Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Maciej Wiśniewolski

Wycena wybranych instrumentów pochodnych w modelu SABR i modelu lognormalnym

Rozprawa doktorska

Promotor

prof. UW dr hab.Jacek Jakubowski

Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski

Maj 2008

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

Maj 8, 2008 ....

data *Maciej Wiśniewolski*

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

Maj 8, 2008 ....

data *prof. UW dr hab.Jacek Jakubowski*

Wycena wybranych instrumentów pochodnych w modelu SABR i modelu lognormalnym

Słowa kluczowe:

cena instrumentu pochodnego, model lognormalny, model SABR, wzór Ito, wartość oczekiwana, warunkowa wartość oczekiwana, wzór Blacka,

AMS Mathematical Subject Classification 2000:

91B70; 91B60; 60H30; 60G44;

Streszczenie

Dynamiczny rozwój rynków finansowych powoduje, że wycena i zabezpieczenie instrumentów pochodnych wymagają zaangażowania zaawansowanych technik probabilistycznych i numerycznych. Celem niniejszej rozprawy jest z jednej strony zaprezentowanie techniki probabilistycznej umożliwiającej wycenę instrumentów pochodnych o złożonej funkcji wypłaty w modelu lognormalnym, a z drugiej, przedstawienie nowych wyników dotyczących bardzo popularnego modelu stochastic volatility SABR. W rozprawie przedstawiłem algebraiczne postacie wybranych warunkowych wartości oczekiwanych w modelu lognormalnym i zaprezentowałem ich zastosowanie do wyceny złożonych instrumentów pochodnych. Wyprowadzone w rozprawie wyniki dotyczące modelu SABR obejmują między innymi nowe metody przybliżania wybranych wartości oczekiwanych w tym modelu, nową metodę wyceny opcji oraz uogólnienie znanych wzorów Blacka na przypadek modelu stochastic volatility.

Pricing Selected Derivatives in SABR and Lognormal Model

Key words:

derivative's price, lognormal model, SABR model,

Ito's formula, expectation, conditional expectation,

Black formula,

AMS Mathematical Subject Classification 2000:

91B70; 91B60; 60H30; 60G44;

Abstract

Pricing and hedging derivatives in the world of dynamically growing financial markets involve more and more advanced probabilistic and numerical techniques. The aim of this dissertation is once to present the new probabilistic approach to pricing complex derivatives in lognormal model and second to bring some new results concerning the most common stochastic volatility model SABR. I've presented algebraic formulas of selected conditional expectations in lognormal model. Next, I've used these formulas to price complex derivatives. The new results concerning SABR model include new approximation methods of computing expectations, new option pricing method and generalization of famous Black vanilla option price formula in the case of stochastic volatility model.

Spis treści

1 Wstęp **6**

2 Definicje i oznaczenia **11**

3 Model lognormalny **17**

3.1 Warunkowa wartość oczekiwana w modelu lognormalnym ze stałym współczynnikiem zmienności 18

3.2 Wycena kontraktu Quanto Constant Maturity Swap 29

3.3 Wypłata opcyjna w modelu lognormalnym ze stałą zmiennością 32

3.4 Wycena opcji na stopę procentową 36

3.5 Wycena opcji na spread 39

4 Local volatility model **47**

4.1 Warunkowa wartość oczekiwana w modelu local volatility . . . 47

4.2 Wypłata opcyjna w modelu local volatility 51

4.3 Uzmiennienie korelacji 54

5 Model SABR **60**

5.1 Przybliżenie drugiego momentu procesu SABR dla $\beta = 1$ 64

5.2 Własność procesu SABR dla $\beta = 1$ 72

5.3 Nowa metoda wyceny opcji w modelu SABR dla $\beta = 1$ 77

5.4 Własność modelu SABR dla $\beta \in (0, 1)$ 104

6 Bibliografia **108**

Rozdział 1

Wstęp

Intensywny rozwój rynków finansowych w ostatnich latach rodzi potrzebę wyceny i zabezpieczenia coraz bardziej skomplikowanych instrumentów finansowych. Złożoność instrumentu finansowego często spowodowana jest uzależnieniem jego funkcji wypłaty od dwóch lub więcej aktywów handlowanych na rynku. Dla nowoczesnej matematyki finansowej oznacza to potrzebę obliczania coraz bardziej skomplikowanych wartości oczekiwanych procesów stochastycznych reprezentujących ceny rozpatrywanych aktywów. Tak sformułowany problem ma naturę czysto techniczną. Przy dynamikach cen aktywów zadanych wybraniem modelu, wycena i hedging instrumentów pochodnych wymagają zaangażowania zaawansowanych technik probabilistycznych i numerycznych. Nawet w ramach standardowego modelu Blacka-Scholesa wycena niektórych instrumentów pochodnych jest trudna. Przykładem może być tu wycena kontraktu finansowego o funkcji wypłaty uzależnionej od trajektorii procesu reprezentującego cenę instrumentu bazowego (Geman-Yor [21]). Innym przykładem trudności wyceny instrumentu pochodnego, tym razem o europejskim charakterze wypłaty, czyli wypłaty uzależnionej od wartości instrumentu bazowego w ustalonej dacie, jest wycena kontraktu Quanto Constant Maturity Swap (QCMS), który wypłaca wartość tzw. stopy swapowej z rynku zagranicznego (foreign) w walucie krajowej (domestic). Skutkiem tego jest uzależnienie funkcji wypłaty tego instrumentu od dwóch różnych aktywów. Kolejnym przykładem są opcje na stopę procentową. Wycena i efektywne zabezpieczanie opcji na stopę procentową mogą przysparzać w wielu sytuacjach spore trudności (Brigo-Mercurio [10], Rutkowski [52], Gupta-Subrahmanyam [22]). Jedna z takich sytuacji ma miejsce, gdy termin wypłaty opcji na stopę procentową jest niestandardowy. Funkcja wypłaty takiej opcji uzależniona jest od dwóch różnych, skorelowanych stóp procentowych. Aby dobrze wyceniać takie instrumenty musimy znać rozkład łączny procesów od których uzależniona jest funkcja wypłaty. Na tym jednak nie koniec. Jak się okazuje, dodatkowym i bardzo istotnym czynnikiem komplikującym wycenę jest potrzeba dostosowania modeli matematycznych do obserwowalnych, rzeczywistych zachowań rynkowych takich jak volatility smile (Andreasen [1], Brigo-Mercurio [8], Mercurio [38], Rebonato [50], [51]). Volatility smile to efekt zróżnicowania wartości współczynnika zmienności aktywu finansowego w zależności od wartości kursu wykonania opcji. Mówiąc inaczej, konwencja rynku wyceny opcji waniliowej (kwotowania) polega na podaniu implikowanej zmienności z modelu Blacka-Scholesa. Efekt volatility smile powoduje, że dealer poda dla tego samego aktywu, lecz różnych kursów wykonania opcji, odpowiednio różne wartości współczynnika zmienności. Model Blacka-Scholesa zakłada tymczasem, że współczynnik zmienności dla danego aktywu finansowego jest stały. Wprowadzenie modeli local volatility (Dupire [18], [19], Derman-Kani [16], [17]) miało na celu osłabić rygorystyczne założenie o stałym współczynniku zmienności w modelu Blacka-Scholesa. Mimo tego, że modele te skutecznie można kalibrować do obserwowanych wielkości rynkowych, to jednak w przypadku dynamicznego zabezpieczania pozycji opcyjnych, zakładają odwrotny, do przewidywanego przez rynek, kierunek zmian wartości współczynnika zmienności (Hagan-Kumar-Leśniewski-Woodward [23]). Dlatego modele local volatility coraz częściej zastępowane są modelami stochastic volatility, w których współczynnik zmienności jest procesem stochastycznym (Brigo, Mercurio [8], Rebonato [50], [51]). Bardzo popularnym modelem tego typu jest model SABR zaproponowany przez Hagana, Kumara, Leśniewskiego oraz Woodward [23], gdzie za pomocą techniki nazywanej „singular perturbation" autorzy wyprowadzili analityczną postać aproksymacji współczynnika zmienności implikowanej opcji na aktywo, którego dynamika została zadana tym modelem. Dzięki temu wyprowadzona została przybliżona cena opcji waniliowej w modelu SABR. Nazwa SABR jest akronimem wyrażenia „stochastic alpha, beta, rho". Dalsze badania dotyczące rozkładów procesów zadanych dynamiką SABR autorzy kontynuowali w pracy Hagan-Leśniewski-Woodward [26]. Podobny do wspomnianego wyżej wynik, będący aproksymacją współczynnika implikowanej zmienności w modelu SABR, uzyskali dzięki technikom geometrii różniczkowej Berestycki-Busca- Florent [3] oraz Henry-Labordere [27], [28]. Delikatne różnice, które wystąpiły między wynikami asymptotycznego rozwinięcia zmienności implikowanej Hagana et.al oraz Berestyckiego et.al wskazał Obłój [42]. Inny sposób na wyprowadzenie asymptotycznego rozwinięcia zmienności implikowanej w modelu SABR zaprezentował Osajima [44], który uzyskał analityczną formułę rozważanej aproksymacji za pomocą rachunku Malliavina. Wykorzystanie formuły Meyera-Tanaki oraz teorii czasu lokalnego do wyprowadzenia przybliżonego wzoru reprezentującego zmienność implikowaną w modelu SABR zaprezentowali Benhamou oraz Croissant [5].

