW(s). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dowód. Niech A będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni fazowej Γ. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że $X(t, x)$ należy do zbioru A musi być równe prawdopodobieństwu zdarzenia, że $X(t, X_0)$ znajdowało się w chwili 0 w obszarze A_0 składającym się z punktów X_0, należących do przeciwobrazu $X(t, X_0)$, czyli takich X_0, że $\varphi(t, X_0, \omega) \in A$. Wówczas na mocy niezmienniczości miary μ mamy równanie:

$$\int\limits_A P(t, X, \omega)\, d\mu(X) = \int\limits_{\{X_0\colon \varphi(t, X_0, \omega) \in A\}} P_0(X_0)\, dX_0. \tag{4.14}$$

Przepiszmy teraz to równanie korzystając z indykatora zbioru:

$$\int_\Gamma \mathbf{1}_A(X)P(t,X,\omega)\,d\mu(X) = \int_\Gamma \mathbf{1}_A(\varphi(t,X_0,\omega))P_0(X_0)\,dX_0. \tag{4.15}$$

Pamiętając jednak, że $\varphi(t,X_0,\omega)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1.6), czyli procesem $X(t)$, widzimy, że wyrażenia będące argumentami indykatorów po obu stronach powyższej równości są tożsamościowo równe.
Na mocy addytywności całki otrzymujemy analogiczne równanie dla dowolnej funkcji schodkowej ϕ:

$$\int_\Gamma \phi(X)P(t,X,\omega)\,d\mu(X) = \int_\Gamma \phi(\varphi(t,X_0,\omega))P_0(X_0)\,dX_0. \tag{4.16}$$

zaś po przejściu granicznym otrzymujemy prawdziwość tej równości dla dowolnej funkcji próbnej $\psi \in C_0^\infty(\Gamma)$.
Ustalmy teraz dowolną taką funkcję. Będziemy ją dalej oznaczać również przez ψ. Ustalmy też warunek początkowy X_0. Ponieważ ψ jest klasy C^∞, zaś $X(t)$ jest semimartyngałem, to możemy teraz zastosować wzór Itô do $\psi(X(t))$ i otrzymać:

$$d\psi(X(t)) = \Big(b\psi_X(X(t)) + \frac{1}{2}\Theta^*\psi_{XX}(X(t))\Theta\Big)\,dt + \Theta\psi_X(X(t))\,dW(t). \tag{4.17}$$

Przepisując powyższe równanie w terminach potoku $\varphi(t,X_0,\omega) \equiv X(t)$ uzyskujemy:

$$\begin{aligned} d\psi\Big(\varphi(t,X_0,\omega)\Big) = \Big(b\psi_X\Big(\varphi(t,X_0,\omega)\Big) + \frac{1}{2}\Theta^*\psi_{XX}\Big(\varphi(t,X_0,\omega)\Big)\Theta\Big)\,dt \\ + \Theta\psi_X\Big(\varphi(t,X_0,\omega)\Big)\,dW(t). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Zapiszemy teraz powyższe równanie w postaci całkowej:

$$\begin{aligned} \psi\Big(\varphi(t,X_0,\omega)\Big) &= \psi\Big(X_0\Big) + \int_0^t b\Big(s,X_0\Big)\frac{\partial\psi\Big(\varphi(s,X_0,\omega)\Big)}{\partial X}\,ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^*\Theta\frac{\partial^2\psi\Big(\varphi(s,X_0,\omega)\Big)}{\partial X^2}\,ds + \int_0^t \Theta\frac{\partial\psi\Big(\varphi(s,X_0,\omega)\Big)}{\partial X}\,dW(s). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Pomnóżmy obie strony tego równania przez $P_0(X_0)$ i scałkujmy po Γ względem X_0:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \psi\Big(\varphi(t,X_0,\omega)\Big)P_0(X_0)\,dX_0 &= \int_\Gamma \psi(X_0)P_0(X_0)\,dX_0 \\ &+ \int_\Gamma\int_0^t b(s,X_0)\frac{\partial\psi\Big(\varphi(s,X_0,\omega)\Big)}{\partial X}\,ds\,P_0(X_0)\,dX_0 \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Gamma\int_0^t \Theta^*\Theta\frac{\partial^2\psi\Big(\varphi(s,X_0,\omega)\Big)}{\partial X^2}\,ds\,P_0(X_0)\,dX_0 \\ &+ \int_\Gamma\int_0^t \Theta\frac{\partial\psi\Big(\varphi(s,X_0,\omega)\Big)}{\partial X}\,dW(s)\,P_0(X_0)\,dX_0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Zauważmy, że zachodzi oczywista równość:

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(X) P_0(X)\, dX = \int\limits_{\Gamma} \psi(X_0) P_0(X_0)\, dX_0. \tag{4.21}$$

Jeżeli teraz zastosujemy równanie (4.16) kolejno do funkcji próbnych:

$$\begin{aligned}
\phi(X) &= \psi(X),\\
\phi(X) &= b(s,X)\frac{\partial\psi(X)}{\partial X},\\
\phi(X) &= \frac{1}{2}\Theta^*\Theta\frac{\partial^2\psi(X)}{\partial X^2},\\
\phi(X) &= \Theta\frac{\partial\psi(X)}{\partial X},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

to otrzymamy równania:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma} \psi(X) P(t,X,\omega)\, d\mu(X) &= \int\limits_{\Gamma} \psi(\varphi(t,X_0,\omega)) P_0(X_0)\, dX_0,\\
\int\limits_{\Gamma} b(s,X)\frac{\partial\psi(X)}{\partial X} P(s,X,\omega)\, d\mu(X) &= \int\limits_{\Gamma} b(s,X_0)\frac{\partial\psi(\varphi(s,X_0,\omega))}{\partial X} P_0(X_0)\, dX_0,\\
\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{2}\Theta^*\Theta\frac{\partial^2\psi(X)}{\partial X^2} P(s,X,\omega)\, d\mu(X) &= \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{2}\Theta^*\Theta\frac{\partial^2\psi(\varphi(s,X_0,\omega))}{\partial X^2} P_0(X_0)\, dX_0,\\
\int\limits_{\Gamma} \Theta\frac{\partial\psi(X)}{\partial X} P(s,X,\omega)\, d\mu(X) &= \int\limits_{\Gamma} \Theta\frac{\partial\psi(\varphi(s,X_0,\omega))}{\partial X} P_0(X_0)\, dX_0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Zapiszemy teraz równanie (4.20) w równoważnej postaci, korzystając z równań (4.23) oraz równości (4.21):

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma} \psi(X) P(t,X,\omega)\, d\mu(X) = \int\limits_{\Gamma} \psi(X) P_0(X)\, dX
&+ \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{t} b(s,X)\frac{\partial\psi(X)}{\partial X} P(s,X,\omega)\, ds\, d\mu(X)\\
&+ \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{t} \frac{1}{2}\Theta^*\Theta\frac{\partial^2\psi(X)}{\partial X^2} P(s,X,\omega)\, ds\, d\mu(X)\\
&+ \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{t} \Theta\frac{\partial\psi(X)}{\partial X} P(s,X,\omega)\, dW(s)\, d\mu(X).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Jeżeli skorzystamy teraz z założenia o istnieniu gęstości g miary μ względem miary Lebesgue'a, to dostaniemy równoważne równanie:

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \psi(X)P(t,X,\omega)g(X)\,dX &= \int_\Gamma \psi(X)P_0(X)\,dX \\
&+ \int_\Gamma \int_0^t b(s,X)\frac{\partial\psi(X)}{\partial X}P(s,X,\omega)g(X)\,ds\,dX \\
&+ \int_\Gamma \int_0^t \frac{1}{2}\Theta^*\Theta\frac{\partial^2\psi(X)}{\partial X^2}P(s,X,\omega)g(X)\,ds\,dX \\
&+ \int_\Gamma \int_0^t \Theta\frac{\partial\psi(X)}{\partial X}P(s,X,\omega)g(X)\,dW(s)\,dX.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Zapiszmy teraz precyzyjniej iloczyny skalarne w wyrażeniach podcałkowych powyższego równania w postaci sum:

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \psi(X)P(t,X,\omega)g(X)\,dX &= \int_\Gamma \psi(X)P_0(X)\,dX \\
&+ \sum_{i=1}^N \int_\Gamma \int_0^t b_i\frac{\partial\psi(X)}{\partial x_i}P(s,X,\omega)g(X)\,ds\,dX \\
&+ \sum_{i=1}^N \int_\Gamma \int_0^t \frac{1}{2}\theta_i^*\theta_i\frac{\partial^2\psi(X)}{\partial x_i^2}P(s,X,\omega)g(X)\,ds\,dX \\
&+ \sum_{i=1}^N \int_\Gamma \int_0^t \theta_i\frac{\partial\psi(X)}{\partial x_i}P(s,X,\omega)g(X)\,dW(s)\,dX,
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

pamiętając, że każde $x_i \in \mathbb{R}^6$ jest wektorem (q_i, p_i), $b_i \in \mathbb{R}^6$ jest wektorem $(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i})$, zaś θ_i to macierz diagonalna $\begin{pmatrix} \eta_i & 0 \\ 0 & \xi_i \end{pmatrix}$, gdzie η_i oraz ξ_i są stałymi macierzami diagonalnymi wymiaru 3.

