Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Małgorzata Elżbieta Hryniewicka

Zachowanie się tożsamości wielomianowych przy działaniach punktowych algebr Hopfa na algebry łączne

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy
dr hab. Piotr Grzeszczuk
Wydział Informatyki
Politechnika Białostocka

Październik, 2007

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

. . . .

data podpis autora rozprawy

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

. . . .

data podpis promotora rozprawy

Streszczenie

Motywację dla rozprawy stanowi pytanie czy, jeśli na algebrę A nad ciałem $\mathbf{k}$ działa skończenie wymiarowa algebra Hopfa H, to z faktu iż podalgebra niezmienników A^H spełnia tożsamość wielomianową (lub krócej, A^H jest PI-algebrą) wynika, że również algebra A spełnia pewną tożsamość wielomianową. W wielu konkretnych przypadkach odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Do klasyki należą już Twierdzenia Kharchenki o działaniu skończonych grup rzędu niepodzielnego przez $\operatorname{char}\mathbf{k}$ oraz o działaniu dowolnych skończonych grup na algebry zredukowane. Z kolei dla grup skończonych, których rząd dzieli się przez $\operatorname{char}\mathbf{k}$ wiadomo, że odpowiedź może być negatywna.

Celem rozprawy jest wyodrębnienie warunków gwarantujących zachowanie własności bycia PI-algebrą przy przejściu od podalgebry niezmienników A^H do algebry A na którą działa dana algebra Hopfa H. W naszych rozważaniach ograniczamy się do działania punktowych algebr Hopfa na algebry półpierwsze, gdy wymiar tego działania jest skończony.

Główny rezultat pierwszej części rozprawy dotyczy sytuacji, gdy H jest generowana przez skończoną grupę G elementów grupopodobnych oraz koideał $\mathfrak{A}$ rozpięty nad ciałem $\mathbf{k}$ na skośnie prymitywnych elementach i normalizowany przez algebrę grupową $\mathbf{k}G$. Dowodzimy, że jeśli $\mathfrak{A}$ działa nilpotentnie na A z półpierwszą podalgebrą niezmienników $A^{\mathfrak{A}}$, to A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $A^{\mathfrak{A}}$ jest PI-algebrą. Jeśli dodatkowo $\operatorname{char}\mathbf{k} \nmid |G|$ lub A jest algebrą zredukowaną, to A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A^H jest PI-algebrą. Pierwszą część rozprawy kończymy przykładami zastosowań powyższego rezultatu do działań konkretnych algebr Hopfa, takich jak modularne algebry grupowe oraz (po pewnej redukcji) uniwersalne algebry obwiednie nilpotentnych kolorowych algebr Liego.

W drugiej części rozprawy zakładamy, że każdy niezerowy H-niezmienniczy lewostronny ideał algebry A zawiera niezerowe niezmienniki. Dowodzimy, że własność bycia PI-algebrą jest zachowana przy przejściu od podalgebry niezmienników A^H do algebry A, jeśli podalgebra A^H jest prawie centralna w A lub A jest algebrą zredukowaną.

Słowa kluczowe półpierwsze PI-algebry, algebry Hopfa, działania algebr Hopfa na algebry łączne, niezmienniki działań algebr Hopfa, pierścienie ułamków Martindale'a

Klasyfikacja tematyczna pracy 16R20, 16W22, 16W25, 16W30, 16W50, 16W55

Abstract

This dissertation is motivated by the following general question: if H is a finite dimensional Hopf algebra over a field $\mathbf{k}$, and A is an H-module algebra such that the subalgebra of invariants A^H satisfies a polynomial identity (shortly PI), must A also satisfy a PI? The answer to this question is positive in many concrete situations. A classical result is Kharchenko's Theorem on finite group actions, when either the order of a group is relatively prime to char$\mathbf{k}$ or a group acts on a reduced algebra. However for actions of finite groups of the order divided by char$\mathbf{k}$, it is known that the answer can be negative.

The aim of this dissertation is to present conditions, which allow us to extend the property of being a PI-algebra from the subalgebra of invariants A^H to an algebra A acted on by a Hopf algebra H. We restrict considerations to the case when H is a pointed Hopf algebra, and acts finitely on a semiprime algebra A.

The main result of the first part of the work concerns the situation when H is generated by the finite group G of group-like elements of H and by a coideal $\mathfrak{A}$, which is spanned over $\mathbf{k}$ by skew primitive elements, and satisfies the normalizing condition $\mathfrak{A}\mathbf{k}G = \mathbf{k}G\mathfrak{A}$. We prove that if $\mathfrak{A}$ acts on A nilpotently with the semiprime subalgebra of invariants $A^{\mathfrak{A}}$, then A satisfies a PI if and only if $A^{\mathfrak{A}}$ satisfies a PI. Furthermore, if either the order of G is invertible or A is reduced, then A satisfies a PI if and only if A^H satisfies a PI. We conclude the first part of the work with applications of the above result to actions of concrete Hopf algebras e.g. modular group algebras and (after certain reduction) universal enveloping algebras of nilpotent Lie color algebras.

In the second part of the work, we assume that every nonzero H-stable left ideal of A contains nontrivial invariants. We prove that PI property extends from the subalgebra of invariants A^H to the algebra A, if either A^H is almost central in A or A is reduced.

Keywords semiprime PI-algebras, Hopf algebras, actions of Hopf algebras on associative algebras, invariants of Hopf algebra actions, Martindale rings of quotients

2000 Mathematics Subject Classification 16R20, 16W22, 16W25, 16W30, 16W50, 16W55

Spis treści

Wstęp

Rozprawa ta dotyczy głównie teorii niezmienników działań algebr Hopfa na algebry łączne. Rozważamy w niej szereg zagadnień związanych z następującym ogólnym pytaniem:

Czy, jeśli na algebrę A działa skończenie wymiarowa algebra Hopfa H, to z faktu iż podalgebra niezmienników A^H spełnia tożsamość wielomianową wynika, że również algebra A spełnia pewną tożsamość wielomianową ?

Pytanie to jest naturalnym uogólnieniem postawionego w roku 1971 przez J.E. Björka pytania, czy algebra na którą działa skończona grupa automorfizmów musi spełniać tożsamość wielomianową, jeśli podalgebra punktów stałych spełnia taką tożsamość. W roku 1973 ukazała się praca G.M. Bergmana i M. Isaacsa [BI73] w której autorzy podali przykład algebry A, na którą działa skończona grupa G automorfizmów bez nietrywialnych punktów stałych, a która nie spełnia żadnej tożsamości wielomianowej. W przykładzie tym charakterystyka ciała $\mathbf{k}$ dzieli rząd grupy G, ponadto A jest algebrą nienilpotentną, ale posiada niezerowe nilpotentne ideały. Warunki dostateczne pozytywnego rozwiązania problemu Björka badali m.in. V.E. Barbaumov [Ba73], S. Montgomery [Mo74], V.K. Kharchenko [Kh74], [Kh75].

Twierdzenie ([Kh74]) *Niech G będzie skończoną grupą automorfizmów algebry A. Załóżmy, że $\operatorname{char}\mathbf{k} \nmid |G|$. Jeśli podalgebra punktów stałych A^G spełnia tożsamość wielomianową, to również algebra A spełnia pewną tożsamość wielomianową.*

Jeśli dodatkowo A jest półpierwsza i A^G spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $d \cdot |G|$.

Barbaumov oraz Montgomery niezależnie od siebie udowodnili powyższe twierdzenie przy dodatkowym założeniu o rozwiązalności grupy G. W ten sposób został rozstrzygnięty przypadek $\operatorname{char}\mathbf{k} \nmid |G|$. Z kolei, jeśli $\operatorname{char}\mathbf{k} \mid |G|$, to przykład działania grupy G_p rzędu p^2 na algebrę macierzy $A = M_2(\mathbf{k}\langle x, y\rangle)$ nad wolną nieprzemienną algebrą $\mathbf{k}\langle x, y\rangle$ charakterystyki p z przemienną podalgebrą punktów stałych:

$$A^{G_p} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \omega(x,y) \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{k},\ \omega(x,y) \in \mathbf{k}\langle x, y\rangle \right\}$$

podany przez G.M. Bergmana [B76] (por. [Mo80, Przykład 1.1]) pokazuje, że problem Björka ma negatywne rozwiązanie nawet dla algebr pierwszych. Zauważmy, że w powyższym przykładzie podalgebra A^{G_p} posiada niezerowe elementy nilpotentne.

Wystarczy jednak zażądać by algebra A była zredukowana, a własność bycia PI-algebrą zostanie zachowana przy przejściu od podalgebry punktów stałych A^G do algebry A bez żadnych dodatkowych założeń o rzędzie grupy G.

Twierdzenie ([Kh75]) *Niech G będzie skończoną grupą automorfizmów zredukowanej algebry A. Jeśli podalgebra A^G spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $d \cdot |G|$.*

Okazuje się jednak, że również w przypadku działania skończonej p-grupy na algebrę półpierwszą charakterystyki p można otrzymać pozytywne rozwiązanie problemu Björka, jeśli zostanie przyjęte dodatkowe założenie o półpierwszości podalgebry punktów stałych (por. Wniosek 3.5.1).

W roku 1986 pojawiła się praca J. Bergena i M. Cohen [BeC86] poświęcona m.in. zachowaniu się tożsamości wielomianowych w algebrach zgradowanych przez skończoną grupę G. Jest to przypadek działania półprostej przemiennej algebry Hopfa $\mathbf{k}G^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}G, \mathbf{k})$.

Twierdzenie ([BeC86]) *Niech $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ będzie algebrą zgradowaną przez skończoną grupę G. Jeśli jednostkowa składowa gradacji A_1 spełnia tożsamość wielomianową, to również algebra A spełnia pewną tożsamość wielomianową.*

Jeśli dodatkowo A jest gradacyjnie półpierwsza i A_1 spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $d \cdot |G|$.

Autorzy udowodnili ponadto, że (po ewentualnym rozszerzeniu ciała skalarów) działanie dowolnej skończenie wymiarowej półprostej przemiennej algebry Hopfa jest w istocie gradacją przez pewną skończoną grupę. Odnotujmy, że ani Kharchenko ani Bergen i Cohen nie podają w swoich pracach ograniczenia na minimalny stopień tożsamości wielomianowej spełnianej przez algebrę A z wyjątkiem przypadku gdy A jest półpierwsza (odpowiednio gradacyjnie półpierwsza). Ograniczenie takie pojawiło się dopiero u Y.A. Bahturina, A. Giambruno i D.M. Riley'a [BGR98]. W roku 1992 W. Chin [Ch92] udowodnił z kolei, że jeśli na algebrę A działa skończenie wymiarowa półprosta koprzemienna algebra Hopfa H z podalgebrą niezmienników A^H spełniającą tożsamość wielomianową, to również algebra A spełnia pewną tożsamość wielomianową. Wiadomo, że dla skończenie wymiarowej algebry Hopfa H półprostota jest równoważna istnieniu lewostronnej całki t dla której $\varepsilon(t) \neq 0$. Wtedy dla dowolnej H-modułowej algebry A z jedynką zachodzi $t \cdot \varepsilon(t)^{-1} 1_A = 1_A$. Wynik China uogólnili K.I. Beidar i B. Torrecillas [BT01].

Twierdzenie ([BT01]) *Niech H będzie skończenie wymiarową algebrą Hopfa z lewostronną całką t i A - H-modułową algebrą z jedynką, zawierającą element a taki, że $t \cdot a = 1_A$. Załóżmy, że koradykał algebry H jest koprzemienny. Jeśli podalgebra niezmienników A^H spełnia tożsamość wielomianową, to również algebra A spełnia pewną tożsamość wielomianową.*

Przypomnijmy, że koprzemienny koradykał posiadają m.in. punktowe alegebry Hopfa. Interesujący rezultat o charakterze ogólnym dotyczący działania skończenie wymiarowych półprostych algebr Hopfa uzyskali Y.A. Bahturin i V. Linchenko [BL98].

Twierdzenie ([BL98]) *Niech H będzie skończenie wymiarową algebrą Hopfa. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *Dla dowolnej H-modułowej algebry A, jeśli podalgebra niezmienników A^H spełnia tożsamość wielomianową, to również algebra A spełnia tożsamość wielomianową.*
2. *Dla dowolnej H-modułowej algebry A, jeśli podalgebra niezmienników A^H jest nilpotentna, to również algebra A jest nilpotentna.*

Ponadto, każdy z tych warunków pociąga za sobą półprostotę algebry H.

Kolejnym przykładem algebry Hopfa jest uniwersalna algebra obwiednia dowolnej algebry Liego. W latach 70-tych Kharchenko wprowadził pojęcie ∂-algebry Liego na określenie algebry Liego A-ciągłych różniczkowań półpierwszej algebry A, będącej jednocześnie prawostronnym modułem nad rozszerzonym centroidem C algebry A (por. [KKR96]).

Twierdzenie *Niech A będzie pierwszą H-modułową algebrą, gdzie H jest jedną z następujących algebr Hopfa:*

1. ([Mo78]) *algebrą grupową* $\mathbf{k}G$ *skończonej grupy G X-zewnętrznych automorfizmów algebry A.*
2. ([Kh81], [BeM86]) *ograniczoną uniwersalną algebrą obwiednią $u(L)$ ograniczonej ∂-algebry Liego X-zewnętrznych A-ciągłych różniczkowań algebry A dodatniej charakterystyki, skończenie generowanej jako prawostronny C-moduł.*
3. ([KKR96]) *ograniczoną uniwersalną algebrą obwiednią $u(L)$ ograniczonej ∂-algebry Liego A-ciągłych różniczkowań algebry A dodatniej charakterystyki, skończenie generowanej jako prawostronny C-moduł. Przyjmijmy, że algebra łączna, generowana przez elementy indukujące (należące do algebry L) X-wewnętrzne różniczkowania, jest quasi-Frobeniusa. Załóżmy wreszcie, że podalgebra niezmienników A^H jest półpierwsza.*

Jeśli podalgebra A^H spełnia tożsamość wielomianową, to również algebra A spełnia pewną tożsamość wielomianową.

W istocie, dla X-zewnętrznego działania algebry H (podpunkty 1 i 2) pokazano nawet, że algebry: A^H oraz A spełniają te same tożsamości wielomianowe. W roku 1995 A. Milinski [Mi95] rozszerzył definicję X-zewnętrznego działania grup oraz ∂-algebr Liego na punktowe algebry Hopfa. Zgodnie z nią działanie punktowej algebry Hopfa H na algebrę pierwszą A jest X-zewnętrzne, jeśli centralizator $C_{Q\#H}(A)$ pokrywa się z rozszerzonym centroidem C, gdzie Q oznacza pierścień ułamków symetrycznych algebry A.

Twierdzenie ([Mi95]) *Niech H będzie skończenie wymiarową punktową algebrą Hopfa i A - pierwszą H-modułową algebrą. Załóżmy, że działanie H na A jest X-zewnętrzne. Wówczas algebry: A^H oraz A spełniają te same tożsamości wielomianowe.*

Przykład X-zewnętrznego działania grup, ograniczonych ∂-algebr Liego i ogólniej - punktowych algebr Hopfa jest ilustracją ogólniejszego twierdzenia.

Twierdzenie ([BeM86]) *Niech H będzie skończenie wymiarową algebrą Hopfa i A - H-modułową algebrą. Załóżmy, że $A\#H$ jest algebrą pierwszą, w której każdy niezerowy ideał ma niezerowe przecięcie z A. Jeśli podalgebra A^H spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $d \cdot \dim_{\mathbf{k}} H$.*

W rozprawie kontynuujemy badanie zachowania się tożsamości wielomianowych przy działaniu punktowych algebr Hopfa. Wymaga to dodatkowych założeń o algebrze A. Nasze rozważania zawężamy do - naturalnej dla tego problemu - klasy algebr półpierwszych. Zauważmy, że znaczna część z omówionych powyżej wyników odnosi się do działania półprostych algebr Hopfa. Główny rezultat Rozdziału 3 dotyczy sytuacji przeciwnej - w której algebra H zawiera ,,duży" podzbiór działający nilpotentnie na algebrę A. Niech H będzie punktową algebrą Hopfa generowaną jako algebra przez skończoną grupę G elementów grupopodobnych oraz koideał $\mathfrak{A}$ rozpięty nad ciałem $\mathbf{k}$ na skośnie prymitywnych elementach i normalizowany przez algebrę grupową $\mathbf{k}G$. Dla dowolnej półpierwszej H-modułowej algebry A dowodzimy, że jeśli $\mathfrak{A}$ działa nilpotentnie na A z półpierwszą podalgebrą niezmienników $A^{\mathfrak{A}}$ oraz wymiar tego działania jest skończony, to A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $A^{\mathfrak{A}}$ jest PI-algebrą (por. Twierdzenie 3.1.2). Jeśli dodatkowo $\operatorname{char}\mathbf{k} \nmid |G|$ lub A jest algebrą zredukowaną, to A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A^H jest PI-algebrą (por. Wniosek 3.1.3). Podkreślmy, że powyższe warunki w sposób naturalny spełniają takie algebry Hopfa jak modularne algebry grupowe oraz (po pewnej redukcji) uniwersalne algebry obwiednie nilpotentnych algebr Liego i ich uogólnień (superalgebr Liego i kolorowych algebr Liego), por. Podrozdział 3.5.

W Rozdziale 4 badamy zachowanie się tożsamości wielomianowych dla działań punktowych algebr Hopfa na algebry półpierwsze ze zredukowaną podalgebrą niezmienników. Odnotujmy, że pewne wyniki dotyczące zachowania się tożsamości wielomianowych w kontekście działania p-nilpotentnych grup, nilpotentnych algebr Liego oraz nilpotentnych superalgebr Liego na algebry pierwsze z centralną podalgebrą niezmienników uzyskali już J. Bergen, M. Cohen i D. Fischman [BCF90] oraz J. Bergen i P. Grzeszczuk [BeG96]. We wszystkich trzech przypadkach dowodzi się, że każdy niezerowy H-niezmienniczy lewostronny ideał algebry A zawiera niezerowe niezmienniki. Z drugiej strony przykład Bergmana pokazuje, że założenie o istnieniu niezerowych niezmienników w każdym niezerowym H-niezmienniczym lewostronnym ideale algebry A nie gwarantuje jeszcze zachowania własności bycia PI-algebrą przy przejściu od podalgebry A^H do algebry A. W tej części rozprawy dowodzimy w szczególności, że jeśli na półpierwszą algebrę A działa skończenie wymiarowa punktowa algebra Hopfa H w taki sposób, że każdy niezerowy H-niezmienniczy lewostronny ideał algebry A zawiera niezerowe niezmienniki oraz podalgebra niezmienników A^H spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to algebra A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $d \cdot \dim_{\mathbf{k}} H$, jeśli zachodzi jeden z następujących warunków:

1. A^H jest prawie centralna w A (por. Twierdzenie 4.1.1).

2. A jest zredukowana (por. Twierdzenie 4.1.2).

Twierdzenie 4.1.2 jest uogólnieniem Twierdzenia Kharchenki o działaniu skończonych grup na algebry zredukowane.

W pracy prezentujemy jeszcze jeden nowy wynik, który stanowi częściową odpowiedź na pytanie Bergena, Cohen i Fischman [BCF90] czy, jeśli na algebrę A z jedynką działa skończenie wymiarowa algebra Hopfa H w taki sposób, że A nie posiada właściwych H-niezmienniczych lewostronnych ideałów, to wymiar algebry A traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad pierścieniem z dzieleniem A^H jest skończony. Dowodzimy, że jest to prawdą dla punktowych algebr Hopfa (por. Wniosek 1.3.6).

Podstawowe narzędzia badawcze rozprawy stanowią ułamki symetryczne pierścieni półpierwszych i ich centralne lokalizacje, por. Rozdział 2. Pozwalają one na redukcję rozważanych w pracy problemów do działań algebr Hopfa na algebry skończenie wymiarowe.

Część z przedstawionych wyników została zawarta w publikacjach [GH04] oraz [GH07].

Korzystając ze sposobności, pragnę w szczególny sposób podziękować promotorowi rozprawy Panu Profesorowi Piotrowi Grzeszczukowi za opiekę naukową oraz wyrozumiałość i życzliwość okazywaną mi w trakcie przygotowywania niniejszej rozprawy.

Rozdział 1

Algebry Hopfa

Wszystkie rozważane w pracy pierścienie - o ile nie będzie powiedziane inaczej - są łączne.

Dla dowolnego pierścienia R przez R-moduł będziemy rozumieć zawsze lewostronny R-moduł. Jeśli R jest pierścieniem z jedynką, to dodatkowo przyjmujemy, że R-moduł jest unitarny. Homomorfizm R-modułów będziemy nazywać zamiennie R-homomorfizmem. Dla R-modułów M i N grupę wszystkich R-homomorfizmów z M w N będziemy oznaczać przez $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. Dla pierścienia endomorfizmów R-modułu M przyjmujemy oznaczenie $\mathrm{End}_R(M)$.

Ustalmy teraz dowolne niepuste podzbiory $X, Y \subseteq R$. Przez $C_X(Y)$ będziemy oznaczać centralizator Y w X. Przypomnijmy, że zgodnie z definicją jest to zbiór:

$$\{x \in X \mid xy = yx \text{ dla wszystkich } y \in Y\}.$$

Lewostronny anihilator Y w X, tj. zbiór:

$$\{x \in X \mid xy = 0 \text{ dla wszystkich } y \in Y\},$$

będziemy oznaczać przez $\mathrm{l.ann}_X(Y)$. Przez analogię, dla prawostronnego anihilatora Y w X przyjmujemy oznaczenie $\mathrm{r.ann}_X(Y)$. Wreszcie, anihilator Y w X będziemy oznaczać przez $\mathrm{ann}_X(Y)$.

Dla centrum pierścienia R rezerwujemy oznaczenie $\mathcal{Z}(R)$.

1.1 Koalgebry i algebry Hopfa

Niech $\mathbf{k}$ będzie dowolnym ciałem. O $\mathbf{k}$-algebrze z jedynką wygodnie jest myśleć jako o przestrzeni liniowej A nad ciałem $\mathbf{k}$ wraz z odwzorowaniami liniowymi: mnożeniem $m\colon A \otimes A \to A$ (przyporządkowującym $a \otimes b \mapsto ab$) oraz jedynką $u\colon \mathbf{k} \to A$ (przyporządkowującą $1_{\mathbf{k}} \mapsto 1_A$) spełniającymi pewne warunki, które można przedstawić w postaci przemiennych diagramów:

łączność:

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m"] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m"] & \mathrm{A}
\end{tikzcd}
$$

jedynka:

$$
\begin{tikzcd}
& A\otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\mathbf{k}\otimes A \arrow[ur, "u\otimes id"] \arrow[dr, "\cong"'] & & A\otimes \mathbf{k} \arrow[ul, "id\otimes u"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& \mathrm{A} &
\end{tikzcd}
$$

Dla dowolnych przestrzeni liniowych V i W przez $\tau\colon V\otimes W \to W\otimes V$ oznaczmy *skręcenie*: $\tau(v\otimes w) = w\otimes v$, gdzie $v\in V$, $w\in W$. Wtedy A jest algebrą przemienną, jeśli $m\circ\tau = m$ na $A\otimes A$.

Przypomnijmy, że jeśli A i B są $\mathbf{k}$-algebrami z jedynką, to przekształcenie $f\colon A\to B$ nazywamy homomorfizmem $\mathbf{k}$-algebr z jedynką, jeżeli f jest homomorfizmem $\mathbf{k}$-algebr oraz obrazem jedynki algebry A jest jedynka algebry B.

Pojęciem dualnym do pojęcia algebry z jedynką jest pojęcie koalgebry z kojedynką. Teorii koalgebr i algebr Hopfa zostało poświęconych wiele monografii, m.in. M.E. Sweedler [Sw69], E. Abe [Ab80], S. Montgomery [Mo93b], Ch. Kassel [Ka95]. Poniżej przedstawimy tylko niezbędne nam fakty, przy czym będziemy opierać się na książce [Mo93b].

Definicja 1.1.1.

1. $\mathbf{k}$-*Koalgebrą z kojedynką* nazywamy przestrzeń liniową C nad ciałem $\mathbf{k}$ wraz z odwzorowaniami liniowymi: *komnożeniem* $\Delta\colon C\to C\otimes C$ oraz *kojedynką* $\varepsilon\colon C\to\mathbf{k}$ dla których następujące diagramy są przemienne:

   kołączność:

   $$
   \begin{tikzcd}
   C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C\otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\
   C\otimes C \arrow[r, "id\otimes\Delta"'] & C\otimes C\otimes C
   \end{tikzcd}
   $$

   kojedynka:

   $$
   \begin{tikzcd}
   & C \arrow[dl, "1_{\mathbf{k}}\otimes"'] \arrow[dr, "\otimes 1_{\mathbf{k}}"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
   \mathbf{k}\otimes C & & C\otimes\mathbf{k} \\
   & C\otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id"] \arrow[ur, "id\otimes\varepsilon"'] &
   \end{tikzcd}
   $$

   O koalgebrze C powiemy, że jest *koprzemienna*, jeśli $\tau\circ\Delta = \Delta$.

2. Niech (C,Δ,ε) będzie koalgebrą z kojedynką. Podprzestrzeń $\mathfrak{A}\subseteq C$ nazywamy *koideałem*, jeśli $\Delta(\mathfrak{A})\subseteq\mathfrak{A}\otimes C + C\otimes\mathfrak{A}$ oraz $\varepsilon(\mathfrak{A}) = 0$.

W dalszej części będziemy używać notacji wprowadzonej przez R.G. Heynemana i M.E. Sweedlera [HS69]. Dla koalgebry C z komnożeniem Δ i kojedynką ε, koiloczyn $\Delta(c)$ elementu $c\in C$ będziemy oznaczać przez $\sum c_1\otimes c_2$. Przedstawienie to nie jest jednoznaczne. Indeksy (1) i (2) są symboliczne i bardziej określają pozycję elementu w iloczynie tensorowym niż reprezentują konkretne elementy. W tej notacji warunek kołączności ma postać:

$$\sum \Delta(c_1) \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes \Delta(c_2).$$

Element ten będziemy utożsamiać z elementem $\sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$. Warunek kojedynki wyraża się wzorem:

$$\sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1\varepsilon(c_2) = c.$$

Wreszcie warunek koprzemienności ma postać:

$$\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1.$$

Definicja 1.1.2. **k**-Algebrę H z jedynką wraz z odwzorowaniami liniowymi: $\Delta\colon H \to H \otimes H$, $\varepsilon\colon H \to \mathbf{k}$ i $S\colon H \to H$ nazywamy *algebrą Hopfa*, jeśli spełnia następujące warunki:

1. (H, Δ, ε) jest koalgebrą z kojedynką.
2. Δ, ε są homomorfizmami algebr z jedynką.
3. dla każdego $h \in H$ zachodzi równość:

$$\sum S(h_1)h_2 = \sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H,$$

gdzie $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$.

Przekształcenie S nazywamy *antypodą*. Antypoda jest anty-endomorfizmem algebry z jedynką.

Przykład 1.1.3. Dla dowolnej grupy G algebra grupowa $\mathbf{k}G$ jest algebrą Hopfa z komnożeniem $\Delta(g) = g \otimes g$, kojedynką $\varepsilon(g) = 1$ oraz antypodą $S(g) = g^{-1}$, gdzie $g \in G$.

Przykład 1.1.4. Niech G będzie grupą skończoną. Przez $\{p_g \mid g \in G\}$ oznaczmy bazę przestrzeni dualnej $\mathbf{k}G^\star$ dualną do bazy algebry $\mathbf{k}G$ utworzonej przez elementy grupy G. Wtedy $\mathbf{k}G^\star$ jest algebrą Hopfa z mnożeniem $p_g p_h = \delta_{gh} p_g$, jedynką $\sum_{g \in G} p_g$, komnożeniem $\Delta(p_g) = \sum_{hk=g} p_h \otimes p_k$, kojedynką $\varepsilon(p_g) = \delta_{g1}$ oraz antypodą $S(p_g) = p_{g^{-1}}$, gdzie δ_{gh} oznacza deltę Kroneckera.

Przykład 1.1.5. Niech H będzie uniwersalną algebrą obwiednią $U(L)$ algebry Liego L lub - w przypadku, gdy char$\mathbf{k} \neq 0$ - ograniczoną uniwersalną algebrą obwiednią $u(L)$ ograniczonej algebry Liego L. Wtedy H jest algebrą Hopfa z komnożeniem $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, kojedyką $\varepsilon(x) = 0$ oraz antypodą $S(x) = -x$, gdzie $x \in L$. Łatwo widać, że L jest koideałem w H.

W koalgebrze elementy, na których komnożenie działa w taki sposób w jaki działa na elementach grupy w Przykładzie 1.1.3 lub na elementach algebry Liego w Przykładzie 1.1.5, odgrywają ważną rolę i dlatego mają swoje nazwy.

Definicja 1.1.6. Niech (C, Δ, ε) będzie koalgebrą z kojedynką, $c \in C$.

1. Element c nazywamy *grupopodobnym*, jeśli $\Delta(c) = c \otimes c$ oraz $\varepsilon(c) = 1$. Zbiór wszystkich elementów grupopodobnych koalgebry C będziemy oznaczać przez $G(C)$.

2. Niech $g, h \in G(C)$. Element c nazywamy (g, h)-*prymitywnym*, jeśli $\Delta(c) = c \otimes g + h \otimes c$. Zbiór wszystkich elementów (g, h)-prymitywnych koalgebry C będziemy oznaczać przez $P_{g,h}(C)$.

3. Element c nazywamy *skośnie prymitywnym*, jeśli c jest elementem (g, h)-prymitywnym dla pewnych $g, h \in G(C)$.

4. Niech $C = H$ będzie algebrą Hopfa. Element c nazywamy *prymitywnym*, jeśli $\Delta(c) = c \otimes 1 + 1 \otimes c$. Zbiór wszystkich elementów prymitywnych algebry H będziemy oznaczać przez $P(H)$.

W algebrze Hopfa elementy grupopodobne tworzą grupę, zaś elementy prymitywne algebrę Liego lub - w przypadku, gdy $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 0$ - ograniczoną algebrę Liego.

W następnych rozdziałach nasze rozważania ograniczymy do pewnej szczególnej klasy algebr Hopfa - punktowych algebr Hopfa (por. [Mo93b, Roz. 5]). Przypomnijmy, że koalgebra jest *prosta*, jeśli nie zawiera żadnych właściwych podkoalgebr. Sumę algebraiczną wszystkich podkoalgebr prostych koalgebry C nazywamy *koradykałem* i oznaczamy przez C_0. O koalgebrze mówimy, że jest *punktowa*, jeśli każda jej podkoalgebra prosta jest jednowymiarowa. Jak nietrudno przekonać się, warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby koalgebra C była punktowa jest równość $C_0 = \mathbf{k}G(C)$. W szczególności, koradykał punktowej algebry Hopfa jest koprzemienną podalgebrą Hopfa. To oznacza, że antypoda punktowej algebry Hopfa jest bijekcją (por. [Mo93b, Wn. 5.2.11]). Poniżej przedstawiamy wynik E.J. Tafta i R.L. Wilsona (por. [Mo93b, Tw. 5.4.1]) opisujący strukturę koalgebr punktowych.

Twierdzenie 1.1.7. ([TW74]) *Niech (C, Δ, ε) będzie punktową koalgebrą z kojedynką. Oznaczmy $G = G(C)$. Wtedy istnieje rodzina podprzestrzeni $\{C_n\}_{n \geq 0}$ taka, że:*

1. $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n \geq 0} C_n = C$.

2. *C_0 jest koradykałem w C.*

3. $C_1 = C_0 + \sum_{g,h \in G} P_{g,h}(C)$.

4. *dla każdego $n \geq 1$ zachodzi równość $C_n = \sum_{g,h \in G} C_n(g, h)$, gdzie*

$$C_n(g, h) = \{c \in C \mid \Delta(c) - c \otimes g - h \otimes c \in C_{n-1} \otimes C_{n-1}\}.$$

Zauważmy, że obie algebry: algebra grupowa oraz uniwersalna algebra obwiednia algebry Liego są koprzemiennymi punktowymi algebrami Hopfa. W istocie, każda koprzemienna algebra Hopfa (po ewentualnym rozszerzeniu ciała skalarów) jest punktową algebrą Hopfa (por. [Mo93b, Podroz. 5.6]).