Niniejsza praca słada się z dwóch części. W części pierwszej, dla modelu z dynamiką zadaną rozkładem lognormalnym, chcemy zaprezentować technikę probabilistyczną, dzięki której wycena złożonych instrumentów pochodnych, w tym modelu, znacznie się upraszcza. Umiejętność wyceny instrumentów pochodnych w modelu lognormalnym jest bardzo ważna z racji tego, że konwencje rynkowe zostały zbudowane na modelu Blacka-Scholesa, który należy do klasy modeli lognormalnych. Dlatego też, model Blacka-Scholsa i jego odpowiednik typu local volatility są punktem odniesienia dla innych modeli. W drugiej części pracy chcemy zaprezentować szereg nowych wyników dotyczących modelu SABR. W szczególności zaprezentujemy nową metodę wyceny opcji waniliowej w szczególnym przypadku modelu SABR tzw. lognormal stochastic volatility model. Dodatkowo, bazując na pomysłach wyceny złożonych instrumentów pochodnych w modelach z dynamikami zadanymi rozkładem lognormalnym, wyprowadzimy przybliżony wzór na wycenę kontraktu Constant Maturity Swap (CMS) w modelu SABR.

Wspomniana wyżej technika probabilistyczna, wykorzystana dalej w pracy do wyceny wybranych instrumentów pochodnych w modelu lognormalnym, polega na tym, że dla klasy procesów stochastycznych o rozkładzie lognormalnym potrafimy wyznaczyć funkcję warunkowej wartości oczekiwanej tych procesów. Ściślej mówiąc dla zadanych dynamik procesów potrafimy wyznaczyć funkcję warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej losowej będącej funkcją pierwszego procesu pod warunkiem drugiego procesu. W efekcie dzięki znajomości wspomnianej funkcji wycena złożonych instrumentów pochodnych sprowadza się do wyceny instrumentu uzależnionego od jednego procesu, którego rozkład znamy. Innymi słowy problem dwuwymiarowy zostaje zredukowany do problemu jednowymiarowego. Do tej pory problem warunkowania rozpatrywany był na poziomie wyznaczania warunkowej funkcji gęstości rozkładów (Ravindran [48]). W prezentowanym przez nas podejściu, analizujemy proces warunkowania bezpośrednio na poziomie wartości oczekiwanych. Okazuje się, że rezultatem tego są stosunkowo proste, algebraiczne wzory, które dla wielu złożonych wypłat ułatwiają wycenę wielu instrumentów pochodnych rynku finansowego. Dzięki przedstawionym, po raz pierwszy w tej pracy, twierdzeniom dotyczącym postaci warunkowej wartości oczekiwanej, wycena instrumentów pochodnych w modelu lognormalnym nie wymaga żmudnych rachunków i staje się automatyczna. Najważniejsze wyniki dotyczące warunkowych wartości oczekiwanych w modelu lognormalnym przedstawione są odpowiednio w twierdzeniach 3.10, 3.22, 3.26, 4.1, 4.5, 4.6 oraz 4.7. Zaprezentowanymi w pracy przykładami efektywnego zastosowania twierdzeń o postaci warunkowej wartości oczekiwanej jest problem wyceny kontraktu Quanto Constant Maturity Swap (QCMS), opcji na stopę procentową oraz opcji na spread. Carmona oraz Durrleman [11], a także Brigo-Mercurio [8], rozpatrują wycenę opcji na spread w modelu lognormalnym. Problem tej wyceny sprowadza się u nich do analizy rozkładu łącznego różnicy dwóch zmiennych losowych o rozkładzie lognormalnym, a tym samym wyznaczenie ceny opcji na spread sprowadza się do obliczenia skomplikowanej całki w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. W niniejszej pracy po raz pierwszy problem wyceny opcji na spread, dzięki znajomości postaci odpowiednich warunkowych wartosci oczekiwanych w modelu lognormalnym, sprowadza sie do zadania w jednym wymiarze. Po wyznaczeniu funkcji warunkowej wartości oczekiwanej wzór na wycenę opcji na spread przybiera zamkniętą, algebraiczną postać.

W dalszej części pracy zaprezentujemy również techniki, które umożliwiają wycenę instrumentów pochodnych o złożonej funkcji wypłaty w modelu SABR. Jak do tej pory techniki wyceny instrumentów pochodnych w modelu SABR sprowadzały się do metod aproksymacyjnych. W szczególności Mercurio [37], [39] analizuje wycenę kontraktów CMS w modelu SABR, wyznaczjąc w tym celu drugi moment odpowiedniego procesu i podaje przybliżony wzór na cenę wymienionego kontraktu. Rezultatem niniejszej pracy jest inne, nowe i po raz pierwszy zaprezentowane w tej pracy, podejście, bazujące na możliwości wyznaczenia algebraicznych wzorów niektórych momentów procesu zadanego dynamiką modelu SABR. Nie rozważamy asymptotycznego rozwinięcia zmienności implikowanej, lecz poszukujemy algebraicznych wzorów na momenty procesu zadanego dynamiką SABR. Jourdain [33] przedstawia warunki, które muszą być spełnione, aby w szczególnym przypadku modelu z parametrem beta równym jeden, istniały momenty procesu zadanego dynamiką SABR. Model SABR z parametrem $\beta = 1$ jest nazywany „lognormal stochastic volatility model". W niniejszej pracy prezentujemy technikę, która, uwzględniając wyniki Jourdaina, pozwala na aproksymację tych momentów (twierdzenia 5.6, 5.7, 5.15). W rezultacie doprowadzi to do nowego sposobu wyceny opcji waniliowej w tym modelu (twierdzenie 5.17). Nowym i ważnym wynikiem tej pracy, przedstawionym w twierdzeniu 5.20, są wzory na ceny opcji waniliowych w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$, które są uogólnieniem cen opcji waniliowych w modelu Blacka. Kolejny wynik będzie dotyczył modelu SABR dla parametru $\beta \in (0, 1)$. Twierdzenie 5.23 przedstawia wzór na wartość momentu $\mathbb{E}X_t^{2(1-\beta)}$. Znaleziony wzór może posłużyć do wyceny instrumentów pochodnych w tym modelu. W szczególności wyprowadzimy przybliżony wzór na wycenę kontraktu CMS w modelu SABR będący uogólnieniem wzoru uzyskanego w modelu lognormalnym.