Skorzystamy teraz ze wzoru na całkowanie przez części, mówiącego iż dla dowolnego ograniczonego podzbioru otwartego U przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z brzegiem ∂U klasy C^1 zachodzi związek

$$
\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot v\,dx = -\int_U u\cdot\frac{\partial v}{x_i}\,dx + \int_{\partial U} u\cdot v\,\nu^i\,dS, \quad i\in\{1,2,\ldots,n\}
$$

gdzie ν^i oznacza i–tą współrzędną jednostkowego zewnętrznego wektora normalnego do powierzchni ∂U, zaś dS – miarę powierzchniową na ∂U.

Przekształcimy składniki występujące w równaniu (4.26) korzystając z faktu, iż funkcja ψ jest klasy C_0^∞, gdyż dzięki temu będziemy w rzeczywistości całkować po obszarze ograniczonym i całki powierzchniowe po brzegu tego obszaru znikną.

Podstawiając zamiast $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ funkcję $\frac{\partial \psi(X)}{\partial x_i}$, zaś zamiast v funkcję $b_i P(s,X,\omega)g(X)$ otrzymujemy:

$$\int_\Gamma \int_0^t b_i \frac{\partial \psi(X)}{\partial x_i} P(s,X,\omega)g(X)\,ds\,dX = -\int_\Gamma \int_0^t \psi(X)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_i P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds\,dX. \tag{4.27}$$

Podstawiając zamiast $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ funkcję $\frac{\partial^2 \psi(X)}{\partial x_i^2}$, zaś zamiast v funkcję $\theta_i^*\theta_i P(s,X,\omega)g(X)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \int_0^t & \theta_i^*\theta_i \frac{\partial^2 \psi(X)}{\partial x_i^2} P(s,X,\omega)g(X)\,ds\,dX \\ &= -\int_\Gamma \int_0^t \frac{\partial \psi(X)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\theta_i^*\theta_i P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds\,dX,\end{aligned} \tag{4.28}$$

zaś po ponownym podstawieniu we wzorze na całkowanie przez części zamiast $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ funkcji $\frac{\partial \psi(X)}{\partial x_i}$, zaś zamiast v funkcji $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\theta_i^*\theta_i P(s,X,\omega)g(X)\Big)$ dostajemy

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \int_0^t & \frac{\partial \psi(X)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\theta_i^*\theta_i P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds\,dX \\ &= -\int_\Gamma \int_0^t \psi(X)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(\theta_i^*\theta_i P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds\,dX,\end{aligned} \tag{4.29}$$

skąd wynika związek

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \int_0^t & \theta_i^*\theta_i \frac{\partial^2 \psi(X)}{\partial x_i^2} P(s,X,\omega)g(X)\,ds\,dX \\ &= \int_\Gamma \int_0^t \psi(X)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(\theta_i^*\theta_i P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds\,dX.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Podstawiając wreszcie zamiast $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ funkcję $\frac{\partial \psi(X)}{\partial x_i}$, zaś zamiast v funkcję $\theta_i P(s,X,\omega)g(X)$, otrzymamy

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \int_0^t & \theta_i \frac{\partial \psi(X)}{\partial x_i} P(s,X,\omega)g(X)\,dW(s)\,dX \\ &= -\int_\Gamma \int_0^t \psi(X)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\theta_i P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,dW(s)\,dX.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Ostatecznie więc (przy założeniu, że P jest dostatecznie gładka, by móc całkować przez części oraz zmieniać kolejność całkowania, a także uwzględniając stałość macierzy θ_i) otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma \psi(X)P(t,X,\omega)g(X)\,dX &= \int\limits_\Gamma \psi(X)P_0(X)\,dX\\ &-\sum_{i=1}^N \int\limits_\Gamma \int\limits_0^t \psi(X)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_i P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds\,dX\\ &+\sum_{i=1}^N \int\limits_\Gamma \int\limits_0^t \frac{1}{2}\psi(X)\theta_i^*\theta_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds\,dX\\ &-\sum_{i=1}^N \int\limits_\Gamma \int\limits_0^t \psi(X)\theta_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,dW(s)\,dX.\end{aligned} \tag{4.32}$$

Zapiszmy jeszcze powyższe równanie w uproszczonej, symbolicznej formie:

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma \psi(X)P(t,X,\omega)g(X)\,dX &= \int\limits_\Gamma \psi(X)P_0(X)\,dX\\ &-\int\limits_\Gamma \int\limits_0^t \psi(X)\frac{\partial}{\partial X}\Big(b(s,X)P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds\,dX\\ &+\frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \int\limits_0^t \psi(X)\Theta^*\Theta\frac{\partial^2}{\partial X^2}\Big(P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds\,dX\\ &-\int\limits_\Gamma \int\limits_0^t \psi(X)\Theta\frac{\partial}{\partial X}\Big(P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,dW(s)\,dX.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Ponieważ powyższa równość musi być spełniona dla każdej funkcji próbnej ψ, to oczywiście będzie też spełniona po opuszczeniu całek po obszarze Γ oraz funkcji próbnej. Otrzymujemy stąd równanie

$$\begin{aligned}P(t,X,\omega)g(X) &= P_0(X) - \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial X}\Big(b(s,X)P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds\\ +\frac{1}{2}\int\limits_0^t \Theta^*\Theta\frac{\partial^2}{\partial X^2}&\Big(P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds - \int\limits_0^t \Theta\frac{\partial}{\partial X}\Big(P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,dW(s),\end{aligned} \tag{4.34}$$

które jest równaniem Liouville'a dla stochastycznego układu oddziałujących cząstek. W wersji różniczkowej równanie to ma postać

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial P(t,X,\omega)}{\partial t}g(X) + \frac{\partial}{\partial X}\Big(b(t,X)P(t,X,\omega)g(X)\Big)\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\left(\Theta^*\Theta\frac{\partial^2}{\partial X^2}\Big(P(t,X,\omega)g(X)\Big)\right)dt - \Theta\frac{\partial}{\partial X}\Big(P(t,X,\omega)g(X)\Big)\,dW(t).\end{aligned} \tag{4.35}$$

□

Rozdział 5

Hierarchia BBGKY dla stochastycznego układu cząstek

Korzystając z wyprowadzonego w poprzednim rozdziale stochastycznego równania Liouville'a (4.35) wyprowadzimy teraz układ równań, zwany (w przypadku deterministycznym) hierarchią BBGKY (od pierwszych liter nazwisk uczonych, którzy jako pierwsi się nią zajmowali: Bogolubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon, patrz: str.15), opisujący dynamikę gęstości położenia w przestrzeni fazowej układu dowolnie wybranych s cząstek, gdzie $s \in \{1, 2, \dots, N\}$. Zgodnie z intuicją, dla $s = N$ równaniem tym będzie po prostu równanie (4.35) (gdyż równanie Liouville'a opisuje dynamikę gęstości całego układu N cząstek).

Warto przypomnieć, że w przypadku klasycznym, to znaczy dla układu N identycznych cząstek o masie $m > 0$ każda, poruszających się zgodnie z zasadami dynamiki Newtona, których ruch może być opisany (w ujęciu hamiltonowskim) układem równań[1],

$$\begin{cases} dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dt \\ dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\, dt, \end{cases} \tag{5.1}$$

hierarchia BBGKY równań różniczkowo-całkowych, opisujących ewolucję w czasie funkcji

$$P^{(s)} \equiv P^{(s)}(q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_s, p_s, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{6(N-s)}} P(q_1, p_1, \dots, q_N, p_N, t) \prod_{j=s+1}^{N} dq_j\, dp_j,$$

będącej (deterministyczną) gęstością rozkładu położenia dowolnego układu s cząstek w przestrzeni fazowej przybiera postać (por. [11], str. 58):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{(s)}}{\partial t} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s} p_i \cdot \frac{\partial P^{(s)}}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{s} \nabla\Phi(q_i - q_l)\right)\frac{\partial P^{(s)}}{\partial p_i} \\ - (N-s)\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla\Phi(q_i - q_{s+1})\frac{\partial P^{(s+1)}}{\partial p_i}\, dq_{s+1}\, dp_{s+1} = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Wyprowadzimy teraz układ stochastycznych równań różniczkowo-całkowych, opisujących ewolucję w czasie funkcji gęstości położenia w przestrzeni fazowej układu s cząstek ($s \in \{1, 2, \dots, N\}$), poruszających się zgodnie z dynamiką (1.4).