Przykład 1.1.8. Niech $\omega \in \mathbf{k}$ będzie pierwiastkiem prymitywnym stopnia n ($n \geq 2$) z jedynki. Przez $T_{n^2}(\omega)$ oznaczmy algebrę $\mathbf{k}\langle g, x \mid g^n = 1, x^n = 0, xg = \omega gx\rangle$. Wtedy $T_{n^2}(\omega)$ jest n^2-wymiarową algebrą Hopfa z komnożeniem $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, kojedynką $\varepsilon(g) = 1$, $\varepsilon(x) = 0$ oraz antypodą $S(g) = g^{-1}$ i $S(x) = -g^{-1}x$. W literaturze nosi ona nazwę *algebry Tafta*. Jak nietrudno przekonać się, algebra Tafta jest nieprzemienną i niekoprzemienną punktową algebrą Hopfa. Szczególnym przypadkiem algebry Tafta jest *algebra Sweedlera* (kładziemy $n = 2$, $\omega = -1$).

Inny przykład nieprzemiennej i niekoprzemiennej punktowej algebry Hopfa zostanie przedstawiony w Podrozdziale 1.4.

1.2 Działanie algebr Hopfa na algebry łączne

Definicja 1.2.1. Niech H będzie algebrą Hopfa i A - $\mathbf{k}$-algebrą. Powiemy, że H *działa na* A lub, że A jest H*-modułową algebrą*, jeśli:

1. A jest H-modułem z działaniem, które oznaczamy kropką.
2. dla dowolnych elementów $h \in H$, $a, b \in A$ zachodzi równość:

$$h \cdot ab = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b),$$

gdzie $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$.

Lemat 1.2.2. ([Co86]) *Niech H będzie algebrą Hopfa i A - H-modułową algebrą. Wówczas dla dowolnych elementów $h \in H$, $a, b \in A$ zachodzi równość:*

$$(h \cdot a)b = \sum h_1 \cdot [a(S(h_2) \cdot b)].$$

Jeśli dodatkowo antypoda algebry H jest bijekcją, to:

$$a(h \cdot b) = \sum h_2 \cdot [(S^{-1}(h_1) \cdot a)b].$$

Dowód otrzymujemy natychmiast po rozpisaniu prawych stron obu równości.

Bezpośrednio z Definicji 1.2.1 widać, że jeśli H jest algebrą Hopfa i A - H-modułową algebrą z jedynką, to dla każdego $h \in H$ zachodzi:

$$h \cdot 1_A = (h \cdot 1_A)1_A = \sum h_1 \cdot [1_A(S(h_2) \cdot 1_A)] = \sum h_1 S(h_2) \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A.$$

Rozważane w pracy algebry na ogół nie muszą posiadać jedynki.

Definicja 1.2.3. Niech H będzie algebrą Hopfa, $\mathfrak{A}$ - podalgebrą Hopfa lub koidealem w H i A - H-modułową algebrą.

1. Niepusty podzbiór $T \subseteq A$ nazywamy $\mathfrak{A}$-*niezmienniczym*, jeśli dla dowolnych $h \in \mathfrak{A}$, $t \in T$ spełniony jest warunek $h \cdot t \in T$.

2. Mówimy, że A jest $\mathfrak{A}$-*prostą algebrą*, jeśli nie posiada właściwych $\mathfrak{A}$-niezmienniczych ideałów.

3. *Niezmiennikami działania* $\mathfrak{A}$ *na* A nazywamy zbiór:
$$A^{\mathfrak{A}} = \{a \in A \mid h \cdot a = \varepsilon(h)a \text{ dla wszystkich } h \in \mathfrak{A}\}.$$

Jak nietrudno zauważyć, działanie algebry Hopfa H na algebrę A indukuje homomorfizm:
$$\pi \colon H \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(A)$$
algebr z jedynką zgodnie ze wzorem $\pi(h)(a) = h \cdot a$, gdzie $h \in H$, $a \in A$. Dla podprzestrzeni $\mathfrak{A} \subseteq H$ przez $E(\mathfrak{A})$ oznaczmy podalgebrę algebry $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(A)$ generowaną przez $\pi(\mathfrak{A})$. Powiemy, że *wymiar działania* $\mathfrak{A}$ *na* A *jest skończony* i wynosi N, jeśli $\dim_{\mathbf{k}} E(\mathfrak{A}) = N < \infty$.

Przykład 1.2.4. Niech $\mathbf{k}G$ będzie algebrą grupową. Korzystając z Przykładu 1.1.3 można pokazać, że dla dowolnej algebry A działanie algebry Hopfa $\mathbf{k}G$ na algebrę A jest dokładnie działaniem grupy G na A poprzez automorfizmy algebry. Niezmienniki działania algebry Hopfa $\mathbf{k}G$ pokrywają się z punktami stałymi działania grupy G: $A^{\mathbf{k}G} = A^G$. Dla skończonej grupy G jasnym jest, że każde działanie algebry Hopfa $\mathbf{k}G$ ma skończony wymiar. Z kolei dla grup nieskończonych sytuacja nie jest już tak jednoznaczna. Na przykład naturalne działanie algebry Hopfa $\mathbf{k}G$ na algebrę $\mathbf{k}G$ poprzez automorfizmy wewnętrzne ma wymiar skończony wtedy i tylko wtedy, gdy centrum $\mathcal{Z}(G)$ grupy G ma skończony indeks w G.

W tym miejscu warto przypomnieć dwa ogólnie znane fakty dotyczące działania skończonych grup na algebry bez nietrywialnych punktów stałych, z których będziemy korzystać w dalszej części pracy.

Twierdzenie 1.2.5.

1. (V.K. Kharchenko, [Kh75]; por. [Mo80, Tw. 4.5]) *Algebra na którą działa skończona grupa automorfizmów bez nietrywialnych punktów stałych posiada niezerowe elementy nilpotentne.*

2. (G.M. Bergman, M. Isaacs, [BI73]; por. [Mo80, Tw. 1.4]) *Jeśli dodatkowo charakterystyka ciała nie dzieli rzędu grupy, to algebra jest nilpotentna.*

Przykład 1.2.6. Niech G będzie grupą skończoną. Z Przykładu 1.1.4 pamiętamy, że przestrzeń dualna $H = \mathbf{k}G^\star$ jest algebrą Hopfa. Wówczas algebra A jest H-modułową algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebrą zgradowaną przez grupę G. Niezmienniki działania H na A pokrywają się z jednostkową składową gradacji.

Definicja 1.2.7. Niech A będzie dowolną algebrą.

1. Odwzorowanie liniowe $\delta\colon A \to A$ nazywamy *różniczkowaniem*, jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in A$ zachodzi równość $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$.

2. Niech σ będzie automorfizmem algebry A. Odwzorowanie liniowe $\delta\colon A \to A$ nazywamy *σ-różniczkowaniem*, jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in A$ zachodzi równość $\delta(xy) = \delta(x)y + \sigma(x)\delta(y)$. O σ-różniczkowaniu δ algebry A mówimy, że jest *wewnętrzne*, jeśli istnieje element $a \in A$ taki, że dla każdego $x \in A$ zachodzi równość $\delta(x) = ax - \sigma(x)a$. Wewnętrzne σ-różniczkowanie algebry A indukowane przez element $a \in A$ będziemy oznaczać przez ad_a.

3. Odwzorowanie liniowe $\delta\colon A \to A$ nazywamy *skośnym różniczkowaniem*, jeśli δ jest σ-różniczkowaniem dla pewnego automorfizmu σ algebry A. O skośnym różniczkowaniu δ algebry A mówimy, że jest **k**-*algebraiczne*, jeśli istnieje liczba naturalna n oraz elementy $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbf{k}$ takie, że dla każdego $x \in A$ zachodzi równość:

$$\delta^n(x) + \alpha_{n-1}\delta^{n-1}(x) + \ldots + \alpha_1\delta(x) + \alpha_0 x = 0.$$

4. Niech A będzie algebrą z jedynką. Skośne różniczkowanie δ algebry A nazywamy *A-algebraicznym*, jeśli istnieje liczba naturalna n, elementy $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ oraz element odwracalny $a_n \in A$ taki, że dla każdego $x \in A$ zachodzi równość:

$$a_n\delta^n(x) + a_{n-1}\delta^{n-1}(x) + \ldots + a_1\delta(x) + a_0 x = 0.$$

Przykład 1.2.8. Oznaczmy przez H uniwersalną algebrę obwiednią $U(L)$ algebry Liego L (ograniczoną uniwersalną algebrę obwiednią $u(L)$ ograniczonej algebry Liego L, gdy $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 0$). Dla dowolnej algebry A możemy udowodnić, że działanie algebry Hopfa H na algebrę A jest niczym innym jak działaniem algebry Liego L na A poprzez różniczkowania algebry. Niezmienniki działania algebry Hopfa H i algebry Liego L pokrywają się: $A^H = A^L$. Ponadto, jeśli L jest skończenie wymiarową algebrą Liego, to skończony wymiar działania L na A jest równoważny temu, że L działa na A poprzez **k**-algebraiczne różniczkowania. Zgodnie z analogiem Twierdzenia Poincaré-Birkhoffa-Witta dla ograniczonych algebr Liego udowodnionym przez N. Jacobsona [Ja41], warunek ten spełniają wszystkie skończenie wymiarowe ograniczone algebry Liego.

Wynik analogiczny do Twierdzenia Kharchenki 1.2.5 o istnieniu nietrywialnych niezmienników dla działań algebr Liego udowodnili K.I. Beidar i P. Grzeszczuk.

Twierdzenie 1.2.9. ([BG95, Tw. 3.5]) *Niech* $\mathbf{k}$ *będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Załóżmy, że na zredukowaną algebrę A działa skończenie wymiarowa algebra Liego L (ograniczona algebra Liego L, gdy* $\operatorname{char}\mathbf{k} > 2$*) i wymiar tego działania jest skończony. Wtedy* $A^L \neq 0$.

1.3 Iloczyn skrzyżowany

Istotną rolę w badaniu działania skończonych grup na algebry łączne odgrywa skośny pierścień grupowy. W kontekście działania dowolnej skończenie wymiarowej algebry Hopfa wygodnie jest natomiast rozważyć iloczyn skrzyżowany. W języku angielskim powszechny w użyciu jest termin *smash product*.

Definicja 1.3.1. Niech H będzie algebrą Hopfa i A - H-modułową algebrą z jedynką. *Iloczynem skrzyżowanym* nazywamy $\mathbf{k}$-algebrę $A\#H$ zdefiniowaną w sposób następujący:

1. $A\#H$, jako przestrzeń liniowa, jest izomorficzna z $A \otimes H$.

   Obraz elementu $a \otimes h$ będziemy oznaczać przez $a\#h$.

2. Mnożenie w $A\#H$ zadane jest wzorem:

$$(a\#g)(b\#h) = \sum a(g_1 \cdot b)\#g_2 h,$$

gdzie $a, b \in A$, $g, h \in H$.

Zauważmy, że każdą z algebr: A i H możemy w naturalny sposób zanurzyć w iloczyn skrzyżowany $A\#H$ przyporządkowując $a \mapsto a\#1_H$ i $h \mapsto 1_A\#h$, odpowiednio. Pozwoli nam to w dalszej części rozprawy stosować oznaczenie $ah = a\#h$. W tej notacji mnożenie wyraża się wzorem:

$$(ag)(bh) = \sum a(g_1 \cdot b)g_2 h.$$

Przykład 1.3.2. Niech $H = \mathbf{k}G$ będzie algebrą grupową i A - H-modułową algebrą z jedynką. Jak wspomnieliśmy w Przykładzie 1.2.4, grupa G działa na algebrę A poprzez automorfizmy algebry. Możemy więc rozważyć skośny pierścień grupowy $A{\star}G$. Łatwe obliczenia pokazują, że $A\#H = A{\star}G$. Mnożenie w $A\#H$ określone jest wzorem:

$$(ag)(bh) = a(g \cdot b)gh,$$

gdzie $a, b \in A$, $g, h \in G$.

Jak nietrudno zauważyć, działanie algebry Hopfa H na algebrę A z jedynką wyznacza na A strukturę $A\#H$-modułu zgodnie ze wzorem:

$$ah.b = a(h \cdot b),$$

gdzie $a, b \in A$, $h \in H$. Oznaczmy przez $\mathrm{End}_{A\#H}(A)$ algebrę endomorfizmów algebry A traktowanej jako moduł nad $A\#H$. Wtedy:

1. $A\#H$-podmoduły A są dokładnie H-niezmienniczymi lewostronnymi ideałami A.

2. Algebra $\mathrm{End}_{A\#H}(A)$ jest izomorficzna z podalgebrą niezmienników $A^H \subseteq A$.

Dla dowolnego elementu $a \in A^H$ oznaczmy przez r_a prawostronne mnożenie $x \mapsto xa$, gdzie $x \in A$. Można pokazać, że odwzorowanie $a \mapsto r_a$ zanurza algebrę A^H w algebrę $\mathrm{End}_{A\#H}(A)$. Dla pełności dowodu podpunktu drugiego pozostaje zauważyć, że dla każdego $\varphi \in \mathrm{End}_{A\#H}(A)$ mamy $\varphi(1) \in A^H$ oraz $\varphi = r_{\varphi(1)}$.

Definicja 1.3.3. Niech R będzie pierścieniem z jedynką i M - niezerowym R-modułem.

1. Mówimy, że M jest *nieprzywiedlnym R-modułem*, jeśli M nie posiada właściwych R-podmodułów.

2. Mówimy, że M jest *jednolitym R-modułem*, jeśli każde dwa niezerowe R-podmoduły M mają niezerową część wspólną.

3. Mówimy, że M ma *skończony wymiar Goldiego* równy n, jeśli istnieje rodzina jednolitych R-podmodułów $\{M_i\}_{1 \leq i \leq n}$ w M taka, że $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ jest sumą prostą i istotnym R-podmodułem M.

4. Mówimy, że pierścień R ma *skończony lewostronny wymiar Goldiego*, jeśli R traktowany jako regularny R-moduł ma skończony wymiar Goldiego.

Korzystając z wcześniejszych spostrzeżeń łatwo dowodzimy w oparciu o Lemat Schura pierwszą część Twierdzenia J. Bergena, M. Cohen i D. Fishman.

Twierdzenie 1.3.4. ([BCF90, Tw. 2.2]) *Niech H będzie algebrą Hopfa i A - H-modułową algebrą z jedynką, nieprzywiedlną jako $A\#H$-moduł. Wtedy:*

1. *A^H jest pierścieniem z dzieleniem.*

2. *Jeśli dodatkowo wymiar działania H na A jest skończony i wynosi N oraz A ma skończony lewostronny wymiar Goldiego, to wymiar algebry A traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad A^H jest skończony nie większy niż N.*

W [BCF90, Pyt. 2.7] autorzy postawili ponadto pytanie, czy Twierdzenie 1.3.4 będzie nadal prawdziwe, jeśli pominiemy założenie o skończonym lewostronnym wymiarze Goldiego algebry A. Pokażemy teraz, że tak jest dla punktowych algebr Hopfa.

Lemat 1.3.5. ([GH07]) *Niech H będzie punktową algebrą Hopfa i A - H-modułową algebrą z jedynką. Niech ponadto M będzie nieprzywiedlnym (jednolitym) $A\#H$-modułem. Jeśli wymiar działania H na M jest skończony i wynosi N, to M traktowany jako moduł nad A ma skończoną długość (odpowiednio skończony wymiar Goldiego).*

Dowód. Niech M będzie dowolnym niezerowym $A\#H$-modułem. Rozważmy homomorfizm:

$$\pi\colon H \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(M)$$

algebr z jedynką indukowany przez działanie H na M: $\pi(h)(m) = hm$, gdzie $h \in H$, $m \in M$. Z Twierdzenia Tafta-Wilsona 1.1.7 wynika, że istnieją elementy $c_1, c_2, \ldots, c_N \in H$, $c_1 = 1$, oraz rodzina podprzestrzeni $\{H_n\}_{0 \le n \le N}$ taka, że:

1. $0 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_N = H$.
2. $\pi(H_n) = \pi(H_{n-1}) + \mathbf{k}\pi(c_n)$ dla każdego $1 \le n \le N$.
3. $\Delta(c_n) \in c_n \otimes g + h \otimes c_n + H_{n-1} \otimes H_{n-1}$ dla każdego $2 \le n \le N$, gdzie $g, h \in G(H)$ i $g \in H_{n-1}$.

Zauważmy, że dla dowolnych elementów $a \in A$, $m \in M$ i dowolnego elementu c_n spełniającego warunek 3 zachodzi równość:

$$c_n(am) = (c_n a)m = (c_n \cdot a)gm + (h \cdot a)c_n m + \sum (c_{n_1} \cdot a)c_{n_2} m,$$

gdzie $c_{n_1}, c_{n_2} \in H_{n-1}$. Niech K będzie dowolnym A-podmodułem M. Oznaczmy $K_{(0)} = M$. Korzystając z powyższej równości łatwo dowodzimy za pomocą indukcji względem $n = 1, 2, \ldots, N$, że

$$K_{(n)} = \left\{x \in K_{(n-1)} \mid c_n x \in K\right\} = \{x \in M \mid H_n x \subseteq K\}$$

jest A-podmodułem M zawartym w K. Wynika stąd, że $K_{(N)} = \{x \in M \mid Hx \subseteq K\}$ jest $A\#H$-podmodułem M zawartym w K. Łatwe obliczenia pokazują, że $K_{(N)}$ jest największym $A\#H$-podmodułem M zawartym w K.

Pokażemy teraz, że istnieje A-podmoduł $\widehat{K}$ modułu M maksymalny ze względu na warunek: $\widehat{K}$ nie zawiera niezerowych $A\#H$-podmodułów M. Weźmy dowolny liniowo uporządkowany zbiór $\{K_\alpha\}_\alpha$ A-podmodułów M nie zawierających niezerowych $A\#H$-podmodułów M. Twierdzimy, że również $\bigcup_\alpha K_\alpha$ nie zawiera niezerowych $A\#H$-podmodułów M. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje niezerowy $A\#H$-podmoduł L modułu M zawarty w $\bigcup_\alpha K_\alpha$. Weźmy dowolny niezerowy element $x \in L$. Mamy $c_1 x, c_2 x, \ldots, c_N x \in K_{\alpha_0}$ dla pewnego α_0. Wynika z tego, że $(A\#H)x \subseteq K_{\alpha_0}$. Otrzymujemy w ten sposób niezerowy $A\#H$-podmoduł modułu M zawarty w K_{α_0}. Sprzeczność. Teza wynika teraz bezpośrednio z Lematu Zorna. Mamy więc łańcuch A-podmodułów M:

$$M = \widehat{K}_{(0)} \supseteq \widehat{K} = \widehat{K}_{(1)} \supseteq \widehat{K}_{(2)} \supseteq \ldots \supseteq \widehat{K}_{(N-1)} \supseteq \widehat{K}_{(N)} = 0.$$

Załóżmy teraz, że M jest nieprzywiedlnym (jednolitym) $A\#H$-modułem. Ponieważ dla każdego A-podmodułu L modułu M zawierającego $\widehat{K}$ i różnego od $\widehat{K}$ mamy $L_{(N)} \neq 0$, więc $M/\widehat{K}$ jest nieprzywiedlnym (odpowiednio jednolitym) A-modułem. Dla każdego $1 \le n \le N-1$ rozważmy odwzorowanie:

$$\varphi_n\colon \widehat{K}_{(n)} \to M/\widehat{K}$$

określone wzorem $\varphi_n(x) = c_{n+1}x + \widehat{K}$, gdzie $x \in \widehat{K}_{(n)}$. Z warunku 3 wynika, że dla dowolnych elementów $a \in A$, $x \in \widehat{K}_{(n)}$ zachodzi:

$$\begin{aligned}\varphi_n(ax) &= c_{n+1}(ax) + \widehat{K} = \\ &= (c_{n+1} \cdot a)gx + (h \cdot a)c_{n+1}x + \sum (c_{n+1_1} \cdot a)c_{n+1_2}x + \widehat{K} = \\ &= (h \cdot a)c_{n+1}x + \widehat{K} = (h \cdot a)\varphi_n(x).\end{aligned}$$

Zauważmy poza tym, że $\ker \varphi_n = \widehat{K}_{(n+1)}$. Z powyższego łatwo widać już, że każde φ_n wyznacza zanurzenie kraty A-podmodułów modułu $\widehat{K}_{(n)}/\widehat{K}_{(n+1)}$ w kratę A-podmodułów modułu $M/\widehat{K}$. Jak pamiętamy, $M/\widehat{K}$ jest nieprzywiedlnym (jednolitym) A-modułem. Wynika z tego, że $\widehat{K}_{(n)}/\widehat{K}_{(n+1)}$ jest albo zerowym albo nieprzywiedlnym (odpowiednio jednolitym) A-podmodułem. Oznacza to, że M traktowany jako lewostronny A-moduł ma skończoną długość (odpowiednio skończony wymiar Goldiego) nie większą niż N.

□

Wniosek 1.3.6. ([GH07]) *Niech H będzie punktową algebrą Hopfa i A - H-modułową algebrą z jedynką, nieprzywiedlną jako $A\#H$-moduł. Jeśli wymiar działania H na A jest skończony i wynosi N, to wymiar algebry A traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad pierścieniem z dzieleniem A^H jest skończony nie większy niż N.*

1.4 Kolorowe algebry Liego

W tym podrozdziale przedstawimy przykład nieprzemiennej i niekoprzemiennej punktowej algebry Hopfa.

Od tego miejsca do końca Rozdziału 1 będziemy zakładać, że $\mathbf{k}$ jest ciałem charakterystyki różnej od 2 i G - dowolną skończoną grupą abelową. Przez $\mathbf{k}^\star$ oznaczamy grupę multiplikatywną ciała $\mathbf{k}$.

Niech $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbf{k}$ zgradowaną przez grupę G. Element $v \in V$ nazywamy *jednorodnym stopnia* g, gdzie $g \in G$, jeżeli $v \in V_g$. Jasnym jest, że każdy element $v \in V$ można przedstawić w postaci sumy $\sum_{g\in G} v_g$ jednorodnych elementów $v_g \in V_g$ oraz, że przedstawienie to jest jednoznaczne. Elementy v_g nazywamy *jednorodnymi składowymi elementu* v. Mówimy, że podprzestrzeń $U \subseteq V$ jest *jednorodna*, jeśli dla każdego elementu z U wszystkie jego jednorodne składowe należą do U. Jak łatwo zauważyć, aby podprzestrzeń $U \subseteq V$ była jednorodna konieczne i wystarczające jest, aby $U = \bigoplus_{g\in G}(U \cap V_g)$. Oznaczamy wówczas $U_g = U \cap V_g$ dla $g \in G$. Jeśli $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ oraz $W = \bigoplus_{g\in G} W_g$ są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbf{k}$ zgradowanymi przez grupę G, to odwzorowanie liniowe $f\colon V \to W$ nazywamy *jednorodnym*, jeśli dla każdego $g \in G$ zachodzi $f(V_g) \subseteq W_g$.

Definicja 1.4.1. Przekształcenie $\epsilon\colon G \times G \to \mathbf{k}^\star$ nazywamy *bicharakterem*, jeśli jest ono:

1. multiplikatywne na każdej ze współrzędnych:

$$\epsilon(gh, k) = \epsilon(g, k)\epsilon(h, k)$$
$$\epsilon(g, hk) = \epsilon(g, h)\epsilon(g, k).$$

2. antysymetryczne:

$$\epsilon(g, h)\epsilon(h, g) = 1,$$

gdzie $g, h, k \in G$.

Jest oczywiste, że dla każdego $g \in G$ zachodzi $\epsilon(g, g) = 1$ lub $\epsilon(g, g) = -1$. W dalszej części pracy zastosujemy następujące oznaczenia:

$$G_+ = \{g \in G \mid \epsilon(g, g) = 1\}$$
$$G_- = \{g \in G \mid \epsilon(g, g) = -1\}.$$

Zauważmy, że G_+ jest podgrupą grupy G indeksu nie większego niż 2.

Definicja 1.4.2. Niech $\epsilon\colon G \times G \to \mathbf{k}^\star$ będzie bicharakterem. Przestrzeń liniową $L = \bigoplus_{g\in G} L_g$ nad ciałem $\mathbf{k}$ zgradowaną przez grupę G wraz z odwzorowaniem dwuliniowym $[\cdot,\cdot]\colon L \times L \to L$ spełniającym warunek $[L_g, L_h] \subseteq L_{gh}$ nazywamy *kolorową ϵ-algebrą Liego*, jeśli:

1. $[x, y] = -\epsilon(g, h)[y, x]$.
2. $[[x, y], z] = [x, [y, z]] - \epsilon(g, h)[y, [x, z]]$,

gdzie $g, h \in G$, $x \in L_g$, $y \in L_h$, $z \in L$. Jeśli $\mathrm{char}\mathbf{k} = 3$, to dodatkowo zakładamy, że dla każdego $x \in \bigcup_{g\in G_-} L_g$ zachodzi $[[x, x], x] = 0$.

Zauważmy, że dla grupy trywialnej otrzymujemy zwykłą algebrę Liego. Z kolei dla grupy $\mathbb{Z}_2$ i bicharakteru $\epsilon\colon \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbf{k}^\star$ określonego wzorem $\epsilon(i, j) = (-1)^{ij}$ otrzymujemy *superalgebrę Liego.*

Dla ciała $\mathbf{k}$ dodatniej charakterystyki definiujemy na L dodatkową strukturę.

Definicja 1.4.3. Niech $\mathbf{k}$ będzie ciałem charakterystyki $p > 2$. O kolorowej algebrze Liego $L = \bigoplus_{g\in G} L_g$ powiemy, że jest *ograniczona*, jeśli istnieje odwzorowanie $\cdot^{[p]}\colon \bigcup_{g\in G_+} L_g \to \bigcup_{g\in G_+} L_g$ takie, że:

1. $(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]}$, dla dowolnych $\alpha \in \mathbf{k}$, $x \in \bigcup_{g\in G_+} L_g$.

2. $[x^{[p]}, y] = (\mathrm{ad}_x)^p(y)$, dla dowolnych $x \in \bigcup_{g\in G_+} L_g$, $y \in L$.

3. $(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x, y)$, dla dowolnych $g \in G_+$, $x, y \in L_g$,

gdzie $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$, zaś $is_i(x, y)$ jest współczynnikiem wielomianu $(\mathrm{ad}_{tx+y})^{p-1}(x)$ stojącym przy t^{i-1}.

Definicja 1.4.4. Niech $L = \bigoplus_{g\in G} L_g$ i $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$ będą kolorowymi algebrami Liego. Odwzorowanie $\varphi\colon L \to M$ nazywamy *homomorfizmem kolorowych algebr Liego*, jeśli φ jest jednorodnym odwzorowaniem liniowym oraz dla dowolnych elemenów $x, y \in L$ zachodzi równość $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$. Jeśli dodatkowo $\mathrm{char}\mathbf{k} = p > 2$ oraz L i M są ograniczonymi kolorowymi algebrami Liego, to odwzorowanie $\varphi\colon L \to M$ nazywamy *homomorfizmem ograniczonych kolorowych algebr Liego*, jeżeli φ jest homomorfizmem kolorowych algebr Liego oraz dla każdego $x \in \bigcup_{g\in G_+} L_g$ zachodzi $\varphi(x^{[p]}) = \varphi(x)^{[p]}$.

Przykład 1.4.5. Niech $\epsilon\colon G \times G \to \mathbf{k}^\star$ będzie bicharakterem. Na dowolnej algebrze łącznej $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ zgradowanej przez grupę G możemy określić strukturę kolorowej ϵ-algebry Liego przyjmując:

$$[a, b] = ab - \epsilon(g, h)ba,$$

gdzie $g, h \in G$, $a \in A_g$, $b \in A_h$. Jeśli $\mathrm{char}\mathbf{k} = p > 2$, to dodatkowo kładziemy $a^{[p]} = a^p$ dla każdego $a \in \bigcup_{g\in G_+} A_g$. Wtedy A jest ograniczoną kolorową ϵ-algebrą Liego.

Przykład 1.4.6. Niech $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ będzie przestrzenią liniową zgradowaną przez grupę G. Mówimy, że endomorfizm f przestrzeni V ma stopień g, gdzie $g \in G$, jeśli dla każdego $h \in G$ zachodzi $f(V_h) \subseteq V_{gh}$. Oznaczmy przez E_g zbiór wszystkich endomorfizmów przestrzeni V stopnia g. Bezpośrednio sprawdza się, że $\mathrm{End}_{\mathbf{k},G}(V) = \bigoplus_{g\in G} E_g$ ma naturalną strukturę algebry łącznej z G-gradacją. Z Przykładu 1.4.5 wynika teraz, że dla dowolnego bicharakteru $\epsilon\colon G \times G \to \mathbf{k}^\star$ możemy określić na $\mathrm{End}_{\mathbf{k},G}(V)$ strukturę kolorowej ϵ-algebry Liego (ograniczonej kolorowej ϵ-algebry Liego).

Przykład 1.4.7. Niech $\epsilon\colon G \times G \to \mathbf{k}^\star$ będzie bicharakterem. Dla dowolnej algebry łącznej $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ zgradowanej przez grupę G zauważmy, że bicharakter ϵ wyznacza działanie:

$$\phi\colon G \to \mathrm{Aut}(A)$$

grupy G na algebrę A poprzez automorfizmy algebry zgodnie ze wzorem:

$$\phi(g)(a) = \epsilon(g, h)a,$$

gdzie $g, h \in G$, $a \in A_h$. Oznaczmy przez $\mathfrak{D}_g$ zbiór wszystkich $\phi(g)$-różniczkowań algebry A stopnia g. Łatwe obliczenia pokazują, że $\mathfrak{Der}(A, \epsilon) = \bigoplus_{g\in G} \mathfrak{D}_g$ jest kolorową podalgebrą Liego $\mathrm{End}_{\mathbf{k},G}(A)$. Jeśli char$\mathbf{k} > 2$, to $\mathfrak{Der}(A, \epsilon)$ jest ograniczoną kolorową algebrą Liego.

Definicja 1.4.8. Niech $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ będzie algebrą łączną zgradowaną przez grupę G i $L = \bigoplus_{g\in G} L_g$ - kolorową ϵ-algebrą Liego. Jeśli char$\mathbf{k} > 2$, to dodatkowo zakładamy, że L jest ograniczona. Powiemy, że *L działa na A*, jeśli istnieje homomorfizm:

$$\psi\colon L \to \mathfrak{Der}(A, \epsilon)$$

kolorowych algebr Liego (ograniczonych kolorowych algebr Liego). *Niezmiennikami działania L na A* nazywamy zbiór:

$$A^L = \{a \in A \mid \psi(x)(a) = 0 \text{ dla wszystkich } x \in L\}.$$

Wiele pojęć i własności znanych z teorii algebr Liego przenosi się na kolorowe algebry Liego (por. [BMPZ92]). W szczególności z każdą kolorową algebrą Liego możemy związać uniwersalną algebrę obwiednią.

Definicja 1.4.9. Niech $L = \bigoplus_{g\in G} L_g$ będzie kolorową algebrą Liego. Algebrę łączną $U(L) = \bigoplus_{g\in G} U_g$ z jedynką zgradowaną przez grupę G wraz z homomorfizmem $\iota\colon L \to U(L)$ kolorowych algebr Liego nazywamy *uniwersalną algebrą obwiednią*, jeśli dla dowolnej algebry łącznej $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ z jedynką zgradowanej przez grupę G i dowolnego homomorfizmu $\varphi\colon L \to A$ kolorowych algebr Liego istnieje dokładnie jeden jednorodny homomorfizm $f\colon U(L) \to A$ algebr z jedynką taki, że $f \circ \iota = \varphi$, czyli następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U(L) \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Uniwersalna algebra obwiedna dowolnej kolorowej algebry Liego zawsze istnieje i jest wyznaczona z dokładnością do izomorfizmu.

Twierdzenie 1.4.10. (Poincaré, Birkhoff, Witt) *Niech $L = \bigoplus_{g\in G} L_g$ będzie kolorową algebrą Liego z bazą złożoną z jednorodnych elementów $\{x_j \mid j \in J\}$, gdzie J jest liniowo uporządkowanym zbiorem indeksów. Wtedy uniwersalna algebra obwiednia $U(L)$ posiada bazę złożoną z 1 oraz wszystkich elementów postaci $\iota(x_{j_1})\iota(x_{j_2})\ldots\iota(x_{j_n})$, gdzie $n \geq 1$, $j_i \leq j_{i+1}$, przy czym $j_i \neq j_{i+1}$ dla $x_{j_i} \in \bigcup_{g\in G_-} L_g$.*

W szczególności ι jest monomorfizmem kolorowych algebr Liego.

W dalszej części będziemy milcząco zakładać, że $L \subseteq U(L)$ utożsamiając elementy z L z ich obrazami przy odwzorowaniu ι.