Chciałbym serdecznie podziękować profesorowi Jackowi Jakubowskiemu za wiele cennych uwag oraz Pawłowi Szulcowi za konstruktywne dyskusje w czasie wspólnej pracy w banku. Chciałbym również podziękować żonie za cierpliwość i wsparcie.

Rozdział 2

Definicje i oznaczenia

W niniejszej pracy rozpatrujemy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z filtracją spełniającą zwykłe warunki $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, dla ustalonego horyzontu czasowego $0 < T < \infty$. Dla $k \in \mathbb{N}$ rozpatrujemy rynek $k+1$ płynnych aktywów finansowych niepłacących dywidendy o cenach $(S_0, .., S_k) =: S$. Zakładamy, że ceny rozpatrywanych aktywów są procesami stochastycznymi o ciągłych trajektoriach. Jednym z rozpatrywanych aktywów jest rachunek bankowy.

Definicja 2.1. Rachunkiem bankowym $(S_0(t))_{0 \leq t \leq T}$ nazywamy proces stochastyczny zdefniowany następująco:

$$S_0(t) := e^{\int_0^t r_s ds},$$

gdzie $(r_s)_{s \in [0,T]}$ jest dodatnim, $\mathbb{F}$- adaptowanym procesem stochastycznym, takim, że $\mathbb{P}$- prawie na pewno:

$$\int_0^T r_s ds < \infty.$$

Dla rachunku bankowego S_0 oraz $t \geq 0$ mamy $\mathbb{E}S_0^{-1}(t) = P(0,t)$, gdzie $P(u,t)$ oznacza cenę w chwili $u \geq 0$ obligacji zerokuponowej o terminie zapadalności $t \geq u$, czyli instrumentu finansowego wypłacającego jednostkę w chwili t. Dla pełności wywodu, poniżej przytaczamy podstawowe definicje i fakty związane z wyceną instrumentów finansowych na rynku bez arbitrażu. Ścisłe dowody oraz szersze omówienie tej problematyki można znaleźć m.in.

w monografi Musieli-Rutkowskiego [38], Jakubowskiego [31], Shiryaeva [53] lub Brigo-Mercurio [8].

Definicja 2.2. Wypłatą nazywamy dodatnią i całkowalną z kwadratem zmienną losową X w przetrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wypłatę nazwiemy europejską z momentem wykonania T, jeśli jest ona $\mathcal{F}_T$- mierzalna.

Definicja 2.3. Strategią replikującą $\phi(t) = (\phi_0(t), .., \phi_k(t))$ nazywamy $k+1$ wymiarowy, prognozowalny proces mający lokalnie ograniczone współrzędne. Proces zysku związany ze strategią replikującą ϕ definiujemy jako:

$$G_\phi(t) = \sum_{i=0}^{k} \int_0^t \phi_i(u) dS_i(u).$$

Definicja 2.4. Strategię replikującą ϕ nazywamy samofinasującą się, jeśli wartość tej strategii $V_\phi(u) := \sum_{i=0}^{k} \phi_i(u) S_i(u)$ spełnia dla każdego $u \geq 0$ warunek:

$$V_\phi(u) = V_\phi(0) + G_\phi(u).$$

Klasa wszystkich strategii samofinansujących się jest przestrzenią liniową ozn. $\mathcal{S}$.

Definicja 2.5. Modelem rynku nazwiemy parę (S, Θ), gdzie S oznacza proces cen, a $\Theta \subset \mathcal{S}$ zbiór strategii tworzący przestrzeń liniową zawierającą stałe.

Definicja 2.6. Strategią arbitrażową ϕ nazywamy strategię samofinansującą się, taką, że $V_\phi(0) = 0$, $V_\phi(t) \geq 0$ p.n. oraz $\mathbb{P}(V_\phi(t) > 0) > 0$ dla $t > 0$.

Definicja 2.7. Miarę $\mathbb{Q}$ na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F})$ nazwiemy miarą martyngałową, jeśli jest ona równoważna mierze $\mathbb{P}$, a zdyskontowany proces ceny $S^*(t) = P(0,t)S(t)$ jest martyngałem lokalnym względem miary $\mathbb{Q}$ i filtracji $\mathbb{F}$.

Fakt 2.8. Niech $\mathbb{Q}$ będzie miarą martyngałową. Oznaczmy $\Psi(\mathbb{Q})$ zbiór strategii replikujących takich, że jeśli $\psi_u \in \Psi$ to $\int_0^t \psi_u dS_u^*$ jest $\mathbb{Q}$- martyngałem, gdzie $S^*(u) = P(0,u)S(u)$. Wówczas rynek $(S, \Psi(\mathbb{Q}))$ jest wolny od arbitrażu (czyli nie istnieją na nim strategie arbitrażowe). Zbiór $\Psi(\mathbb{Q})$ nazwiemy zbiorem strategii dopuszczalnych.

Definicja 2.9. Ustalmy $t \geq 0$. $\mathcal{F}_t$-mierzalna wypłata X_t jest osiągalna jeśli istnieje strategia samofinansująca się taka, że $X_t = V_\phi(t)$. Mówimy wówczas, że strategia ϕ generuje wypłatę X_t. Wówczas ceną w chwili t wypłaty X_t nazwiemy wartość w chwili t strategii samofinansującej się ϕ generującej tę wypłatę.

Założenie ogólne. W dalszej części pracy zawsze zakładamy istnienie miary martyngałowej, którą oznaczamy przez $\mathbb{Q}$.

Fakt 2.10. Jeśli istnieje miara martyngałowa $\mathbb{Q}$, to dla każdej $\mathcal{F}_t$-mierzalnej i osiągalnej wypłaty X, jej cena w chwili $u \leq t$, jest równa:

$$\pi_X(u) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(P(u,t)X_t|\mathcal{F}_u\Big).$$

Definicja 2.11. Rozpatrywany rynek nazwiemy rynkiem zupełnym, jeśli każda wypłata na tym rynku jest osiągalna.

Fakt 2.12. Jeżeli na rynku istnieje miara martyngałowa to rynek ten jest wolny od arbitrażu, czyli nie istnieją na nim strategie arbitrażowe.

Definicja 2.13. Numeraire nazywamy aktywo finansowe o ściśle dodatniej cenie i nie płacące dywidendy.