[1] gdzie p_i to pęd i-tej cząstki, q_i to jej położenie, $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ to prędkość i-tej cząstki, zaś $-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ to działająca na nią siła, zadana wzorem $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_{l\neq i} \nabla\Phi(q_i - q_l)$

5.1. Stochastyczna hierarchia BBGKY

Wprowadźmy rodzinę gęstości losowych

$$
\begin{aligned}
&P^{(s)}(q_1,p_1,q_2,p_2,\dots,q_s,p_s,t)\\
&\qquad = \int\limits_{\Lambda^{N-s}} P(q_1,p_1,\dots,q_N,p_N,t)g(q_1,p_1,\dots,q_N,p_N)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j,
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

odpowiadających gęstości rozkładu położenia układu dowolnych s cząstek w przestrzeni fazowej ($s \in \{1,2,\dots,N\}$), gdzie $\Lambda^{N-s} = \mathbb{R}^{6(N-s)} \times \Omega^{N-s}$, przy czym Ω^{N-s} jest dziedziną, na której określonych jest $6(N-s)$ jednowymiarowych procesów Wienera. Prawdziwe jest wówczas

Twierdzenie 5.1. *Niech X będzie procesem stochastycznym, należącym do przestrzeni $C_W\Big([0,T];L^2\big(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^{6N}\big)\Big)$ (patrz: str.21), będącym rozwiązaniem całkowym zagadnienia*

$$
\begin{cases}
dX(t) = b\big(X(t)\big)\,dt + \Theta\,dW(t), \; t \geqslant 0\\
X(0) = X_0,
\end{cases}
\tag{5.4}
$$

gdzie $X_0 \in \Gamma_0$, zaś b oraz Θ spełniają założenia podane w podrozdziale 1.3. Niech $P(t,\cdot,\omega)$ będzie gęstością losową o gęstości początkowej $P_0(\cdot,\omega) \equiv P(0,\cdot,\omega)$. Załóżmy, że półgrupa operatorów, danych wzorem (4.5)*, stowarzyszona z rozwiązaniem zagadnienia* (5.4)*, posiada miarę niezmienniczą μ, absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a, o gęstości $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, będącej funkcją niezmienniczą względem permutacji swoich zmiennych $x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \in \{1,\dots,N\}$. Wówczas gęstość $P^{(s)}$ spełnia następujące stochastyczne równanie Itô:*

$$
\begin{aligned}
&\Bigg[\frac{\partial P^{(s)}}{\partial t} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s} p_i\frac{\partial P^{(s)}}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{s}\Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{s}\nabla\Phi(q_i-q_l)\Bigg)\frac{\partial P^{(s)}}{\partial p_i}\\
&-(N-s)\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\mathbb{R}^6\times\Omega^1}\nabla\Phi(q_i-q_{s+1})\frac{\partial P^{(s+1)}}{\partial p_i}\,dx_{s+1}\,dw_{s+1}\Bigg]\,dt\\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{i=1}^{s}\theta_i^*\theta_i\frac{\partial^2 P^{(s)}}{\partial x_i^2}\Bigg]\,dt - \Bigg[\sum_{i=1}^{s}\theta_i\frac{\partial P^{(s)}}{\partial x_i}\Bigg]\,dW(t).
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Dowód. Scałkujemy równanie (4.35) względem miary produktowej, odpowiadającej zmiennym opisującym cząstki o numerach $s+1, s+2, \dots, N$. Miarę tę oznaczymy w skrócie przez

$$
\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j
\tag{5.6}
$$

i będziemy rozumieć, jako

$$
\prod_{j=s+1}^{N} dq_j\,dp_j\,dw_j.
$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy oznaczenie:

$$\widetilde{P}(t,X,\omega) = P(t,X,\omega)g(X).$$

Uwaga. Zauważmy, że funkcja $\widetilde{P}$ jest również, jak i funkcja P, symetryczna względem permutacji zmiennych, odpowiadającym różnym cząstkom. Wynika to z faktu, iż g posiada też taką symetrię (patrz: uwaga na str. 64).

Teraz, aby otrzymać równanie ewolucji dla $P^{(s)}$ (czyli stochastyczny odpowiednik hierarchii BBGKY), należy scałkować równanie Liouville'a (4.35) względem zmiennych x_j, w_j, czyli względem q_j, p_j, w_j $(s+1 \leqslant j \leqslant N)$ po Λ^{N-s}:

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial P(t,X,\omega)}{\partial t} g(X) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \\
&+ \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial}{\partial X}\Big(b(t,X)P(t,X,\omega)g(X)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j\Bigg)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \Theta^*\Theta \frac{\partial^2}{\partial X^2}\Big(P(t,X,\omega)g(X)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j\Bigg) dt \\
&\quad -\Bigg(\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \Theta \frac{\partial}{\partial X}\Big(P(t,X,\omega)g(X)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j\Bigg) dW(t).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Przepiszmy równanie (5.7) w bardziej precyzyjnej postaci. Wygodnie też będzie trzymać składniki sumy w tym równaniu oddzielnie dla $i \leqslant s$ oraz $i > s$ a także nazwać wskaźnik sumowania w sumach od $s+1$ do N literą k, a nie i:

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial P(t,X,\omega)}{\partial t} g(X) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \\
&+ \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_i(t,X)P(t,X,\omega)g(X)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \\
&\quad + \sum_{k=s+1}^{N} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(b_k(t,X)P(t,X,\omega)g(X)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j\Bigg)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_i^*\theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(P(t,X,\omega)g(X)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \\
&+ \sum_{k=s+1}^{N} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_k^*\theta_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Big(P(t,X,\omega)g(X)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j\Bigg) dt \\
&\quad -\Bigg(\sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(P(t,X,\omega)g(X)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j\Bigg) dW(t) \\
&\quad -\Bigg(\sum_{k=s+1}^{N} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(P(t,X,\omega)g(X)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j\Bigg) dW(t).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Aby uzyskać równanie opisujące zmiany funkcji $P^{(s)}$, musimy przekształcić powyższe równanie, korzystając z zależności (5.3). W pierwszym składniku

$$\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial P(t,X,\omega)}{\partial t} g(X) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j$$

możemy zamienić kolejność całkowania i różniczkowania (jedyną funkcją podcałkową zależącą od czasu jest P), uzyskując wynik:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} P(t,X,\omega) g(X) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j .$$

Dzięki tej obserwacji równanie (5.8) możemy zapisać w postaci równania, które musi spełniać funkcja $\widetilde{P}(t,X,\omega)$:

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial \widetilde{P}(t,X,\omega)}{\partial t} \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \\
&\quad + \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_i(t,X)\widetilde{P}(t,X,\omega)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \\
&\qquad + \sum_{k=s+1}^{N} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(b_k(t,X)\widetilde{P}(t,X,\omega)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \Bigg) dt \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_i^* \theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \widetilde{P}(t,X,\omega) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \\
&\quad + \sum_{k=s+1}^{N} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_k^* \theta_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \widetilde{P}(t,X,\omega) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \Bigg) dt \\
&\qquad - \Bigg(\sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \widetilde{P}(t,X,\omega) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \Bigg) dW(t) \\
&\qquad\quad - \Bigg(\sum_{k=s+1}^{N} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_k \frac{\partial}{\partial x_k} \widetilde{P}(t,X,\omega) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \Bigg) dW(t).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Składnik równania (5.9) postaci

$$\sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_i(t,X)\widetilde{P}(t,X,\omega)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j$$

rozumiemy następująco:

$$\sum_{i=1}^{s} \Bigg(\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial}{\partial q_i}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_i} \widetilde{P}(t,X,\omega)\Big) + \frac{\partial}{\partial p_i}\Big(-\frac{\partial H}{\partial q_i}(t,X)\widetilde{P}(t,X,\omega)\Big) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j \Bigg). \tag{5.10}$$

Całka pierwszego składnika powyższej sumy wynosi

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\left(p_i\frac{\partial}{\partial q_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\right)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j$$

i możemy przekształcić ją następująco:

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s}&\left(p_i\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\frac{\partial}{\partial q_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j\right)\\&=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s}\left(p_i\frac{\partial}{\partial q_i}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j\right)\\&=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s}\left(p_i(t,X)\frac{\partial P^{(s)}}{\partial q_i}\right).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Całka drugiego składnika sumy (5.10) wynosi

$$\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\widetilde{P}(t,X,\omega)-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\right)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j.\tag{5.12}$$

Najpierw przekształcimy wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j.$$

Wykorzystując postać (1.2) hamiltonianu H otrzymujemy wyrażenie:

$$-\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_{l\neq i}\nabla\Phi(q_i-q_l)\right)\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j\tag{5.13}$$

i widzimy, że jest ono równe zeru.
Teraz przekształcimy drugi składnik sumy (5.12), czyli wyrażenie

$$-\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j.$$

Po wstawieniu postaci sił $-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ przybiera ono postać

$$-\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\sum_{l\neq i}\nabla\Phi(q_i-q_l)\frac{\partial}{\partial p_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j$$

i podobnie jak wcześniej możemy rozłożyć je na dwa składniki:

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}&\left(\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{s}\nabla\Phi(q_i-q_l)\right)\frac{\partial}{\partial p_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j\\&-\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\left(\sum_{l=s+1}^{N}\nabla\Phi(q_i-q_l)\right)\frac{\partial}{\partial p_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Pierwszy z tych składników równy jest

$$-\sum_{i=1}^{s}\Bigg(\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{s}\nabla\Phi(q_i-q_l)\Bigg)\frac{\partial}{\partial p_i}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j,$$

czyli

$$-\sum_{i=1}^{s}\Bigg(\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{s}\nabla\Phi(q_i-q_l)\Bigg)\frac{\partial P^{(s)}}{\partial p_i}. \tag{5.15}$$

Drugi składnik równania (5.14), na mocy niezmienniczości funkcji $\widetilde{P}$ ze względu na permutacje jej argumentów odpowiadającym poszczególnym cząstkom (patrz: uwaga na stronie 73), możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\Bigg(\sum_{l=s+1}^{N}\nabla\Phi(q_i-q_l)\Bigg)\frac{\partial}{\partial p_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j\\
&=-\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\Bigg(\sum_{l=s+1}^{N}\nabla\Phi(q_i-q_l)\Bigg)\frac{\partial}{\partial p_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\,dx_{s+1}\,dw_{s+1}\prod_{j=s+2}^{N}dx_j\,dw_j\\
&=-(N-s)\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\nabla\Phi(q_i-q_{s+1})\frac{\partial}{\partial p_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\,dx_{s+1}\,dw_{s+1}\prod_{j=s+2}^{N}dx_j\,dw_j\\
&=-(N-s)\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\mathbb{R}^6\times\Omega^1}\nabla\Phi(q_i-q_{s+1})\frac{\partial P^{(s+1)}}{\partial p_i}\,dx_{s+1}\,dw_{s+1}.
\end{aligned}\tag{5.16}$$

Podsumowując, składnik równania (5.9) postaci

$$\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_i(t,X)\widetilde{P}(t,X,\omega)\Big)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j$$

może być, dzięki wzorom (5.11), (5.15) i (5.16), zapisany w postaci

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s}\Bigg(p_i(t,X)\frac{\partial P^{(s)}}{\partial q_i}\Bigg)-\sum_{i=1}^{s}\Bigg(\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{s}\nabla\Phi(q_i-q_l)\Bigg)\frac{\partial P^{(s)}}{\partial p_i}\\
&\qquad-(N-s)\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\mathbb{R}^6\times\Omega^1}\nabla\Phi(q_i-q_{s+1})\frac{\partial P^{(s+1)}}{\partial p_i}\,dx_{s+1}\,dw_{s+1}.
\end{aligned}\tag{5.17}$$

Zajmiemy się teraz kolejnym składnikiem równania (5.9), mianowicie składnikiem postaci

$$\sum_{k=s+1}^{N}\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(b_k(t,X)\widetilde{P}(t,X,\omega)\Big)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j$$

Rozumiemy go następująco:

$$\sum_{k=s+1}^{N}\Bigg(\int\limits_{\Lambda^{N-s}}\frac{\partial}{\partial q_k}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_k}\widetilde{P}(t,X,\omega)\Big)+\frac{\partial}{\partial p_k}\Big(-\frac{\partial H}{\partial q_k}\widetilde{P}(t,X,\omega)\Big)\prod_{j=s+1}^{N}dx_j\,dw_j\Bigg). \tag{5.18}$$

Na mocy twierdzenia Gaussa-Greena wynosi on zero, gdyż dla każdego $k = s+1, \ldots, N$ sama całka

$$\int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(b_k(t,X)\widetilde{P}(t,X,\omega)\Big)\,dx_k$$

równa jest

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^6} b_k(t,X)\widetilde{P}(t,X,\omega)\nu^k\,dS,$$

zatem jeśli założymy, że funkcja podcałkowa znika na brzegu rozpatrywanego obszaru, czyli w nieskończoności, otrzymamy wartość zero.

Teraz pozostały do analizy składniki występujące po prawej stronie równania (5.9). Pierwszy z nich to

$$\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_i^*\theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j.$$

Ponieważ θ_i są macierzami o stałych współczynnikach, możemy natychmiast powyższe wyrażenie przekształcić do postaci

$$\sum_{i=1}^{s}\theta_i^*\theta_i\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j,$$

a następnie zamieniając kolejność całkowania i różniczkowania, otrzymać

$$\sum_{i=1}^{s}\theta_i^*\theta_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j,$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{s}\theta_i^*\theta_i\frac{\partial^2 P^{(s)}}{\partial x_i^2}. \tag{5.19}$$

Kolejny składnik równania (5.9) to

$$\sum_{k=s+1}^{N}\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_k^*\theta_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j.$$

Możemy go przekształcić do postaci

$$\sum_{k=s+1}^{N}\theta_k^*\theta_k\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j.$$

Zauważmy teraz (podobnie, jak przy analizie składnika (5.18)), że dla dowolnego $k = s+1, \ldots, N$ sama całka

$$\int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\widetilde{P}(t,X,\omega)\,dx_k$$

wynosi na mocy twierdzenia Gaussa-Greena

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^6} \frac{\partial}{\partial x_k}\widetilde{P}(t,X,\omega)\nu^k\,dS,$$

zatem jest zerowa (przy założeniu, iż funkcja podcałkowa znika w nieskończoności). Następny składnik, który należy przekształcić, to

$$\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_i\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j.$$

Wynosi on

$$\sum_{i=1}^{s}\theta_i\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j$$

i po zamianie kolejności całkowania i różniczkowania dostajemy

$$\sum_{i=1}^{s}\theta_i\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j,$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{s}\theta_i\frac{\partial P^{(s)}}{\partial x_i}. \tag{5.20}$$

Ostatni składnik równania (5.9), który należy przekształcić, to

$$\sum_{k=s+1}^{N}\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \theta_k\frac{\partial}{\partial x_k}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j.$$

Jest on równy

$$\sum_{k=s+1}^{N}\theta_k\int\limits_{\Lambda^{N-s}} \frac{\partial}{\partial x_k}\widetilde{P}(t,X,\omega)\prod_{j=s+1}^{N} dx_j\,dw_j$$

i w tym wypadku również wystarczy zauważyć, że całka

$$\int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{\partial}{\partial x_k}\widetilde{P}(t,X,\omega)\,dx_k$$

jest dla dowolnego $k = s+1,\dots,N$ na mocy twierdzenia Gaussa-Greena zerowa. Rzeczywiście, wynosi ona

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^6} \widetilde{P}(t,X,\omega)\nu^k\,dS,$$

więc jest równa zero przy założeniu, iż funkcja $\widetilde{P}$ znika w nieskończoności.