Niech $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ będzie kolorową ϵ-algebrą Liego. Jak zauważyliśmy w Przykładzie 1.4.7, na uniwersalną algebrę obwiednią $U(L)$ działa grupa G poprzez automorfizmy algebry. Możemy zatem rozważyć skośny pierścień grupowy $U(L) \star G$. Oznaczmy go przez H. Ustalmy dalej bazę $\{1\} \cup \{x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_n} \mid n \geq 1\}$ algebry $U(L)$ zdefiniowaną w Twierdzeniu Poincaré-Birkhoffa-Witta 1.4.10. Jasnym jest, że elementy postaci ug, gdzie $u \in \{1\} \cup \{x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_n} \mid n \geq 1\}$ i $g \in G$, tworzą bazę nad $\mathbf{k}$ pierścienia H traktowanego jako $\mathbf{k}$-algebra. Mnożenie w H zadane jest wzorem:

$$gx = \epsilon(g, h) xg,$$

gdzie $g, h \in G$, $x \in L_h$. Możemy wreszcie udowodnić, że H jest algebrą Hopfa z komnożeniem Δ, kojedynką ε oraz antypodą S zdefiniowanymi jak następuje:

$$\begin{aligned} &\Delta(g) = g \otimes g && \varepsilon(g) = 1 && S(g) = g^{-1} \\ &\Delta(x) = x \otimes 1 + h \otimes x && \varepsilon(x) = 0 && S(x) = -h^{-1}x, \end{aligned}$$

gdzie $g, h \in G$, $x \in L_h$. Bezpośrednio z określenia widać, że H jest nieprzemienną i niekoprzemienną punktową algebrą Hopfa, zaś L - koidealem w H.

W przypadku char$\mathbf{k} > 2$, z każdą ograniczoną kolorową algebrą Liego możemy związać ograniczoną uniwersalną algebrę obwiednią.

Definicja 1.4.11. Niech $\mathbf{k}$ będzie ciałem dodatniej charakterystyki i $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ - ograniczoną kolorową algebrą Liego. Algebrę łączną $u(L) = \bigoplus_{g \in G} U_g$ z jedynką zgradowaną przez grupę G wraz z homomorfizmem $\iota \colon L \to U(L)$ ograniczonych kolorowych algebr Liego nazywamy *ograniczoną uniwersalną algebrą obwiednią*, jeśli dla dowolnej algebry łącznej $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ z jedynką zgradowanej przez grupę G i dowolnego homomorfizmu $\varphi \colon L \to A$ ograniczonych kolorowych algebr Liego istnieje dokładnie jeden jednorodny homomorfizm $f \colon u(L) \to A$ algebr z jedynką taki, że $f \circ \iota = \varphi$, czyli następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & u(L) \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Twierdzenie 1.4.12. *Niech $\mathbf{k}$ będzie ciałem charakterystyki $p > 2$ i $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ - ograniczoną kolorową algebrą Liego z bazą złożoną z jednorodnych elementów $\{x_j \mid j \in J\}$, gdzie J jest liniowo uporządkowanym zbiorem indeksów. Wtedy ograniczona uniwersalna algebra obwiednia $u(L)$ posiada bazę złożoną z 1 oraz wszystkich elementów postaci $\iota(x_{j_1})^{\mu_1} \iota(x_{j_2})^{\mu_2} \ldots \iota(x_{j_n})^{\mu_n}$, gdzie $n \geq 1$, $j_i < j_{i+1}$, przy czym $1 \leq \mu_i \leq p-1$ dla $x_{j_i} \in \bigcup_{g \in G_+} L_g$ oraz $\mu_i = 1$ dla $x_{j_i} \in \bigcup_{g \in G_-} L_g$.*

W szczególności ι jest monomorfizmem ograniczonych kolorowych algebr Liego.

Z wcześniejszych rozważań wynika, że jeśli $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ jest skończenie wymiarową ograniczoną kolorową algebrą Liego nad ciałem $\mathbf{k}$ charakterystyki $p > 2$, to skośny pierścień grupowy $u(L) \star G$ jest algebrą Hopfa wymiaru $2^m \cdot p^n \cdot |G|$, gdzie $m = \dim_{\mathbf{k}} \bigoplus_{g \in G_-} L_g$ i $n = \dim_{\mathbf{k}} \bigoplus_{g \in G_+} L_g$.

Załóżmy teraz, że na algebrę łączną $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ zgradowaną przez grupę G działa kolorowa ϵ-algebra Liego $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ (ograniczona kolorowa ϵ-algebra Liego L, gdy $\mathrm{char}\mathbf{k} > 2$). Oznaczmy przez H skośny pierścień grupowy $U(L) \star G$ lub - w przypadku, gdy $\mathrm{char}\mathbf{k} > 2$ - $u(L) \star G$. Łatwe obliczenia pokazują, że A jest H-modułową algebrą z działaniem określonym wzorem:

$$g \cdot a = \epsilon(g, h)a$$

$$x \cdot a = \psi(x)(a),$$

gdzie $g, h \in G$, $a \in A_h$, $x \in L$ oraz $\psi \colon L \to \mathfrak{Der}(A, \epsilon)$ jest homomorfizmem kolorowych algebr Liego (odpowiednio, ograniczonych kolorowych algebr Liego) indukowanym przez działanie L na A. Ponadto, niezmienniki działania algebry Hopfa H na algebrę A pokrywają się z punktami stałymi działania grupy G na podalgebrę A^L: $A^H = (A^L)^G$. Przypomnijmy dalej, że *wymiar działania L na A jest skończony* i wynosi N, jeśli obraz podalgebry $\widehat{L} \subseteq H$, generowanej przez L, w algebrze $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(A)$ ma skończony wymiar równy N. Dla skończenie wymiarowej kolorowej algebry Liego L ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy jednorodne elementy algebry L działają na A poprzez $\mathbf{k}$-algebraiczne skośne różniczkowania. Warunek ten spełniają wszystkie skończenie wymiarowe ograniczone kolorowe algebry Liego.

Uwaga 1.4.13. Badając działanie kolorowej ϵ-algebry Liego $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ na algebrę $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ możemy bez straty ogólności ograniczyć nasze rozważania do przypadku, gdy podgrupa $G^\perp = \{g \in G \mid \epsilon(g, G) = 1\}$ jest trywialna. Możemy tak zrobić, ponieważ gradacja każdej z algebr: L i A przez grupę G w sposób naturalny pociąga za sobą gradację przez grupę ilorazową $G/G^\perp$ i interesujące nas własności algebr: L i $\mathfrak{Der}(A, \epsilon)$ zostają zachowane. Wówczas:

1. Charakterystyka ciała $\mathbf{k}$ nie dzieli rzędu grupy G.

2. Dla każdego $g \in G$ zachodzi równość:

$$A_g = \{a \in A \mid \phi(h)(a) = \epsilon(h, g)a \text{ dla wszystkich } h \in G\},$$

   gdzie ϕ jest zdefiniowanym w Przykładzie 1.4.7 homomorfizmem grup.

3. Dla każdego $g \in G$ zachodzi równość:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_g = \{\delta \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(A) \mid &\delta(ab) = \delta(a)b + \phi(g)(a)\delta(b), \\ &\delta \circ \phi(h) = \epsilon(g, h)\phi(h) \circ \delta \text{ dla wszystkich } a, b \in A, h \in G\}, \end{aligned}$$

   gdzie $\mathfrak{D}_g$ jest zdefiniowanym w Przykładzie 1.4.7 zbiorem $\phi(g)$-różniczkowań algebry A stopnia g.

Rozdział 2

Pierścienie ułamków Martindale'a

W rozprawie badamy działanie punktowych algebr Hopfa na algebry łączne. Nasze podstawowe narzędzia badawcze stanowią ułamki symetryczne i ich centralne lokalizacje. W rozdziale tym przypominamy najważniejsze dla nas rezultaty dotyczące pierścienia ułamków symetrycznych oraz prezentujemy nowe własności tego pierścienia w kontekście działania algebr Hopfa. Wyniki własne Rozdziałów 2 oraz 3 pochodzą z pracy [GH04].

2.1 Uwagi o modułach

Definicja 2.1.1. Niech R będzie pierścieniem z jedynką.

1. R-moduł M nazywamy *injektywnym*, jeśli dla dowolnego monomorfizmu $\varphi\colon N \hookrightarrow K$ R-modułów i dowolnego R-homomorfizmu $\psi\colon N \to M$ istnieje R-homomorfizm $\psi'\colon K \to M$ dla którego zachodzi równość $\psi' \circ \varphi = \psi$, czyli następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"] & K \arrow[ul, "\psi'"'] \end{tikzcd}$$

2. Pierścień R nazywamy *samoinjektywnym*, jeśli R jest injektywny jako regularny R-moduł.

Twierdzenie 2.1.2. (por. [La99, Podroz. 3A]) *Niech R będzie pierścieniem z jedynką. Dla R-modułu M następujące warunki są równoważne:*

1. M jest injektywnym R-modułem.

2. *Dla każdego R-modułu N i każdego R-monomorfizmu $\varphi\colon M \hookrightarrow N$, R-moduł $\varphi(M)$ wydziela się jako składnik prosty w N.*

3. (Kryterium Baer'a) *Dla każdego istotnego lewostronnego ideału J pierścienia R i każdego R-homomorfizmu $\psi\colon J \to M$ istnieje element $m \in M$ taki, że $\psi(x) = xm$, gdzie $x \in J$.*

Uwaga 2.1.3. Z Kryterium Baer'a łatwo widać, że jeśli N jest R-podmodułem injektywnego R-modułu M, to dla każdego istotnego lewostronnego ideału J pierścienia R i każdego R-homomorfizmu $\psi\colon J \to N$ istnieje element $m \in M$ taki, że $\psi(x) = xm \in N$ dla wszystkich $x \in J$.

Definicja 2.1.4. Niech R będzie pierścieniem z jedynką i M - R-modułem. Element $m \in M$ nazywamy *singularnym*, jeśli anihilator $\mathrm{ann}_R(m)$ jest istotnym lewostronnym ideałem pierścienia R. Zbiór wszystkich elementów singularnych R-modułu M nazywamy *singularnym R-podmodułem* i oznaczamy przez $\mathcal{S}({}_RM)$. Mówimy, że M jest *niesingularnym R-modułem*, jeśli $\mathcal{S}({}_RM) = 0$. Wreszcie o pierścieniu R powiemy, że jest *lewostronnie niesingularny*, jeśli R traktowany jako regularny R-moduł jest niesingularny.

Udowodnimy teraz lemat, z którego skorzystamy w następnych rozdziałach.

Lemat 2.1.5. *Niech R będzie pierścieniem z jedynką.*

1. *Jeśli $\varphi\colon M \to N$ jest homomorfizmem injektywnego R-modułu M na niesingularny R-moduł N, to N jest injektywny.*

2. *Jeśli M_1 i M_2 są R-podmodułami niesingularnego R-modułu M injektywnymi jako R-moduły, to R-moduł $M_1 \cap M_2$ jest injektywny.*

Dowód. 1. Zauważmy, że jeśli φ nie jest monomorfizmem, to $\ker\varphi$ jest injektywnym R-modułem. Aby to udowodnić, weźmy dowolny istotny lewostronny ideał J pierścienia R oraz dowolny R-homomorfizm $\psi\colon J \to \ker\varphi$. Na mocy Uwagi 2.1.3, istnieje element $m \in M$ dla którego zachodzi równość:

$$J\varphi(m) = \varphi(Jm) = \varphi(\psi(J)) = 0.$$

Wynika z niej, że $\mathrm{ann}_R(\varphi(m))$ jest istotnym lewostronnym ideałem pierścienia R, zatem $\varphi(m) \in \mathcal{S}({}_RN) = 0$. Tak więc $m \in \ker\varphi$ i na mocy Kryterium Baer'a, $\ker\varphi$ jest injektywnym R-modułem. $\ker\varphi$ wydziela się więc jako składnik prosty w M. Dowodzi to, że również N jest injektywnym R-modułem.

2. Niech J będzie istotnym lewostronnym ideałem pierścienia R i $\psi\colon J \to M_1 \cap M_2$ - R-homomorfizmem. Wtedy, zgodnie z Uwagą 2.1.3, istnieją elementy $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ takie, że $xm_1 = xm_2$ dla wszystkich $x \in J$. Mamy zatem $J(m_1 - m_2) = 0$ z czego wynika, że $\mathrm{ann}_R(m_1 - m_2)$ jest istotnym lewostronnym ideałem pierścienia R i tym samym $m_1 - m_2 \in \mathcal{S}({}_RM) = 0$. Tak więc $m_1 = m_2 \in M_1 \cap M_2$ i ostatecznie $M_1 \cap M_2$ jest injektywnym R-modułem.

□

2.2 Konstrukcja pierścieni ułamków Martindale'a

Przypomnijmy, że niezerowy pierścień R nazywamy *półpierwszym*, jeśli spełnia następujące równoważne warunki:

1. R nie posiada niezerowych nilpotentnych ideałów.
2. R nie posiada niezerowych nilpotentnych ideałów lewostronnych.
3. R nie posiada niezerowych nilpotentnych ideałów prawostronnych.
4. dla każdego $r \in R$ prawdziwa jest implikacja: $rRr = 0 \Rightarrow r = 0$.

Istotne dla nas własności ideałów pierścieni półpierwszych przedstawia następujące stwierdzenie (por. [La99, Podroz. 11D]).

Stwierdzenie 2.2.1. *Niech I będzie ideałem półpierwszego pierścienia R. Wówczas:*

1. $\operatorname{ann}_R(I) = \mathrm{l.ann}_R(I) = \mathrm{r.ann}_R(I)$.
2. $I \cap \operatorname{ann}_R(I) = 0$.
3. $\operatorname{ann}_R(I) = 0 \Leftrightarrow$ *I jest istotnym ideałem R* $\Leftrightarrow$ *I jest istotny jako jednostronny ideał R.*
4. $I \oplus \operatorname{ann}_R(I)$ *jest istotnym ideałem pierścienia R.*

Dla danego półpierwszego pierścienia R zbiór wszystkich ideałów spełniających (równoważne) warunki z podpunktu trzeciego Stwierdzenia 2.2.1 będziemy oznaczać przez $\mathfrak{F}$. Zauważmy, że zbiór $\mathfrak{F}$ jest zamknięty ze względu na skończone mnożenie, skończone przecięcie oraz inkluzję.

Przypomnijmy dalej, że R jest *pierścieniem pierwszym*, jeśli $R \neq 0$ oraz dla dowolnych niezerowych ideałów I, J pierścienia R zachodzi $IJ \neq 0$.

Niezerowy pierścień, który nie posiada niezerowych elementów nilpotentnych nazywamy *zredukowanym.*

Niech teraz R będzie dowolnym pierścieniem. Ideał P pierścienia R nazywamy *pierwszym*, jeśli $P \neq R$ oraz R/P jest pierścieniem pierwszym. Mówimy, że ideał pierwszy P jest *minimalny*, jeśli jest minimalny w zbiorze wszystkich ideałów pierwszych pierścienia R. W pierścieniu półpierwszym przecięcie wszystkich minimalnych ideałów pierwszych jest trywialne.

Zajmiemy się teraz pewnym szczególnym rodzajem pierścieni ułamków - tak zwanymi pierścieniami ułamków Martindale'a. Po raz pierwszy skonstruował je W.S. Martindale [Ma69] dla pierścieni pierwszych. Z kolei S.A. Amitsur [Am72] rozszerzył je na dowolne pierścienie. My jednakże ograniczymy się do ułamków Martindale'a pierścieni półpierwszych. Konstrukcja którą podamy pochodzi od Amitsura.

Przyjmijmy $\mathfrak{X} = \bigcup_{I\in\mathfrak{F}} \mathrm{Hom}_R(I,R)$. Dla podkreślenia o jaki ideał chodzi, elementy zbioru $\mathfrak{X}$ będziemy zapisywać w postaci (I,φ), gdzie $I \in \mathfrak{F}$ i $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(I,R)$. W zbiorze $\mathfrak{X}$ wprowadzamy relację. Dwie pary (I,φ), (J,ψ) są ze sobą w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $K \in \mathfrak{F}$ taki, że $K \subseteq I \cap J$ oraz dla każdego $x \in K$ zachodzi równość $\varphi(x) = \psi(x)$. Relacja ta jest w oczywisty sposób relacją równoważności. Oznaczmy przez $Q^l(R)$ zbiór wszystkich klas abstrakcji. Klasę abstrakcji wyznaczoną przez parę (I,φ) będziemy oznaczać przez $[I,\varphi]$. W zbiorze $Q^l(R)$ definiujemy działania dodawania oraz mnożenia:

$$[I,\varphi] + [J,\psi] = [I \cap J, \varphi + \psi]$$
$$[I,\varphi] \cdot [J,\psi] = [JI, \psi \circ \varphi].$$

Jak nietrudno przekonać się, tak zdefiniowane działania zadają na $Q^l(R)$ strukturę pierścienia z jedynką. Nazywamy go *pierścieniem lewostronnych ułamków Martindale'a* pierścienia R. Dla dowolnego elementu $a \in R$ oznaczmy teraz przez r_a prawostronne mnożenie $x \mapsto xa$, gdzie $x \in R$. Można pokazać, że odwzorowanie $a \mapsto [R, r_a]$ wyznacza włożenie $R \hookrightarrow Q^l(R)$. Pozwala nam to utożsamić R z pewnym podpierścieniem pierścienia $Q^l(R)$. Zauważmy też, że dla dowolnego $q = [I,\varphi] \in Q^l(R)$ oraz dowolnego $a \in I$ zachodzi równość $aq = \varphi(a)$. Mamy więc inkluzję $Iq \subseteq R$.

Może tak zdarzyć się, że pierścień lewostronnych ułamków Martindale'a jest zbyt duży i nie wszystkie własności pierścienia R przeniosą się na pierścień $Q^l(R)$. Tak jest na przykład z własnością bycia pierścieniem zredukowanym. Wygodne rozwiązanie tego problemu zaproponował V.K. Kharchenko [Kh77]. Zdefiniował on mianowicie w pierścieniu $Q^l(R)$ następujący podzbiór:

$$Q^s(R) = \left\{ q \in Q^l(R) \mid qJ \subseteq R \text{ dla pewnego } J \in \mathfrak{F} \right\}.$$

Bezpośrednio sprawdza się, że $Q^s(R)$ jest podpierścieniem pierścienia $Q^l(R)$ z tą samą jedynką. Nazywamy go *pierścieniem ułamków symetrycznych.*

Istnieje także inna, aksjomatyczna, charakteryzacja pierścienia ułamków symetrycznych inspirowana pracą D.S. Passmana [Pa87] (por. [BMM96, Stw. 2.2.3], [La99, Stw. 14.25]).

Twierdzenie 2.2.2. *Niech R będzie pierścieniem półpierwszym. Dodatkowo oznaczmy $Q = Q^s(R)$. Wówczas Q spełnia następujące warunki:*

1. *Q jest pierścieniem z jedynką.*
2. *R jest podpierścieniem Q. Jeśli dodatkowo R jest pierścieniem z jedynką, to R jest podpierścieniem Q z tą samą jedynką.*
3. *Dla każdego $q \in Q$ istnieją $I, J \in \mathfrak{F}$ takie, że $Iq \subseteq R$ i $qJ \subseteq R$.*
4. *Dla każdego $q \in Q$ i każdego $I \in \mathfrak{F}$, jeśli $qI = 0$ lub $Iq = 0$, to $q = 0$.*

5. *Niech $I, J \in \mathfrak{F}$. Niech ponadto $\varphi\colon I \to R$ i $\psi\colon J \to R$ będą homomorfizmami R-modułów lewo- i prawostronnych, odpowiednio, takimi że dla dowolnych $x \in I$, $y \in J$ zachodzi równość $\varphi(x)y = x\psi(y)$. Wtedy istnieje $q \in Q$ taki, że $\varphi(x) = xq$ i $\psi(y) = qy$ dla wszystkich $x \in I$, $y \in J$.*

Odwrotnie, jeśli dowolny pierścień Q spełnia warunki 1-5, to istnieje izomorfizm $\sigma\colon Q \to Q^s(R)$ pierścieni z jedynką przekształcający identycznościowo podpierścień R.

Uwaga 2.2.3. Pierścień lewostronnych ułamków Martindale'a $Q^l(R)$ ma oczywiście swój prawostronny odpowiednik $Q^r(R)$.

Uwaga 2.2.4. Jeszcze inna definicja pierścienia prawostronnych ułamków Martindale'a, jako pewnego podpierścienia maksymalnego pierścienia prawostronnych ułamków, została przedstawiona w [La99, Podroz. 14B].

2.3 Znane własności pierścienia ułamków symetrycznych

Definicja 2.3.1. *Rozszerzonym centroidem C* półpierwszego pierścienia R nazywamy centrum pierścienia $Q^l(R)$.

Przypomnijmy, że dla dowolnych niepustych podzbiorów $X, Y \subseteq R$ przyjęliśmy oznaczenie $C_X(Y)$ na określenie centralizatora Y w X.

Stwierdzenie 2.3.2. *Przy powyższych oznaczeniach,*

1. *Przyjmijmy $q = [I, \varphi]$, gdzie $I \in \mathfrak{F}$ i $\varphi\colon I \to R$ jest homomorfizmem lewostronnych R-modułów. Wówczas $q \in C$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest homomorfizmem (R, R)-bimodułów.*

2. $C = C_{Q^l(R)}(R) = C_{Q^s(R)}(R) = \mathcal{Z}(Q^s(R))$.

Definicja 2.3.3. Dowolny pierścień R nazywamy *regularnym w sensie von Neumanna*, jeśli dla każdego $a \in R$ spełniony jest warunek: $a \in aRa$.

Poniżej przedstawione są najistotniejsze dla nas własności pierścienia ułamków symetrycznych. Ich uzasadnienie można znaleźć m.in. w monografiach S. Montgomery [Mo80], K.I. Beidara, W.S. Martindale'a i A.V. Mikhaleva, [BMM96], T.Y. Lama [La99].

Stwierdzenie 2.3.4. *Niech R będzie pierścieniem półpierwszym. Dodatkowo oznaczmy $Q = Q^s(R)$. Wtedy:*

1. *Q jest pierścieniem półpierwszym. Jeśli dodatkowo założymy, że R jest pierścieniem pierwszym (zredukowanym, dziedziną), to Q również.*

2. *R jest pierścieniem pierwszym wtedy i tylko wtedy, gdy C jest ciałem.*

3. *Dla dowolnego niepustego podzbioru $X \subseteq Q$ istnieje idempotent $e_X \in C$, wyznaczony w sposób jednoznaczny, taki że:*

$$\begin{aligned} \operatorname{ann}_C(X) &= C(1 - e_X) \\ \operatorname{ann}_Q(QXQ) &= Q(1 - e_X). \end{aligned}$$

4. *C jest regularnym w sensie von Neumanna i samoinjektywnym pierścieniem.*

5. *Q jest niesingularnym i injektywnym C-modułem.*

6. *Dla dowolnego injektywnego C-modułu $M \subseteq Q$ istnieje element $m \in M$ taki, że $\operatorname{ann}_C(M) = \operatorname{ann}_C(m)$.*

Znana własność pierścieni ułamków Martindale'a mówi, że każde różniczkowanie półpierwszej algebry A jednoznacznie przedłuża się do różniczkowania algebry $Q^s(A)$ (por. [BMM96, Stw. 2.5.1]). Załóżmy, że char$\mathbf{k} = 0$. Z Twierdzenia V.K. Kharchenki [Kh78] uogólnionego przez A. Leroy'a i J. Matczuka [LM85] (por. [BMM96, Tw. 7.9.7]) wynika, że jeśli A jest algebrą pierwszą z jedynką, to każde A-algebraiczne różniczkowanie algebry A po przedłużeniu do różniczkowania algebry $Q^s(A)$ staje się wewnętrzne i wobec tego działa trywialnie na centrum $\mathcal{Z}(A)$. Korzystając z Lematu J. Dixmiera uogólnimy teraz powyższe spostrzeżenie na algebry półpierwsze.

Lemat 2.3.5. ([Di74, Lemat 3.3.2]) *Niech A będzie dowolną algebrą charakterystyki 0 i δ - różniczkowaniem algebry A. Wtedy każdy minimalny ideał pierwszy algebry A jest δ-niezmienniczy.*

Wniosek 2.3.6. *Niech A będzie półpierwszą algebrą z jedynką charakterystyki 0. Wtedy każde A-algebraiczne różniczkowanie algebry A działa trywialnie na centrum $\mathcal{Z}(A)$.*

Dowód. Niech δ będzie A-algebraicznym różniczkowaniem algebry A. Zgodnie z Lematem 2.3.5, dla każdego minimalnego ideału pierwszego P algebry A zachodzi $\delta(P) \subseteq P$. Wynika z tego, że odwzorowanie $\overline{\delta}\colon A/P \to A/P$ zadane wzorem $\overline{\delta}(a+P) = \delta(a) + P$ jest dobrze zdefiniowanym A/P-algebraicznym różniczkowaniem algebry pierwszej A/P, tak więc $\overline{\delta}(\mathcal{Z}(A/P)) = 0$ i wobec tego $\delta(\mathcal{Z}(A)) \subseteq P$. Teza wniosku łatwo wynika teraz z półpierwszości algebry A.

□

2.4 Nowe własności pierścienia ułamków symetrycznych w kontekście działań algebr Hopfa

Ustalmy algebrę Hopfa H. Od tej pory do końca rozdziału A zawsze będzie półpierwszą H-modułową algebrą. Oznaczmy przez Q pierścień ułamków symetrycznych algebry A z rozszerzonym centroidem C. Dodatkowo załóżmy, że działanie H na A przedłuża się do działania H na Q. Oznaczmy wreszcie $C^H = C \cap Q^H$.

Lemat 2.4.1. *Przy powyższych oznaczeniach, C^H jest pierścieniem regularnym w sensie von Neumanna.*

Dowód. Niech $a \in C^H$. Na mocy Stwierdzenia 2.3.4, a można zapisać w postaci $a = a^2c$, gdzie $c \in C$. Oznaczmy $e = ca$. Wtedy dla każdego $h \in H$ zachodzi równość:

$$h \cdot e = h \cdot ca = (h \cdot c)a = (h \cdot c)a^2c = (h \cdot ca^2)c = (h \cdot a)c = \varepsilon(h)ac = \varepsilon(h)e.$$

Wynika z niej, że $e \in C^H$. Mamy:

$$h \cdot ce = (h \cdot c)e = (h \cdot c)ac = (h \cdot ca)c = (h \cdot e)c = \varepsilon(h)ec = \varepsilon(h)ce.$$

Tak więc $ce \in C^H$ co w połączeniu z równością $a^2ce = ae = a$ daje tezę.

□

Lemat 2.4.2. *Dla dowolnego niepustego H-niezmienniczego podzbioru $T \subseteq Q$ istnieje idempotent $e_T \in C^H$, wyznaczony w sposób jednoznaczny, taki że:*

$$\operatorname{ann}_{C^H}(T) = C^H(1 - e_T)$$
$$\operatorname{ann}_Q(QTQ) = Q(1 - e_T).$$

Dowód. Oznaczmy $I = QTQ$. Wówczas I jest H-niezmienniczym ideałem Q i na mocy Lematu 1.2.2, również $\operatorname{ann}_Q(I)$ jest H-niezmienniczym ideałem Q.

Ze Stwierdzenia 2.3.4 wynika, że istnieje idempotent $e_T \in C$, wyznaczony w sposób jednoznaczny, taki że $\operatorname{ann}_Q(I) = Q(1 - e_T)$. Pozostaje udowodnić, że $e_T \in Q^H$. Ponieważ I oraz $\operatorname{ann}_Q(I)$ są H-niezmiennicze, więc dla dowolnych $h \in H$, $i \in I$, $a \in \operatorname{ann}_Q(I)$ zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} (1 - e_T)i &= 0 \qquad & (1 - e_T)(h \cdot i) &= 0 \\ e_T a &= 0 \qquad & e_T(h \cdot a) &= 0 \end{aligned}$$

Z równości tych wynika, że:

$$e_T(h \cdot (i + a)) = e_T(h \cdot i) = h \cdot i = h \cdot e_T i = h \cdot e_T(i + a).$$

Mamy więc $e_T(h \cdot x) = h \cdot e_T x$ dla wszystkich elementów $h \in H$, $x \in I \oplus \operatorname{ann}_Q(I)$. Zauważmy dalej, że:

$$(h \cdot e_T)x = \sum h_1 \cdot e_T(S(h_2) \cdot x) = \sum h_1 S(h_2) \cdot e_T x = \varepsilon(h) e_T x.$$

Wynika z tego, że $h \cdot e_T - \varepsilon(h)e_T \in \mathrm{ann}_Q(I \oplus \mathrm{ann}_Q(I)) = 0$. Tak więc $e_T \in Q^H$.

Równość $\mathrm{ann}_{C^H}(T) = C^H(1 - e_T)$ wynika w prosty sposób z równości $q = q(1 - e_T)$ prawdziwej dla wszystkich $q \in \mathrm{ann}_Q(I)$.

□

Niech X będzie niepustym podzbiorem Q. Łatwe obliczenia pokazują, że:

$$H \cdot X = \{h \cdot x \mid h \in H, x \in X\}$$

jest H-niezmienniczym podzbiorem Q oraz $\mathrm{ann}_{C^H}(H \cdot X) = \mathrm{ann}_{C^H}(X)$. Stosując teraz Lemat 2.4.2 dostajemy następujący wniosek.

Wniosek 2.4.3. *Dla dowolnego niepustego podzbioru $X \subseteq Q$ istnieje idempotent $e_X \in C^H$, wyznaczony w sposób jednoznaczny, taki że $\mathrm{ann}_{C^H}(X) = C^H(1 - e_X)$.*

Stwierdzenie 2.4.4. *Niech H będzie algebrą Hopfa i A - półpierwszą H-modułową algebrą taką, że działanie H na A przedłuża się do działania H na Q. Niech ponadto $\mathfrak{A}$ będzie podalgebrą Hopfa lub koidealem H. Wtedy:*

1. *C^H jest regularnym w sensie von Neumanna i samoinjektywnym pierścieniem.*
2. *Każdy injektywny C-moduł $M \subseteq Q$ jest injektywny jako C^H-moduł.*
   W szczególności C i Q są injektywnymi C^H-modułami.
3. *Jeśli B jest $\mathfrak{A}$-niezmienniczą podalgebrą Q injektywną jako C^H-moduł, to również $B^{\mathfrak{A}}$ oraz $\mathcal{Z}(B^{\mathfrak{A}})$ są injektywnymi C^H-modułami.*

Dowód. Przed dowodem podpunktów 1 i 2 rozważmy następującą, wspólną dla obu przypadków, sytuację. Niech M będzie injektywnym C-modułem zawartym w Q i N - jego C^H-podmodułem. Niech ponadto J będzie istotnym ideałem C^H i $\psi\colon J \to N$ - C^H-homomorfizmem. Jasnym jest, że każdy niezerowy ideał pierścienia regularnego w sensie von Neumanna zawiera niezerowe idempotenty. W szczególności J zawiera niezerowe idempotenty. Weźmy maksymalny zbiór $T \subseteq J$ niezerowych parami ortogonalnych idempotentów. Twierdzimy, że $\mathrm{ann}_{C^H}(T) = 0$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Z Wniosku 2.4.3 wynika natychmiast, że istnieje niezerowy idempotent $e \in C^H$ taki, że $\mathrm{ann}_{C^H}(T) = C^H e$. Równocześnie, ponieważ J jest istotnym ideałem C^H, więc istnieje element $j \in J$ dla którego $je \neq 0$. Weźmy wreszcie element $c \in C^H$ taki, że $je = jecje$. Otrzymujemy w ten sposób niezerowy idempotent $cje \in J$ anihilujący zbiór T. Z maksymalności T wynika, że $cje \in T$ co prowadzi do sprzeczności: $cje = (cje)^2 \in cjeT = 0$. Dowiedliśmy tym samym, że $\mathrm{ann}_{C^H}(T) = 0$ z czego wynika w prosty sposób, że $\mathrm{ann}_Q(T) = 0$. Jest teraz oczywiste, że $CT = \sum_{t \in T} Ct$ jest istotnym ideałem C. Zauważmy przy tym, że CT jest w istocie sumą prostą. Wynika z tego, że odwzorowanie $\overline{\psi}\colon CT \to M$ zadane wzorem $\overline{\psi}(\sum_{t \in T} c_t t) = \sum_{t \in T} c_t \psi(t)$ jest dobrze zdefiniowanym C-homomorfizmem i ponieważ z założenia M jest injektywnym C-modułem, więc na mocy Kryterium Baer'a, istnieje element $m \in M$ taki, że $\overline{\psi}(x) = xm$ dla wszystkich $x \in CT$. W szczególności dla każdego $y \in C^H T$ zachodzi $\psi(y) = \overline{\psi}(y) = ym$. Niech $a \in J$. Z ostatniej równości wynika, że:

$$y\psi(a) = a\psi(y) = aym = yam,$$

czyli $\psi(a) - am \in \mathrm{ann}_Q(C^H T) = 0$. Pokazaliśmy tym samym, że istnieje element $m \in M$ taki, że $\psi(a) = am \in N$ dla wszystkich $a \in J$.