Uwaga 2.14. Numeraire jest osiągalną wypłatą.

Twierdzenie 2.15. Załóżmy, że istnieją numeraire N oraz miara $\mathbb{P}_N$ równoważna mierze $\mathbb{P}$ takie, że dla dowolnej, osiągalnej wypłaty X_T oraz $t \leq T$ mamy $\mathbb{P}_N$- prawie na pewno:

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}_N\Big(\frac{X_T}{N_T}|\mathcal{F}_t\Big).$$

Wówczas dla dowolnego numeraire U istnieje miara probabilistyczna $\mathbb{P}_U$ równoważna mierze $\mathbb{P}$ taka, że:

$$\frac{X_t}{U_t} = \mathbb{E}_U\Big(\frac{X_T}{U_T}|\mathcal{F}_t\Big).$$

Co więcej pochodna Radona-Nikodyma miary $\mathbb{P}_U$ względem $\mathbb{P}_N$ wyraża się wzorem:

$$\frac{d\mathbb{P}_U}{d\mathbb{P}_N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T}.$$

Wybór odpowiedniego numeraire jest kluczowy w procesie wyceny instrumentów pochodnych. Zastosowanie odpowiedniego numeraire jest równoznaczne z zastosowaniem naturalnej dla danej wypłaty miary probabilistycznej. Ze względu na losowy charakter stóp procentowych, obecność czynników dyskontujących w wypłatach wielu instrumentach pochodnych powoduje, że bezpośrednie obliczenie wartości oczekiwanej względem wyjściowej miary bywa kłopotliwe. Receptą na te trudności jest odpowiednia zmiana miary, względem której obliczenie odpowiednich wartości oczekiwanych staje się dużo prostsze. Przykładowo, jeśli wyceniamy instrument pochodny będący funkcją stopy procentowej, naturalnym numeraire dla tej wypłaty jest wartość obligacji zerokuponowej o odpowiednim terminie zapadalności. Gdy wyceniamy instrumenty pochodne, których funkcja wypłaty uzależniona jest na przykład od wartości stopy swapowej, naturalnym numerairem jest odpowiedni portfel złożony z obligacji zerokuponowych.

Definicja 2.16. Dla $S > T$ oznaczmy $\delta(T, S)$ frakcję roku między datami T i S. Wówczas stopę zmienną LIBOR definiujemy wzorem:

$$L(T,S) = \frac{1}{\delta(T,S)}\Big(\frac{1}{P(T,S)} - 1\Big). \tag{2.1}$$

Definicja 2.17. Kontrakt Interest Rate Swap (IRS) jest transakcją finansową, w której strona A, w określonych datach $T_1 < T_2 < .. < T_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, płaci stronie B wielkości odpowiednio $R_n \tau_i$ dla $i \in \{1, .., n\}$, gdzie R_n jest stałą stopą procentową, a τ_i to dodatnie stałe. W tych samych momentach $T_1 < T_2 < .. < T_n$, strona B płaci stronie A stopę zmienną LIBOR pomnożoną przez odpowiednią stałą: $\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$ dla $i \in \{1, .., n\}$. Data $T_0 < T_1$ jest datą rozpoczęcia transakcji, czyli datą rozpoczynającą pierwszy okres odsetkowy.

Uwaga 2.18. Stopa zmienna LIBOR $L(T_{i-1}, T_i)$ w kontrakcie IRS jest ustalana w chwili T_{i-1}. Stałe τ_i w definicji 2.17 są wyznaczone jako frakcje roku między datami T_{i-1} oraz T_i: $\tau_i = \delta(T_{i-1}, T_i)$. Ponadto kontrakt IRS z definicji 2.17 jest wyceniany tak, by w chwili zawarcia kontraktu $t \leq T_0$ jego wartość była równa 0. Stąd wartość R_n jest wyznaczona według wzoru:

$$R_n(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\sum_{i=1}^{n} \delta(T_{i-1}, T_i) P(t, T_i)}. \tag{2.2}$$

Wartość R_n jest nazywana stopą swapową. Płatności strony A nazywamy nogą stałą IRS, zaś płatności strony B nazywamy nogą zmienną kontaktu IRS.

Definicja 2.19. Kontrakt Quanto Constant Maturity Swap (QCMS) jest transakcją finansową, w której strona A płaci stronie B wielkość w walucie „1" wyznaczoną przez wartość stopy swapowej kontraktu IRS związanego z walutą „2". W tym samym momencie strona B płaci stronie A stopę zmienną LIBOR związaną z walutą „1".

Uwaga 2.20. Jeśli w definicji 2.19 waluty „1" i „2" są tymi samymi walutami kontrakt QCMS nazywamy kontraktem Constant Maturity Swap (CMS).

Definicja 2.21. Stopą procentową forward $F(t, S, T)$ w chwili t, na okres odsetkowy od S do T, dla $T > S$, nazywamy taką stopę procentową, którą można zrealizować na transakcji wolnej od ryzyka zawartej w chwili t bez początkowych kosztów. Oznacza to, że cena w chwili t kontraktu wymiany stopy zmiennej LIBOR $L(S, T)$ na stopę stałą $F(t, S, T)$ jest równa 0. Stopa $F(t, S, T)$ jest równa:

$$F(t, S, T) = \frac{P(t, S) - P(t, T)}{\delta(S, T) P(t, T)}, \tag{2.3}$$

gdzie, podobnie jak wcześniej, $\delta(S, T)$ oznacza frakcję roku między S i T.

Uwaga 2.22. Datę t_f ustalenia stawki forward na okres odsetkowy $[S, T]$ nazywamy datą fixingu stopy forward. Oznacza to, że zmienna losowa $F(t_f, S, T)$ jest $\mathcal{F}_{t_f}$- mierzalna.

Definicja 2.23. Dla ustalonych dat $t_f < t_s < t_m$, opcją caplet, o kursie wykonania K i terminie wypłaty $t_p \in [t_s, t_m]$, na kurs forward stopy procentowej nazywamy kontrakt finansowy o funkcji wypłaty Π zdefiniowanej następująco:

$$\Pi = \delta(t_s, t_p)[F(t_f, t_s, t_m) - K]^+. \tag{2.4}$$

Uwaga 2.24. Zmienna losowa Π jest $\mathcal{F}_{t_f}$- mierzalna.

Rozdział 3

Model lognormalny

W niniejszym rozdziale, dla procesów stochastycznych X_t, Y_t (o zadanych dynamikach) oraz odpowiednich funkcji f, rozpatrujemy warunkowe wartości oczekiwane $\mathbb{E}[f(X_t, Y_t)|Y_t]$. W szczególności dla wybranych funkcji f oraz procesu stochastycznego:

$$[0, T] \ni t \mapsto \mathbb{E}[f(X_t, Y_t)|Y_t] =: \mathcal{Z}_t(f)$$

wyprowadzimy algebraiczne wzory reprezentujące ciągłe wersje procesów $\mathcal{Z}_t(f)$. Dla ustalonego $t \geq 0$, $K \geq 0$ oraz mierzalnych funkcji p, q, rozpatrzymy funkcje f postaci:

$$f(x, y) = \Big(p(t)x - q(t)y - K\Big)^+.$$

Znajomość algebraicznego wzoru na postać warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[f(X_t, Y_t)|Y_t]$ znacznie ułatwia wycenę wybranych instrumentów pochodnych.