Ostatecznie, łącząc wyniki uzyskane w (5.17), (5.19) oraz (5.20) otrzymujemy następującą postać równania (5.9):

$$\begin{aligned}\Bigg[\frac{\partial P^{(s)}}{\partial t} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s}\left(p_i(t,X)\frac{\partial P^{(s)}}{\partial q_i}\right) - \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{s}\nabla\Phi(q_i-q_l)\right)\frac{\partial P^{(s)}}{\partial p_i}\\ -(N-s)\sum_{i=1}^{s}\int_{\mathbb{R}^6\times\Omega^1}\nabla\Phi(q_i-q_{s+1})\frac{\partial P^{(s+1)}}{\partial p_i}\,dx_{s+1}\,dw_{s+1}\Bigg]\,dt\\ = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{s}\theta_i^*\theta_i\frac{\partial^2 P^{(s)}}{\partial x_i^2}\right]dt - \left[\sum_{i=1}^{s}\theta_i\frac{\partial P^{(s)}}{\partial x_i}\right]dW(t).\end{aligned} \tag{5.21}$$

□

Otrzymana „hierarchia BBGKY” dla stochastycznego układu cząstek różni się od hierarchii klasycznej (dla cząstek poruszających się zgodnie z zasadami dynamiki Newtona bez dodatkowych stochastycznych zaburzeń) członami stojącymi po prawej stronie znaku równości, które stanowią wkład losowych zaburzeń (por. (5.2)). Warto zauważyć, iż tak samo jak w przypadku klasycznym, ostatnie, N-te równanie tej hierarchii (dla $s = N$) jest po prostu równaniem Liouville'a (4.35).

Rozdział 6

Dodatek – problem istnienia miary niezmienniczej dla półgrupy operatorów

W podrozdziale 4.1 wprowadziliśmy rodzinę operatorów $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ związanych z rozwiązaniem całkowym $X(t,x)$ zagadnienia (1.6). Operatory P_t tworzą półgrupę fellerowską na $B_b(\Gamma)$.
W twierdzeniach 4.2 i 5.1 założyliśmy istnienie miary niezmienniczej dla półgrupy P_t. Spróbujemy odpowiedzieć teraz na pytanie o istnienie tej miary. Okazuje się, że w ogólności pokazanie jej istnienia może być zadaniem bardzo trudnym. Możliwe jest to tylko w pewnych szczególnych przypadkach.
Przede wszystkim ([19], str. 96) dla liniowych układów stochastycznych postaci

$$\begin{cases} dX(t) = AX(t)\,dt + B\,dW(t),\ t \geqslant 0 \\ X(0) = x, \end{cases}$$

gdzie A jest generatorem infinitezymalnym mocno ciągłej półgrupy operatorów $\{S(t)\}$, B jest przekształceniem liniowym, zaś dla dowolnych $t > 0$ operator liniowy Q_t, zdefiniowany wzorem

$$Q_t x = \int_0^t S(s)BB^*S^*(s)\,ds$$

jest operatorem śladowym (*trace class*)[1], istnieje miara niezmiennicza i co więcej jest ona splotem miary niezmienniczej dla układu deterministycznego

$$dZ(t) = AZ(t)\,dt$$

oraz pewnej miary gaussowskiej.
Istnieje również charakteryzacja miary niezmienniczej dla tzw. *układów gradientowych*. Mówi o tym następujące twierdzenie ([44], Twierdzenie 4.2, str. 49)[2]:

Twierdzenie 6.1. *Niech proces stochastyczny $X(t)$ spełnia równanie*

$$dX(t) = \frac{1}{2}\nabla U(X(t))\,dt + Q^{1/2}\,dW(t), \tag{6.1}$$

[1] W skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta każdy liniowy operator jest śladowy.
[2] Treści twierdzeń 6.1 oraz 6.2 zostały przeformułowane w równoważny sposób, aby zachować zgodność z oznaczeniami niniejszej rozprawy.

gdzie U jest funkcją rzeczywistą klasy C^2 z ograniczonymi pochodnymi, zaś $Q^{1/2}$ to pewna macierz.[3] *Wówczas istnieje probabilistyczna miara niezmiennicza μ absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a i jej gęstość może być wyrażona jawnym wzorem*

$$\mu(dx) = \frac{e^{U(x)}}{Z}\, dx,$$

gdzie Z jest stałą normującą.[4]

Zauważmy, że rozpatrywany przez nas układ (1.6) może zostać zapisany w postaci (6.1), o ile funkcja $U\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ będzie spełniała następujące warunki:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial p_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial q_N} = \frac{\partial H}{\partial p_N}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial p_N} = -\frac{\partial H}{\partial q_N}. \end{cases} \tag{6.2}$$

zaś $Q \equiv \Theta \geqslant 0$.

Zauważmy, że taka funkcja U (klasy C^2) musi w związku z tym spełniać warunki

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial p_i^2} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}$$

i ponieważ hamiltonian H jest klasy C^3, to jako wniosek z twierdzenia Schwarza dostajemy związek

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial p_i^2} = 0,$$

czyli po zsumowaniu względem $i \in \{1, \ldots, N\}$:

$$\Delta U = 0.$$

U musi być więc funkcją harmoniczną, spełniającą warunki (6.2). Autor nie widzi jednak sposobu znalezienia funkcji harmonicznej, która spełniałaby założenia (6.2), dlatego twierdzenie 6.1 nie gwarantuje w naszym przypadku istnienia miary niezmienniczej.

Układy gradientowe są szczególnym przypadkiem tzw. *układów dyssypatywnych*, opisanych równaniami postaci

$$dX(t) = \big(AX(t) + F(X(t))\big)\, dt + Q^{1/2}\, dW(t), \tag{6.3}$$

gdzie A jest odwzorowaniem liniowym, $Q^{1/2}$ – dowolną macierzą, zaś $G(x) = Ax + F(x)$ jest tzw. *przekształceniem dyssypatywnym*, czyli spełnia na pewnym obszarze warunek

$$\langle G(x) - G(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle \leqslant 0.$$

---

[3] Jeżeli zdefiniujemy nowy proces Wienera $\widetilde{W} := Q^{1/2}W$, to $\mathrm{cov}(\widetilde{W}(s), \widetilde{W}(t)) = Q\, t \wedge s$, zatem na $Q^{1/2}$ można patrzeć jak na pierwiastek z macierzy kowariancji pewnego nowego procesu Wienera.

[4] Fakt ten został zauważony już przez Kołmogorowa.

Okazuje się, że przy pewnych założeniach o odwzorowaniach A i F istnieje również dokładnie jedna miara niezmiennicza dla równania (6.3). Mówi o tym następujące twierdzenie ([44], Twierdzenie 4.3, str. 51):

Twierdzenie 6.2. *Załóżmy, że spełnione są następujące warunki:*
1. *Odwzorowania $A + \omega_1 I$ i $F + \omega_2 I$ są dyssypatywne i $\omega_1 + \omega_2 \equiv \omega > 0$,*
2. $\sup_{t \geqslant 0} \mathbb{E}[|Y(t)| + |F(Y(t))|] < +\infty$, *gdzie $Y(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (z dowolną macierzą B)*

$$dY(t) = AY(t)\,dt + B\,dW(t), \quad Y(0) = 0.$$

Wtedy dla równania

$$dX(t) = (AX(t) + F(X(t)))\,dt + B\,dW(t)$$

istnieje dokładnie jedna miara niezmiennicza μ. Ponadto istnieje stała $C > 0$ taka, że dowolnej ograniczonej i lipschitzowskiej funkcji ϕ zachodzi oszacowanie:

$$|P_t\phi(x) - \int \phi(x)\,\mu(dx)| \leqslant C(1 + |x|)e^{-\frac{\omega}{2}t}\|\phi\|_{Lip},$$

gdzie $\|\phi\|_{Lip}$ jest stałą Lipschitza funkcji ϕ.

Spróbujemy teraz pokazać, jak można podejść do kwestii istnienia miary niezmienniczej dla analizowanego w tej pracy układu przy użyciu technik dla układów dyssypatywnych (inaczej, niż w dowodzie twierdzenia 6.2 przedstawionym w [44]). Niestety tutaj też niemożliwe jest uzyskanie w pełni satysfakcjonującego wyniku, gdyż układ (1.6) nie jest dyssypatywny na całym Γ.
Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 6.3. *Załóżmy, iż funkcja $b\colon \mathbb{R}^{6N} \to \mathbb{R}^{6N}$, dana wzorem* (2.48)*, jest lipschitzowska*[5] *oraz spełnia w pewnym zbiorze $\mathcal{D} \subset \Gamma$ warunek*

$$\kappa := \sup_{x,\overline{x} \in \mathcal{D}} \left\{ \frac{\langle b(x) - b(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle}{|x - \overline{x}|^2} \right\} < 0. \tag{6.4}$$

Wówczas półgrupa operatorów, danych wzorem (4.5)*, stowarzyszona z rozwiązaniem zagadnienia* (5.4)*, posiada dokładnie jedną miarę niezmienniczą μ.*

Uwaga. Funkcja b nie spełnia niestety tego warunku na całym Γ i z tej przyczyny poniższy dowód nie jest pełny i nie gwarantuje istnienia niezmienniczej miary dla analizowanego układu na całej przestrzeni fazowej Γ.