Zastosujemy teraz powyższe spostrzeżenie do udowodnienia podpunktów 1 i 2.

1. Przyjmijmy $N = C^H$, $M = C$. Dla dowodu wystarczy pokazać, że jeśli element $m \in C$ spełnia $Jm \subseteq C^H$, to $m \in C^H$. Niech $a \in J$. Wtedy dla każdego $h \in H$ zachodzi równość:

$$a(h \cdot m) = h \cdot am = \varepsilon(h)am.$$

Wynika z niej, że $h \cdot m - \varepsilon(h)m \in \mathrm{ann}_Q(J) = 0$ i wobec tego $m \in C^H$.

Podpunkt **2** wynika bezpośrednio ze spostrzeżenia na początku dowodu zastosowanego do przypadku $N = M$.

Do udowodnienia podpunktu **3** skorzystamy z Uwagi 2.1.3. Przypadek $N = B^{\mathfrak{A}}$, $M = B$ łatwo dowodzi się w oparciu o argument analogiczny jak w dowodzie podpunktu pierwszego. Z kolei dla $N = \mathcal{Z}(B^{\mathfrak{A}})$, $M = B$ wystarczy pokazać, że jeśli element $m \in B^{\mathfrak{A}}$ spełnia $Jm \subseteq \mathcal{Z}(B^{\mathfrak{A}})$, to $m \in \mathcal{Z}(B^{\mathfrak{A}})$. Niech $a \in J$ i $q \in B^{\mathfrak{A}}$. Wówczas:

$$a(mq - qm) = (am)q - (aq)m = q(am) - (qa)m = 0.$$

Z równości tej wynika, że $mq - qm \in \mathrm{ann}_Q(J) = 0$ i wobec tego $m \in \mathcal{Z}(B^{\mathfrak{A}})$. Dowód stwierdzenia został tym samym zakończony.

□

Lemat 2.4.5.

1. *Q jest niesingularnym C^H-modułem.*
2. *Każdy lewostronny ideał Q skończenie generowany jako Q-moduł jest injektywnym C^H-modułem.*

Dowód. 1. Przypuśćmy, że $\mathcal{S}({}_{C^H}Q) \neq 0$. Ustalmy niezerowy element $x \in \mathcal{S}({}_{C^H}Q)$. Z Wniosku 2.4.3 wynika, że istnieje niezerowy idempotent $e_x \in C^H$ dla którego $\mathrm{ann}_{C^H}(x) = C^H(1 - e_x)$ jest istotnym ideałem C^H. Prowadzi to do sprzeczności: $C^H(1 - e_x) \cap C^H e_x \neq 0$. Udowodniliśmy tym samym, że $\mathcal{S}({}_{C^H}Q) = 0$.

2. Zauważmy, że dla każdego elementu $q \in Q$, lewostronny ideał Qq traktowany jako C^H-moduł jest niesingularnym obrazem injektywnego C^H-modułu Q (por. Stwierdzenie 2.4.4) przy C^H-homomorfizmie $Q \to Qq$ zadanym wzorem $x \mapsto xq$. Na mocy Lematu 2.1.5, Qq jest injektywnym C^H-modułem. Jasnym jest teraz, że iloczyn prosty skończonej liczby lewostronnych ideałów $Qq_1 \times Qq_2 \times \ldots \times Qq_n$ jest injektywnym C^H-modułem. Łatwo stąd widać już, że również $Qq_1+Qq_2+\ldots+Qq_n$ jest injektywnym C^H-modułem.

□

Lemat 2.4.6. *Dla dowolnego injektywnego C^H-modułu $M \subseteq Q$ istnieje element $m \in M$ taki, że* $\operatorname{ann}_{C^H}(M) = \operatorname{ann}_{C^H}(m)$.

Dowód. Rozważmy zbiór $\mathcal{M}$ wszystkich uporządkowanych par (m, e_m), gdzie $m \in M$ i e_m jest zdefiniowanym we Wniosku 2.4.3 idempotentem. W zbiorze $\mathcal{M}$ definiujemy relację $\preceq$ w sposób następujący:

$$(m, e_m) \preceq (n, e_n) \Leftrightarrow m = e_m n.$$

Zauważmy najpierw, że z równości $m = e_m n$ wynika $e_m = e_m e_n$ i tym samym $C^H e_m \subseteq C^H e_n$. Rzeczywiście, jeśli $m = e_m n$, to otrzymujemy:

$$(1 - e_n)m = (1 - e_n)e_m n = e_m(1 - e_n)n = 0.$$

Tak więc $1 - e_n \in \operatorname{ann}_{C^H}(m) = C^H(1 - e_m)$. Jasnym jest teraz, że $(1 - e_n)e_m = 0$.

Bezpośrednio sprawdza się, że $(\mathcal{M}, \preceq)$ jest zbiorem uporządkowanym. Pokażemy teraz, że każdy liniowo uporządkowany podzbiór $\mathcal{M}$ posiada ograniczenie górne. Weźmy dowolny liniowo uporządkowany podzbiór $\{(m_\alpha, e_{m_\alpha})\}_\alpha$ zbioru $\mathcal{M}$. Oznaczmy $I = \bigcup_\alpha C^H e_{m_\alpha}$. Z wcześniejszego spostrzeżenia wynika, że I jest ideałem C^H. Rozważmy następnie odwzorowanie $\psi \colon I \oplus \operatorname{ann}_{C^H}(I) \to M$ określone wzorem $\psi(ae_{m_\alpha} + x) = am_\alpha$, gdzie $a \in C^H$, $x \in \operatorname{ann}_{C^H}(I)$. Zauważmy, że jeśli $ae_{m_\alpha} = be_{m_\beta}$ dla $(m_\alpha, e_{m_\alpha}) \preceq (m_\beta, e_{m_\beta})$ i $a, b \in C^H$, to:

$$am_\alpha = a(e_{m_\alpha} m_\beta) = (ae_{m_\alpha})m_\beta = (be_{m_\beta})m_\beta = b(e_{m_\beta} m_\beta) = bm_\beta.$$

Wynika z tego, że ψ jest dobrze zdefiniowanym C^H-homomorfizmem i ponieważ z założenia M jest injektywnym C^H-modułem, więc na mocy Kryterium Baer'a istnieje element $m \in M$ taki, że dla każdego α zachodzi:

$$m_\alpha = \psi(e_{m_\alpha}) = e_{m_\alpha} m.$$

To oznacza, że $(m_\alpha, e_{m_\alpha}) \preceq (m, e_m)$ i para (m, e_m) jest ograniczeniem górnym łańcucha $\{(m_\alpha, e_{m_\alpha})\}_\alpha$.

Na mocy Lematu Zorna, uporządkowany zbiór $(\mathcal{M}, \preceq)$ posiada element maksymalny. Oznaczmy go przez (m_0, e_{m_0}). Pokażemy na koniec, że $\operatorname{ann}_{C^H}(M) = \operatorname{ann}_{C^H}(m_0)$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieje element $m \in M$ dla którego $(1 - e_{m_0})m \neq 0$. Przyjmijmy $n = (1 - e_{m_0})m$. Wtedy $e_{m_0} n = 0$ i ostatecznie $m_0 = e_{m_0}(m_0 + n)$ co dowodzi sprzeczności: $(m_0, e_{m_0}) \preceq (m_0 + n, e_{m_0+n})$ oraz $(m_0, e_{m_0}) \neq (m_0 + n, e_{m_0+n})$.

□

2.5 Centralne lokalizacje pierścienia ułamków symetrycznych w kontekście działań algebr Hopfa

Przypomnijmy, że podzbiór S pierścienia R z jedynką jest *multiplikatywnie domknięty*, jeśli $0 \notin S$, $1 \in S$ oraz dla dowolnych $s_1, s_2 \in S$ zachodzi $s_1 s_2 \in S$.

Definicja 2.5.1. Niech R będzie pierścieniem z jedynką. Multiplikatywnie domknięty podzbiór $S \subseteq R$ nazywamy *zbiorem lewostronnych mianowników*, jeżeli spełnia następujące warunki:

1. dla dowolnego elementu $r \in R$ prawdziwa jest implikacja:

$$S \cap \mathrm{r.ann}_R(r) \neq \emptyset \Rightarrow S \cap \mathrm{l.ann}_R(r) \neq \emptyset.$$

2. S jest *lewostronnym zbiorem Orego*, tj. dla dowolnych elementów $s \in S$, $r \in R$ zachodzi:

$$Rs \cap Sr \neq \emptyset.$$

Definicja 2.5.2. Niech R będzie pierścieniem z jedynką i $S \subseteq R$ - multiplikatywnie domkniętym podzbiorem. Pierścień $S^{-1}R$ nazywamy *pierścieniem lewostronnych ułamków względem podzbioru* S, jeżeli istnieje homomorfizm $\eta_S \colon R \to S^{-1}R$ pierścieni z jedynką taki, że:

1. dla każdego $s \in S$ element $\eta_S(s)$ jest odwracalny w $S^{-1}R$.

2. każdy element z $S^{-1}R$ można przedstawić w postaci $\eta_S(s)^{-1}\eta_S(r)$, gdzie $s \in S$ i $r \in R$.

3. $\ker \eta_S = \{r \in R \mid sr = 0 \text{ dla pewnego } s \in S\}$.

Twierdzenie 2.5.3. (por. [La99, Tw. 4.10.6]) *Niech R będzie pierścieniem z jedynką i $S \subseteq R$ - multiplikatywnie domkniętym podzbiorem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *S jest zbiorem lewostronnych mianowników.*

2. *Istnieje pierścień lewostronnych ułamków $S^{-1}R$ względem podzbioru S.*

Można pokazać, że jeśli $S \subseteq R$ jest zbiorem lewostronnych mianowników, to odwzorowanie $\eta_S \colon R \to S^{-1}R$ posiada następującą własność. Niech $\mu \colon R \to R'$ będzie homomorfizmem pierścieni z jedynką takim, że dla każdego $s \in S$ element $\mu(s)$ jest odwracalny w R'. Wtedy istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\mu' \colon S^{-1}R \to R'$ pierścieni z jedynką dla którego zachodzi równość $\mu' \circ \eta_S = \mu$, czyli poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\eta_S"] \arrow[dr, "\mu"'] & S^{-1}R \arrow[d, "\mu'"] \\ & R' \end{tikzcd}$$

Łatwo widać teraz, że jeśli pierścień lewostronnych ułamków $S^{-1}R$ istnieje, to jest on wyznaczony z dokładnością do izomorfizmu.

Jest rzeczą oczywistą, że każdy multiplikatywnie domknięty podzbiór $S \subseteq \mathcal{Z}(R)$ jest zbiorem lewostronnych mianowników. W takim przypadku pierścień lewostronnych ułamków $S^{-1}R$ nazywamy *centralną lokalizacją* i oznaczamy symbolem R_S.

Ważną rolę w dalszej części pracy odegrają centralne lokalizacje Q_S algebry Q względem maksymalnych ideałów podalgebry C^H. Dla dowolnie wybranego maksymalnego ideału P algebry C^H oznaczmy przez S multiplikatywnie domknięty podzbiór $C^H \setminus P$. Zauważmy, że wtedy:

$$\bigcap \left\{ \ker \eta_S \mid P \text{ jest maksymalnym ideałem } C^H \right\} = 0.$$

Rzeczywiście, dla każdego niezerowego elementu $q \in Q$ zachodzi $\operatorname{ann}_{C^H}(q) \neq C^H$. Możemy zatem rozważyć maksymalny ideał P algebry C^H zawierający $\operatorname{ann}_{C^H}(q)$. Dla tak wyznaczonego P mamy $\eta_S(q) \neq 0$.

Stwierdzenie 2.5.4. *Niech H będzie algebrą Hopfa i A - półpierwszą H-modułową algebrą taką, że działanie H na A przedłuża się do działania H na Q. Niech ponadto B będzie podalgebrą Q zawierającą C^H i injektywną jako C^H-moduł. Wreszcie niech $\mathfrak{A}$ będzie podalgebrą Hopfa lub koideałem H. Wtedy dla każdego multiplikatywnie domkniętego podzbioru $S \subseteq C^H$ mamy:*

1. *Jeśli B jest półpierwsza, to B_S również.*
2. *$\mathcal{Z}(B_S) = (\mathcal{Z}(B))_S$.*
3. *Jeśli B jest $\mathfrak{A}$-niezmiennicza i wymiar działania $\mathfrak{A}$ na B jest skończony, to działanie $\mathfrak{A}$ na B przedłuża się do działania $\mathfrak{A}$ na B_S, $(B_S)^{\mathfrak{A}} = (B^{\mathfrak{A}})_S$ i $\mathcal{Z}((B_S)^{\mathfrak{A}}) = (\mathcal{Z}(B^{\mathfrak{A}}))_S$.*
4. *Jeśli wymiar działania H na Q jest skończony i $S = C^H \setminus P$, gdzie P jest maksymalnym ideałem C^H, to $(C^H)_S = (C_S)^H = C_S \cap (Q_S)^H$ jest centralnym podciałem algebry Q_S zawartym w centrum podalgebry $(Q_S)^{\mathfrak{A}}$.*

Dowód. Przyjmijmy oznaczenie $\overline{q} = \eta_S(q)$.

Aby udowodnić podpunkt **1** stwierdzenia wystarczy pokazać, że dla każdego elementu $b \in B$ z równości $\overline{bBb} = 0$ wynika $\overline{b} = 0$. Załóżmy, że $\overline{bBb} = 0$. Ponieważ bBb jest niesingularnym obrazem injektywnego C^H-modułu B przy C^H-homomorfizmie $B \to bBb$ zadanym wzorem $x \mapsto bxb$, więc na mocy Lematów 2.1.5 i 2.4.6, bBb jest injektywnym C^H-modułem i istnieje element $b_0 \in B$ taki, że $\operatorname{ann}_{C^H}(bBb) = \operatorname{ann}_{C^H}(bb_0b)$. Równocześnie ponieważ $\overline{bb_0b} = 0$, więc istnieje element $s \in S$ dla którego $sbb_0b = 0$. Mamy zatem:

$$s \in \operatorname{ann}_{C^H}(bb_0b) = \operatorname{ann}_{C^H}(bBb) = \operatorname{ann}_{C^H}(b),$$

przy czym ostatnia równość wynika z półpierwszości B. To oznacza, że $sb = 0$ i tym samym $\overline{b} = 0$.

2. Bezpośrednio widać, że $(\mathcal{Z}(B))_S \subseteq \mathcal{Z}(B_S)$. Pozostało do udowodnienia zawieranie przeciwne: $\mathcal{Z}(B_S) \subseteq (\mathcal{Z}(B))_S$. Weźmy dowolny element $\overline{b} \in \mathcal{Z}(B_S)$. Wtedy dla każdego $x \in B$ zachodzi równość $\overline{bx - xb} = 0$. Oznaczmy $M = \{bx - xb \mid x \in B\}$. Z rozważań analogicznych jak w dowodzie poprzedniego podpunktu wynika, że M jest injektywnym C^H-modułem (jako niesingularny obraz injektywnego C^H-modułu B przy C^H-homomorfizmie $B \to M$ zadanym wzorem $x \mapsto bx - xb$) i istnieje element $s \in S$ taki, że $sM = 0$. Mamy $sbx - xsb = 0$ dla wszystkich $x \in B$. Tak więc $sb \in \mathcal{Z}(B)$ i ostatecznie $\overline{b} = \overline{s}^{-1}\overline{sb} \in (\mathcal{Z}(B))_S$.

3. Bezpośrednio sprawdza się, że wzór $h \cdot \overline{s}^{-1}\overline{b} = \overline{s}^{-1}\overline{h \cdot b}$, gdzie $h \in \mathfrak{A}$, $s \in S$, $b \in B$, definiuje działanie $\mathfrak{A}$ na B_S.

Łatwo też widać, że $(B^{\mathfrak{A}})_S \subseteq (B_S)^{\mathfrak{A}}$. Dla dowodu inkluzji przeciwnej: $(B_S)^{\mathfrak{A}} \subseteq (B^{\mathfrak{A}})_S$ weźmy dowolny element $\overline{b} \in (B_S)^{\mathfrak{A}}$. Wtedy dla każdego $h \in \mathfrak{A}$ zachodzi równość $\overline{h \cdot b} = h \cdot \overline{b} = \varepsilon(h)\overline{b}$. Wynika z niej, że:

$$h \cdot s_h b = s_h(h \cdot b) = \varepsilon(h) s_h b,$$

dla pewnego $s_h \in S$. Przypomnijmy, że działanie algebry Hopfa H na algebrę Q indukuje homomorfizm $\pi \colon H \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(Q)$ algebr z jedynką. Oznaczmy przez T skończony podzbiór $\mathfrak{A}$ taki, że $\pi(T)$ jest zbiorem generatorów algebry $E(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(B)$ generowanej przez $\pi(\mathfrak{A})$. Przyjmijmy też $s = \prod_{h \in T} s_h$. Wówczas dla każdego $h \in T$ zachodzi $h \cdot sb = \varepsilon(h)sb$. Z równości tej wynika natychmiast, że $sb \in B^{\mathfrak{A}}$ i wobec tego $\overline{b} = \overline{s}^{-1}\overline{sb} \in (B^{\mathfrak{A}})_S$.

Dla dowodu równości $\mathcal{Z}((B_S)^{\mathfrak{A}}) = (\mathcal{Z}(B^{\mathfrak{A}}))_S$ zauważmy, że zgodnie ze Stwierdzeniem 2.4.4, $B^{\mathfrak{A}}$ jest injektywnym C^H-modułem. Stosując podpunkt 2 do algebry $B^{\mathfrak{A}}$ otrzymujemy $\mathcal{Z}((B_S)^{\mathfrak{A}}) = \mathcal{Z}((B^{\mathfrak{A}})_S) = (\mathcal{Z}(B^{\mathfrak{A}}))_S$.

4. Z podpunktów 2 i 3 stwierdzenia mamy następujące równości: $C_S = (\mathcal{Z}(Q))_S = \mathcal{Z}(Q_S)$ oraz $(Q_S)^H = (Q^H)_S$. Z równości tych wynika, że:

$$(C^H)_S = (C \cap Q^H)_S \subseteq C_S \cap (Q^H)_S = \mathcal{Z}(Q_S) \cap (Q_S)^H = (\mathcal{Z}(Q_S))^H = (C_S)^H.$$

Pozostało do udowodnienia zawieranie przeciwne: $(C_S)^H \subseteq (C^H)_S$. Weźmy dowolny element $\overline{c} \in (C_S)^H$. Ponieważ $(C_S)^H = C_S \cap (Q^H)_S$, więc dla pewnych elementów $s \in S$, $q \in Q^H$ zachodzi równość $\overline{c} = \overline{s}^{-1}\overline{q}$. Wynika z niej, że istnieje $s_1 \in S$ taki, że $s_1 sc = s_1 q \in C \cap Q^H = C^H$. Tak więc $\overline{c} = \overline{s_1 s}^{-1}\overline{s_1 sc} \in (C^H)_S$.

Niech teraz P będzie maksymalnym ideałem C^H. Oznaczmy $S = C^H \backslash P$. Jak wiadomo, lokalizacja pierścienia przemiennego i regularnego w sensie von Neumanna względem ideału maksymalnego jest ciałem (por. [La99, Tw. 3.71]). W szczególności $(C^H)_S$ jest ciałem.

□

Rozdział 3

Prawie nilpotentne działanie punktowych algebr Hopfa na algebry półpierwsze

Ustalmy przeliczalny nieskończony zbiór $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Przez $\mathbf{k}\langle X\rangle$ oznaczmy algebrę wielomianów nieprzemiennych zmiennych o współczynnikach z ciała $\mathbf{k}$. Jak wiadomo, 1 wraz ze wszystkimi jednomianami $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_d}$, gdzie $d \geq 1$, tworzą bazę $\mathbf{k}\langle X\rangle$. Stopniem jednomianu $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_d}$ nazywamy liczbę d. Elementowi 1 przyporządkowujemy stopień 0. Stopniem wielomianu nazywamy największy spośród stopni wszystkich jednomianów występujących z niezerowymi współczynnikami w przedstawieniu danego wielomianu.

Przez S_d będziemy oznaczać grupę symetryczną stopnia d.

Definicja 3.0.1.

1. *Wielomianem wieloliniowym* nazywamy wielomian postaci:

$$\textstyle\sum_{\sigma\in S_d} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(d)},$$

   gdzie $d \geq 1$, $\alpha_\sigma \in \mathbf{k}$.

2. *Wielomianem standardowym* nazywamy wielomian postaci:

$$s_d(x_1, x_2, \dots, x_d) = \textstyle\sum_{\sigma\in S_d} (\mathrm{sgn}\sigma) x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(d)},$$

   gdzie $\mathrm{sgn}\sigma$ oznacza znak permutacji σ.

Definicja 3.0.2. Niech $\omega(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbf{k}\langle X\rangle$. Powiemy, że *algebra A spełnia tożsamość wielomianową $\omega(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0$*, jeśli dla dowolnych elementów $a_1, a_2, \dots, a_d \in A$ zachodzi równość $\omega(a_1, a_2, \dots, a_d) = 0$.

Algebrę spełniającą nietrywialną tożsamość wielomianową nazywamy *PI-algebrą*.

3.1 Sformułowanie głównego rezultatu

Głównym celem tego i następnego rozdziału jest wyodrębnienie w klasie punktowych algebr Hopfa warunków gwarantujących zachowanie własności bycia PI-algebrą przy przejściu od podalgebry niezmienników A^H do algebry A na którą działa dana algebra Hopfa H. Przypomnijmy najpierw znane Twierdzenie Kharchenki o działaniu skończonych grup na algebry półpierwsze (por. [Mo80, Tw. 6.5 i 6.8]).

Twierdzenie 3.1.1. *Niech G będzie skończoną grupą automorfizmów półpierwszej algebry A. Załóżmy, że podalgebra punktów stałych A^G spełnia tożsamość wielomianową stopnia d. Wówczas algebra A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $d \cdot |G|$, jeśli zachodzi jeden z następujących warunków:*

1. ([Kh74]) *charakterystyka ciała* $\mathbf{k}$ *nie dzieli rzędu grupy G.*
2. ([Kh75]) *A jest algebrą zredukowaną.*

Przykład G.M. Bergmana, do którego nawiązaliśmy we Wstępie, dotyczy natomiast działania skończonej p-grupy G_p na algebrę pierwszą charakterystyki p, w którym podalgebra punktów stałych zawiera niezerowe ideały nilpotentne. Przez $\omega(\mathbf{k}G_p)$ oznaczmy ideał augmentacji modularnej algebry grupowej $\mathbf{k}G_p$. Jak wiadomo, $\omega(\mathbf{k}G_p)$ jest ideałem nilpotentnym (por. [Pa77, Lemat 3.1.6]). Równocześnie, $\omega(\mathbf{k}G_p)$ jest koideałem punktowej algebry Hopfa $\mathbf{k}G_p$ kowymiaru 1 rozpiętym nad ciałem $\mathbf{k}$ na skośnie prymitywnych elementach postaci $1-g$, gdzie $g \in G_p$, i normalizowanym przez grupę G_p: $\left[\sum_{g\in G_p} \alpha_g(1-g)\right] h = h \left[\sum_{g\in G_p} \alpha_g(1-h^{-1}gh)\right]$, gdzie $h \in G_p$, $\alpha_g \in \mathbf{k}$. Nawiązując do tytułu rozdziału, przez *prawie nilpotentne działanie algebry Hopfa* $\mathbf{k}G_p$ będziemy rozumieć nilpotentne działanie koideału $\omega(\mathbf{k}G_p)$.

W tym rozdziale udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.2. *Niech H będzie punktową algebrą Hopfa generowaną jako algebra przez skończoną grupę $G = G(H)$ elementów grupopodobnych oraz koideał $\mathfrak{A}$ rozpięty nad ciałem* $\mathbf{k}$ *na skośnie prymitywnych elementach i normalizowany przez algebrę grupową $\mathbf{k}G$, tj. $\mathfrak{A}\mathbf{k}G = \mathbf{k}G\mathfrak{A}$. Niech ponadto A będzie półpierwszą H-modułową algebrą taką, że:*

1. *$\mathfrak{A}$ działa nilpotentnie na A, tj. $\mathfrak{A}^n \cdot A = 0$ dla pewnego $n \geq 1$.*
2. *podalgebra niezmienników $A^{\mathfrak{A}}$ jest półpierwsza.*
3. *wymiar działania $\mathfrak{A}$ na A jest skończony i wynosi N.*

Wówczas A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $A^{\mathfrak{A}}$ jest PI-algebrą.

Przykład Bergmana pokazuje, że założenie o półpierwszości podalgebry $A^{\mathfrak{A}}$ jest istotne. Zauważmy, że warunek o normalizowaniu koideału $\mathfrak{A}$ przez algebrę grupową $\mathbf{k}G$ pociąga za sobą G-niezmienniczość podalgebry $A^{\mathfrak{A}}$. Punkty stałe działania grupy G na podalgebrę $A^{\mathfrak{A}}$ pokrywają się z niezmiennikami działania algebry Hopfa H na algebrę A: $(A^{\mathfrak{A}})^G = A^H$. Jako bezpośrednią konsekwencję Twierdzenia Kharchenki 3.1.1, zastosowanego do półpierwszej algebry $A^{\mathfrak{A}}$, otrzymujemy teraz następujący wniosek.

Wniosek 3.1.3. *Przy założeniach Twierdzenia 3.1.2, jeśli dodatkowo* $\operatorname{char}\mathbf{k} \nmid |G|$ *lub A jest algebrą zredukowaną, to A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A^H jest PI-algebrą.*

3.2 Znane fakty o PI-algebrach

Zanim przystąpimy do dowodu Twierdzenia 3.1.2 podamy najpierw te własności PI-algebr, z których będziemy korzystali. Ich uzasadnienie można znaleźć w prawie każdej monografii poświęconej teorii PI-algebr, m.in. D.S. Passmana [Pa77, Roz. 5].

Lemat 3.2.1. o linearyzacji (I. Kaplansky, [K48]; por. [Pa77, Lemat 5.1.1]) *Jeśli algebra A spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to A spełnia tożsamość wieloliniową stopnia d.*

Twierdzenie 3.2.2. (S.A. Amitsur, J. Levitzki, [AL50]; por. [Pa77, Lemat 5.1.9]) *Algebra macierzy $M_d(\mathbf{k})$ spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $2d$.*

Można pokazać, że $2d$ jest najmniejszym stopniem spośród stopni wszystkich nietrywialnych tożsamości wielomianowych spełnianych przez algebrę macierzy $M_d(\mathbf{k})$.

Dla dowolnego niezerowego pierścienia R i dowolnego R-modułu M przez $\operatorname{End}_R(M)$ oznaczyliśmy pierścień wszystkich R-endomorfizmów M. Przypomnijmy, że R-moduł M nazywamy *nieprzywiedlnym*, jeśli $RM \neq 0$ oraz M nie zawiera właściwych R-podmodułów. Zgodnie z Lematem Schura, dla nieprzywiedlnego R-modułu M, $\operatorname{End}_R(M)$ jest pierścieniem z dzieleniem. Przypomnijmy dalej, że R-moduł M nazywamy *wiernym*, jeśli $\operatorname{ann}_R(M) = 0$. Wreszcie, lewostronny ideał J pierścienia R nazywamy *regularnym*, jeśli istnieje element $a \in R$ taki, że $r - ra \in J$ dla wszystkich $r \in R$. Mówimy, że niezerowy pierścień R jest *lewostronnie prymitywny*, jeśli spełnia następujące równoważne warunki:

1. istnieje wierny i nieprzywiedlny R-moduł.

2. istnieje regularny i maksymalny ideał lewostronny pierścienia R nie zawierający niezerowych ideałów pierścienia R.

Łatwo widać, że każdy prosty pierścień z jedynką jest lewostronnie prymitywny.

Twierdzenie 3.2.3. (I. Kaplansky, [K48]; por. [Pa77, Tw. 5.3.4]) *Niech A będzie lewostronnie prymitywną algebrą spełniającą tożsamość wielomianową stopnia d. Ustalmy wierny i nieprzywiedlny A-moduł M. Dodatkowo oznaczmy algebrę z dzieleniem $D = \operatorname{End}_A(M)$. Wtedy:*

1. *Dla pewnej liczby naturalnej $t \leq \frac{d}{2}$, algebry A i $M_t(D)$ są izomorficzne.*

2. *Niech $\mathbf{F} = \mathcal{Z}(D)$. Wówczas $\mathcal{Z}(A) \cong \mathbf{F}$ jest ciałem oraz wymiar algebry A nad ciałem $\mathbf{F}$ jest skończony i wynosi $\dim_{\mathbf{F}} A = m^2$ dla pewnego $m \leq \frac{d}{2}$.*

3. *$\mathbf{F}$-algebra A wkłada się w algebrę macierzy $M_m(\mathbf{E})$, gdzie $\mathbf{E} \supseteq \mathbf{F}$ jest maksymalnym podciałem D.*

Bezpośrednio z Twierdzeń Amitsura-Levitzkiego 3.2.2 i Kaplansky'ego 3.2.3 wynika, że każda skończenie wymiarowa prosta $\mathbf{k}$-algebra A z jedynką spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2\sqrt{\dim_{\mathbf{k}} A}$. Stosując teraz Twierdzenie Wedderburna otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.2.4. *Każda skończenie wymiarowa półpierwsza $\mathbf{k}$-algebra A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2\sqrt{\dim_{\mathbf{k}} A}$.*

Wniosek 3.2.5. *Załóżmy, że algebra A z jedynką zawiera jako podalgebrę algebrę z dzieleniem D z tą samą jedynką oraz wymiar algebry A traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad D jest skończony i wynosi $\dim_D A = t$. Jeśli D spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia dt.*

Dowód. Dla dowolnego elementu $a \in A$ przez $l_a \colon A \to A$ oznaczmy mnożenie z lewej strony przez a. Możemy łatwo pokazać, że odwzorowanie $a \mapsto l_a$ zanurza algebrę A w algebrę endomorfizmów algebry A traktowanej jako prawostronny D-moduł. Pozwala nam to utożsamić A z pewną podalgebrą algebry macierzy $M_t(D)$. Dla dowodu wniosku wystarczy zatem pokazać, że algebra $M_t(D)$ spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia dt. Oznaczmy $\mathbf{F} = \mathcal{Z}(D)$. Ustalmy maksymalne podciało $\mathbf{E} \supseteq \mathbf{F}$ algebry z dzieleniem D i rozważmy $\mathbf{F}$-algebrę $D \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{E}$. Zgodnie z [Pa77, Lemat 5.3.3], istnieje wierny i nieprzywiedlny $D \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{E}$-moduł M taki, że $\mathrm{End}_{D\otimes_{\mathbf{F}}\mathbf{E}} M \cong \mathbf{E}$. Ponieważ równocześnie $D \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{E}$ spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, więc na mocy Twierdzenia Kaplansky'ego 3.2.3, dla pewnej liczby naturalnej $t' \leq \frac{d}{2}$, $\mathbf{F}$-algebry $D \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{E}$ i $M_{t'}(\mathbf{E})$ są izomorficzne. Korzystając teraz z [Pa77, Lemat 5.3.2] otrzymujemy:

$$M_t(D) \subseteq M_t(D) \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{E} \cong M_t(D \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{E}) \cong M_t(M_{t'}(\mathbf{E})) \cong M_{tt'}(\mathbf{E}).$$

Teza wniosku wynika teraz bezpośrednio z Twierdzenia Amitsura-Levitzkiego 3.2.2. □

Twierdzenie 3.2.6. *Niech $I \neq 0$ będzie ideałem półpierwszej algebry A. Wówczas:*

1. *$\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(A) \cap I$.*

2. (L.H. Rowen, [Ro73]; por. [Pa77, Lemat 5.4.9]) *Jeśli dodatkowo A jest PI-algebrą, to $\mathcal{Z}(A) \cap I \neq 0$.*

Dla dowodu podpunktu pierwszego wystarczy pokazać zawieranie $\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathcal{Z}(A)$. Niech $z \in \mathcal{Z}(I)$, $x \in A$. Wtedy dla dowolnych $i \in I$, $a \in \operatorname{ann}_A(I)$ zachodzi równość:

$$(zx - xz)(i + a) = (zx - xz)i = z(xi) - x(zi) = (xi)z - x(iz) = 0.$$

Z równości tej wynika już teza: $zx - xz \in \operatorname{ann}_A(I \oplus \operatorname{ann}_A(I)) = 0$.