W podrozdziale 3.1 znajdziemy postać ciągłej wersji procesu $\mathcal{Z}_t(f)$ dla funkcji $f(x, y) = x$. W podrozdziale 3.2 wykorzystamy twierdzenie o postaci warunkowej wartości oczekiwanej, sformułowane i udowodnione w podrozdziale 3.1, do wyceny, w modelu lognormalnym, kontraktu Quanto Constant Maturity Swap, który jest dwuwalutowym odpowiednikiem kontraktu Constant Maturity Swap (CMS) (definicja 2.19 oraz uwaga 2.20). Sformułowane i udowodnione twierdzenie o postaci warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[X_t|Y_t]$ pozwoli nam w prosty sposób uzyskać wzór na cenę kontraktu QCMS. Uzyskany wzór, po raz pierwszy zaprezentowany w tej pracy, jest uogólnieniem formuły wyprowadzonej przez Patricka Hagana [23] i powszechnie stosowanej do wyceny kontraktów CMS. W podrozdziale 3.3 dla $K > 0$ znajdziemy postać ciągłej wersji procesu $\mathcal{Z}_t(f)$ dla funkcji $f(x, y) = (x - K)^+$, która to posłuży nam w podrozdziale 3.4 do wyceny, w modelu lognormalnym, opcji na stopę procentową z niestandardowym terminem wypłaty. W podrozdziale 3.5 sformułujemy i udowodnimy twierdzenie o postaci warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[f(X_t, Y_t)|Y_t]$ dla funkcji $f(x, y) = \Big(p(t)x - q(t)y - K\Big)^+$, gdzie p, q są dodatnimi funkcjami mierzalnymi, a $K > 0$. Następnie wykorzystamy ostatnie twierdzenie do wyceny w modelu lognormalnym opcji na spread.

3.1 Warunkowa wartość oczekiwana w modelu lognormalnym ze stałym współczynnikiem zmienności

Zaczniemy od opisu modelu.

Model I. Załóżmy, że mamy dwa $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ - adaptowane procesy X_t, Y_t o dynamikach zadanych równaniami:

$$dX_t = \sigma_X X_t dW_t, \tag{3.1}$$
$$dY_t = \sigma_Y Y_t dZ_t, \tag{3.2}$$

gdzie σ_X, σ_Y są dodatnimi stałymi, W, Z są skorelowanymi ruchami Browna oraz:

$$d\langle W, Z\rangle_t = \rho dt,$$

dla $\rho \in (-1, 1)$. Ponadto $X_0 > 0$, $Y_0 > 0$ są stałymi.

Uwaga 3.1. Jedynymi, mocnymi rozwiązaniami (3.1) i (3.2) są odpowiednio procesy stochastyczne:

$$X_t = X_0 e^{-\frac{\sigma_X^2 t}{2} + \sigma_X W_t},$$

$$Y_t = Y_0 e^{-\frac{\sigma_Y^2 t}{2} + \sigma_Y Z_t}.$$

Uwaga 3.2. Dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{R}$ oraz procesów X_t, Y_t o dynamikach zadanych odpowiednio równaniami (3.1), (3.2) mamy:

$$\mathbb{E}X_t^a = X_0^a e^{t\frac{\sigma_X^2}{2}(a^2-a)},$$

$$\mathbb{E}Y_t^a = Y_0^a e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(a^2-a)}.$$

Jest to oczywiste, gdyż z uwagi 3.1 dla procesu Y_t mamy:

$$Y_t^a = Y_0^a e^{-\frac{\sigma_Y^2 a}{2}t + a\sigma_Y Z_t},$$

więc:

$$\mathbb{E}Y_t^a = Y_0^a e^{-\frac{\sigma_Y^2 a}{2}t}\mathbb{E}e^{a\sigma_Y Z_t} = Y_0^a e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(a^2-a)}.$$

Prawdziwość uwagi dla procesu X_t jest oczywista z tych samych powodów.
$\square$

Wiadomo, że dla ustalonego $t \geq 0$ istnieje mierzalna funkcja $h(t,\cdot) : (0,\infty) \to (0,\infty)$ taka, że prawdziwa jest, $\mathbb{P}$- prawie na pewno, równość:

$$\mathbb{E}[X_t|Y_t] = h(Y_t, t). \tag{3.3}$$

Co więcej, dla ustalonego $t \geq 0$ zmienna losowa $h(Y_t,t)$ jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnoscią do zdarzeń o zerowym prawdopodobieństwie. W konsekwencji znajdując, dla każdego t, funkcję $h(Y_t,t)$, znajdujemy modyfikację procesu $\mathcal{Z}_t(f)$ dla funkcji $f(x,y) = x$. Dla procesów X_t, Y_t, zadanych modelem I, znaleziona, w tym rozdziale, modyfikacja jest ciągła i jest funkcją potęgową od procesu Y_t. Wynik ten jest przedstawiony w twierdzeniu 3.10. Zanim sformułujemy i udowodnimy wspomniane twierdzenie, zaprezentujemy wcześniej pewną intuicję związaną z poszukiwaniem funkcji h. Chociaż zbudowana intuicja nie jest formalnym dowodem omawianego twierdzenia, to doprowadzi nas do właściwej postaci poszukiwanej funkcji i modyfikacji procesu $\mathcal{Z}_t(f)$.

Założenie Z1. Załóżmy, że funkcja h spełniająca równość (3.3) jest dwukrotnie różniczkowalna i ograniczona oraz ma ograniczone pochodne, a funkcje

$$
\begin{aligned}
&0 \le t \mapsto \mathbb{E}[Y_t h(Y_t, t)],\\
&0 \le t \mapsto \mathbb{E}\Big(\frac{\partial h}{\partial y}(Y_t, t) Y_t^2\Big),\\
&0 \le t \mapsto \mathbb{E}\Big(Y_t\Big[\frac{\partial h}{\partial t}(Y_t, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(Y_t, t)\sigma_Y^2 Y_t^2\Big]\Big)
\end{aligned}
$$

są ciągłe.

Założenie Z1 pełni rolę pomocniczą w poszukiwaniu postaci warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[X_t|Y_t]$. Założenie to nie będzie potrzebne w dowodzie podstawowego twierdzenia 3.10 mówiącego o postaci $\mathbb{E}[X_t|Y_t]$ w modelu I.

Dla całkowalnych z kwadratem martyngałów X_t, Y_t oznaczamy przez $\langle X, Y\rangle_t$ proces o wahaniu skończonym, taki, że $X_tY_t - \langle X, Y\rangle_t$ jest martyngałem. Dla zbudowania wspomnianej wyżej intuicji wykorzystamy dwa, sformułowane i udowodnione poniżej, lematy.