Pozostała część niniejszego rozdziału składa się na dowód twierdzenia 6.3. Wzorowany jest on na rozumowaniach przedstawionych w podrozdziale 3.4 w [18].
Na mocy lipschitzowskości b zachodzi oczywiście nierówność $|\kappa| \leqslant L$ oraz oszacowanie

$$\langle b(x) - b(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \leqslant \kappa |x - \overline{x}|^2 \text{ dla } x, \overline{x} \in \mathcal{D}. \tag{6.5}$$

[5] Dzięki lematowi 2.33 wiemy, że założenia (1.3) o potencjale gwarantują lipschitzowskość b.

Zauważmy, że warunek $\langle b(x) - b(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle \leqslant 0$ możemy zapisać w postaci

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{p_1}{m} \\ -\sum_{j\neq 1} \nabla\Phi(q_1 - q_j) \\ \vdots \\ \frac{p_N}{m} \\ -\sum_{j\neq N} \nabla\Phi(q_N - q_j) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\overline{p}_1}{m} \\ -\sum_{j\neq 1} \nabla\Phi(\overline{q}_1 - \overline{q}_j) \\ \vdots \\ \frac{\overline{p}_N}{m} \\ -\sum_{j\neq N} \nabla\Phi(\overline{q}_N - \overline{q}_j) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ \vdots \\ q_N \\ p_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{q}_1 \\ \overline{p}_1 \\ \vdots \\ \overline{q}_N \\ \overline{p}_N \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant 0$$

i dalej równoważnie

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{p_1 - \overline{p}_1}{m} \\ -\sum_{j\neq 1} \nabla\Phi(q_1 - q_j) + \sum_{j\neq 1} \nabla\Phi(\overline{q}_1 - \overline{q}_j) \\ \vdots \\ \frac{p_N - \overline{p}_N}{m} \\ -\sum_{j\neq N} \nabla\Phi(q_N - q_j) + \sum_{j\neq N} \nabla\Phi(\overline{q}_N - \overline{q}_j) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 - \overline{q}_1 \\ p_1 - \overline{p}_1 \\ \vdots \\ q_N - \overline{q}_N \\ p_N - \overline{p}_N \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant 0.$$

Po skalarnym pomnożeniu powyższych wektorów dostajemy związek

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\langle p_i - \overline{p}_i, q_i - \overline{q}_i\rangle - \sum_{i=1}^{N}\left\langle \sum_{j\neq i} \nabla\Phi(q_i - q_j) - \sum_{j\neq i} \nabla\Phi(\overline{q}_i - \overline{q}_j), p_i - \overline{p}_i \right\rangle \leqslant 0,$$

który można zapisać w uproszczonej postaci:

$$\sum_{i=1}^{N}\left\langle \frac{q_i - \overline{q}_i}{m} - \sum_{j\neq i}\Big(\nabla\Phi(q_i - q_j) - \nabla\Phi(\overline{q}_i - \overline{q}_j)\Big), p_i - \overline{p}_i \right\rangle \leqslant 0.^6$$

Dla dowodu twierdzenia 6.3 (istnienia miary niezmienniczej) wygodnie będzie rozważyć nasze zagadnienie z ujemną chwilą początkową $-s$, tzn.

$$\begin{cases} dX(t) = b(X(t))\,dt + \Theta\, d\overline{W}(t), \ t \geqslant -s \\ X(-s) = x \end{cases} \tag{6.6}$$

gdzie

$$\overline{W}(t) = \begin{cases} W(t) & \text{dla } t \geqslant 0 \\ W_1(-t) & \text{dla } t \leqslant 0, \end{cases} \tag{6.7}$$

gdzie $W_1(t)$ jest $6N$-wymiarowym procesem Wienera, niezależnym od $W(t)$, a $\overline{\mathcal{F}}_t$ jest σ-ciałem generowanym przez $\overline{W}(s)$ dla $s \leqslant t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.
Oznaczmy przez $X(t, -s, x)$ jednoznaczne rozwiązanie całkowe zagadnienia (6.6), tzn. rozwiązanie równania

$$X(t, -s, x) = x + \int_{-s}^{t} b(X(u, -s, x))\,du + \int_{-s}^{t} \Theta\, d\overline{W}(u). \tag{6.8}$$

[6] I widzimy, że warunek ten nie na szans być spełniony na całym Γ.

Rozkład $X(0,-t,x)$ jest taki sam, jak rozkład $X(t,x)$.
Pokażemy, że rozkład $\mathcal{L}(X(t,x))$ zbiega przy $t\to\infty$ do jedynej miary niezmienniczej dla P_t.
Mówiąc precyzyjniej, pokażemy że istnieje granica $\lim_{s\to\infty} X(0,-s,x) := \eta$ w $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{D})$. Rozkład η będzie szukaną miarą niezmienniczą dla P_t.

Stwierdzenie 6.4. *Załóżmy, że b (oprócz lipschitzowskości ze stałą L) spełnia warunek* (6.4)*. Istnieje wówczas zmienna losowa $\eta\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{D})$ t. że*

$$\forall_{x\in\mathcal{D}} \lim_{s\to\infty} X(0,-s,x) = \eta \text{ w } L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};\mathcal{D}). \tag{6.9}$$

Dowód. Ustalmy warunek początkowy $x\in\mathcal{D}$ i wprowadźmy dla dowolnych $t\geqslant s$ oznaczenie $X_s(t)=X(t,-s,x)$. Mamy wówczas

$$X_s(t) = x + \int_{-s}^{t} b(X_s(u))\,du + \int_{-s}^{t} \Theta\, d\overline{W}(u).$$

Wprowadźmy jeszcze proces

$$Y_s(t) = X_s(t) - \int_{-s}^{t} \Theta\, d\overline{W}(u). \tag{6.10}$$

Zatem spełnia on równanie

$$Y_s(t) = x + \int_{-s}^{t} b\Big(Y_s(u) + \int_{-s}^{u} \Theta\, d\overline{W}(r)\Big)\,du, \tag{6.11}$$

więc $Y_s(t)$ jest rozwiązaniem całkowym zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y_s(t) = b\left(Y_s(t) + \int_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\right), \ t\geqslant -s \\ Y(-s) = x \end{cases} \tag{6.12}$$

Krok 1.
Pokażemy najpierw, że istnieje stała $C_1>0$ taka, że

$$\mathbb{E}\left(|X(t,-s,x)|^2\right) \leqslant C_1\left(1+t+s+e^{\kappa(t+s)}|x|^2\right), \ t\geqslant -s \tag{6.13}$$

Mnożąc skalarnie pierwsze równanie układu (6.12) przez $Y_s(t)$ oraz dodając i odejmując ten sam człon mamy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Y_s(t)|^2 = \Big\langle b\Big(Y_s(t) + \int_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big) - b\Big(\int_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big), Y_s(t)\Big\rangle + \\ \Big\langle b\Big(\int_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big), Y_s(t)\Big\rangle.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Ponieważ na mocy założenia (6.5) zachodzi nierówność

$$\left\langle b\Big(y+\int\limits_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big)-b\Big(\int\limits_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big),y\right\rangle \leqslant \kappa|y|^2,\ \ y\in\mathcal{D}, \tag{6.15}$$

to równanie (6.14) możemy zmienić na nierówność

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Y_s(t)|^2 \leqslant \kappa|Y_s(t)|^2+\left\langle b\Big(\int\limits_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big),Y_s(t)\right\rangle. \tag{6.16}$$

Korzystając teraz z nierówności Cauchy'ego (wersji z $\varepsilon = \frac{-\kappa}{2}$, patrz: [26], str. 593) dostajemy szacowanie

$$\left\langle b\Big(\int\limits_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big),Y_s(t)\right\rangle \leqslant \frac{-\kappa}{2}|Y_s(t)|^2+\frac{1}{-2\kappa}\left|b\Big(\int\limits_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big)\right|^2, \tag{6.17}$$

skąd możemy przepisać nierówność (6.16) w postaci

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Y_s(t)|^2 \leqslant \frac{\kappa}{2}|Y_s(t)|^2+\frac{1}{-2\kappa}\left|b\Big(\int\limits_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big)\right|^2, \tag{6.18}$$

a po pomnożeniu przez 2

$$\frac{d}{dt}|Y_s(t)|^2 \leqslant \kappa|Y_s(t)|^2+\frac{1}{-\kappa}\left|b\Big(\int\limits_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big)\right|^2. \tag{6.19}$$