Uwaga 3.2.7. Dla zredukowanej PI-algebry A, Twierdzenie 3.2.6 można rozszerzyć na niezerowe jednostronne ideały algebry A.

3.3 Lematy pomocnicze

Dowód Twierdzenia 3.1.2 rozpoczynamy od pomocniczych lematów.

Lemat 3.3.1. *Niech E będzie niezerową skończenie wymiarową nilpotentną podalgebrą algebry $\operatorname{End}_{\mathbf{k}}(V)$ endomorfizmów przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbf{k}$. Dodatkowo oznaczmy $V^E = \{v \in V \mid e(v) = 0$ dla wszystkich $e \in E\}$. Wtedy istnieje liczba naturalna $m \leq \dim_{\mathbf{k}} E$ oraz elementy $e_1, e_2, \ldots, e_m \in E$ takie, że:*

1. $\ker e_1 \cap \ker e_2 \cap \ldots \cap \ker e_m = V^E \neq 0$.

2. *łańcuch podprzestrzeni:*

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots \supseteq V_m = V^E$$

zadanych wzorem $V_i = V_{i-1} \cap \ker e_i$ spełnia warunek $e_i(V_{i-1}) \subseteq V_i$ dla każdego $1 \leq i \leq m$.

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na $\dim_{\mathbf{k}} E$. Jeśli $\dim_{\mathbf{k}} E = 1$, to dla każdego niezerowego elementu $e \in E$ mamy $E = \mathbf{k}e$ oraz $e^2 = 0$. Łatwo widać, że e spełnia warunki wymienione w tezie lematu.

Przypuśćmy teraz, że $\dim_{\mathbf{k}} E > 1$. Niech n ($n \geq 2$) będzie najmniejszą liczbą naturalną dla której $E^n = 0$. Ustalmy niezerowy element $e_1 \in E^{n-1}$ i oznaczmy $V_1 = \ker e_1$. Wówczas V_1 jest niezerową podprzestrzenią V niezmienniczą ze względu na działanie algebry E. Mamy więc naturalny homomorfizm $\theta\colon E \to \operatorname{End}_{\mathbf{k}}(V_1)$ algebr przyporządkowujący endomorfizmowi $e \in E$ przestrzeni V jego obcięcie do podprzestrzeni V_1. Jasnym jest, że jeśli $\theta(E) = 0$, to e_1 spełnia warunki podane w tezie lematu. Załóżmy teraz, że $\theta(E) \neq 0$. Oczywiście $\theta(E)$ jest nilpotentną podalgebrą algebry $\operatorname{End}_{\mathbf{k}}(V_1)$. Równocześnie, ponieważ $e_1 \in \ker\theta$, więc $\dim_{\mathbf{k}} \theta(E) < \dim_{\mathbf{k}} E$. Możemy zatem stosować założenie indukcyjne. Wynika z niego, że istnieje liczba naturalna $m - 1 \leq \dim_{\mathbf{k}} \theta(E)$ oraz elementy $e_2, e_3, \ldots, e_m \in E$ takie, że:

1. $\ker\theta(e_2) \cap \ker\theta(e_3) \cap \ldots \cap \ker\theta(e_m) = V_1^{\theta(E)} \neq 0$.

2. łańcuch podprzestrzeni:

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \ldots \supseteq V_m = V_1^{\theta(E)}$$

określonych wzorem $V_i = V_{i-1} \cap \ker \theta(e_i)$ spełnia warunek $\theta(e_i)(V_{i-1}) \subseteq V_i$ dla każdego $2 \leq i \leq m$.

Pozostaje na koniec zauważyć jeszcze, że $V_1^{\theta(E)} = V^E$ oraz dla każdego $1 \leq i \leq m$ zachodzi: $V_i = V_{i-1} \cap \ker e_i$, $e_i(V_{i-1}) \subseteq V_i$.

□

Lemat 3.3.1 zastosujemy w następującym kontekście. Niech H będzie algebrą Hopfa, $\mathfrak{A}$ - koidealem w H i A - niezerową H-modułową algebrą taką, że:

1. $\mathfrak{A}$ działa nilpotentnie na A.
2. wymiar działania $\mathfrak{A}$ na A jest skończony i wynosi $N \geq 1$.

Rozważmy homomorfizm $\pi \colon H \to \operatorname{End}_{\mathbf{k}}(A)$ algebr z jedynką indukowany przez działanie H na A. Przypomnijmy, że w Podrozdziale 1.2 przez $E(\mathfrak{A})$ oznaczyliśmy podalgebrę algebry $\operatorname{End}_{\mathbf{k}}(A)$ generowaną przez $\pi(\mathfrak{A})$. Algebra $E(\mathfrak{A})$ w oczywisty sposób spełnia założenia Lematu 3.3.1. Wynika z niego, że istnieje liczba naturalna $m \leq N$ oraz elementy $h_1, h_2, \ldots, h_m \in H$ takie, że:

1. $\pi(h_1), \pi(h_2), \ldots, \pi(h_m) \in E(\mathfrak{A})$.
2. $\ker \pi(h_1) \cap \ker \pi(h_2) \cap \ldots \cap \ker \pi(h_m) = A^{\mathfrak{A}} \neq 0$.
3. łańcuch podprzestrzeni:

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_m = A^{\mathfrak{A}}$$

zdefiniowanych dla każdego $1 \leq i \leq m$ jako $A_i = A_{i-1} \cap \ker \pi(h_i)$ spełnia warunek $\pi(h_i)(A_{i-1}) \subseteq A_i$.

Łatwe obliczenia pokazują, że dla każdego $h \in H$ odwzorowanie liniowe $\pi(h) \colon A \to A$ jest w istocie endomorfizmem A^H-bimodułu A. Mamy więc ciąg homomorfizmów:

$$A = A_0 \xrightarrow{\pi(h_1)} A_1 \xrightarrow{\pi(h_2)} A_2 \to \ldots \to A_{m-1} \xrightarrow{\pi(h_m)} A_m = A^{\mathfrak{A}}$$

A^H-bimodułów spełniający warunek $A_i = A_{i-1} \cap \ker \pi(h_i)$ dla każdego $1 \leq i \leq m$. Z ostatniej równości wynika natychmiast zanurzenie $A_{i-1}/A_i \hookrightarrow A_i$. Załóżmy teraz dodatkowo, że A jest algebrą z jedynką i zawiera jako podalgebrę algebrę z dzieleniem $D \subseteq A^H$ z tą samą jedynką. Wtedy A_{i-1}/A_i zanurza się w A_i również jako prawostronna przestrzeń liniowa nad D. Zauważmy dalej, że jeśli wymiar przestrzeni liniowej A_i traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad D jest skończony, to również wymiar przestrzeni liniowej A_{i-1} traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad D jest skończony i wynosi $\dim_D A_{i-1} = \dim_D A_{i-1}/A_i + \dim_D A_i \leq 2 \cdot \dim_D A_i$. Korzystając z powyższej nierówności łatwo dowodzimy teraz za pomocą indukcji drugą część następującego wniosku. Pierwsza część wniosku jest bezpośrednią konsekwencją Lematu 3.3.1.

Wniosek 3.3.2. *Niech H będzie algebrą Hopfa, $\mathfrak{A}$ - koidealem w H i A - niezerową H-modułową algebrą taką, że:*

1. *$\mathfrak{A}$ działa nilpotentnie na A.*
2. *wymiar działania $\mathfrak{A}$ na A jest skończony i wynosi N.*

Wtedy:

1. *Każda niezerowa $\mathfrak{A}$-niezmiennicza podprzestrzeń V algebry A zawiera niezerowe niezmienniki, tj. $V^{\mathfrak{A}} \neq 0$.*
2. *Załóżmy dodatkowo, że A jest algebrą z jedynką i zawiera jako podalgebrę algebrę z dzieleniem $D \subseteq A^H$ z tą samą jedynką. Jeśli wymiar podalgebry niezmienników $A^{\mathfrak{A}}$ traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad D jest skończony, to również wymiar algebry A traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad D jest skończony i wynosi $\dim_D A \leq 2^N \cdot \dim_D A^{\mathfrak{A}}$.*

Lemat 3.3.3. *Niech H będzie punktową algebrą Hopfa i A - półpierwszą H-modułową algebrą taką, że wymiar działania H na A jest skończony. Wtedy każdy istotny ideał algebry A zawiera H-niezmienniczy istotny ideał algebry A.*

Dowód. Przyjmijmy oznaczenie $G = G(H)$. Ustalmy homomorfizm $\pi\colon H \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(A)$ algebr z jedynką indukowany przez działanie H na A.

Rozważymy najpierw przypadek, gdy $\pi(H) \neq \pi(\mathbf{k}G)$. Z Twierdzenia Tafta-Wilsona 1.1.7 wynika, że istnieje liczba naturalna m, elementy $c_1, c_2, \dots, c_m \in H$ oraz rodzina podprzestrzeni $\{H_i\}_{0 \leq i \leq m}$ taka, że:

1. $\mathbf{k}G \subseteq H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_m = H$.
2. $\pi(G)$ jest skończoną grupą automorfizmów algebry A i $\pi(H_0) = \pi(\mathbf{k}G) = \mathbf{k}\pi(G)$.
3. $\pi(H_i) = \pi(H_{i-1}) + \mathbf{k}\pi(c_i)$ dla każdego $1 \leq i \leq m$.
4. $\Delta(c_i) \in c_i \otimes g + h \otimes c_i + H_{i-1} \otimes H_{i-1}$ dla każdego $1 \leq i \leq m$, gdzie $g, h \in G$.

Dla dowolnej podprzestrzeni H_i oraz dowolnego ideału I algebry A oznaczmy przez $H_i \cdot I$ przestrzeń liniową generowaną przez wszystkie elementy postaci $h_i \cdot a$, gdzie $h_i \in H_i$, $a \in I$.

Niech teraz I będzie istotnym ideałem algebry A. Z warunku drugiego łatwo widać, że $\bigcap_{g \in G} g \cdot I$ jest H_0-niezmienniczym istotnym ideałem A zawartym w I. Bez straty ogólności możemy zatem przyjąć, że I jest H_0-niezmienniczym istotnym ideałem A. Zauważmy dalej, że dla każdego elementu $c_i \in H$ spełniającego warunek czwarty zachodzi $c_i \cdot I^2 \subseteq I + (H_{i-1} \cdot I)^2$. Stosując teraz indukcję względem $i = 1, 2, \dots, m$ łatwo dowodzimy, że $H_i \cdot I^{2^i} \subseteq I^{2^{i-1}}$. W szczególności:

$$H \cdot I^{2^m} = H_m \cdot I^{2^m} \subseteq I^{2^{m-1}} \subseteq I.$$

Równocześnie z Lematu 1.2.2 wynika, że $H \cdot I^{2^m}$ jest H-niezmienniczym ideałem algebry A zawierającym istotny ideał I^{2^m} algebry A. $H \cdot I^{2^m}$ jest zatem szukanym H-niezmienniczym istotnym ideałem A zawartym w I.

Przypadek, gdy $\pi(H) = \pi(\mathbf{k}G)$ jest oczywisty.

□

3.4 Dowód głównego rezultatu

Jesteśmy już przygotowani do dowodu Twierdzenia 3.1.2.

Jak wiadomo, działanie punktowej algebry Hopfa H na półpierwszą algebrę A jednoznacznie przedłuża się do działania algebry H na pierścień ułamków symetrycznych $Q = Q^s(A)$ (S. Montgomery, [Mo93a]; por. [Mo93b, Stw. 6.4.5, Tw. 6.4.6]). Na początek pokażemy, że algebra Q spełnia wszystkie założenia dowodzonego twierdzenia. To pozwoli nam przenieść ciężar dowodu na algebrę Q. Dowód twierdzenia przeprowadzimy w kilku krokach.

Krok 1. *Jeśli I jest H-niezmienniczym istotnym ideałem algebry A, to:*

1. *$I^{\mathfrak{A}}$ jest G-niezmienniczym istotnym ideałem algebry $A^{\mathfrak{A}}$.*
2. $\mathrm{l.ann}_Q((\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G) = \mathrm{r.ann}_Q((\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G) = 0.$

Dowód. Bezpośrednio z Wniosku 3.3.2 oraz rozważań poprzedzających Wniosek 3.1.3 widać, że $I^{\mathfrak{A}}$ jest niezerowym G-niezmienniczym ideałem algebry $A^{\mathfrak{A}}$. Oznaczmy $J = \mathrm{l.ann}_A(I^{\mathfrak{A}})$. Dla dowodu podpunktu **1** wystarczy pokazać, że $J = 0$. Przypuśćmy, że jest inaczej. Wtedy J oraz IJ są niezerowymi $\mathfrak{A}$-niezmienniczymi lewostronnymi ideałami algebry A. Z Wniosku 3.3.2 wynika teraz, że $(IJ)^{\mathfrak{A}}$ jest niezerowym lewostronnym ideałem algebry $A^{\mathfrak{A}}$. Równocześnie $(IJ)^{\mathfrak{A}}(IJ)^{\mathfrak{A}} \subseteq JI^{\mathfrak{A}} = 0$ co prowadzi do sprzeczności z półpierwszością algebry $A^{\mathfrak{A}}$. Pokazaliśmy tym samym, że $\mathrm{l.ann}_A(I^{\mathfrak{A}}) = 0$. W szczególności $\mathrm{ann}_{A^{\mathfrak{A}}}(I^{\mathfrak{A}}) = 0$ z czego wynika już teza.

2. Z Twierdzenia Rowena 3.2.6 zastosowanego do półpierwszej PI-algebry $A^{\mathfrak{A}}$ wynika, że:

$$\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}) = \mathcal{Z}(A^{\mathfrak{A}}) \cap I^{\mathfrak{A}} \neq 0.$$

Otrzymujemy algebrę zredukowaną $\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}})$, na którą działa skończona grupa G poprzez automorfizmy algebry. Z Twierdzenia Kharchenki 1.2.5 o istnieniu nietrywialnych punktów stałych łatwo widać, że $(\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G \neq 0$. Oznaczmy $K = \mathrm{ann}_{A^{\mathfrak{A}}}((\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G)$. Twierdzimy, że $K = 0$. Załóżmy, że jest to nieprawda. Wtedy $K \cap I^{\mathfrak{A}}$ jest niezerowym G-niezmienniczym ideałem algebry $A^{\mathfrak{A}}$. Stosując ponownie Twierdzenia Rowena 3.2.6 i Kharchenki 1.2.5 otrzymujemy niezerowy G-niezmienniczy ideał:

$$\mathcal{Z}(K \cap I^{\mathfrak{A}}) = \mathcal{Z}(A^{\mathfrak{A}}) \cap K \cap I^{\mathfrak{A}} = K \cap \mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}})$$

w $\mathcal{Z}(A^{\mathfrak{A}})$ i $(\mathcal{Z}(K \cap I^{\mathfrak{A}}))^G \neq 0$. Prowadzi to do sprzeczności:

$$(\mathcal{Z}(K\cap I^{\mathfrak{A}}))^G(\mathcal{Z}(K\cap I^{\mathfrak{A}}))^G \subseteq K(\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G = 0$$

z tym, że centrum $\mathcal{Z}(A^{\mathfrak{A}})$ jest zredukowane. Mamy więc:

$$A^{\mathfrak{A}} \cap \mathrm{l.ann}_A((\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G) = A^{\mathfrak{A}} \cap \mathrm{r.ann}_A((\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G) = 0.$$

Korzystając z Wniosku 3.3.2 oraz ogólnych własności pierścienia ułamków symetrycznych otrzymujemy ostatecznie:

$$\mathrm{l.ann}_Q((\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G) = \mathrm{r.ann}_Q((\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G) = 0.$$

□

Krok 2.

1. *$\mathfrak{A}$ działa nilpotentnie na Q.*
2. *Podalgebra niezmienników $Q^{\mathfrak{A}}$ jest półpierwsza.*
3. *Wymiar działania $\mathfrak{A}$ na Q jest skończony i wynosi N.*
4. *Istnieje naturalne włożenie algebry $Q^{\mathfrak{A}}$ w pierścień ułamków symetrycznych $Q^s(A^{\mathfrak{A}})$ algebry $A^{\mathfrak{A}}$. W szczególności algebry $A^{\mathfrak{A}}$ i $Q^{\mathfrak{A}}$ spełniają te same tożsamości wieloliniowe.*

Dowód. Oznaczmy przez $\widehat{\mathfrak{A}}$ podalgebrę H generowaną przez $\mathfrak{A}$. Aby udowodnić podpunkty **1** i **3** wystarczy pokazać, że dla każdego elementu $h \in \widehat{\mathfrak{A}}$ z równości $h\cdot A = 0$ wynika $h \cdot Q = 0$. Niech $q \in Q$. Rozważmy H-niezmienniczy istotny ideał I algebry A taki, że $Iq \subseteq A$ i $qI \subseteq A$. Ideał taki istnieje na mocy Lematu 3.3.3. Wtedy dla każdego $a \in (\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G$ zachodzi równość:

$$(h\cdot q)a = h\cdot qa \in h\cdot qI \subseteq h\cdot A = 0.$$

Wynika z niej, że $h\cdot q \in \mathrm{l.ann}_Q((\mathcal{Z}(I^{\mathfrak{A}}))^G) = 0$, przy czym ostatnia równość wynika z Kroku 1. Tak więc $h\cdot Q = 0$.

2. Rozważmy dowolny element $q \in Q^{\mathfrak{A}}$ dla którego zachodzi $qQ^{\mathfrak{A}}q = 0$. Wybierzmy H-niezmienniczy istotny ideał I algebry A taki, że $Iq \subseteq A$ i $qI \subseteq A$. Wówczas $I^{\mathfrak{A}}q$ jest lewostronnym ideałem algebry $A^{\mathfrak{A}}$. Ponieważ równocześnie $(I^{\mathfrak{A}}q)^2 \subseteq I^{\mathfrak{A}}(qI^{\mathfrak{A}}q) = 0$, więc z półpierwszości $A^{\mathfrak{A}}$ otrzymujemy $I^{\mathfrak{A}}q = 0$. Tak więc $q \in \mathrm{r.ann}_Q(I^{\mathfrak{A}}) = 0$ co dowodzi ostatecznie półpierwszości $Q^{\mathfrak{A}}$.

4. Bezpośrednio z Kroku 1 wynika, że dla każdego elementu $q \in Q^{\mathfrak{A}}$ istnieje istotny ideał $I^{\mathfrak{A}}$ algebry $A^{\mathfrak{A}}$ taki, że $I^{\mathfrak{A}}q \subseteq A^{\mathfrak{A}}$ i $qI^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{\mathfrak{A}}$. Rozważmy teraz dowolny istotny ideał J algebry $A^{\mathfrak{A}}$ taki, że $qJ = 0$. Ponieważ $(I^{\mathfrak{A}}q)J = I^{\mathfrak{A}}(qJ) = 0$, więc $I^{\mathfrak{A}}q \subseteq \mathrm{ann}_{A^{\mathfrak{A}}}(J) = 0$ i wobec tego $q \in \mathrm{r.ann}_Q(I^{\mathfrak{A}}) = 0$. Analogicznie dowodzimy implikację: $Jq = 0 \Rightarrow q = 0$. Powyższe spostrzeżenia pozwalają nam zanurzyć algebrę $Q^{\mathfrak{A}}$ w algebrę $Q^s(A^{\mathfrak{A}})$. Dowód drugiej części podpunktu 4 wynika natychmiast z ogólnie znanej własności pierścieni ułamków Martindale'a: jeśli R jest półpierwszą PI-algebrą, to pierścień ułamków symetrycznych $Q^s(R)$ spełnia te same tożsamości wieloliniowe co algebra R. □

Przypomnijmy, że w Podrozdziale 2.4 przez C oznaczyliśmy rozszerzony centroid algebry A. Kolejnym celem jest wskazanie związku między algebrą $(\mathcal{Z}(Q^{\mathfrak{A}}))^G$ i jej podalgebrą C^H.

Krok 3. *Dla dowolnego elementu $a \in (\mathcal{Z}(Q^{\mathfrak{A}}))^G$ wewnętrzne różniczkowanie ad_a jest nilpotentne.*

Dowód. Rozważmy homomorfizm $\pi\colon H \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(Q)$ algebr z jedynką indukowany przez działanie H na Q. Jak wcześniej zauważyliśmy, dla każdego elementu $h \in H$ odwzorowanie liniowe $\pi(h)$ jest w istocie endomorfizmem Q^H-bimodułu Q z czego łatwo wynika, że $\pi(h)\circ\mathrm{ad}_a = \mathrm{ad}_a\circ\pi(h)$. Ponadto z rozważań poprzedzających Wniosek 3.3.2 wynika, że istnieje liczba naturalna $m \leq N$, elementy $h_1, h_2, \ldots, h_m \in H$ oraz rodzina $\{Q_i\}_{0\leq i\leq m}$ Q^H-podbimodułów Q taka, że:

1. $Q = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \ldots \supseteq Q_m = Q^{\mathfrak{A}}$.
2. $Q_i = Q_{i-1} \cap \ker \pi(h_i)$ dla każdego $1 \leq i \leq m$.
3. $\pi(h_i)(Q_{i-1}) \subseteq Q_i$ dla każdego $1 \leq i \leq m$.

Pokażemy teraz w oparciu o indukcję względem $i = 0, 1, \ldots, m$, że:

$$(\mathrm{ad}_a)^{2^i}(Q_{m-i}) = 0.$$

Dla $i = 0$ teza wynika natychmiast z założenia, że $a \in \mathcal{Z}(Q^{\mathfrak{A}})$. Przypuśćmy, że równość zachodzi dla $0 \leq i < m$. Wtedy:

$$(\pi(h_{m-i}) \circ (\mathrm{ad}_a)^{2^i})(Q_{m-(i+1)}) = ((\mathrm{ad}_a)^{2^i} \circ \pi(h_{m-i}))(Q_{m-(i+1)}) \subseteq (\mathrm{ad}_a)^{2^i}(Q_{m-i}) = 0.$$

Tak więc mamy:

$$(\mathrm{ad}_a)^{2^i}(Q_{m-(i+1)}) \subseteq Q_{m-(i+1)} \cap \ker \pi(h_{m-i}) = Q_{m-i}$$

z czego wynika w prosty sposób teza:

$$(\mathrm{ad}_a)^{2^{i+1}}(Q_{m-(i+1)}) = ((\mathrm{ad}_a)^{2^i} \circ (\mathrm{ad}_a)^{2^i})(Q_{m-(i+1)}) \subseteq (\mathrm{ad}_a)^{2^i}(Q_{m-i}) = 0.$$

W szczególności $(\mathrm{ad}_a)^{2^m}(Q) = 0$.

□

Jeśli $\mathrm{char}\mathbf{k} = p \neq 0$, to dla każdego $a \in (\mathcal{Z}(Q^{\mathfrak{A}}))^G$ zachodzi równość $\mathrm{ad}_{a^{p^N}}(Q) = (\mathrm{ad}_a)^{p^N}(Q) = 0$. Wynika z niej, że $a^{p^N} \in C \cap Q^H = C^H$. Pozostał do rozważenia przypadek, gdy $\mathrm{char}\mathbf{k} = 0$.

Krok 4. *Jeśli* $\mathrm{char}\mathbf{k} = 0$, *to koideał* $\mathfrak{A}$ *działa trywialnie na* C^G, *tj. zachodzi równość* $C^H = C^G$.

Dowód. Z założenia wiemy, że algebra H generowana jest przez elementy: grupopodobne oraz skośnie prymitywne. Aby zatem udowodnić równość $C^H = C^G$ musimy pokazać, że wszystkie elementy skośnie prymitywne algebry H działają trywialnie na C^G. Zauważmy dalej, że dla dowolnych elementów grupopodobnych g, h algebry H, element $k \in P_{g,h}(H)$ działa trywialnie na C^G wtedy i tylko wtedy, gdy element $kg^{-1} \in P_{1,hg^{-1}}(H)$ działa trywialnie na C^G. Możemy zatem ograniczyć się do elementów $(1, g)$-prymitywnych, gdzie $g \in G$. Zauważmy wreszcie, że wymiar działania H na Q jest skończony. Wynika z tego, że H działa na Q poprzez $\mathbf{k}$-algebraiczne odwzorowania liniowe.

Dla dowodu Kroku 4 wystarczy zatem pokazać, że dla dowolnego automorfizmu σ algebry Q skończonego rzędu, $\mathbf{k}$-algebraiczne σ-różniczkowanie δ algebry Q działa trywialnie na C^σ. Przypadek $\sigma = \mathrm{id}_Q$ wynika bezpośrednio z Wniosku 2.3.6. Przypuśćmy, że teza jest fałszywa dla pewnego automorfizmu $\sigma \neq \mathrm{id}_Q$. Ustalmy element $c \in C^\sigma$ taki, że $\delta(c) \neq 0$ i oznaczmy $q = \delta(c)$. Wówczas dla każdego $x \in Q$ zachodzi:

$$qx = \delta(c)x = \delta(cx) - c\delta(x) = \delta(xc) - \delta(x)c = \sigma(x)\delta(c) = \sigma(x)q.$$

Z równości tej wynika, że:

1. q nie jest elementem nilpotentnym. W przeciwnym razie otrzymalibyśmy sprzeczność z półpierwszością Q.

2. $q^r x = \sigma^r(x)q^r$ dla każdej liczby naturalnej r.

   W szczególności jeśli rząd automorfizmu σ jest równy r ($r \geq 2$), to $q^r \in C$.

3. $\sigma(q)x = \sigma(q\sigma^{-1}(x)) = \sigma(xq)$.

Kładąc teraz $x = q^{r-1}$ oraz $x = q$ w równościach $qx = \sigma(x)q$ oraz $\sigma(q)x = \sigma(xq)$, odpowiednio, otrzymujemy:

$$q^r = qq^{r-1} = \sigma(q^{r-1})q = \sigma(q^{r-2})\sigma(q)q = \sigma(q^{r-2})\sigma(q^2) = \sigma(q^r).$$

Tak więc mamy $0 \neq q^r \in C \cap Q^\sigma = C^\sigma$. Znana własność pierścieni ułamków Martindale'a mówi, że rozszerzony centroid pierścienia ułamków symetrycznych pokrywa się z jego centrum (por. [BMM96, Stw. 2.1.10]). Wynika z niej i ze Stwierdzenia 2.4.4, że C^σ jest pierścieniem regularnym w sensie von Neumanna. Możemy zatem znaleźć element $a \in C^\sigma$ dla którego zachodzi $q^r = aq^{2r}$. Przyjmijmy $e = aq^r$. Bezpośrednio sprawdza się, że $e \in C^\sigma$ jest niezerowym idempotentem i $\delta(e) = 0$.

Rozważmy dalej odwzorowanie $d = l_{q^{r-1}} \circ \delta$, gdzie l_x oznacza mnożenie z lewej strony przez x. Zauważmy, że d jest różniczkowaniem algebry Q. Istotnie dla dowolnych $x, y \in Q$ mamy:

$$\begin{aligned} d(xy) = q^{r-1}\delta(xy) = q^{r-1}\delta(x)y + q^{r-1}\sigma(x)\delta(y) = \\ = q^{r-1}\delta(x)y + xq^{r-1}\delta(y) = d(x)y + xd(y). \end{aligned}$$

Ponadto:

$$l_{eaq} \circ d = l_{eaq} \circ l_{q^{r-1}} \circ \delta = l_e \circ \delta.$$

Przypomnijmy, że zgodnie z założeniem, δ jest $\mathbf{k}$-algebraicznym σ-różniczkowaniem algebry Q. Ustalmy unormowany wielomian $\omega(t) \in \mathbf{k}[t]$ taki, że $\omega(\delta)(x) = 0$ dla wszystkich $x \in Q$. Oznaczmy $m = \mathrm{st}(\omega)$. Ponieważ $\delta \circ l_e = l_e \circ \delta$, więc:

$$\omega(l_{eaq} \circ d)(ex) = \omega(l_e \circ \delta)(ex) = e\omega(\delta)(x) = 0$$

dla każdego $x \in Q$. Pokażemy teraz, że różniczkowanie d algebry Q obcięte do ideału eQ jest eQ-algebraicznym różniczkowaniem algebry eQ. W tym celu zauważmy najpierw, że dla dowolnego $x \in Q$ zachodzi równość $d \circ l_x = l_x \circ d + l_{d(x)}$. Stosując teraz indukcję łatwo dowodzimy, że dla każdej liczby naturalnej $j \leq m$ można znaleźć elementy $a_0, a_1, \ldots, a_{j-1} \in eQ$, $a_0 = 0$, takie że:

$$(l_{eaq} \circ d)^j = l_{(eaq)^j} \circ d^j + \textstyle\sum_{i=0}^{j-1} l_{a_i} \circ d^i.$$

Z powyższych rozważań widać już, że istnieją elementy $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1} \in eQ$ takie, że:

$$(eaq)^m d^m(x) + b_{m-1} d^{m-1}(x) + \ldots + b_1 d(x) + b_0 x = 0$$

dla wszystkich $x \in eQ$. Pozostaje nam na koniec zauważyć, że eaq jest elementem odwracalnym w eQ. Dowiedliśmy tym samym, że różniczkowanie d algebry Q obcięte do ideału eQ jest eQ-algebraicznym różniczkowaniem półpierwszej algebry eQ. Z Wniosku 2.3.6 wynika teraz, że d działa trywialnie na $\mathcal{Z}(eQ)$ co prowadzi ostatecznie do sprzeczności:

$$q^r = eq^r = (l_{q^{r-1}} \circ \delta)(ec) = d(ec) \in d(eC) \subseteq d(\mathcal{Z}(eQ)) = 0.$$

Dowód Kroku 4 został tym samym zakończony.

$\square$

Krok 5. *Jeśli* $\mathrm{char}\mathbf{k} = 0$*, to* $C^H = (\mathcal{Z}(Q^{\mathfrak{A}}))^G$.

Dowód. Dowodu wymaga tylko inkluzja $(\mathcal{Z}(Q^{\mathfrak{A}}))^G \subseteq C^H$. Niech więc $a \in (\mathcal{Z}(Q^{\mathfrak{A}}))^G$. Wtedy, na mocy Kroku 3, wewnętrzne różniczkowanie ad_a algebry Q jest nilpotentne. Z [Gr92, Wn. 8] wynika teraz, że istnieje liczba naturalna m oraz element $c \in C$ taki, że $(a-c)^m = 0$. Ponieważ a jest punktem stałym działania grupy G na algebrę Q, więc dla każdego $g \in G$ zachodzi $(a - g \cdot c)^m = 0$. Zauważmy dalej, że $\{a - g \cdot c \mid g \in G\}$ jest skończonym zbiorem parami przemiennych elementów. Łatwo stąd widać już, że:

$$(|G| \cdot a - \mathrm{tr}(c))^{|G| \cdot m} = (\textstyle\sum_{g \in G}(a - g \cdot c))^{|G| \cdot m} = 0,$$

gdzie $\mathrm{tr}(c) = \sum_{g \in G} g \cdot c$ oznacza ślad elementu c. Równocześnie, na mocy Kroku 4, $\mathrm{tr}(c) \in C^G = C^H$. Tak więc:

$$|G| \cdot a - \mathrm{tr}(c) \in (\mathcal{Z}(Q^{\mathfrak{A}}))^G.$$

Z półpierwszości algebry $Q^{\mathfrak{A}}$ łatwo wynika teraz, że $|G| \cdot a - \operatorname{tr}(c) = 0$. Tym samym $a \in C^H$.

$\square$

Ustalmy dowolnie wybrany maksymalny ideał P algebry C^H i oznaczmy $S = C^H \setminus P$. Zastosujemy teraz Stwierdzenia 2.4.4 i 2.5.4 wraz z Krokiem 2, z których wynika, że:

1. Q_S jest półpierwszą H-modułową algebrą.
2. $\mathfrak{A}$ działa nilpotentnie na Q_S z półpierwszą podalgebrą niezmienników $(Q_S)^{\mathfrak{A}}$ spełniającą nietrywialną tożsamość wielomianową oraz wymiar działania $\mathfrak{A}$ na Q_S jest skończony nie większy niż N.
3. Podalgebra $(Q_S)^{\mathfrak{A}}$ jest niezmiennicza ze względu na działanie grupy G.
4. $(\mathcal{Z}((Q_S)^{\mathfrak{A}}))^G = ((\mathcal{Z}(Q^{\mathfrak{A}}))^G)_S$.
5. $\mathcal{Z}(Q_S) \cap (Q_S)^H = (C^H)_S$ jest ciałem zawartym w centrum algebry $(Q_S)^{\mathfrak{A}}$.