Lemat 3.3. Niech S_t, H_t będą ciągłymi, całkowalnymi z kwadratem, martyngałami. Dla każdego $t \ge 0$ zdefiniujmy proces $S_t^* := \mathbb{E}[S_t|H_t]$. Jeżeli $S_t^* = M_t^* + A_t^*$, gdzie M^* jest martyngałem, a A_t^* jest procesem o wahaniu skończonym, to wówczas prawdziwa jest równość:

$$
\mathbb{E}\langle S, H\rangle_t = \mathbb{E}\langle M^*, H\rangle_t + \mathbb{E}H_tA_t^* - S_0H_0. \tag{3.4}
$$

Dowód. Udowodnimy najpierw lemat dla $S_0 = H_0 = 0$. Mamy:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\langle S, H\rangle_t &= \mathbb{E}S_tH_t = \mathbb{E}[H_t\mathbb{E}[S_t|H_t]] = \mathbb{E}H_tS_t^*\\
&= \mathbb{E}H_t(M_t^* + A_t^*) = \mathbb{E}\langle M^*, H\rangle_t + \mathbb{E}H_tA_t^*.
\end{aligned}
$$

Jeśli $S_0 \ne 0$ lub $H_0 \ne 0$ wystarczy rozpatrzyć procesy $\tilde{S}_t := S_t - S_0$ oraz $\tilde{H}_t := H_t - H_0$ i skorzystać z rozumowania powyżej. □

Lemat 3.4. Dla procesów X_t, Y_t spełniających założenia modelu I oraz funkcję *h spełniającej założenia Z1 prawdziwa jest nastepująca równość:*

$$\sigma_X\sigma_Y\rho\mathbb{E}\Big(Y_t h(Y_t,t)\Big) =$$

$$\sigma_Y^2\mathbb{E}\Big(\frac{\partial h}{\partial y}(Y_t,t)Y_t^2\Big) + \mathbb{E}\Big(Y_t\Big[\frac{\partial h}{\partial t}(Y_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(Y_t,t)\sigma_Y^2 Y_t^2\Big]\Big). \tag{3.5}$$

Dowód. Obliczymy, na dwa różne sposoby, pochodną, względem czasu, wartości oczekiwanej nawiasu skośnego $\langle X,Y\rangle_t$. Rezultatem tego rachunku będzie teza lematu. Bezpośrednio z (3.1) i (3.2) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\langle X,Y\rangle_t &= \mathbb{E}\sigma_X\sigma_Y\rho\int_0^t Y_u X_u du\\ &= \sigma_X\sigma_Y\rho\int_0^t \mathbb{E}Y_u X_u du\\ &= \sigma_X\sigma_Y\rho\int_0^t \mathbb{E}Y_u\mathbb{E}[X_u|Y_u]du\\ &= \sigma_X\sigma_Y\rho\int_0^t \mathbb{E}Y_u h(Y_u,u)du. \end{aligned}\tag{3.6}$$

W drugiej równości skorzystaliśmy z twierdzenia Fubiniego. Mogliśmy to zrobić, ponieważ na mocy uwagi do modelu I mamy $X_u > 0$ oraz $Y_u > 0$ dla każdego $u \geq 0$. Na mocy założenia Z1 o funkcji h, możemy zróżniczkować wyrażenie (3.6) względem t i w rezultacie otrzymamy:

$$(\mathbb{E}\langle X,Y\rangle_t)' = \sigma_X\sigma_Y\rho\mathbb{E}Y_t h(Y_t,t). \tag{3.7}$$

Pochodną wartości oczekiwanej $\mathbb{E}\langle X,Y\rangle_t$ obliczymy teraz w inny sposób. Korzystając z założenia Z1 możemy zastosować wzór Ito dla funkcji h:

$$dh(Y_t,t) = \frac{\partial h}{\partial y}(Y_t,t)dY_t + \frac{\partial h}{\partial t}(Y_t,t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(Y_t,t)d\langle Y\rangle_t. \tag{3.8}$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$N_h(t) := \int_0^t \frac{\partial h}{\partial y}(Y_u,u)dY_u \tag{3.9}$$

oraz

$$A_h(t) := \int_0^t \Big[\frac{\partial h}{\partial t}(Y_u, u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(Y_u, u)\sigma_Y^2 Y_u^2\Big] du. \tag{3.10}$$

Wykorzystjąc powyższe oznaczenia równość (3.8) możemy zapisać następująco:

$$h(Y_t, t) = h(Y_0, 0) + N_h(t) + A_h(t). \tag{3.11}$$

Z założenia Z1, funkcja pod całką wyrażenia (3.9) jest ograniczona i w rezultacie N_h jest martyngałem. A_h jest procesem o wahaniu skończonym. Wykorzystamy teraz lemat 3.3. Podstawimy odpowiednio $S_t = X_t$ oraz $H_t = Y_t$ i w rezultacie z równości (3.4) otrzymamy:

$$\mathbb{E}\langle X, Y\rangle_t = \mathbb{E}\langle N_h, Y\rangle_t + \mathbb{E}(A_h(t)Y_t) - X_0 Y_0. \tag{3.12}$$

Następnie wyznaczymy $\mathbb{E}(A_h(t)Y_t)$ oraz $\mathbb{E}\langle N_h, Y\rangle_t$. Ze wzoru Ito na całkowanie przez części zastosowanego do procesów $A_h(t)$ oraz Y_t otrzymamy:

$$A_h(t)Y_t = A_h(0)Y_0 + \int_0^t A_h(u)dY_u + \int_0^t Y_u dA_h(u).$$

Na mocy założenia Z1 istnieją dodatnie stałe K_1, K_2 takie, że:

$$A_h(t) \leq tK_1 + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 K_2 \int_0^t Y_u^2 du,$$

zatem:

$$A_h(t)^2 \leq 2t^2 K_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_Y^4 K_2^2 \Big(\int_0^t Y_u^2 du\Big)^2.$$

Ponadto, z całkowej wersji nierówności Jensena, mamy dla $k \in \mathbb{N}$:

$$\Big(\int_0^t Y_s^{2k} ds\Big)^2 \leq t \int_0^t Y_s^{4k} ds,$$

więc z ostatnich dwóch oszacowań mamy:

$$A_h(t)^2 \leq 2t^2 K_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_Y^4 K_2^2 t \int_0^t Y_u^4 du,$$

a stąd i z przedostatniej nierówności mamy dalej:

$$\begin{aligned} A_h(t)^4 &\leq 8t^4 K_1^4 + \frac{1}{2}\sigma_Y^8 K_2^4 t^2 \Big(\int_0^t Y_u^4 du\Big)^2 \\ &\leq 8t^4 K_1^4 + \frac{1}{2}\sigma_Y^8 K_2^4 t^3 \int_0^t Y_u^8 du. \end{aligned}$$

W rezultacie z ostatniego oszacowania oraz nierówności Schwartza otrzymujemy:

$$\mathbb{E}\int_0^t A_h^2(u)\sigma_Y^2 Y_u^2 du \le \sigma_Y^2 \int_0^t \sqrt{\mathbb{E}A_h^4(u)}\sqrt{\mathbb{E}Y_u^4}du < \infty.$$

W takim razie $\int_0^t A_h(u)dY_u$ jest martyngałem. Po wzięciu stronami wartości oczekiwanej w ostatniej równości otrzymamy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}A_h(t)Y_t &= A_h(0)Y_0 + \mathbb{E}\int_0^t Y_u dA_h(u)\\ &= A_h(0)Y_0 + \int_0^t \mathbb{E}\Big(Y_u\Big[\frac{\partial h}{\partial t}(Y_u,u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(Y_u,u)\sigma_Y^2 Y_u^2\Big]\Big)du.\end{aligned} \tag{3.13}$$