Skorzystamy teraz z następującego szacowania[7]:

$$|b(x)-b(0)|\leqslant L|x| \Rightarrow |b(x)|\leqslant L|x| \Rightarrow |b(x)|^2\leqslant L^2|x|^2, \tag{6.20}$$

zatem nierówność (6.19) przybierze postać

$$\frac{d}{dt}|Y_s(t)|^2 \leqslant \kappa|Y_s(t)|^2+\frac{1}{-\kappa}L^2\left|\int\limits_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\right|^2.$$

Przykładając teraz do obu stron wartość oczekiwaną dostajemy:

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}|Y_s(t)|^2 \leqslant \kappa\mathbb{E}|Y_s(t)|^2+\frac{1}{-\kappa}L^2\int\limits_{-s}^{t}\mathrm{tr}(\Theta\Theta^*)\,du. \tag{6.21}$$

Stosując teraz nierówność Gronwalla w wersji różniczkowej (lemat 2.14) otrzymujemy oszacowanie

$$\mathbb{E}|Y_s(t)|^2 \leqslant e^{\int_{-s}^{t}\kappa\,dr}\left(\mathbb{E}|Y_s(-s)|^2+\int\limits_{-s}^{t}\frac{1}{-\kappa}L^2\int\limits_{-s}^{u}\mathrm{tr}(\Theta\Theta^*)\,dr\,du\right), \tag{6.22}$$

[7] prawdziwego na mocy lipschitzowskości b oraz faktu, że $b(0)=0$.

a po przekształceniu

$$\mathbb{E}|Y_s(t)|^2 \leqslant e^{\kappa(t+s)}|x|^2 + \frac{1}{-\kappa}e^{\kappa(t+s)}L^2\frac{(t+s)^2}{2}\mathrm{tr}(\Theta\Theta^*). \tag{6.23}$$

Teraz możemy szacować dalej $X_s(t)$, czyli $X(t, -s, x)$:

$$\mathbb{E}|X(t,-s,x)|^2 = \mathbb{E}\Big|Y_s(t) + \int_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big|^2 \leqslant 2\mathbb{E}|Y_s(t)|^2 + 2\mathbb{E}\Big|\int_{-s}^{t}\Theta\, d\overline{W}(u)\Big|^2$$
$$\leqslant 2e^{\kappa(t+s)}|x|^2 + \frac{2}{-\kappa}e^{\kappa(t+s)}L^2\frac{(t+s)^2}{2}\mathrm{tr}(\Theta\Theta^*) + 2(t+s)\mathrm{tr}(\Theta\Theta^*).$$

Ponieważ dla $\kappa < 0$ wyrażenie $e^{\kappa(t+s)}(t+s)^2$ jest ograniczone (i dąży przy $t \to +\infty$ do zera), to mamy ostatecznie oszacowanie

$$\mathbb{E}|X(t,-s,x)|^2 \leqslant 2e^{\kappa(t+s)}|x|^2 + C + 2(t+s)\mathrm{tr}(\Theta\Theta^*),$$

zatem oszacowanie (6.13) jest prawdziwe.

Krok 2.
Teraz pokażemy istnienie $\eta_x \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{D})$ takiej, że $\lim_{s\to\infty} X(0,-s,x) = \eta_x$ w $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{D})$ (to jeszcze trochę mniej, niż chcemy ostatecznie udowodnić). Niech $s > s_1$ i połóżmy $Z(t) = X_s(t) - X_{s_1}(t)$. Wówczas $Z(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Z(t) = b(X_s(t)) - b(X_{s_1}(t)),\ t \geqslant s_1 \\ Z(-s_1) = X_s(-s_1) - x \end{cases} \tag{6.24}$$

Mnożąc skalarnie obie strony pierwszego równania powyższego zagadnienia przez $Z(t) = X_s(t) - X_{s_1}(t)$ dostajemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Z(t)|^2 = \Big\langle b(X_s(t)) - b(X_{s_1}(t)), X_s(t) - X_{s_1}(t)\Big\rangle \tag{6.25}$$

i na mocy (6.5) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Z(t)|^2 \leqslant \kappa|Z(t)|^2,\ t \geqslant 0, \tag{6.26}$$

wynika stąd więc dzięki lematowi 2.14, iż

$$|X_s(t) - X_{s_1}(t)|^2 = |Z(t)|^2 \leqslant e^{2\kappa(t+s_1)}|X_s(-s_1) - x|^2 \leqslant e^{2\kappa(t+s)}|X_s(-s_1) - x|^2. \tag{6.27}$$

Kładąc $t = 0$ dostajemy

$$|X_s(0) - X_{s_1}(0)|^2 \leqslant e^{2\kappa s}|X_s(-s_1) - x|^2, \tag{6.28}$$

czyli możemy dalej szacować (korzystając z nierówności (6.13)):

$$\mathbb{E}|X_s(0) - X_{s_1}(0)|^2 \leqslant 2e^{2\kappa s}\mathbb{E}\Big(|X_s(-s_1)|^2 + |x|^2\Big)$$

$$\leqslant 2e^{2\kappa s}\Big(C_1\left(1 - s_1 + s + e^{\kappa(s-s_1)}|x|^2\right) + |x|^2\Big).$$

Z powyższej nierówności widać zatem, że jeżeli będziemy zbiegać z s oraz s_1 do $+\infty$ (pamiętając o założeniu $s > s_1$), to wyrażenie $\mathbb{E}|X_s(0) - X_{s_1}(0)|^2$ będzie zbiegać do zera, gdyż szacuje się z góry przez funkcję $C_2 e^{2\kappa s}$, która jest funkcją wykładniczą z ujemnym wykładnikiem 2κ, mnożoną przez czynnik co najwyżej liniowo dążący do $+\infty$.
Zatem $\{X_s(0)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{D})$, więc stąd wynika istnienie postulowanej granicy η_x, równej $\lim_{s\to\infty} X(0, -s, x)$.

Krok 3.
Pozostało już tylko pokazać, że η_x nie zależy od wyboru punktu początkowego x w przestrzeni fazowej.
Niech $x, y \in \mathcal{D}$ i połóżmy $\rho_s(t) = X(t, -s, x) - X(t, -s, y)$.
Mamy wówczas

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\rho_s(t) = b(X(t, -s, x)) - b(X(t, -s, y)) \\ \rho_s(-s) = x - y \end{cases} \tag{6.29}$$

Mnożąc pierwsze równanie skalarnie przez $\rho_s(t)$ i argumentując identycznie, jak w przypadku analizy zagadnienia (6.24), otrzymujemy, że

$$\mathbb{E}|\rho_s(t)| \leqslant e^{2\kappa(t+s)}|x - y|^2, \ t \geqslant -s. \tag{6.30}$$

Zatem biorąc $s \to +\infty$ otrzymujemy, że $\eta_x = \eta_y = \eta$ tak, jak chcieliśmy.

□

Teraz pokażemy, iż zdefiniowana powyżej zmienna losowa η, będąca granicą w $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{D})$ ciągu $X(0, -s, x)$ posiada rozkład, będący właśnie poszukiwaną miarą niezmienniczą dla półgrupy P_t.

Stwierdzenie 6.5. *Załóżmy, że b spełnia te same założenia, co w stwierdzeniu 6.4 i niech μ będzie rozkładem zmiennej losowej η, zdefiniowanej wzorem* (6.9). *Wówczas prawdziwe są następujące warunki:*

i) $\lim_{t\to\infty} P_t\varphi(x) = \int_{\mathcal{D}} \varphi(y)\mu(dy)$,[8] $x \in \mathcal{D}, \varphi \in C_b(\mathcal{D})$,

ii) μ jest jedyną miarą niezmienniczą dla P_t,

iii) Dla dowolnej borelowskiej miary probabilistycznej λ na $\mathcal{D}$ zachodzi $\lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{D}} P_t\varphi(x)\lambda(dx) = \int_{\mathcal{D}} \varphi(x)\mu(dx)$.