Krok 6.

1. $(\mathcal{Z}((Q_S)^{\mathfrak{A}}))^G$ jest ciałem.

2. Algebra $(Q_S)^{\mathfrak{A}}$ jest sumą prostą co najwyżej $|G|$ prostych algebr z jedynką.

Dowód. Podpunkt **1** wynika natychmiast z uwagi poprzedzającej Krok 4 oraz Kroku 5.

2. Bezpośrednio z Twierdzeń Rowena 3.2.6 i Kharchenki 1.2.5 zastosowanych do półpierwszej PI-algebry $(Q_S)^{\mathfrak{A}}$ wynika, że każdy niezerowy G-niezmienniczy ideał algebry $(Q_S)^{\mathfrak{A}}$ przecina nietrywialnie $(\mathcal{Z}((Q_S)^{\mathfrak{A}}))^G$ i tym samym zawiera elementy odwracalne. Tak więc $(Q_S)^{\mathfrak{A}}$ jest półpierwszą G-prostą algebrą. Korzystając teraz z [Fi79] (por. [Mo80, Wn. 5.16]) otrzymujemy tezę.

$\square$

Dowód Twierdzenia 3.1.2. Przyjmijmy, że podalgebra niezmienników $A^{\mathfrak{A}}$ spełnia tożsamość wielomianową stopnia d.

Zgodnie z Krokiem 6, algebra $(Q_S)^{\mathfrak{A}}$ jest sumą prostą co najwyżej $|G|$ prostych algebr z jedynką:

$$(Q_S)^{\mathfrak{A}} = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_m.$$

Z Twierdzenia Rowena 3.2.6 łatwo widać, że:

$$\mathcal{Z}((Q_S)^{\mathfrak{A}}) = \mathcal{Z}(A_1) \oplus \mathcal{Z}(A_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{Z}(A_m).$$

Jak wynika z Twierdzenia Kaplansky'ego 3.2.3 zastosowanego do algebry A_i,

$$\dim_{\mathcal{Z}(A_i)} A_i \leq (\tfrac{d}{2})^2$$

dla każdego $1 \leq i \leq m$. Równocześnie, na mocy Wniosku 1.3.6,

$$\dim_{(\mathcal{Z}((Q_S)^{\mathfrak{A}}))^G} \mathcal{Z}((Q_S)^{\mathfrak{A}}) \leq |G|.$$

Tak więc mamy:

$$\dim_{(\mathcal{Z}((Q_S)^{\mathfrak{A}}))^G} (Q_S)^{\mathfrak{A}} \leq (\tfrac{d}{2})^2 \cdot |G|^2.$$

Z Wniosku 3.3.2 łatwo widać teraz, że wymiar algebry Q_S traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad $(\mathcal{Z}((Q_S)^{\mathfrak{A}}))^G$ jest skończony i wynosi:

$$\dim_{(\mathcal{Z}((Q_S)^{\mathfrak{A}}))^G} Q_S \leq 2^N \cdot (\tfrac{d}{2})^2 \cdot |G|^2.$$

Możemy zatem stosować Wniosek 3.2.5. Wynika z niego, że algebra Q_S spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2^{N+1} \cdot (\frac{d}{2})^2 \cdot |G|^2$. Zauważmy dalej, że stopień tożsamości wielomianowej spełnianej przez algebrę Q_S nie zależy od wyboru ideału P. Dowodzi to, że również algebra Q spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2^{N+1} \cdot (\frac{d}{2})^2 \cdot |G|^2$.

Zauważmy na koniec, że jeśli $\operatorname{char} \mathbf{k} = 0$, to możemy znacznie ograniczyć stopień tożsamości wielomianowej spełnianej przez algebrę Q. Zgodnie z Krokiem 5, wymiar algebry Q_S nad centralnym podciałem $(C^H)_S$ jest skończony nie większy niż $2^N \cdot (\frac{d}{2})^2 \cdot |G|^2$. Z Wniosku 3.2.4 wynika teraz, że algebra Q_S spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $d \cdot |G| \cdot \sqrt{2^N}$. Tym samym również algebra Q spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $d \cdot |G| \cdot \sqrt{2^N}$.

□

3.5 Zastosowania do działań konkretnych algebr Hopfa

1. Modularna algebra grupowa.

Wniosek 3.5.1. *Niech* $\mathbf{k}$ *będzie ciałem charakterystyki* $p > 0$, G *- skończoną grupą rzędu podzielnego przez* p *i* A *- algebrą półpierwszą na którą grupa* G *działa poprzez automorfizmy algebry. Załóżmy, że grupa* G *posiada normalną* p*-podgrupę Sylowa* G_p *oraz, że podalgebra punktów stałych* A^{G_p} *jest półpierwsza. Wówczas* A *jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy* A^G *jest PI-algebrą.*

Dowód. Z rozważań poprzedzających Twierdzenie 3.1.2 oraz samego Twierdzenia 3.1.2 łatwo widać, że A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A^{G_p} jest PI-algebrą. Zgodnie z Twierdzeniem Kharchenki 3.1.1, zastosowanym do grupy ilorazowej G/G_p działającej na algebrę półpierwszą A^{G_p}, ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $(A^{G_p})^{G/G_p} = A^G$ jest PI-algebrą.

□

2. Uniwersalna algebra obwiednia kolorowej algebry Liego. Ustalmy ciało $\mathbf{k}$ charakterystyki różnej od 2. Niech $A = A_0 \oplus A_1$ będzie algebrą półpierwszą zgradowaną przez grupę $\mathbb{Z}_2$ i $L = L_0 \oplus L_1$ - skończenie wymiarową nilpotentną superalgebrą Liego. Jeśli $\operatorname{char} \mathbf{k} > 2$, to dodatkowo przyjmujemy, że L jest ograniczona. Załóżmy również, że L działa na A i wymiar tego działania jest skończony, wreszcie podalgebra niezmienników A^L jest półpierwszą PI-algebrą. Naszym celem będzie pokazanie w oparciu o Twierdzenie 3.1.2, że również A jest PI-algebrą. Zauważmy na początek, że dla dowolnego rozszerzenia $\mathbf{K}$ ciała $\mathbf{k}$, skalarne rozszerzenie $A \otimes \mathbf{K}$ algebry A jest $\mathbf{K}$-algebrą zgradowaną przez grupę $\mathbb{Z}_2$, na którą działa skończenie wymiarowa nilpotentna superalgebra Liego $L \otimes \mathbf{K}$ (ograniczona superalgebra Liego, gdy $\operatorname{char}\mathbf{k} > 2$) z podalgebrą niezmienników $(A \otimes \mathbf{K})^{L \otimes \mathbf{K}} = A^L \otimes \mathbf{K}$ spełniającą te same tożsamości wieloliniowe co podalgebra A^L oraz wymiar tego działania jest skończony. Przypomnijmy dalej, że skończone rozszerzenie $\mathbf{K}$ ciała $\mathbf{k}$ nazywamy *rozdzielczym*, jeśli dla każdego elementu ciała $\mathbf{K}$ jego wielomian minimalny nad $\mathbf{k}$ posiada tylko jednokrotne pierwiastki. Znana własność algebr półpierwszych mówi, że dla dowolnej półpierwszej $\mathbf{k}$-algebry R i dowolnego skończonego rozdzielczego rozszerzenia $\mathbf{K}$ ciała $\mathbf{k}$, $\mathbf{K}$-algebra $R \otimes \mathbf{K}$ jest półpierwsza (por. [MS75, Stw. 2], [BeC86, Lemat 3]). Pokażemy teraz, że istnieje skończone rozdzielcze rozszerzenie $\mathbf{K}$ ciała $\mathbf{k}$ oraz podalgebra B algebry A taka, że:

1. $B \otimes \mathbf{K}$ jest jednorodną $L \otimes \mathbf{K}$-niezmienniczą podalgebrą algebry $A \otimes \mathbf{K}$ zawierającą $(A \otimes \mathbf{K})^{L \otimes \mathbf{K}}$.

2. jednorodne elementy $L \otimes \mathbf{K}$ działają na $B \otimes \mathbf{K}$ jak nilpotentne różniczkowania i nilpotentne superróżniczkowania.

3. dla pewnej grupy Γ można określić na $A \otimes \mathbf{K}$ strukturę algebry zgradowanej przez grupę Γ ze skończonym nośnikiem, z podalgebrą $B \otimes \mathbf{K}$ jako jednostkową składową Γ-gradacji.

Powyższe stwierdzenie zostało właściwie wcześniej udowodnione przez J. Bergena i P. Grzeszczuka [BeG96, Lemat 3.2]. Przedstawimy teraz pokrótce ten dowód.

Rozpatrzymy oddzielnie dwa przypadki, w zależności od charakterystyki ciała $\mathbf{k}$. Załóżmy najpierw, że $\operatorname{char}\mathbf{k} = p > 2$. Dla dowolnej liczby całkowitej $i \geq 0$ oraz dowolnego elementu $x \in L_0$ przyjmijmy: $x^{[p^0]} = x$, $x^{[p^{i+1}]} = (x^{[p^i]})^{[p]}$. Dla dowolnej liczby $i \geq 0$ oznaczmy dodatkowo przez $\mathcal{Z}_{(i)}$ przestrzeń liniową rozpiętą nad ciałem $\mathbf{k}$ na wszystkich elementach postaci $x^{[p^i]}$, gdzie $x \in L_0$ i $[x, L] = 0$. Mamy nierosnący ciąg podprzestrzeni L_0:

$$\mathcal{Z}_{(0)} \supseteq \mathcal{Z}_{(1)} \supseteq \mathcal{Z}_{(2)} \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{Z}_{(i)} \supseteq \mathcal{Z}_{(i+1)} \supseteq \ldots$$

Zauważmy, że dla dowolnych elementów $x, y \in \mathcal{Z}_{(0)}$, $\alpha \in \mathbf{k}$ zachodzą następujące równości: $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]}$, $(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]}$. Z równości tych wynika, że:

$$\mathcal{Z}_{(i+1)} = \operatorname{Lin}_{\mathbf{k}}\{z^{[p]} \mid z \in \mathcal{Z}_{(i)}\}$$

dla każdego $i \geq 0$. Nietrudne obliczenia pokazują, że jeśli elementy $z_1, z_2, \ldots, z_s$ rozpinają przestrzeń liniową $\mathcal{Z}_{(i)}$, to elementy ${z_1}^{[p]}, {z_2}^{[p]}, \ldots, {z_s}^{[p]}$ rozpinają przestrzeń liniową $\mathcal{Z}_{(i+1)}$. Przypomnijmy, że zgodnie z założeniem, L jest skończenie wymiarową superalgebrą Liego, tak więc dla pewnego $m \geq 0$ mamy $\mathcal{Z}_{(m)} = \mathcal{Z}_{(m+1)}$. Oznaczmy $I = \mathcal{Z}_{(m)}$. Z wcześniejszych spostrzeżeń wynika, że I jest abelowym ograniczonym ideałem algebry L zawartym w L_0, oraz jeśli $\{z_1, z_2, \ldots, z_s\}$ jest bazą nad $\mathbf{k}$ ideału I, to $\{{z_1}^{[p]}, {z_2}^{[p]}, \ldots, {z_s}^{[p]}\}$ również. Twierdzenie G. Hochschilda [Ho54] (por. [Mo93b, Tw. 2.3.3]) mówi, że dla skończenie wymiarowej ograniczonej algebry Liego $\mathbf{g}$ nad ciałem $\mathbf{k}$ charakterystyki $p \neq 0$, ograniczona uniwersalna algebra obwiednia $u(\mathbf{g})$ jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{g}$ jest abelowa i $\mathbf{g} = \mathbf{k}\mathbf{g}^{[p]}$. Zgodnie z nim, algebra $u(I)$ jest półprosta. Z [BeC86, Lemat 4] (por. [Mo93b, Wn. 2.3.5]) wynika teraz, że istnieje skończone rozdzielcze rozszerzenie $\mathbf{K}$ ciała $\mathbf{k}$ takie, że $u(I) \otimes \mathbf{K} \cong \mathbf{K}\Gamma^\star$ dla pewnej skończonej grupy Γ i dalej, z Przykładu 1.2.6 wynika, że $A \otimes \mathbf{K}$ jest algebrą zgradowaną przez grupę Γ, z jednostkową składową Γ-gradacji $(A \otimes \mathbf{K})_1 = (A \otimes \mathbf{K})^{u(I) \otimes \mathbf{K}} = A^I \otimes \mathbf{K}$. Jest rzeczą oczywistą, że A^I jest jednorodną L-niezmienniczą podalgebrą algebry A. Korzystając z nilpotentności L można pokazać, że jednorodne elementy L działają na A^I jak nilpotentne różniczkowania i nilpotentne superróżniczkowania. Wystarczy w tym celu wybrać $n \geq 0$ tak by $[x^{[p^n]}, L] = 0$ dla każdego $x \in L_0$. Wtedy $x^{[p^{n+m}]} = (x^{[p^n]})^{[p^m]} \in I$ dla każdego $x \in L_0$, z czego wynika w prosty sposób teza.

Niech teraz char$\mathbf{k} = 0$. Oznaczmy przez A_{L_0} zbiór wszystkich elementów $a \in A$ spełniających warunek: $\psi(x)^n(a) = 0$ dla każdego elementu $x \in L_0$ oraz pewnej liczby naturalnej $n = n(x, a)$, gdzie $\psi \colon L \to \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_1$ jest homomorfizmem superalgebr Liego indukowanym przez działanie L na A. Przypomnijmy, że zgodnie z założeniem, wymiar działania L na A jest skończony i wynosi, powiedzmy, N. Wynika z tego, że:

$$A_{L_0} = \{a \in A \mid \psi(x)^{N+1}(a) = 0 \text{ dla wszystkich } x \in L_0\}.$$

Nietrudne obliczenia pokazują, że A_{L_0} jest jednorodną podalgebrą algebry A zawierającą A^L. Twierdzimy, że A_{L_0} jest L-niezmiennicza. Stosując indukcję względem $j \geq 1$ łatwo dowodzimy, że dla dowolnych elementów $x \in L_0$, $y \in L$ zachodzi równość:

$$\psi(x)^j \circ \psi(y) = \textstyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \psi((\mathrm{ad}_x)^i(y)) \circ \psi(x)^{j-i}.$$

Z założenia pamiętamy, że L jest nilpotentną superalgebrą Liego. Zatem istnieje liczba naturalna m taka, że $(\mathrm{ad}_x)^m(y) = 0$. Ponieważ równocześnie dla każdego $i \leq m-1$ zachodzi $\psi(x)^{N+m-i}(A_{L_0}) = 0$, więc $(\psi(x)^{N+m} \circ \psi(y))(A_{L_0}) = 0$. To oznacza, że A_{L_0} jest L-niezmienniczą podalgebrą algebry A, tak jak twierdziliśmy. Jest rzeczą oczywistą, że jednorodne elementy algebry L działają na A_{L_0} jak nilpotentne różniczkowania i nilpotentne superróżniczkowania. Niech teraz $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ będzie bazą nad $\mathbf{k}$ algebry Liego L_0. Przez $\mathbf{K}$ oznaczmy skończone rozszerzenie ciała $\mathbf{k}$ zawierające wszystkie wartości własne każdego z różniczkowań: $\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_s)$. Jak wiadomo, każde skończone rozszerzenie ciała charakterystyki 0 jest rozdzielcze. W szczególności $\mathbf{K}$ jest skończonym rozdzielczym rozszerzeniem ciała $\mathbf{k}$. Oznaczmy dalej przez Γ $\mathbf{K}$-liniową przestrzeń dualną $(L_0 \otimes \mathbf{K})^\star$. Z nilpotentności $L_0 \otimes \mathbf{K}$ wynika, że $A \otimes \mathbf{K}$ jest algebrą zgradowaną przez grupę Γ ze skończonym nośnikiem, z podalgebrą $A_{L_0} \otimes \mathbf{K}$ jako jednostkową składową Γ-gradacji.

Podsumujmy dotychczasowe spostrzeżenia.

1. $B \otimes \mathbf{K}$ jako jednostkowa składowa Γ-gradacji półpierwszej algebry $A \otimes \mathbf{K}$ jest algebrą półpierwszą (por. [CR83, Stw. 1.2]).

2. $L \otimes \mathbf{K}$ działa nilpotentnie na $B \otimes \mathbf{K}$ (por. [BeG94, Tw. 2]).

3. Podalgebra niezmienników $(B \otimes \mathbf{K})^{L \otimes \mathbf{K}} = A^L \otimes \mathbf{K}$ jest półpierwszą PI-algebrą.

4. $A \otimes \mathbf{K}$ jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $B \otimes \mathbf{K}$ jest PI-algebrą (por. [BeC86, Wn. 9]).

Bezpośrednio z Twierdzenia 3.1.2 wynika teraz, że $B \otimes \mathbf{K}$ jest PI-algebrą i tym samym również $A \otimes \mathbf{K}$ jest PI-algebrą. Otrzymujemy w ten sposób.

Wniosek 3.5.2. *Niech* $\mathbf{k}$ *będzie ciałem charakterystyki różnej od 2 i G - skończoną grupą abelową której rząd nie dzieli się przez* $\operatorname{char}\mathbf{k}$. *Załóżmy, że na półpierwszą algebrę $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ zgradowaną przez grupę G działa skończenie wymiarowa nilpotentna kolorowa algebra Liego $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ (ograniczona kolorowa algebra Liego L, gdy* $\operatorname{char}\mathbf{k} > 2$*) w taki sposób, że:*

1. podalgebra niezmienników A^L jest półpierwsza.

2. wymiar działania L na A jest skończony.

Oznaczmy wreszcie przez H skośny pierścień grupowy $U(L) \star G$ lub - w przypadku, gdy $\operatorname{char}\mathbf{k} > 2$ *- $u(L) \star G$. Wówczas A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A^H jest PI-algebrą.*

Dowód. Jak wiadomo, podalgebra niezmienników A^L jest niezmiennicza ze względu na działanie grupy G oraz punkty stałe działania grupy G na podalgebrę A^L pokrywają się z niezmiennikami działania algebry Hopfa H na algebrę A: $(A^L)^G = A^H$. Z Twierdzenia Kharchenki 3.1.1 łatwo widać teraz, że jeśli podalgebra A^H spełnia nietrywialną tożsamość wielomianową, to również podalgebra A^L spełnia pewną nietrywialną tożsamość wielomianową. Dla dowodu wniosku wystarczy zatem pokazać, że A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A^L jest PI-algebrą.

Przyjmijmy, że L jest kolorową ϵ-algebrą Liego. Zgodnie z Twierdzeniem M. Scheunerta [Sc79], istnieje 2-kocykl $\eta\colon G \times G \to \mathbf{k}^\star$ taki, że dla dowolnych elementów $g, h \in G$ zachodzi równość: $\frac{\eta(g,h)}{\eta(h,g)}\epsilon(g,h) = -1$ gdy $\epsilon(g,g) = \epsilon(h,h) = -1$ oraz $\frac{\eta(g,h)}{\eta(h,g)}\epsilon(g,h) = 1$ w pozostałych przypadkach. Połóżmy $\widetilde{L}_0 = \bigoplus_{g \in G_+} L_g$ oraz $\widetilde{L}_1 = \bigoplus_{g \in G_-} L_g$. W przestrzeni liniowej $\widetilde{L} = \widetilde{L}_0 \oplus \widetilde{L}_1$ definiujemy odwzorowanie dwuliniowe $[\cdot,\cdot]_\star\colon \widetilde{L} \times \widetilde{L} \to \widetilde{L}$ przyjmując $[x,y]_\star = \eta(g,h)[x,y]$, gdzie $g, h \in G$, $x \in L_g$, $y \in L_h$. Jeśli $\operatorname{char}\mathbf{k} = p > 2$, to dodatkowo definiujemy odwzorowanie $\cdot^{[p]_\star}\colon \widetilde{L}_0 \to \widetilde{L}_0$ przyjmując $x^{[p]_\star} = \left(\prod_{j=1}^{p-1} \eta(g, g^j)\right) x^{[p]}$ dla każdego $g \in G_+$ i $x \in L_g$. Jak wiadomo, tak określone działania zadają na $\widetilde{L}$ strukturę superalgebry Liego (ograniczonej superalgebry Liego, gdy $\operatorname{char}\mathbf{k} > 2$). Rozważmy dalej algebrę $\widetilde{A}$, która jako przestrzeń liniowa pokrywa się z algebrą A, ale w której mnożenie wyraża się wzorem $a \star b = \eta(g,h)ab$, gdzie $g, h \in G$, $a \in A_g$, $b \in A_h$. J. Bergen i P. Grzeszczuk [BeG00, Wn. 4 i 12] udowodnili, że kładąc $\widetilde{A}_0 = \bigoplus_{g \in G_+} A_g$, $\widetilde{A}_1 = \bigoplus_{g \in G_-} A_g$ otrzymujemy algebrę półpierwszą $\widetilde{A} = \widetilde{A}_0 \oplus \widetilde{A}_1$ zgradowaną przez grupę $\mathbb{Z}_2$. Ponadto, $\widetilde{L}$ działa na $\widetilde{A}$ z podalgebrą niezmienników

$\widetilde{A}^{\widetilde{L}}$, którą można otrzymać z algebry A^L przy użyciu 2-kocyklu η, oraz wymiar tego działania jest skończony. Wreszcie, jednostkowe składowe G-gradacji algebr: A i $\widetilde{A}$ (odpowiednio, A^L i $\widetilde{A}^{\widetilde{L}}$) są izomorficzne, wobec czego algebra A spełnia nietrywialną tożsamość wielomianową wtedy i tylko wtedy, gdy algebra $\widetilde{A}$ spełnia taką tożsamość (odpowiednio, podalgebra A^L spełnia nietrywialną tożsamość wielomianową wtedy i tylko wtedy, gdy podalgebra $\widetilde{A}^{\widetilde{L}}$ spełnia taką tożsamość). Powyższe spostrzeżenia pozwalają ograniczyć rozważania do działań superalgebr Liego.

Teza wynika teraz bezpośrednio z rozważań poprzedzających Wniosek 3.5.2.

$\square$

Rozdział 4

Działanie punktowych algebr Hopfa na algebry półpierwsze ze zredukowaną podalgebrą niezmienników

W tym rozdziale kontynuujemy badanie zachowania się tożsamości wielomianowych przy działaniu punktowych algebr Hopfa na algebry półpierwsze. Wyniki Podrozdziałów 4.1 oraz 4.2 zostały opublikowane w pracy [GH07].

4.1 Sformułowanie głównych rezultatów

Rozdział 4 jest poświęcony dowodom dwóch twierdzeń.

Twierdzenie 4.1.1. *Niech H będzie punktową algebrą Hopfa i A - półpierwszą H-modułową algebrą taką, że wymiar działania H na A jest skończony i wynosi N. Załóżmy, że każdy niezerowy H-niezmienniczy lewostronny ideał algebry A zawiera niezerowe centralne niezmienniki. Jeśli podalgebra niezmienników A^H spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to algebra A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia dN.*

Jeśli dodatkowo $A^H \subseteq \mathcal{Z}(A)$, to A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2\sqrt{N}$.

Twierdzenie 4.1.2. *Niech H będzie punktową algebrą Hopfa i A - zredukowaną H-modułową algebrą taką, że wymiar działania H na A jest skończony i wynosi N. Załóżmy, że każdy niezerowy H-niezmienniczy lewostronny ideał algebry A zawiera niezerowe niezmienniki. Jeśli podalgebra niezmienników A^H spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to algebra A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia dN.*

Zauważmy, że Twierdzenie Kharchenki 3.1.1 o działaniu skończonych grup na algebry zredukowane jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia Kharchenki 1.2.5 o istnieniu nietrywialnych punktów stałych oraz Twierdzenia 4.1.2. Kolejny wniosek wynika natychmiast z Twierdzeń: Beidara-Grzeszczuka 1.2.9 oraz 4.1.2.

Wniosek 4.1.3. *Niech* $\mathbf{k}$ *będzie ciałem charakterystyki różnej od* 2*. Załóżmy, że na zredukowaną algebrę* A *działa skończenie wymiarowa algebra Liego* L *(ograniczona algebra Liego* L*, gdy* $\mathrm{char}\mathbf{k} > 2$*) oraz wymiar tego działania jest skończony i wynosi* N*. Jeśli podalgebra niezmienników* A^L *spełnia tożsamość wielomianową stopnia* d*, to algebra* A *spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia* dN*.*

4.2 Dowody głównych rezultatów

Definicja 4.2.1. Niech H będzie algebrą Hopfa i A - H-modułową algebrą. Podalgebrę niezmienników A^H nazywamy *prawie centralną w* A, jeśli każdy niezerowy H-niezmienniczy lewostronny ideał algebry A zawiera niezerowe centralne niezmienniki, tj. ma niezerowe przecięcie z $\mathcal{Z}(A) \cap A^H$.

Zauważmy, że jeśli algebra Hopfa H działa na półpierwszą algebrę A z prawie centralną podalgebrą niezmienników A^H, to A^H jest algebrą zredukowaną. Przypuśćmy, że jest inaczej. Wtedy istnieje niezerowy element $a \in A^H$ taki, że $a^2 = 0$. Rozważmy niezerowy H-niezmienniczy lewostronny ideał Aa algebry A. Zgodnie z założeniem $\mathcal{Z}(A) \cap (Aa)^H \neq 0$. Równocześnie:

$$(\mathcal{Z}(A) \cap (Aa)^H)(\mathcal{Z}(A) \cap (Aa)^H) \subseteq Aa^2 = 0$$

co prowadzi do sprzeczności z tym, że centrum $\mathcal{Z}(A)$ jest zredukowane.

Stwierdzenie 4.2.2. *Niech* H *będzie punktową algebrą Hopfa i* A *- półpierwszą* H*-modułową algebrą taką, że wymiar działania* H *na* A *jest skończony i wynosi* N*. Załóżmy, że każdy niezerowy* H*-niezmienniczy lewostronny ideał algebry* A *zawiera niezerowe niezmienniki. Przyjmijmy również, że podalgebra niezmienników* A^H *jest zredukowaną PI-algebrą. Dodatkowo oznaczmy* $Q = Q^s(R)$*. Wtedy:*

1. *Jeśli* I *jest* H*-niezmienniczym istotnym ideałem* A*, to* $\mathrm{l.ann}_Q(\mathcal{Z}(I^H)) = 0$*.*
2. $\mathcal{Z}(A^H) \subseteq \mathcal{Z}(Q^H)$*.*
3. *Wymiar działania* H *na* Q *jest skończony i wynosi* N*.*
4. *Każdy niezerowy* H*-niezmienniczy lewostronny ideał algebry* Q *zawiera niezerowe niezmienniki.*

   Jeśli dodatkowo podalgebra A^H *jest prawie centralna w* A*, to również podalgebra* Q^H *jest prawie centralna w* Q*.*
5. Q^H *jest algebrą zredukowaną spełniającą te same tożsamości wieloliniowe co podalgebra* A^H*.*

6. *Jeśli A^H jest dziedziną, to Q^H również.*

7. *Niech $\mathfrak{A}$ będzie podalgebrą Hopfa lub koidealem H. Jeśli $A^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathcal{Z}(A)$, to $Q^{\mathfrak{A}} \subseteq C$.*

Dowód. 1. Niech I będzie H-niezmienniczym istotnym ideałem algebry A. Wtedy, zgodnie z założeniem, I^H jest niezerowym ideałem algebry A^H. Z Twierdzenia Rowena 3.2.6 zastosowanego do zredukowanej PI-algebry A^H wynika, że:

$$\mathcal{Z}(I^H) = \mathcal{Z}(A^H) \cap I^H \neq 0.$$

Oznaczmy $J = \mathrm{l.ann}_A(\mathcal{Z}(I^H))$. Dla dowodu podpunktu pierwszego wystarczy pokazać, że $J = 0$. Przypuśćmy, że jest inaczej. Wtedy J oraz $I \cap J$ są niezerowymi H-niezmienniczymi lewostronnymi ideałami algebry A. Z założenia wynika teraz, że:

$$(I \cap J)^H = I^H \cap \mathrm{ann}_{A^H}(\mathcal{Z}(I^H))$$

jest niezerowym ideałem algebry A^H. Korzystając ponownie z Twiedzenia Rowena 3.2.6 otrzymujemy:

$$0 \neq \mathcal{Z}((I \cap J)^H) = \mathcal{Z}(A^H) \cap (I \cap J)^H = \mathcal{Z}(I^H) \cap \mathrm{ann}_{A^H}(\mathcal{Z}(I^H)).$$

Prowadzi to do sprzeczności:

$$(\mathcal{Z}((I \cap J)^H))^2 \subseteq \mathcal{Z}(I^H)\mathrm{ann}_{A^H}(\mathcal{Z}(I^H)) = 0$$

z założeniem, że algebra A^H jest zredukowana. Pokazaliśmy tym samym, że $\mathrm{l.ann}_A(\mathcal{Z}(I^H)) = 0$ z czego wynika już teza.

2. Niech $z \in \mathcal{Z}(A^H)$, $q \in Q^H$. Rozważmy H-niezmienniczy istotny ideał I algebry A taki, że $qI^H \subseteq A^H$. Ideał taki istnieje zgodnie z Lematem 3.3.3. Wtedy dla każdego $i \in I^H$ zachodzi równość:

$$(zq - qz)i = z(qi) - q(zi) = (qi)z - q(iz) = 0.$$

Wynika z niej, że $zq - qz \in \mathrm{l.ann}_Q(I^H) = 0$ i wobec tego $z \in \mathcal{Z}(Q^H)$.

Aby udowodnić podpunkt **3** stwierdzenia wystarczy pokazać, że dla każdego elementu $h \in H$ z równości $h \cdot A = 0$ wynika $h \cdot Q = 0$. Niech $q \in Q$. Rozważmy H-niezmienniczy istotny ideał I algebry A taki, że $qI \subseteq A$. Wtedy dla każdego $i \in I^H$ zachodzi:

$$(h \cdot q)i = h \cdot qi \in h \cdot A = 0.$$

Z równości tej wynika, że $h \cdot q \in \mathrm{l.ann}_Q(I^H) = 0$. Tak więc $h \cdot Q = 0$.

4. Jeśli J jest niezerowym H-niezmienniczym lewostronnym ideałem algebry Q, to $J \cap A$ jest niezerowym H-niezmienniczym lewostronnym ideałem algebry A. Bezpośrednio z założenia widać teraz, że $(J \cap A)^H \neq 0$. Zatem $J^H \neq 0$. Druga część podpunktu czwartego wynika natychmiast z inkluzji $\mathcal{Z}(A) \subseteq C$.

5. Pokażemy na początek, że Q^H jest algebrą zredukowaną. Rozważmy dowolny element $q \in Q^H$ dla którego zachodzi równość $q^2 = 0$ oraz H-niezmienniczy istotny ideał I algebry A taki, że $qI \subseteq A$. Z podpunktu drugiego łatwo widać, że:

$$\mathcal{Z}(I^H) = \mathcal{Z}(A^H) \cap I^H \subseteq \mathcal{Z}(Q^H).$$

Mamy zatem:

$$(q\mathcal{Z}(I^H))^2 \subseteq q^2\mathcal{Z}(I^H) = 0.$$

Ponieważ równocześnie $q\mathcal{Z}(I^H) \subseteq A^H$ i A^H jest algebrą zredukowaną, więc $q\mathcal{Z}(I^H) = 0$. Tym samym $q \in \mathrm{l.ann}_Q(\mathcal{Z}(I^H)) = 0$.

Załóżmy teraz, że algebra A^H spełnia tożsamość wieloliniową $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0$. Rozważmy dowolne elementy $q_1, q_2, \ldots, q_d \in Q^H$. Wybierzmy H-niezmienniczy istotny ideał I algebry A spełniający warunek $q_j I^H \subseteq A^H$ dla każdego $1 \leq j \leq d$. Wtedy dla dowolnych elementów $z_1, z_2, \ldots, z_d \in \mathcal{Z}(I^H) \subseteq \mathcal{Z}(Q^H)$ zachodzi równość:

$$0 = \omega(q_1z_1, q_2z_2, \ldots, q_dz_d) = \omega(q_1, q_2, \ldots, q_d)z_1z_2 \ldots z_d.$$

Wynika z niej, że $\omega(q_1, q_2, \ldots, q_d) \in \mathrm{l.ann}_Q((\mathcal{Z}(I^H))^d) = 0$.

Podpunkt **6** dowodzi się podobnie jak pierwszą część podpunktu piątego.