W drugiej równości wykorzystaliśmy twierdzenie Fubiniego oraz definicję procesu $A_h(t)$. Zajmiemy sie teraz $\mathbb{E}\langle N_h, Y\rangle_t$. Z definicji procesu N_h i twierdzenia Fubiniego otrzymujemy:

$$\mathbb{E}\langle N_h, Y\rangle_t = \mathbb{E}\int_0^t \sigma_Y^2 \frac{\partial h}{\partial y}(Y_u,u)Y_u^2 du = \sigma_Y^2 \int_0^t \mathbb{E}\Big(\frac{\partial h}{\partial y}(Y_u,u)Y_u^2\Big)du. \tag{3.14}$$

Z równości (3.12), (3.13) oraz (3.14) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\langle X, Y\rangle_t = A_h(0)Y_0 + \int_0^t \mathbb{E}\Big(Y_u\Big[\frac{\partial h}{\partial t}(Y_u,u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(Y_u,u)\sigma_Y^2 Y_u^2\Big]\Big)du+\\ +\sigma_Y^2\int_0^t \mathbb{E}\Big(\frac{\partial h}{\partial y}(Y_u,u)Y_u^2\Big)du - X_0Y_0.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Po zróżniczkowaniu stronami (3.15) względem t otrzymamy:

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\langle X, Y\rangle_t)' &= \sigma_Y^2\mathbb{E}\Big(\frac{\partial h}{\partial y}(Y_t,t)Y_t^2\Big)\\ &\quad + \mathbb{E}\Big(Y_t\Big[\frac{\partial h}{\partial t}(Y_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(Y_t,t)\sigma_Y^2 Y_t^2\Big]\Big).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Po porównaniu (3.7) i (3.16) otrzymujemy tezę lematu 2.5:

$$\begin{aligned}\sigma_X\sigma_Y\rho\mathbb{E}\Big(Y_t h(Y_t,t)\Big) &= \sigma_Y^2\mathbb{E}\Big(\frac{\partial h}{\partial y}(Y_t,t)Y_t^2\Big)\\ &\quad + \mathbb{E}\Big(Y_t\Big[\frac{\partial h}{\partial t}(Y_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(Y_t,t)\sigma_Y^2 Y_t^2\Big]\Big).\end{aligned}$$

$\square$

Uwaga 3.6. Równoważny zapis tezy lematu 3.5 jest następujący:

$$\mathbb{E}\Big(\sigma_X\sigma_Y\rho Y_t h(Y_t,t) - \sigma_Y^2\frac{\partial h}{\partial y}(Y_t,t)Y_t^2 - Y_t\Big[\frac{\partial h}{\partial t}(Y_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(Y_t,t)\sigma_Y^2 Y_t^2\Big]\Big) = 0. \tag{3.17}$$

W dalszej kolejności bedziemy poszukiwali funkcji h, która spełnia równanie (3.17).

Definicja 3.7. Niech $C_b^{1,2}$ oznacza klasę ograniczonych funkcji dwóch zmiennych, różniczkowlanych, z ograniczonymi i ciągłymi pochodnymi odpowiednio rzędu 1 oraz 1 i 2. Zdefiniujmy operatory

$$L : C_b^{1,2}((0,\infty)\times[0,\infty)) \to C([0,\infty)\times(0,\infty))$$

oraz

$$\mathcal{T} : C_b^{1,2}((0,\infty)\times[0,\infty)) \to C([0,\infty)\times(0,\infty))$$

następująco:

$$Lh(y,t) := \frac{\partial h}{\partial t}(y,t) + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 y^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(y,t), \tag{3.18}$$

$$\mathcal{T}h(y,t) := \sigma_X\sigma_Y\rho y h(y,t) - \sigma_Y^2 y^2\frac{\partial h}{\partial y}(y,t). \tag{3.19}$$

Korzystając z definicji 3.7, równość (3.17) może być zapisana w następującej postaci:

$$\mathbb{E}\Big(\mathcal{T}h(Y_t,t) - Y_t Lh(Y_t,t)\Big) = 0. \tag{3.20}$$

Twierdzenie 3.8. Funkcja $h(y,t) = c(t)y^a$, gdzie $a = \frac{\sigma_X\rho}{\sigma_Y}$ oraz $c(t) = \frac{X_0}{Y_0^a}e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}$, jest rozwiązaniem równań:

$$\mathcal{T}h = 0 \tag{3.21}$$

oraz

$$Lh = 0, \tag{3.22}$$

z warunkiem początkowym:

$$\mathbb{E}h(t, Y_t) = X_0. \tag{3.23}$$

Dowód. Z definicji operatora $\mathcal{T}$ równanie (3.21) jest równoważne równaniu:

$$ayh(y,t) - \frac{\partial h}{\partial y}(y,t)y^2 = 0.$$

Ponieważ $y > 0$, $h > 0$ więc po podzieleniu ostatniego równania stronami przez y oraz h otrzymamy równanie, równoważne równaniu (3.21), postaci:

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial y}(y,t)}{h(y,t)} = \frac{a}{y}. \tag{3.24}$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego (3.24), dla ustalonego t, jest funkcja:

$$h(y,t) = c(t)y^a,$$

gdzie stała $c(t) > 0$. Ponieważ założyliśmy, że funkcja h ma spełniać warunek (3.23), więc z postaci h otrzymujemy:

$$X_0 = \mathbb{E}h(Y_t, t) = c(t)\mathbb{E}Y_t^a.$$

Z uwagi 3.2 wiemy, że $\mathbb{E}Y_t^a = Y_0^a e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(a^2-a)}$, zatem:

$$c(t) = \frac{X_0}{Y_0^a}e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}.$$

Udowodnimy teraz, że funkcja $h(y,t) = c(t)y^a$, z $c(t)$ zadaną ostatnią równoscią, spełnia równanie (3.22).

$$\frac{\partial h}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial\left[y^a\frac{X_0}{Y_0^a}e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}\right]}{\partial t} = y^a\frac{X_0}{Y_0^a}e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a).$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma_Y^2 y^2\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(y,t) &= \frac{1}{2}\sigma_Y^2\frac{X_0}{Y_0^a}e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}y^2\frac{\partial^2 y^a}{\partial^2 y} \\
&= \frac{1}{2}\sigma_Y^2 y^2 a(a-1)y^{a-2}\frac{X_0}{Y_0^a}e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)} \\
&= \frac{\sigma_Y^2}{2}y^a(a^2-a)\frac{X_0}{Y_0^a}e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}.
\end{aligned}$$

Z definicji operatora L oraz dwóch ostatnich równości, otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned} Lh(y,t) &= y^a \frac{X_0}{Y_0^a} e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)} \frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a) \\ &+ \frac{\sigma_Y^2}{2} y^a (a^2-a) \frac{X_0}{Y_0^a} e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)} = 0. \end{aligned}$$

□

Wniosek 3.9. Wyznaczona w stwierdzeniu 3.8 funkcja h spełnia równanie (3.20). Warunek (3.23) z twierdzenia 3.8 jest warunkiem koniecznym równości $\mathbb{E}[X_t|Y_t] = h(Y_t, t)$, ponieważ $\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}[X_t|Y_t]\Big) = \mathbb{E}X_t = X_0$. W rezultacie wyznaczona funkcja h spełnia dwa warunki konieczne dla równości $\mathbb{E}[X_t|Y_t] = h(Y_t, t)$.

Poniżej sformułujemy i udowodnimy twierdzenie pokazujące, że wyznaczona w stwierdzeniu 3.8 funkcja h jest wersją warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[X_t|Y_t]$. Co ciekawe, dowód twierdzenia jest niezależny od zbudowanej, w rozumowaniu wyżej, intuicji.