Dowód.
$i)$ Jeśli $\varphi \in C_b(\mathcal{D})$, to mamy

$$P_t\varphi(x) = \mathbb{E}[\varphi(X(t, x))] = \mathbb{E}[\varphi(X(0, -t, x))].$$

Przechodząc z t do $+\infty$ dostajemy

$$\lim_{t\to+\infty} P_t\varphi(x) = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[\varphi(X(0, -t, x)) = \mathbb{E}[\varphi(\eta)] = \int_{\mathcal{D}} \varphi(y)\mu(dy), \tag{6.31}$$

[8] Uwaga: z powyższego zapisu nie wynika oczywiście, że μ musi posiadać gęstość względem miary Lebesgue'a!

ponieważ rozkładem η jest μ. Wejście z granicą pod znak wartości oczekiwanej oraz wewnątrz funkcji φ jest dozwolone, gdyż φ jest funkcją ciągłą oraz ograniczoną na $\mathcal{D}$, zatem dla dowolnego $t > 0 \quad \varphi(X(0,t,-x))$ szacuje się przez funkcję całkowalną względem miary probabilistycznej.
$ii)$ Dla dowolnych $t, s > 0$ oraz dowolnej $\varphi \in C_b(\mathcal{D})$ mamy

$$\int_{\mathcal{D}} P_{t+s}\varphi(x)\mu(dx) = \int_{\mathcal{D}} P_t P_s \varphi(x)\mu(dx). \tag{6.32}$$

Przechodząc z t do $+\infty$ dostajemy, dzięki $i)$

$$\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} \varphi(y)\mu(dy)\mu(dx) = \int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} P_s\varphi(y)\mu(dy)\mu(dx), \tag{6.33}$$

czyli równoważnie

$$\int_{\mathcal{D}} \varphi(y)\mu(dy) = \int_{\mathcal{D}} P_s\varphi(y)\mu(dy), \tag{6.34}$$

a zatem μ jest miarą niezmienniczą dla P_t.
Teraz pozostaje jeszcze wykazać jedyność μ. Niech λ będzie inną miarą niezmienniczą dla P_t, tzn.

$$\int_{\mathcal{D}} P_t\varphi(x)\lambda(dx) = \int_{\mathcal{D}} \varphi(x)\lambda(dx),\ \varphi \in C_b(\mathcal{D}). \tag{6.35}$$

Wówczas, przechodząc z t do $+\infty$ mamy dzięki $i)$:

$$\int_{\mathcal{D}} \varphi(x)\mu(dx) = \int_{\mathcal{D}} \varphi(x)\lambda(dx),\ \varphi \in C_b(\mathcal{D}), \tag{6.36}$$

skąd wynika już, że $\lambda = \mu$.
Prawdziwość warunku $iii)$ natychmiast wynika z podpunktu $i)$.
Kończy to dowód stwierdzenia 6.5 a tym samym twierdzenia 6.3.

$\square$

Bibliografia

[1] L. Arkeryd, *On the Boltzmann Equation*, Arch. Rational Mech. Anal., Springer **45**, 1–16 (1972).

[2] L. Arkeryd, *On the Boltzmann Equation Part II: The Full Initial Value Problem*, Arch. Rational Mech. Anal., Springer **45**, 17–34 (1972).

[3] D. Bernoulli, *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Strasbourg, Johann Reinhold Dulsseke (1738).

[4] N. N. Bogolubow, *The Problem of Dynamical Theory in Statistical Physics (in Russian)*, Gostekhizdat, Moscow-Leningrad (1946).

[5] L. Boltzmann, *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*, Wien. Ber. **66**, 275–370 (1872).

[6] L. Boltzmann, *Entgegnung auf die Wärmetheoretischen Betrachtungen des Hrn. E. Zermelo*, Ann. d. Phys. **57**, 567–578 (1896).

[7] M. Born, H. S. Green, *A General Kinetic Theory of Liquids*, Proc. R. Soc. Lond., **A188**, 168–201 (1947).

[8] M. Born, H. S. Green, *A General Kinetic Theory of Fluids*, Cambridge University Press (1949).

[9] T. Carleman, *Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann*, Acta Math., Springer **60**, 91–146 (1933).

[10] C. Cercignani, *On the Boltzmann Equation for Rigid Spheres*, Transp. Theory Stat. Phys., **2**, 211–225 (1972).

[11] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Appl. Math. Sci., vol. **67**, Springer-Verlag (1988).

[12] C. Cercignani, *Theory and Application of the Boltzmann Equation*, Scottish Academic Press, Edinburgh and London (1975).

[13] C. Cercignani, V. I. Gerasimienko, D. Ya. Petrina, *Many Particle Dynamics and Kinetic Equations*, Math. and Its Appl., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).

[14] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Springer series in Appl. Math. **106**, Springer, New York (1994).

[15] S. Chapman, *On the Law of Distribution of Molecular Velocities, and on the Theory of Viscosity and Thermal Conduction, in a Non-Uniform Simple Monatomic Gas*, Phil. Trans. Roy. Soc., London **A216**, 279–348 (1916).

[16] R. Clausius, *Über die Art der Bewegung, die wir Wärme nennen*, Ann. d. Phys., **100**, 353–379 (1857).

[17] R. Clausius, *Über die mittlere Länge der Wege, welche bei der Molecularbewegung gasförmiger Körper von den einzelnen Molecülen zurückgelegt werden*, Ann. d. Phys., **105**, 239–258 (1858).

[18] G. Da Prato, *Kolmogorov Equations for Stochastic PDEs*, Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Birkhäuser, Basel (2004).

[19] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*, London Mathematical Society Lecture Notes, Cambridge Univ. Press (1996).

[20] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).

[21] R. J. DiPerna, P. L. Lions, *On the Cauchy Problem for Boltzmann Equations: Global Existence and Weak Stability*, Ann. Math., **130**, 321–366 (1989).

[22] J. R. Dorfman, *Wprowadzenie do teorii chaosu w nierównowagowej mechanice statystycznej*, PWN, Warszawa (2001).

[23] A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Ann. d. Phys., **322**, 549–560 (1905).

[24] A. Einstein, *Zur Theorie der Brownschen Bewegung*, Ann. d. Phys., **324**, 371–381 (1906).

[25] D. Enskog, *Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen*, Rozprawa doktorska, Uppsala University (1917).

[26] L. C. Evans, *Równania Różniczkowe Cząstkowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (2002).

[27] J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Yale University Press (1902).

[28] H. Grad, *On the Kinetic Theory of Rarified Gases*, Comm. Pure Appl. Math., **2**, 331–407 (1949).

[29] H. Grad, *Principles of the Kinetic Theory of Gases*, Hand. Phys., **12**, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1958).

[30] R. Z. Hasminskii, *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoff and Noordhoff, Groningen (1980).

[31] D. Hilbert, *Begründung der kinetischen Gastheorie*, Math. Ann., **72**, 562–577 (1912).

[32] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Math. **113**, Springer, New York (1988).

[33] J. G. Kirkwood, *The Statistical Mechanical Theory of Transport Process*, J. Chem. Phys., **14**, 180–201 (1946); **15**, 72–76 (1947).

[34] R. Kubo, *Stochastic Liouville Equations*, J. Math. Phys. **4**, 174–183 (1963).

[35] H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **24**, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[36] J. Loschmidt, Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Classe 73, 128-–142 (1876).

[37] J. C. Maxwell, *Illustrations of the Dynamical Theory of Gases*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, **19**, 19–32 (1860).

[38] D. Morgenstern, *General Existence and Uniqueness Proof for Spatially Homogeneous Solutions of the Maxwell-Botzmann Equation in the Case of Maxwellian Molecules*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **40**, 719–721 (1954).

[39] M. Nye, *Molecular Reality: A Perspective on the Scientific Work of Jean Perrin*,MacDonald, London (1972).

[40] A. Palczewski, *Równania Różniczkowe Zwyczajne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa (1999).

[41] A. Palczewski, *The BBGKY hierarchy for a stochastic particle system*, referat na "A-HYKE-3 Meeting. Third annual meeting of the HYKE network", Rzym 13-15.04.05

[42] J. Perrin, *L'Agitation Moléculaire et le Mouvement Brownien*, C. R. Acad. Sci., Paris, **146**, 967—970 (1908).

[43] J. Perrin, *La Loi de Stokes et le Mouvement Brownien*, C. R. Acad. Sci., Paris, **147** 475–529 (1908).

[44] S. Peszat, J. Zabczyk, *Stochastyczne Równania Ewolucyjne*, Wydawnictwa ICM, Warszawa (2004).

[45] J. von Plato, *Creating Modern Probability*, Cambridge University Press (1994).

[46] A. Ya. Povzner, *On the Boltzmann Equation in the Kinetic Theory of Gases*, Mat. Sbornik, **58**, 65-–86 (1962).

[47] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Berlin, New York (1994).

[48] M. Smoluchowski, *Zarys Teorii Kinetycznej Ruchów Browna i Roztworów Mętnych*, Bulletin International de l'Academie des Sciences et des Lettres de Cracovie, Kraków (1906).

[49] A. S. Sznitman, *Propagation of Chaos for a System of Annihilating Brownian Spheres, Comm. Pure Appl. Math.,* **40***, 663–690 (1987).*

[50] J. Yvon, *La Théorie Statistique des Fluids et l'Équation d'État*, Hermann, Paris (1935).

[51] E. Zermelo, *Über einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmtheorie*, Ann. d. Phys., **57**, 485–494 (1896).

Skorowidz