7. Załóżmy, że $A^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathcal{Z}(A)$. Dla dowodu podpunktu siódmego wystarczy pokazać zawieranie $Q^{\mathfrak{A}} \subseteq C_Q(A)$. Niech $q \in Q^{\mathfrak{A}}$. Rozważmy H-niezmienniczy istotny ideał I algebry A taki, że $qI^H \subseteq A^H$. Wtedy dla dowolnych $i \in I^H$, $a \in A$ zachodzi:

$$(qa - aq)i = q(ai) - a(qi) = q(ia) - (qi)a = 0.$$

Z równości tej wynika, że $qa - aq \in \mathrm{l.ann}_Q(I^H) = 0$ i wobec tego $q \in C_Q(A)$.

□

Dowód Twierdzenia 4.1.1. Ze Stwierdzenia 4.2.2 wynika, że pierścień ułamków symetrycznych $Q = Q^s(A)$ spełnia wszystkie założenia dowodzonego twierdzenia. Ustalmy dowolnie wybrany maksymalny ideał P podalgebry C^H i przyjmijmy $S = C^H \setminus P$. Oznaczmy przez $\eta_S \colon Q \to Q_S$ homomorfizm kanoniczny algebry Q w centralną lokalizację Q_S. Zgodnie ze Stwierdzeniem 2.5.4:

1. Q_S jest półpierwszą H-modułową algebrą z centrum $\mathcal{Z}(Q_S) = C_S$.
2. Wymiar działania H na Q_S jest skończony nie większy niż N.
3. Podalgebra niezmienników $(Q_S)^H = (Q^H)_S$ spełnia te same tożsamości wieloliniowe co podalgebra Q^H.

Twierdzimy teraz, że podalgebra $(Q_S)^H$ jest prawie centralna w Q_S. Niech K będzie niezerowym H-niezmienniczym lewostronnym ideałem algebry Q_S. Rozważmy dowolny element $q \in Q$ taki, że $0 \neq \eta_S(q) \in K$. Przypomnijmy, że przez $\pi \colon H \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(Q)$ oznaczyliśmy homomorfizm algebr z jedynką indukowany przez działanie H na Q. Wybierzmy dowolny podzbiór $\{h_1, h_2, \ldots, h_N\} \subseteq H$ dla którego $\{\pi(h_1), \pi(h_2), \ldots, \pi(h_N)\}$ jest bazą nad $\mathbf{k}$ podalgebry $\pi(H) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(Q)$. Oznaczmy $J = \sum_{i=1}^{N} Q(h_i \cdot q)$. Bezpośrednio sprawdza się, że J jest H-niezmienniczym lewostronnym ideałem Q skończenie generowanym jako lewostronny Q-moduł, takim że:

$$0 \neq \eta_S(J) \subseteq K.$$

Na mocy Lematu 2.4.5, J jest injektywnym C^H-modułem. Z Lematu 2.1.5 oraz Stwierdzenia 2.4.4 wynika dalej, że również J^H i $C \cap J^H$ są injektywnymi C^H-modułami. Z Wniosku 2.4.3 oraz Lematu 2.4.6 łatwo widać teraz, że istnieje element $a \in C \cap J^H$ oraz idempotent $e_a \in C^H$ taki, że:

$$\mathrm{ann}_{C^H}(C \cap J^H) = \mathrm{ann}_{C^H}(a) = C^H(1 - e_a).$$

Pokażemy, że $(1 - e_a)J = 0$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy $(1 - e_a)J$ jest niezerowym H-niezmienniczym lewostronnym ideałem algebry Q. Ze Stwierdzenia 4.2.2 wynika, że:

$$0 \neq C \cap ((1 - e_a)J)^H = C \cap J^H \cap C^H(1 - e_a) = C \cap J^H \cap \mathrm{ann}_{C^H}(C \cap J^H).$$

Prowadzi to do sprzeczności:

$$(C \cap ((1 - e_a)J)^H)^2 \subseteq (C \cap J^H)\mathrm{ann}_{C^H}(C \cap J^H) = 0$$

z tym, że rozszerzony centroid C jest zredukowany. Pokazaliśmy tym samym, że $(1 - e_a)J = 0$. Ponieważ równocześnie $\eta_S(J) \neq 0$, więc $1 - e_a \in P$. Wynika z tego, że $\mathrm{ann}_{C^H}(a) \subseteq P$ i ostatecznie:

$$0 \neq \eta_S(a) \in \eta_S(C \cap J^H) \subseteq C_S \cap K^H.$$

Podalgebra $(Q_S)^H$ jest więc prawie centralna w Q_S, tak jak twierdziliśmy. Zgodnie ze Stwierdzeniem 2.5.4, $C_S \cap (Q_S)^H$ jest centralnym podciałem algebry Q_S. Oznacza to, że algebra Q_S nie posiada właściwych H-niezmienniczych lewostronnych ideałów i tym samym Q_S jest nieprzywiedlnym $Q_S\#H$-modułem. Tak więc wszystkie założenia Wniosku 1.3.6 są spełnione, wobec czego wymiar algebry Q_S traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad pierścieniem z dzieleniem $(Q_S)^H$ jest skończony nie większy niż N. Możemy teraz stosować Wniosek 3.2.5. Wynika z niego, że algebra Q_S spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia dN. Zauważmy przy tym, że stopień tożsamości wielomianowej spełnianej przez algebrę Q_S nie zależy od wyboru ideału P. Wobec tego również algebra Q spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia dN.

Załóżmy teraz dodatkowo, że $A^H \subseteq \mathcal{Z}(A)$. Wtedy zgodnie ze Stwierdzeniem 4.2.2, $Q^H \subseteq C$. Z wcześniejszych rozważań łatwo widać teraz, że wymiar algebry Q_S nad centralnym podciałem $(Q_S)^H = (C_S)^H$ jest skończony nie większy niż N, co wobec Wniosku 3.2.4 oznacza, że algebra Q_S spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2\sqrt{N}$. Tym samym również algebra Q spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2\sqrt{N}$.

$\square$

Dowód Twierdzenia 4.1.2. Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy A^H jest dziedziną. Wtedy zgodnie ze Stwierdzeniem 4.2.2 również Q^H jest dziedziną. Oznaczmy multiplikatywnie domknięty podzbiór $S = \mathcal{Z}(Q^H) \setminus \{0\}$ i rozważmy centralną lokalizację $S^{-1}Q^H$. Z Definicji 2.5.2 wynika, że:

1. $Q^H \subseteq S^{-1}Q^H$.

2. Algebra $S^{-1}Q^H$ spełnia te same tożsamości wieloliniowe co algebra Q^H.

3. Centrum $\mathcal{Z}(S^{-1}Q^H) = S^{-1}\mathcal{Z}(Q^H)$ jest ciałem.

4. $S^{-1}Q^H$ jest algebrą z dzieleniem.

5. Wymiar algebry $S^{-1}Q^H$ nad $S^{-1}\mathcal{Z}(Q^H)$ jest skończony nie większy niż $(\frac{d}{2})^2$.

Uzasadnimy dwie ostatnie własności. Łatwo widać, że $S^{-1}Q^H$ jest dziedziną. Zatem na mocy Uwagi 3.2.7 do Twierdzenia Rowena każdy niezerowy jednostronny ideał algebry $S^{-1}Q^H$ przecina nietrywialnie $S^{-1}\mathcal{Z}(Q^H)$ i tym samym zawiera elementy odwracalne. $S^{-1}Q^H$ jest więc algebrą z dzieleniem. Równocześnie $S^{-1}Q^H$ spełnia tożsamość wielomianową stopnia d. Korzystając teraz z Twierdzenia Kaplansky'ego 3.2.3 otrzymujemy własność piątą.

Naszym celem będzie pokazanie teraz, że istnieje pierścień lewostronnych ułamków $S^{-1}Q$. Dokładniej pokażemy, że:

1. Każdy element $s \in S$ jest *regularny w* Q, tj. $\mathrm{l.ann}_Q(s) = \mathrm{r.ann}_Q(s) = 0$.

2. S jest lewostronnym zbiorem Orego, tj. $Qs \cap Sq \neq \emptyset$ dla wszystkich $s \in S$, $q \in Q$.

1. Niech $s \in S$. Ponieważ Q jest algebrą zredukowaną, więc $\mathrm{l.ann}_Q(s) = \mathrm{r.ann}_Q(s) = \mathrm{ann}_Q(s)$ jest H-niezmienniczym ideałem Q. Gdyby $\mathrm{ann}_Q(s) \neq 0$, to zgodnie ze Stwierdzeniem 4.2.2 mielibyśmy $Q^H \cap \mathrm{ann}_Q(s) \neq 0$ wbrew temu, że Q^H jest dziedziną. Zatem $\mathrm{ann}_Q(s) = 0$.

2. Na początek będziemy chcieli skorzystać z Lematu 1.3.5 aby udowodnić, że algebra Q ma skończony lewostronny wymiar Goldiego. W tym celu dowiedziemy, że Q jest jednolitym $Q\#H$-modułem. Rozważmy dowolne niezerowe H-niezmiennicze lewostronne ideały I i J algebry Q. Ze Stwierdzenia 4.2.2 oraz Uwagi 3.2.7 wynika, że $\mathcal{Z}(I^H)$, $\mathcal{Z}(J^H)$ są niezerowymi ideałami centrum $\mathcal{Z}(Q^H)$. Mamy zatem:

$$0 \neq \mathcal{Z}(I^H)\mathcal{Z}(J^H) \subseteq \mathcal{Z}(I^H) \cap \mathcal{Z}(J^H) \subseteq I \cap J.$$

Q jest więc jednolitym $Q\#H$-modułem, tak jak twierdziliśmy. Z Lematu 1.3.5 wynika teraz, że algebra Q ma skończony lewostronny wymiar Goldiego. Zauważmy dalej, że Q jako algebra zredukowana jest lewostronnie niesingularna. Rzeczywiście, dla każdego $q \in Q$ zachodzi $\mathrm{l.ann}_Q(q) \cap Qq = 0$. Bezpośrednio z Twierdzenia Goldiego (por. [La99, Tw. 4.11.13]) wynika teraz równoważność dwóch pierwszych warunków:

> Dla dowolnego lewostronnego ideału I algebry Q następujące warunki są równoważne:
>
> 2.1. I jest istotnym lewostronnym ideałem Q.
>
> 2.2. I zawiera elementy regularne w Q.
>
> 2.3. I ma niezerowe przecięcie z S.

Implikacja **2.3** $\Rightarrow$ **2.2** wynika bezpośrednio z punktu pierwszego.

Do udowodnienia implikacji **2.1** $\Rightarrow$ **2.3** pokażemy najpierw, że każdy istotny lewostronny ideał algebry Q zawiera H-niezmienniczy istotny lewostronny ideał algebry Q. Podobnie jak w dowodzie Lematu 3.3.3 nie zmniejszając ogólności możemy ograniczyć nasze rozważania do $G(H)$-niezmienniczych istotnych lewostronnych ideałów algebry Q. Oznaczmy przez $\pi\colon H \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(Q)$ homomorfizm algebr z jedynką indukowany przez działanie H na Q. Z Twierdzenia Tafta-Wilsona 1.1.7 wynika, że istnieją elementy $c_1, c_2, \ldots, c_N \in H$, $c_1 = 1_H$, oraz rodzina podprzestrzeni $\{H_n\}_{0\leq n\leq N}$ taka, że:

a. $0 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_N = H$.

b. $\pi(H_n) = \pi(H_{n-1}) + \mathbf{k}\pi(c_n)$ dla każdego $1 \leq n \leq N$.

c. $\Delta(c_n) \in c_n \otimes g + h \otimes c_n + H_{n-1} \otimes H_{n-1}$ dla każdego $2 \leq n \leq N$, gdzie $g, h \in G(H)$.

Niech teraz I będzie $G(H)$-niezmienniczym istotnym lewostronnym ideałem algebry Q. Połóżmy $I_{(0)} = Q$ oraz dla każdego $1 \leq n \leq N$:

$$I_{(n)} = \big\{x \in I_{(n-1)} \mid c_n \cdot x \in I\big\} = \{x \in Q \mid H_n \cdot x \subseteq I\}.$$

Pokażemy w oparciu o indukcję względem $n = 1, 2, \ldots, N$, że $I_{(n)}$ jest istotnym lewostronnym ideałem Q zawartym w I. Jest to oczywiste dla $n = 1$. Przypuśćmy, że teza jest prawdziwa dla $n-1$. Łatwo widać, że $I_{(n)}$ jest lewostronnym ideałem Q zawartym w I. Rozważmy dowolny niezerowy lewostronny ideał J algebry Q. Na mocy założenia indukcyjnego $I_{(n-1)} \cap J \neq 0$. Wybierzmy zatem niezerowy element $a \in I_{(n-1)} \cap J$ i oznaczmy:

$$K_{(n)} = \{x \in Q \mid x(c_n \cdot a) \in I\}.$$

Bezpośrednio sprawdza się, że $K_{(n)}$ jest istotnym lewostronnym ideałem Q. To z kolei oznacza, że $\bigcap_{g\in G(H)} g\cdot K_{(n)}$ jest $G(H)$-niezmienniczym istotnym lewostronnym ideałem Q. Ponieważ równocześnie Q jest algebrą lewostronnie niesingularną, więc $(\bigcap_{g\in G(H)} g \cdot K_{(n)})a \neq 0$. Wybierzmy teraz element $q \in \bigcap_{g\in G(H)} g \cdot K_{(n)}$ taki, że $qa \neq 0$. Zauważmy, że dla każdego $h \in G(H)$ zachodzi $(h \cdot q)(c_n \cdot a) \in I$. Mamy zatem:

$$c_n \cdot qa = (c_n \cdot q)(g \cdot a) + (h \cdot q)(c_n \cdot a) + \sum (c_{n_1} \cdot q)(c_{n_2} \cdot a) \in I,$$

dla pewnych $c_{n_1}, c_{n_2} \in H_{n-1}$. Otrzymaliśmy w ten sposób niezerowy element qa należący do $I_{(n)} \cap J$. $I_{(n)}$ jest więc istotnym lewostronnym ideałem Q. Oznacza to w szczególności, że $I_{(N)}$ jest H-niezmienniczym istotnym lewostronnym ideałem Q. Pokazaliśmy, że każdy istotny lewostronny ideał I algebry Q zawiera H-niezmienniczy istotny lewostronny ideał $\hat{I}$ algebry Q. Ze Stwierdzenia 4.2.2 oraz Uwagi 3.2.7 wynika teraz, że $\mathcal{Z}(Q^H) \cap \hat{I}^H \neq 0$. Tak więc $I \cap S \neq \emptyset$. To kończy dowód implikacji 2.1 $\Rightarrow$ 2.3.

Dokończymy teraz dowód punktu drugiego. Weźmy dowolne elementy $s \in S$, $q \in Q$. Jak wynika z Twierdzenia Goldiego, Qs jest istotnym lewostronnym ideałem Q. Jest więc rzeczą oczywistą, że również:

$$K = \{x \in Q \mid xq \in Qs\}$$

jest istotnym lewostronnym ideałem Q. Z podpunktu 2.3 łatwo widać teraz, że $K \cap S \neq \emptyset$. Tym samym $Qs \cap Sq \neq \emptyset$ co kończy ostatecznie dowód punktu drugiego.

Rozważmy na koniec pierścień lewostronnych ułamków $S^{-1}Q \supseteq Q$. Nietrudne obliczenia pokazują, że dla dowolnych elementów $s_1, s_2 \in S$ oraz $q_1, q_2 \in Q$, równość ${s_1}^{-1}q_1 = {s_2}^{-1}q_2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s_2q_1 = s_1q_2$. Wynika z tego, że:

1. Działanie H na Q przedłuża się do działania H na $S^{-1}Q$ zgodnie ze wzorem $h \cdot s^{-1}q = s^{-1}(h \cdot q)$, gdzie $h \in H$, $s \in S$, $q \in Q$.

2. Wymiar działania H na $S^{-1}Q$ jest skończony i wynosi N.

3. Podalgebra niezmienników $(S^{-1}Q)^H = S^{-1}Q^H$ jest algebrą z dzieleniem spełniającą tożsamość wielomianową stopnia d.

4. $S^{-1}Q$ nie posiada właściwych H-niezmienniczych lewostronnych ideałów.

Dla dowodu podpunktu **4** weźmy dowolny niezerowy H-niezmienniczy lewostronny ideał I algebry $S^{-1}Q$. Wtedy $I \cap Q$ jest niezerowym H-niezmienniczym lewostronnym ideałem algebry Q. Ze Stwierdzenia 4.2.2 otrzymujemy:

$$0 \neq (I \cap Q)^H \subseteq I \cap S^{-1}Q^H$$

z czego wynika, że $I = S^{-1}Q$. $S^{-1}Q$ jest więc nieprzywiedlnym $S^{-1}Q\#H$-modułem. Możemy teraz stosować Wniosek 1.3.6. Wynika z niego, że wymiar algebry $S^{-1}Q$ traktowanej jako prawostronna przestrzeń linowa nad pierścieniem z dzieleniem $S^{-1}Q^H$ jest skończony nie większy niż N. Wreszcie na mocy Wniosku 3.2.5, algebra $S^{-1}Q$ spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia dN.

Rozpatrzymy na koniec przypadek ogólny. Dla dowolnie wybranego maksymalnego ideału P podalgebry C^H oznaczmy przez $\eta_S \colon Q \to Q_S$ homomorfizm kanoniczny algebry Q w centralną lokalizację Q_S względem $S = C^H \setminus P$. Jak wynika ze Stwierdzenia 2.5.4:

1. Działanie H na Q przedłuża się do działania H na Q_S.

2. Wymiar działania H na Q_S jest skończony nie większy niż N.

3. Podalgebra niezmienników $(Q_S)^H = (Q^H)_S$ spełnia tożsamość wielomianową stopnia d.

Aby móc skorzystać z wyników pierwszej części dowodu twierdzenia musimy pokazać, że:

1. Q_S jest algebrą zredukowaną.

2. Każdy niezerowy H-niezmienniczy lewostronny ideał algebry Q_S zawiera niezerowe niezmieniki.

3. Podalgebra niezmienników $(Q_S)^H$ jest dziedziną.

Do dowodu własności **1** weźmy dowolny element $q \in Q$ dla którego zachodzi $\eta_S(q)^2 = 0$. Wtedy istnieje element $s \in S$ taki, że $sq^2 = 0$, czyli $(sq)^2 = 0$. Ale Q jest algebrą zredukowaną. Zatem $sq = 0$ i tym samym $\eta_S(q) = 0$.

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 4.1.1 pokazujemy własność **2.**

3. Rozważmy dowolne elementy $a, b \in Q^H$ dla których $\eta_S(ab) = 0$. Wybierzmy element $s \in S$ taki, że $sab = 0$. Ponieważ Q jest algebrą zredukowaną, więc:

$$\mathrm{l.ann}_Q(b) = \mathrm{r.ann}_Q(b) = \mathrm{ann}_Q(QbQ).$$

Równocześnie, zgodnie z Lematem 2.4.2, zachodzi równość:

$$\mathrm{ann}_Q(QbQ) = Q(1 - e_b),$$

gdzie $e_b \in C^H$ jest idempotentem. Mamy zatem:

$$sa \in \mathrm{l.ann}_Q(b) = Q(1 - e_b),$$

czyli $sae_b = 0$. Podobnie dowodzimy, że istnieje idempotent $e_a \in C^H$ taki, że $se_ae_b = 0$. Z ostatniej równości wynika, że $e_a \notin S$ lub $e_b \notin S$. To oznacza, że $1 - e_a \in S$ lub $1 - e_b \in S$ i ostatecznie $\eta_S(a) = 0$ lub $\eta_S(b) = 0$.

Z pierwszej części dowodu twierdzenia wynika teraz, że algebra Q_S spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia dN. Tym samym również algebra Q spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia dN. Dowód Twierdzenia 4.1.2 został zakończony.

□

4.3 Działanie superalgebr Liego na algebry półpierwsze z centralną podalgebrą niezmienników

O ciałach rozważanych w Podrozdziale 4.3 zakładamy, że są charakterystyki 0.

Podrozdział ten rozpoczynamy od przypomnienia następującego wyniku J. Bergena i P. Grzeszczuka.

Twierdzenie 4.3.1. ([BeG96, Tw. 4.9]) *Załóżmy, że na półpierwszą algebrę A charakterystyki 0 działa skończenie wymiarowa nilpotentna algebra Liego L w taki sposób, że:*

1. *podalgebra niezmienników A^L jest zawarta w centrum $\mathcal{Z}(A)$.*

2. *wymiar działania L na A jest skończony.*

Wtedy A jest algebrą przemienną i L działa trywialnie na A.

W kontekście Wniosku 3.5.2 naturalnie pojawia się pytanie czy rezultat Bergena i Grzeszczuka można rozszerzyć na większą klasę kolorowych algebr Liego. Przykład nietrywialnego działania 2-wymiarowej abelowej superalgebry Liego $L = L_1$ na algebrę macierzy $A = M_2(\mathbf{k})$ z centralną podalgebrą niezmienników A^L podany przez Bergena i Grzeszczuka [BeG96, Przykład 5.7] pokazuje, że odpowiedź jest negatywna już dla superalgebr Liego. Zauważmy, że w powyższym przykładzie $[L_1, L_1] = 0$. Naszym celem będzie wskazanie przykładów w których skończenie wymiarowa nilpotentna superalgebra Liego $L = L_0 \oplus L_1$, gdzie $L_0 = [L_1, L_1]$, działa na algebrę macierzy $A = M_n(\mathbf{k})$ w sposób następujący:

1. algebra Liego L_0 działa nietrywialnie na A.
2. podalgebra niezmienników A^L jest zawarta w centrum $\mathcal{Z}(A)$.

Dla dowolnej algebry A oraz dowolnego automorfizmu σ algebry A spełniającego warunek $\sigma^2 = \mathrm{id}_A$ zauważmy, że $\mathrm{char}\mathbf{k} = 0$ pozwala wprowadzić w A strukturę algebry zgradowanej przez grupę $\mathbb{Z}_2$. Wystarczy jeżeli przyjmiemy $A_0 = \{a \in A \mid \sigma(a) = a\}$ i $A_1 = \{a \in A \mid \sigma(a) = -a\}$. W dalszym ciągu będziemy stosować oznaczenia z Podrozdziału 1.4:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_0 = \{\delta \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(A) \mid & \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \\ & (\delta \circ \sigma)(a) = (\sigma \circ \delta)(a) \text{ dla wszystkich } a, b \in A\}\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_1 = \{\delta \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(A) \mid & \delta(ab) = \delta(a)b + \sigma(a)\delta(b), \\ & (\delta \circ \sigma)(a) = -(\sigma \circ \delta)(a) \text{ dla wszystkich } a, b \in A\}.\end{aligned}$$

Przypomnijmy, że $\mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_1$ jest superalgebrą Liego z supernawiasem Liego zadanym wzorem $[\delta, \partial] = \delta \circ \partial - (-1)^{ij} \partial \circ \delta$, gdzie $i, j \in \{0, 1\}$, $\delta \in \mathfrak{D}_i$, $\partial \in \mathfrak{D}_j$. Rozpatrując działanie dowolnej superalgebry Liego $L = L_0 \oplus L_1$ na algebrę A będziemy dla ułatwienia rozważań zakładać, że $L \subseteq \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_1$.

Przykład 4.3.2. Niech A będzie algebrą macierzy $M_8(\mathbf{k})$. Przez σ oznaczmy automorfizm wewnętrzny algebry A wyznaczony przez macierz diagonalną $\sum_{i=1}^{4} e_{ii} - \sum_{i=5}^{8} e_{ii}$. Rozważmy wewnętrzne różniczkowania $\mathrm{ad}_{a_1}, \mathrm{ad}_{a_2}, \mathrm{ad}_{a_3}$ oraz wewnętrzne σ-różniczkowania $\mathrm{ad}_{b_1}, \mathrm{ad}_{b_2}, \mathrm{ad}_{b_3}, \mathrm{ad}_{c_1}, \mathrm{ad}_{c_2}, \mathrm{ad}_{c_3}$ algebry A indukowane przez macierze:

$$\begin{array}{lll} a_1 = e_{21} + e_{65} & a_2 = e_{23} + e_{85} & a_3 = e_{24} - e_{75} \\ b_1 = e_{17} + e_{46} + e_{53} + e_{82} & b_2 = e_{18} - e_{36} + e_{54} - e_{72} & \\ \multicolumn{3}{l}{b_3 = e_{15} + e_{25} + e_{26} + e_{37} + e_{48} - e_{51} - e_{62} - e_{73} - e_{84}} \\ c_1 = e_{27} - e_{45} + e_{63} - e_{81} & c_2 = e_{28} + e_{35} + e_{64} + e_{71} & c_3 = e_{15} + e_{26} - e_{73} - e_{84} \end{array}$$

odpowiednio. Zauważmy, że dla dowolnego $i \in \{1, 2, 3\}$ zachodzą następujące równości: $\sigma(a_i) = a_i$, $\sigma(b_i) = -b_i$, $\sigma(c_i) = -c_i$. Z równości tych wynika, że:

$$(\mathrm{ad}_{a_i} \circ \sigma)(x) = a_i\sigma(x) - \sigma(x)a_i = \sigma(a_i x - x a_i) = (\sigma \circ \mathrm{ad}_{a_i})(x),$$

$$(\mathrm{ad}_{b_i} \circ \sigma)(x) = b_i\sigma(x) - x b_i = -\sigma(b_i x - \sigma(x) b_i) = -(\sigma \circ \mathrm{ad}_{b_i})(x)$$

i analogicznie $(\mathrm{ad}_{c_i} \circ \sigma)(x) = -(\sigma \circ \mathrm{ad}_{c_i})(x)$, gdzie $x \in A$. Można teraz pokazać, że powyżej zdefiniowane skośne różniczkowania rozpinają nilpotentną superalgebrę Liego $L = [L_1, L_1] \oplus L_1 \subseteq \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_1$ stopnia nilpotentności 4. Tabelka działania superalgebry Liego L ma postać:

$[\cdot,\cdot]$	ad_{a_1}	ad_{a_2}	ad_{a_3}	ad_{b_1}	ad_{b_2}	ad_{b_3}	ad_{c_1}	ad_{c_2}	ad_{c_3}
ad_{a_1}	0	0	0	ad_{c_1}	ad_{c_2}	0	0	0	0
ad_{a_2}	0	0	0	0	$-\mathrm{ad}_{c_3}$	ad_{c_1}	0	0	0
ad_{a_3}	0	0	0	ad_{c_3}	0	ad_{c_2}	0	0	0
ad_{b_1}	$-\mathrm{ad}_{c_1}$	0	$-\mathrm{ad}_{c_3}$	0	0	ad_{a_2}	0	0	0
ad_{b_2}	$-\mathrm{ad}_{c_2}$	ad_{c_3}	0	0	0	ad_{a_3}	0	0	0
ad_{b_3}	0	$-\mathrm{ad}_{c_1}$	$-\mathrm{ad}_{c_2}$	ad_{a_2}	ad_{a_3}	$-2\mathrm{ad}_{a_1}$	0	0	0
ad_{c_1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ad_{c_2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ad_{c_3}	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Wreszcie, elementarne rachunki pokazują, że:

$$A^L = \ker \mathrm{ad}_{b_1} \cap \ker \mathrm{ad}_{b_2} \cap \ker \mathrm{ad}_{b_3} \cong \mathbf{k}.$$

Przykład 4.3.3. Załóżmy teraz, że A jest algebrą macierzy $M_{16}(\mathbf{k})$. Przez σ oznaczmy automorfizm wewnętrzny algebry A wyznaczony przez macierz diagonalną $\sum_{i=1}^{8} E_{ii} - \sum_{i=9}^{16} E_{ii}$. Rozważmy wewnętrzne różniczkowania $\mathrm{ad}_{a_1}, \mathrm{ad}_{a_2}, \ldots, \mathrm{ad}_{a_5}$ oraz wewnętrzne σ-różniczkowania $\mathrm{ad}_{b_1}, \mathrm{ad}_{b_2}, \ldots, \mathrm{ad}_{b_5}, \mathrm{ad}_{c_1}, \mathrm{ad}_{c_2}, \mathrm{ad}_{c_3}$ algebry A indukowane przez macierze:

$$\begin{aligned}
a_1 &= e_{21} + e_{65} + e_{10,9} + e_{14,13}\\
a_2 &= e_{23} + e_{85} + e_{10,11} + e_{16,13}\\
a_3 &= e_{24} - e_{75} + e_{10,12} - e_{15,13}\\
a_4 &= e_{27} - e_{45} - e_{63} + e_{81} + e_{10,15} - e_{12,13} - e_{14,11} + e_{16,9}\\
a_5 &= e_{28} + e_{35} - e_{64} - e_{71} + e_{10,16} + e_{11,13} - e_{14,12} - e_{15,9}\\
b_1 &= e_{1,15} + e_{4,14} + e_{5,11} + e_{8,10} + e_{97} + e_{12,6} + e_{13,3} + e_{16,2}\\
b_2 &= e_{1,16} - e_{3,14} + e_{5,12} - e_{7,10} + e_{98} - e_{11,6} + e_{13,4} - e_{15,2}\\
b_3 &= e_{1,13} + e_{2,13} + e_{2,14} + e_{3,15} + e_{4,16} - e_{59} - e_{6,10} - e_{7,11} - e_{8,12} + e_{95} + e_{10,5} +\\
&\qquad + e_{10,6} + e_{11,7} + e_{12,8} - e_{13,1} - e_{14,2} - e_{15,3} - e_{16,4}\\
b_4 &= e_{19} + e_{29} + e_{2,10} + e_{3,11} + e_{4,12} + e_{5,13} - e_{6,13} + e_{6,14} + e_{7,15} + e_{8,16} - e_{91} +\\
&\qquad + e_{10,1} - e_{10,2} - e_{11,3} - e_{12,4} - e_{13,5} - e_{14,5} - e_{14,6} - e_{15,7} - e_{16,8}\\
b_5 &= e_{19} + e_{2,10} + e_{3,11} + e_{4,12} - e_{5,13} - e_{6,14} - e_{7,15} - e_{8,16} + e_{91} + e_{10,2} + e_{11,3} +\\
&\qquad + e_{12,4} - e_{13,5} - e_{14,6} - e_{15,7} - e_{16,8}\\
c_1 &= e_{2,15} - e_{4,13} + e_{6,11} - e_{89} + e_{10,7} - e_{12,5} + e_{14,3} - e_{16,1}\\
c_2 &= e_{2,16} + e_{3,13} + e_{6,12} + e_{79} + e_{10,8} + e_{11,5} + e_{14,4} + e_{15,1}\\
c_3 &= e_{1,13} + e_{2,14} - e_{7,11} - e_{8,12} + e_{95} + e_{10,6} - e_{15,3} - e_{16,4}
\end{aligned}$$

odpowiednio. Możemy udowodnić, że tak zdefiniowane skośne różniczkowania rozpinają nilpotentną superalgebrę Liego $L = [L_1, L_1] \oplus L_1 \subseteq \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_1$ stopnia nilpotentności 6. Tabelka działania w L ma postać:

$[\cdot,\cdot]$	ad_{a_1}	ad_{a_2}	ad_{a_3}	ad_{a_4}	ad_{a_5}	ad_{b_1}	ad_{b_2}	ad_{b_3}	ad_{b_4}	ad_{b_5}	ad_{c_i}
ad_{a_1}	0	0	0	0	0	ad_{c_1}	ad_{c_2}	0	0	0	0
ad_{a_2}	0	0	0	0	0	0	$-\mathrm{ad}_{c_3}$	ad_{c_1}	0	0	0
ad_{a_3}	0	0	0	0	0	ad_{c_3}	0	ad_{c_2}	0	0	0
ad_{a_4}	0	0	0	0	$-2\mathrm{ad}_{a_1}$	0	$-\mathrm{ad}_{b_5}$	0	0	$-2\mathrm{ad}_{c_1}$	0
ad_{a_5}	0	0	0	$2\mathrm{ad}_{a_1}$	0	ad_{b_5}	0	0	0	$-2\mathrm{ad}_{c_2}$	0
ad_{b_1}	$-\mathrm{ad}_{c_1}$	0	$-\mathrm{ad}_{c_3}$	0	$-\mathrm{ad}_{b_5}$	0	0	ad_{a_2}	ad_{a_4}	0	0
ad_{b_2}	$-\mathrm{ad}_{c_2}$	ad_{c_3}	0	ad_{b_5}	0	0	0	ad_{a_3}	ad_{a_5}	0	0
ad_{b_3}	0	$-\mathrm{ad}_{c_1}$	$-\mathrm{ad}_{c_2}$	0	0	ad_{a_2}	ad_{a_3}	$-2\mathrm{ad}_{a_1}$	0	0	0
ad_{b_4}	0	0	0	0	0	ad_{a_4}	ad_{a_5}	0	0	$2\mathrm{ad}_{a_1}$	0
ad_{b_5}	0	0	0	$2\mathrm{ad}_{c_1}$	$2\mathrm{ad}_{c_2}$	0	0	0	$2\mathrm{ad}_{a_1}$	0	0
ad_{c_j}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

gdzie $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Elementarne rachunki pokazują, że:

$$A^L = \ker \mathrm{ad}_{b_1} \cap \ker \mathrm{ad}_{b_2} \cap \ker \mathrm{ad}_{b_3} \cap \ker \mathrm{ad}_{b_4} \cong \mathbf{k}.$$

W podanym przez nas Przykładzie 4.3.2 superalgebra Liego L jest nilpotentna stopnia 4. Nie istnieje natomiast nilpotentna superalgebra Liego $L = [L_1, L_1] \oplus L_1$ stopnia nilpotentności 3, która działałaby na algebrę macierzy $A = M_n(\mathbf{k})$ z centralną podalgebrą niezmienników A^L (por. Stwierdzenie 4.3.6).

Udowodnimy teraz następujące uogólnienie Twierdzenia Bergena-Grzeszczuka 4.3.1.

Twierdzenie 4.3.4. *Niech A będzie algebrą półpierwszą charakterystyki 0 i $L = L_0 \oplus L_1$ - skończenie wymiarową nilpotentną superalgebrą Liego spełniającą warunek $[L_0, L_1] = 0$. Załóżmy, że L działa na A w taki sposób, że:*

1. *podalgebra niezmienników A^L jest zawarta w centrum $\mathcal{Z}(A)$.*
2. *wymiar działania L na A jest skończony.*

Wówczas A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2 \cdot \sqrt{2^{\dim_{\mathbf{k}} L_1}}$.

Kluczową rolę w dowodzie odegra prosta obserwacja.

Lemat 4.3.5. *Niech A będzie skończenie wymiarową centralną prostą $\mathbf{F}$-algebrą i $L \subseteq \mathfrak{Der}(A)$ - nilpotentną $\mathbf{F}$-algebrą Liego. Załóżmy, że również podalgebra niezmienników A^L jest centralną prostą $\mathbf{F}$-algebrą. Wtedy L działa trywialnie na A.*

Dowód. Możemy nie zmniejszając ogólności założyć, że $\mathbf{F}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym i ograniczyć rozważania do algebry macierzy $A = M_n(\mathbf{F})$. Przypuśćmy, że L działa nietrywialnie na A. Bezpośrednio z [Pi80, Roz. 12] wynika, że:

$$A \cong A^L \otimes_{\mathbf{F}} C_A(A^L) \cong A^L \cdot C_A(A^L).$$

Jak wiadomo, każde różniczkowanie algebry A jest wewnętrzne (por. [He68, Roz. 4.3]). Wybierzmy element $a \in A$ dla którego różniczkowanie $\mathrm{ad}_a \in \mathcal{Z}(L)$ działa nietrywialnie na A. Wówczas dla każdego różniczkowania $\mathrm{ad}_b \in L$ zachodzi $\mathrm{ad}_{[b,a]} = [\mathrm{ad}_b, \mathrm{ad}_a] = 0$ i wobec tego $[b, a] \in \mathcal{Z}(A)$. Ponieważ ślad komutatora macierzy jest równy 0 i jedyną centralną macierzą o zerowym śladzie nad ciałem charakterystyki 0 jest macierz zerowa, więc $[b, a] = 0$. Wynika z tego, że $a \in A^L$. W szczególności różniczkowanie ad_a działa trywialnie na centralizator $C_A(A^L)$ i tym samym działa trywialnie na $A^L \cdot C_A(A^L) = A$. Sprzeczność.

□

Niech teraz A będzie algebrą półpierwszą, σ - automorfizmem algebry A spełniającym warunek $\sigma^2 = \mathrm{id}_A$ i $L = L_0 \oplus L_1$ - skończenie wymiarową nilpotentną superalgebrą Liego. Załóżmy, że L działa na A oraz wymiar tego działania jest skończony. Na σ możemy patrzeć jak na automorfizm uniwersalnej algebry obwiedniej $U(L)$. Kładziemy mianowicie $\sigma(x) = x$ gdy $x \in L_0$ oraz $\sigma(x) = -x$ gdy $x \in L_1$. Takie spojrzenie na automorfizm σ determinuje algebrę Hopfa $H = U(L) \star G$, gdzie G jest grupą generowaną przez σ. Wtedy A jest H-modułową algebrą. W dalszej części zastosujemy oznaczenia i wyniki z Podrozdziału 3.5. Przypomnijmy, że przez A_{L_0} oznaczyliśmy zbiór wszystkich elementów algebry A na które algebra Liego L_0 działa poprzez nilpotentne różniczkowania. Pokazaliśmy, że A_{L_0} jest H-niezmienniczą podalgebrą algebry A na którą jednorodne elementy superalgebry Liego L działają jak nilpotentne różniczkowania i nilpotentne σ-różniczkowania. Zatem, zgodnie z analogiem Twierdzenia Engela dla kolorowych algebr Liego udowodnionym przez J. Bergena i P. Grzeszczuka [BeG94, Tw. 2], L działa nilpotentnie na A_{L_0}. Będziemy bez straty ogólności zakładać, że A_{L_0} jest algebrą półpierwszą.

Stwierdzenie 4.3.6. *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą z jedynką i σ - automorfizmem algebry A spełniającym warunek $\sigma^2 = \mathrm{id}_A$. Przyjmijmy, że A jest σ-prosta. Niech ponadto $L = L_0 \oplus L_1$ będzie nilpotentną superalgebrą Liego taką, że $[L_0, L_1] = 0$. Załóżmy również, że L działa na A w taki sposób, że $A^L \subseteq \mathcal{Z}(A)$. Wówczas $L_0 = 0$.*

Dowód. Korzystając z σ-prostoty algebry A łatwo dowodzimy, że A jest algebrą półpierwszą.

Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy superalgebra Liego L działa na półpierwszą algebrę A poprzez nilpotentne różniczkowania i nilpotentne σ-różniczkowania, tj. zachodzi równość: $A_{L_0} = A$. Przypuśćmy, że L_0 działa nietrywialnie na A. Wybierzmy niezerowe różniczkowanie $\delta \in \mathcal{Z}(L_0)$. Z równości $[L_0, L_1] = 0$ wynika, że $\delta \in \mathcal{Z}(L)$. Niech n ($n \geq 2$) będzie najmniejszą liczbą naturalną dla której zachodzi $\delta^n(A) = 0$. Połóżmy $V = \delta^{n-1}(A)$. Bezpośrednio sprawdza się, że V jest niezerową H-niezmienniczą podprzestrzenią algebry A. Z Wniosku 3.3.2 wynika zatem, że:

$$0 \neq V^L = V \cap A^L \subseteq V \cap \mathcal{Z}(A).$$

Równocześnie dla dowolnych elementów $a, b \in A$ ze wzoru Leibniza mamy:

$$0 = \delta^n(\delta^{n-2}(a)b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta^{n+i-2}(a)\delta^{n-i}(b) = n\delta^{n-1}(a)\delta^{n-1}(b),$$

czyli $V^2 = 0$. Tym samym centrum $\mathcal{Z}(A)$ zawiera niezerowe elementy nilpotentne, co wobec półpierwszości algebry A jest niemożliwe.

Przejdziemy teraz do przypadku ogólnego. Z powyższych rozważań wynika, że algebra Liego L_0 działa trywialnie na podalgebrę A_{L_0}: $A^{L_0} = A_{L_0}$. Podalgebra niezmienników A^{L_0} jest zatem algebrą półprostą i wobec tego każdy ideał I algebry A^{L_0} jest idempotentny, tj. zachodzi równość $I^2 = I$. Twierdzimy, że A^{L_0} jest σ-prosta. Niech $I \lhd A^{L_0}$ będzie dowolnym niezerowym σ-niezmienniczym ideałem. Oczywiście I jest H-niezmienniczy. Stosując ponownie Wniosek 3.3.2 otrzymujemy $0 \neq I^L \subseteq A^L \subseteq \mathcal{Z}(A)$. W rezultacie I przecina nietrywialnie centralne podciało $\mathcal{Z}(A)^\sigma$ i tym samym zawiera elementy odwracalne. A^{L_0} jest więc algebrą σ-prostą, tak jak twierdziliśmy.

Rozważymy dalej oddzielnie dwa przypadki, w zależności od σ. Załóżmy najpierw, że σ jest automorfizmem wewnętrznym algebry A wyznaczonym przez pewien element $q \in A$. Wówczas dowolny ideał algebry A jest σ-niezmienniczy i A jest algebrą prostą. Przypomnijmy, że każde $\mathbf{k}$-algebraiczne różniczkowanie algebry prostej nad ciałem charakterystyki 0 jest wewnętrzne. W szczególności jest to prawdą dla wszystkich różniczkowań algebry A. Pokażemy teraz, że również wszystkie σ-różniczkowania algebry A antyprzemienne z automorfizmem σ są wewnętrzne. Niech $\partial \in L_1$. Zauważmy, że dla dowolnego elementu $x \in A$ zachodzi:

$$\begin{aligned} q^{-1}\partial(x)q &= (\sigma \circ \partial)(q) = -(\partial \circ \sigma)(q) = -\partial(q^{-1}xq) = \\ &= -\partial(q^{-1})xq - q^{-1}\partial(x)q - q^{-1}\sigma(x)\partial(q). \end{aligned}$$

Z równości $q\partial(q^{-1}) = -\partial(q)q^{-1}$ wynika teraz, że:

$$\partial(x) = -\tfrac{1}{2}q\partial(q^{-1})x - \tfrac{1}{2}\sigma(x)\partial(q)q^{-1} = \tfrac{1}{2}\partial(q)q^{-1}x - \sigma(x)\tfrac{1}{2}\partial(q)q^{-1}.$$

Zatem rzeczywiście ∂ jest wewnętrznym σ-różniczkowaniem algebry A indukowanym przez element $\frac{1}{2}\partial(q)q^{-1}$. Odnotujmy przy okazji, że superalgebra Liego L działa na algebrę A poprzez $\mathcal{Z}(A)$-liniowe odwzorowania. Aby móc skorzystać z Lematu 4.3.5 musimy jeszcze udowodnić, że podalgebra niezmienników A^{L_0} jest algebrą prostą z centrum $\mathcal{Z}(A^{L_0}) = \mathcal{Z}(A)$. Przypomnijmy, że zgodnie z założeniem, $\sigma^2 = \mathrm{id}_A$ i tym samym $q^2 \in \mathcal{Z}(A)$. Dla dowolnego różniczkowania $\delta = \mathrm{ad}_a \in L_0$ mamy zatem:

$$\delta(q) = (\delta \circ \sigma)(q) = (\sigma \circ \delta)(q) = q^{-1}(aq - qa)q = qa - aq = -\delta(q),$$

czyli $\delta(q) = 0$. Tak więc:

$$q \in A^{L_0}. \tag{4.1}$$

To oznacza, że automorfizm σ algebry A obcięty do podalgebry A^{L_0} jest autmorfizmem wewnętrznym algebry A^{L_0} i w rezultacie A^{L_0} jest algebrą prostą. Pozostała jeszcze do udowodnienia równość: $\mathcal{Z}(A^{L_0}) = \mathcal{Z}(A)$. Mamy oczywiście zawieranie: $\mathcal{Z}(A) = \mathcal{Z}(A) \cap A^{L_0} \subseteq \mathcal{Z}(A^{L_0})$. Dla dowodu inkluzji przeciwnej $\mathcal{Z}(A^{L_0}) \subseteq \mathcal{Z}(A)$ zauważmy, że wobec założenia $A^L \subseteq \mathcal{Z}(A)$ wystarczy pokazać $\mathcal{Z}(A^{L_0}) \subseteq A^{L_1}$. Weźmy dowolny element $z \in \mathcal{Z}(A^{L_0})$ oraz dowolne σ-różniczkowanie $\partial = \mathrm{ad}_b \in L_1$, gdzie $b = \frac{1}{2}\partial(q)q^{-1}$. Zauważmy, że $b \in A^{L_0}$. Tak jest, ponieważ zgodnie z założeniem, dla każdego różniczkowania $\delta \in L_0$ zachodzi $\delta \circ \partial - \partial \circ \delta = [\delta, \partial] = 0$. Z (4.1) wynika teraz, że:

$$\delta(b) = \tfrac{1}{2}\delta(\partial(q)q^{-1}) = \tfrac{1}{2}(\delta \circ \partial)(q)q^{-1} + \tfrac{1}{2}\partial(q)\delta(q^{-1}) = \tfrac{1}{2}(\partial \circ \delta)(q)q^{-1} = 0$$

i wobec tego $b \in A^{L_0}$. Korzystając ponownie z (4.1) otrzymujemy wreszcie:

$$\partial(z) = bz - \sigma(z)b = bz - zb = 0,$$

czyli $z \in A^{L_1}$. Udowodniliśmy w ten sposób równość: $\mathcal{Z}(A^{L_0}) = \mathcal{Z}(A)$. Podsumujmy dotychczasowe spostrzeżenia. Połóżmy $\mathbf{F} = \mathcal{Z}(A)$. Mamy skończenie wymiarową centralną prostą $\mathbf{F}$-algebrę A na którą działa nilpotentna $\mathbf{F}$-algebra Liego L_0. Równocześnie podalgebra niezmienników A^{L_0} jest centralną prostą $\mathbf{F}$-algebrą. Wszystkie założenia Lematu 4.3.5 są tym samym spełnione, wobec czego L_0 działa trywialnie na A.

Załóżmy na koniec, że $\sigma\colon A \to A$ jest automorfizmem zewnętrznym. Ponieważ A jest algebrą σ-prostą, więc albo A jest algebrą prostą albo $A = I \oplus \sigma(I)$ dla pewnego minimalnego ideału I algebry A. Jeśli A jest algebrą prostą, to automorfizm σ działa nieidentycznościowo na centrum $\mathcal{Z}(A)$, na mocy Twierdzenia Skolema-Noether (por. [He68, Roz. 4.3]). W drugim przypadku zachodzi $\mathcal{Z}(A) = \mathcal{Z}(I) \oplus \sigma(\mathcal{Z}(I))$. Równość ta oznacza, że również wtedy σ działa nieidentycznościowo na $\mathcal{Z}(A)$. W obu przypadkach możemy zatem wybrać element $c \in \mathcal{Z}(A)$ dla którego $\sigma(c) \neq c$. Z półpierwszości A wynika, że $(c - \sigma(c))^2$ jest niezerowym elementem ciała $\mathcal{Z}(A)^\sigma$, tak więc $c - \sigma(c) \in \mathcal{Z}(A)$ jest elementem odwracalnym. Weźmy teraz dowolne σ-różniczkowanie $\partial \in L_1$. Zauważmy, że dla każdego $x \in A$ zachodzi:

$$\partial(x)c + \sigma(x)\partial(c) = \partial(xc) = \partial(cx) = \partial(c)x + \sigma(c)\partial(x).$$

Z równości tej wynika, że:

$$\partial(x) = (c - \sigma(c))^{-1}\partial(c)x - \sigma(x)(c - \sigma(c))^{-1}\partial(c)$$

co oznacza, że ∂ jest wewnętrznym σ-różniczkowaniem algebry A indukowanym przez element $(c - \sigma(c))^{-1}\partial(c)$ i wobec tego ∂ działa trywialnie na $\mathcal{Z}(A)^\sigma$. Równocześnie, zgodnie z Wnioskiem 2.3.6, każde różniczkowanie algebry A działa trywialnie na centrum $\mathcal{Z}(A)$. Pokazaliśmy tym samym, że superalgebra Liego L działa na algebrę A poprzez $\mathcal{Z}(A)^\sigma$-liniowe odwzorowania. Zauważmy przy okazji, że z inkluzji $\mathcal{Z}(A) \subseteq \mathcal{Z}(A^{L_0})$ wynika iż automorfizm σ algebry A obcięty do podalgebry A^{L_0} jest automorfizmem zewnętrznym algebry A^{L_0}. Udowodnimy teraz równość $\mathcal{Z}(A^{L_0})^\sigma = \mathcal{Z}(A)^\sigma$. Podobnie jak poprzednio wystarczy jeżeli pokażemy zawieranie $\mathcal{Z}(A^{L_0})^\sigma \subseteq A^{L_1}$. Tak jest, ponieważ dla każdego σ-różniczkowania $\partial = \mathrm{ad}_b \in L_1$, gdzie $b = (c - \sigma(c))^{-1}\partial(c)$, z faktu iż L_0 działa trywialnie na $\mathcal{Z}(A)$ wynika, że $b \in A^{L_0}$. Podsumowując, oznaczmy centralne podciało $\mathbf{F} = \mathcal{Z}(A)^\sigma$. Mamy σ-prostą $\mathbf{F}$-algebrę A z jedynką, gdzie $\sigma\colon A \to A$ jest automorfizmem zewnętrznym, na którą działa nilpotentna $\mathbf{F}$-algebra Liego L_0. Ponadto, automorfizm σ algebry A obcięty do podalgebry niezmienników A^{L_0} jest automorfizmem zewnętrznym $\mathbf{F}$-algebry A^{L_0}, wreszcie A^{L_0} jest σ-prosta. Pokażemy teraz, że skośny pierścień grupowy $A \star G$ jest centralną prostą $\mathbf{F}$-algebrą. Niech I będzie dowolnym niezerowym ideałem algebry $A \star G$. Jeśli $I \cap A \neq 0$, to $I \cap A = A$ jako σ-niezmienniczy ideał A i wobec tego $I = A \star G$. Załóżmy więc teraz, że $I \cap A = 0$. Oznaczmy przez J zbiór wszystkich elementów $a \in A$ dla których istnieje element $b \in A$ taki, że $a + b\sigma \in I$. Nietrudne obliczenia pokazują, że $J \lhd A$ jest niezerowym σ-niezmienniczym ideałem. Mamy zatem $J = A$ i możemy wybrać niezerowy element $b \in A$ dla którego:

$$1 + b\sigma \in I.$$

Nie zmniejszając ogólności możemy przyjąć, że $b \in A^\sigma$. Zauważmy dalej, że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi:

$$xb - b\sigma(x) = x(1 + b\sigma)\sigma - (1 + b\sigma)x\sigma \in I \cap A = 0.$$

Wynika z tego, że $Ab = bA$ jest niezerowym σ-niezmienniczym ideałem A i stąd b jest elementem odwracalnym. Otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że $\sigma\colon A \to A$ jest automorfizmem zewnętrznym. W rezultacie $A \star G$ jest prostą $\mathbf{F}$-algebrą. Dla dowodu równości $\mathcal{Z}(A\star G) = \mathcal{Z}(A)^\sigma$ wystarczy zauważyć, że element $a+b\sigma$ należy do centrum $\mathcal{Z}(A \star G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in \mathcal{Z}(A)^\sigma$, $b \in A^\sigma$ oraz dla każdego $x \in A$ zachodzi $xb - b\sigma(x) = 0$. Podobnie jak wyżej, dwa ostatnie warunki oznaczają, że $b = 0$. Analogicznie dowodzmy, że $A^{L_0} \star G$ jest centralną prostą $\mathbf{F}$-algebrą. Pozostaje jeszcze na koniec zauważyć, że działanie $\mathbf{F}$-algebry Liego L_0 na $\mathbf{F}$-algebrę A przedłuża się do działania L_0 na skośny pierścień grupowy $A \star G$ w następujący sposób. Dla dowolnych $\delta \in L_0$ i $a + b\sigma \in A \star G$ kładziemy $\delta(a + b\sigma) = \delta(a) + \delta(b)\sigma$. Wtedy $(A\star G)^{L_0} = A^{L_0}\star G$. Stosując ponownie Lemat 4.3.5 otrzymujemy trywialne działanie L_0 na $A \star G$.

Dowód Stwierdzenia 4.3.6 został tym samym zakończony.

□

Wniosek 4.3.7. *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą z jedynką i σ - automorfizmem algebry A spełniającym warunek $\sigma^2 = \mathrm{id}_A$. Przyjmijmy, że A jest σ-prosta. Niech ponadto $L = L_0 \oplus L_1$ będzie nilpotentną superalgebrą Liego taką, że $[L_0, L_1] = 0$. Załóżmy również, że L działa na A w taki sposób, że $A^L \subseteq \mathcal{Z}(A)$. Wówczas wymiar algebry A nad centralnym podciałem $\mathcal{Z}(A)^\sigma$ jest nie większy niż $2^{\dim_{\mathbf{k}} L_1} \cdot \dim_{\mathcal{Z}(A)^\sigma} Z(A)$.*

Wynika stąd w szczególności, że algebra A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2 \cdot \sqrt{2^{\dim_{\mathbf{k}} L_1}}$.

Dowód. Bezpośrednio ze Stwierdzenia 4.3.6 wynika, że L_0 działa trywialnie na A.

Oznaczmy $\mathbf{F} = \mathcal{Z}(A)^\sigma$. Nie zmniejszając ogólności możemy w sformułowaniu Wniosku 4.3.7 zastąpić ciało $\mathbf{k}$ centralnym podciałem $\mathbf{F}$. Przyjmijmy, że $\dim_{\mathbf{F}} L = m$. Ustalmy bazę $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_m\}$ nad $\mathbf{F}$ superalgebry Liego L. Mamy oczywiście: ${\partial_i}^2 = 0$ oraz $\partial_i \circ \partial_j + \partial_j \circ \partial_i = 0$ dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Rozważmy dalej łańcuch podprzestrzeni:

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_m = A^L$$

algebry A zdefiniowanych dla każdego $1 \leq i \leq m$ jako $A_i = A_{i-1} \cap \ker \partial_i$. Bezpośrednio sprawdza się, że dla dowolnego $1 \leq i \leq m$ zachodzi $\partial_i(A_{i-1}) \subseteq A_i$, tak więc $A_{i-1}/A_i \hookrightarrow A_i$ i wobec tego:

$$\dim_{\mathbf{F}} A_{i-1} = \dim_{\mathbf{F}} A_{i-1}/A_i + \dim_{\mathbf{F}} A_i \leq 2 \cdot \dim_{\mathbf{F}} A_i.$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$\dim_{\mathbf{F}} A \leq 2^m \cdot \dim_{\mathbf{F}} A^L \leq 2^m \cdot \dim_{\mathbf{F}} \mathcal{Z}(A).$$

Przejdziemy teraz do dowodu drugiej części wniosku. Ponieważ A jest algebrą σ-prostą, więc albo A jest algebrą prostą albo $A = I \oplus \sigma(I)$ dla pewnego minimalnego ideału I algebry A. W przypadku gdy A jest algebrą prostą, to centrum $\mathcal{Z}(A)$ jest ciałem oraz:

$$\dim_{\mathcal{Z}(A)} A = \tfrac{\dim_{\mathbf{F}} A}{\dim_{\mathbf{F}} \mathcal{Z}(A)} \leq 2^m.$$

Z kolei w drugim przypadku zachodzi $\mathcal{Z}(A) = \mathcal{Z}(I) \oplus \sigma(\mathcal{Z}(I))$. Mamy wtedy:

$$\dim_{\mathcal{Z}(I)} I = \tfrac{\dim_{\mathbf{F}} I}{\dim_{\mathbf{F}} \mathcal{Z}(I)} = \tfrac{\dim_{\mathbf{F}} A}{\dim_{\mathbf{F}} \mathcal{Z}(A)} \leq 2^m.$$

W obu przypadkach algebra A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2 \cdot \sqrt{2^m}$, na mocy Twierdzenia Amitsura-Levitzkiego 3.2.2.

$\square$

Dowód Twierdzenia 4.3.4. Zauważmy na początek, że zgodnie z [Be88, Tw. 1.8] oraz [BeG00, Wn. 6], każda H-niezmiennicza nienilpotentna podalgebra algebry A zawiera niezerowe niezmienniki.

W dalszym ciągu przez Q będziemy oznaczać pierścień ułamków symetrycznych $Q^s(A)$ algebry A z rozszerzonym centroidem C. Ustalmy dowolnie wybrany maksymalny ideał P algebry C^H i połóżmy $S = C^H \setminus P$. Wtedy:

1. Q_S jest półpierwszą H-modułową algebrą z centrum $\mathcal{Z}(Q_S) = C_S$.
2. Podalgebra niezmienników $(Q_S)^L = (Q^L)_S \subseteq C_S$.
3. $(C_S)^H = C_S \cap (Q_S)^H$ jest centralnym podciałem algebry Q_S.
   Oznaczmy $\mathbf{K} = (C_S)^H$.
4. Wymiar algebry Q_S nad ciałem $\mathbf{K}$ jest skończony.
5. H działa na Q_S poprzez $\mathbf{K}$-liniowe odwzorowania.
6. Q_S jest σ-prostą $\mathbf{K}$-algebrą.

Własności **1-3** wynikają bezpośrednio ze Stwierdzeń 2.5.4 oraz 4.2.2. Własność **4** została pokazana przy okazji dowodu Twierdzenia 4.1.1. Uzasadnimy teraz ostatnią własność. Z półprostoty $\mathbf{K}$-algebry Q_S wynika, że każdy jej ideał jest idempotentny. W rezultacie każdy σ-niezmienniczy ideał $\mathbf{K}$-algebry Q_S staje się automatycznie H-niezmienniczy. Fakt ten w połączeniu z H-prostotą Q_S (por. dowód Twierdzenia 4.1.1) daje własność **6**.

Stosując teraz Wniosek 4.3.7 do $\mathbf{K}$-algebry Q_S otrzymujemy tezę Twierdzenia 4.3.4 dla Q_S. Z dowolności wyboru ideału P wynika teza Twierdzenia 4.3.4 dla Q.

$\square$

Bibliografia

[Ab80] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[Am72] S.A. Amitsur, *On rings of quotients*, Symposia Math. **8** (1972), 149-164.

[AL50] S.A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal Identities for Algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 449-463.

[BGR98] Y.A. Bahturin, A. Giambruno, D.M. Riley, *Group-graded algebras with polynomial identity*, Israel J. Math. **104** (1998), 145-156.

[BL98] Y.A. Bahturin, V. Linchenko, *Identities of algebras with actions of Hopf algebras*, J. Algebra **202** (1998), 634-654.

[BMPZ92] Y.A. Bahturin, A.A. Mikhalev, V.M. Petrogradsky, M.V. Zaicev, *Infinite dimensional Lie superalgebras*, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[Ba73] V.E. Barbaumov, *Automorphisms and PI algebras*, Uspehi Matem. Nauk **28** (1973), 231-232.

[BG95] K.I. Beidar, P. Grzeszczuk, *Actions of Lie algebras on rings without nilpotent elements*, Algebra Colloq. **2** (1995), 105-116.

[BMM96] K.I. Beidar, W.S. Martindale III, A.V. Mikhalev, *Rings with generalized identities*, Marcel Dekker, New York, 1996.

[BT01] K.I. Beidar, B. Torrecillas, *On actions of Hopf algebras with commutative coradical*, J. Pure Appl. Algebra **161** (2001), 13-30.

[Be88] J. Bergen, *Constants of Lie algebra actions*, J. Algebra **114** (1988), 452-465.

[BeC86] J. Bergen, M. Cohen, *Actions of commutative Hopf algebras*, Bull. London Math. Soc. **18** (1986), 159-164.

[BCF90] J. Bergen, M. Cohen, D. Fishman, *Irreducible actions and faithful actions of Hopf algebras*, Israel J. Math. **72** (1990), 5-18.

[BeG94] J. Bergen, P. Grzeszczuk, *Engel-type theorems for Lie color algebras*, Rings, Extensions, and Cohomology, Lectures Notes in Pure and Appl. Math. **159**, Marcel Dekker, New York, 1994, 31-33.

[BeG96] J. Bergen, P. Grzeszczuk, *Invariants of Lie superalgebras acting on associative algebras*, Israel J. Math. **94** (1996), 403-428.

[BeG00] J. Bergen, P. Grzeszczuk, *Invariants of Lie color algebras acting on graded algebras*, Colloq. Math. **83** (2000), 107-124.

[BeM86] J. Bergen, S. Montgomery, *Smash products and outer derivations*, Israel J. Math. **53** (1986), 321-345.

[B76] G.M. Bergman, *Review of the paper: V.K. Kharchenko, Fixed elements of a finite group action on a semiprime ring*, MR0429998 (55#3006).

[BI73] G.M. Bergman, M. Isaacs, *Rings with fixed-point-free group actions*, Proc. London Math. Soc. **27** (1973), 69-87.

[Ch92] W. Chin, *Crossed products of semisimple cocommutative Hopf algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 321-327.

[Co86] M. Cohen, *Smash products, inner actions and quotient rings*, Pacific J. Math. **125** (1986), 45-66.

[CR83] M. Cohen, L.H. Rowen, *Group graded rings*, Comm. Algebra **11** (1983), 1253-1270.

[Di74] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Cahier Scientifiques **37**, Gauthier-Vallars Èditeur, Paris, 1974.

[Fi79] J.W. Fisher, *Chain conditions for modular lattices with finite group actions*, Canad. J. Math. **31** (1979), 558-564.

[Gr92] P. Grzeszczuk, *On nilpotent derivations of semiprime rings*, J. Algebra **149** (1992), 313-321.

[GH04] P. Grzeszczuk, M. Hryniewicka, *Polynomial identities of algebras with actions of pointed Hopf algebras*, J. Algebra **278** (2004), 684-703.

[GH07] P. Grzeszczuk, M. Hryniewicka, *Actions of pointed Hopf algebras with reduced PI invariants*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2381-2389.

[He68] I.N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Monographs in Math. **15**, Math. Assoc. of America, 1968.

[HS69] R.G. Heyneman, M.E. Sweedler, *Affine Hopf Algebras, I*, J. Algebra **13** (1969), 192-241.

[Ho54] G. Hochschild, *Representations of restricted Lie algebras of characteristic p*, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 603-605.

[Ja41] N. Jacobson, *Restricted Lie algebras of characteristic p*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 15-25.

[K48] I. Kaplansky, *Rings with a Polynomial Identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 575-580.

[Ka95] Ch. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Math. **155**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Kh74] V.K. Kharchenko, *Galois extensions and rings of quotients*, Algebra i Logika **13** (1974), 460-484.

[Kh75] V.K. Kharchenko, *Generalized identities with automorphisms*, Algebra i Logika **14** (1975), 215-237.

[Kh77] V.K. Kharchenko, *The Galois theory of semiprime rings*, Algebra i Logika **16** (1977), 313-363.

[Kh78] V.K. Kharchenko, *Differential identities of prime rings*, Algebra i Logika **17** (1978), 220-238.

[Kh81] V.K. Kharchenko, *Constants of derivations of prime rings*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem. **45** (1981), 435-461.

[KKR96] V.K. Kharchenko, J. Keller, S. Rodrigues-Romo, *Prime rings with PI rings of constants*, Israel J. Math. **96** (1996), 357-377.

[La99] T.Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Math. **189**, Springer-Verlag, New York, 1999.

[LM85] A. Leroy, J. Matczuk, *Dèrivations et automorphismes algèbriques d'anneaux premiers*, Comm. Algebra **13** (1985), 1245-1266.

[Ma69] W.S. Martindale III, *Prime rings satisfying a generalized polynomial identity*, J. Algebra **12** (1969), 576-584.

[Mi95] A. Milinski, *Actions of pointed Hopf algebras on prime algebras*, Comm. Algebra **23** (1995), 313-333.

[Mo74] S. Montgomery, *Centralizers satisfying polynomial identities*, Israel J. Math. **18** (1974), 204-219.

[Mo78] S. Montgomery, *Outer automorphisms of semiprime rings*, J. London Math. Soc. **18** (1978), 209-220.

[Mo80] S. Montgomery, *Fixed rings of finite automorphisms groups of associative rings*, Lecture Notes in Math. **818**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Mo93a] S. Montgomery, *Biinvertible actions of Hopf algebras*, Israel J. Math. **83** (1993), 45-72.

[Mo93b] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **82**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1993.

[MS75] S. Montgomery, M.K. Smith, *Algebras with a separable subalgebra whose centralizer satisfies a polynomial identity*, Comm. Algebra **3** (1975), 151-168.

[Pa77] D.S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York, 1977.

[Pa87] D.S. Passman, *Computing the symmetric ring of quotients*, J. Algebra **105** (1987), 207-235.

[Pi80] R.S. Pierce, *Associative algebras*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[Ro73] L.H. Rowen, *Some results on the center of a ring with polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 219-223.

[Sc79] M. Scheunert, *Generalized Lie algebras*, J. Math. Phys. **20** (1979), 712-720.

[Sw69] M.E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[TW74] E.J. Taft, R.L. Wilson, *On antipodes in pointed Hopf algebras*, J. Algebra **29** (1974), 27-32.