Twierdzenie 3.10. Załóżmy, że spełnione są założenia modelu I. Niech:

$$h(y,t) = c(t)y^a,$$

gdzie $a = \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}$ *oraz* $c(t) = \frac{X_0}{Y_0^a} e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}$. *Wówczas dla ustalonego* $t \geq 0$ *prawdziwa jest równość:*

$$\mathbb{E}[X_t|Y_t] = h(Y_t, t)$$

- $\mathbb{P}$ *prawie na pewno. Tym samym* $(h(Y_t,t))_{0\leq t\leq T}$ *jest ciągłą modyfikacją procesu* $(\mathbb{E}[X_t|Y_t])_{0\leq t\leq T}$.

Dowód. Ustalmy $t \geq 0$. Wybierzmy dowolny zbiór $B \in \sigma(Y_t)$. Udowodnimy, że:

$$\int_B h(Y_t,t)d\mathbb{P} = \int_B X_t d\mathbb{P}. \tag{3.25}$$

Niech $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ będzie takim zbiorem borelowskim, że $B = \{Z_t \in D\}$. Z uwagi 3.1 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} h(Y_t,t) &= \frac{X_0}{Y_0^a} e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)} Y_t^a = Y_0^a e^{-\frac{\sigma_Y^2}{2}ta+a\sigma_Y Z_t} \frac{X_0}{Y_0^a} e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)} \\ &= e^{-\frac{\sigma_Y^2}{2}ta^2+a\sigma_Y Z_t} X_0. \end{aligned}$$

W rezultacie, z ostatniej równości otrzymujemy:

$$\int_B h(Y_t,t)d\mathbb{P} = \int_D X_0 e^{-\frac{\sigma_Y^2}{2}ta^2+a\sigma_Y z} f_{Z_t}(z)dz,$$

gdzie $f_{Z_t}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}}$ jest gęstością Z_t. Z ostatniej równości otrzymujemy zatem:

$$\begin{aligned} \int_B h(Y_t,t)d\mathbb{P} &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) X_0 e^{-\frac{\sigma_Y^2}{2}ta^2+a\sigma_Y z} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) X_0 e^{-\frac{\rho^2\sigma_X^2}{2}t+\rho\sigma_X z} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz, \end{aligned} \tag{3.26}$$

ponieważ $a = \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}$. Z drugiej strony, znowu korzystając z uwagi 3.1, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_B X_t d\mathbb{P} &= \int_\Omega 1_{\{Z_t \in D\}} X_t d\mathbb{P} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) X_0 e^{-\frac{\sigma_X^2}{2}t+\sigma_X w} f_{W_t,Z_t}(w,z)dwdz, \end{aligned} \tag{3.27}$$

gdzie f_{W_t,Z_t} jest gęstością łącznego rozkładu (W_t, Z_t). Skorzystamy z następującej tożsamości:

$$f_{W_t,Z_t} = f_{Z_t} f_{W_t|Z_t}, \tag{3.28}$$

gdzie $f_{W_t|Z_t}$ jest gęstością warunkową:

$$f_{W_t|Z_t}(w,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(w-\rho z)^2}{2t(1-\rho^2)}}. \tag{3.29}$$

Po wstawieniu (3.28) oraz (3.29) do (3.27) otrzymamy:

$$\int_B X_t d\mathbb{P} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) X_0 e^{-\frac{\sigma_X^2}{2}t+\sigma_X w} f_{Z_t}(z) f_{W_t|Z_t}(w,z)dwdz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) X_0 e^{-\frac{\sigma_X^2}{2}t + \sigma_X w} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(w-\rho z)^2}{2t(1-\rho^2)}} dw dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) X_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_X^2}{2}t + \sigma_X w} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(w-\rho z)^2}{2t(1-\rho^2)}} dw \Big] dz. \tag{3.30}$$

Obliczymy całkę wewnątrz nawiasu kwadratowego w wyrażeniu (3.30):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_X^2}{2}t + \sigma_X w} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(w-\rho z)^2}{2t(1-\rho^2)}} dw$$

$$= e^{-\frac{\sigma_X^2}{2}t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma_X w} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(w-\rho z)^2}{2t(1-\rho^2)}} dw = e^{-\frac{\sigma_X^2}{2}t} \mathbb{E} e^{\sigma_X U},$$

gdzie U jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}\Big(\rho z, t(1-\rho^2)\Big)$ względem miary $\mathbb{P}$. Ze wzoru na postać transformaty Laplace'a dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym otrzymujemy:

$$e^{-\frac{\sigma_X^2}{2}t} \mathbb{E} e^{\sigma_X U} = e^{\rho z \sigma_X - \frac{\sigma_X^2 \rho^2}{2}t}. \tag{3.31}$$

Po wstawieniu (3.31) do (3.30) otrzymamy ostatecznie:

$$\int_B X_t d\mathbb{P} = \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) X_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} e^{\rho z \sigma_X - \frac{\sigma_X^2 \rho^2}{2}t} dz. \tag{3.32}$$

Po porównaniu (3.26) oraz (3.32) otrzymujemy:

$$\int_B X_t d\mathbb{P} = \int_B h(Y_t, t) d\mathbb{P},$$

a to chcieliśmy udowodnić. Ostatecznie dla dowolnego zbioru $B \in \sigma(Y_t)$ otrzymujemy:

$$h(Y_t, t) = \mathbb{E}[X_t | Y_t]$$

- $\mathbb{P}$ prawie na pewno. $\square$

3.2 Wycena kontraktu Quanto Constant Maturity Swap

W tym podrozdziale zaprezentujemy wycenę kontraktu Quanto Constant Maturity Swap (QCMS) w modelu I. W tym celu wykorzystamy twierdzenie 3.10.

Wycena płatności strony B kontraktu QCMS (definicja 2.19) sprowadza się do wyceny nogi zmiennej kontraktu IRS (Brigo, Mercurio [8], paragraf 14.2). Trudność wyceny QCMS leży więc w określeniu ceny płatności strony A. Załóżmy, że T_0 jest momentem ustalenia wartości stopy swapowej IRS-a związanego z walutą „2“ oraz, że $T_1 > T_0$ jest momentem płatności tak ustalonej stopy swapowej. Dodatkowo załóżmy, że T_1 jest momentem pierwszej płatności IRS-a dla którego została ustalona stopa swapowa. Przez $T_2, .., T_n$ oznaczamy pozostałe daty płatności rozpatrywanego IRS-a. Obiekty związane z walutą $i = 1, 2$ oznaczamy indeksem dolnym i, a przez $\mathbb{Q}$ oznaczamy miarę martyngałową dla rozpatrywanego rynku. Na mocy faktu 2.10, wartość $V(0)$ w chwili 0 jednej płatności strony A kontraktu QCMS wyraża się wzorem:

$$V(0) = P_1(0, T_0)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[R_{2,n}(T_0)P_1(T_0, T_1)]. \tag{3.33}$$

Oznaczmy $\mathbb{P}_L$ (oraz odpowiednio wartość oczekiwaną względem tej miary $\mathbb{E}_L$) miarę związaną z numeraire $L(t) := \sum_{i=1}^{n} \delta(T_{i-1}, T_i)P_1(t, T_i)$ dla $t \leq T_0$. Na mocy twierdzenia 2.16 mamy:

$$\frac{d\mathbb{P}_L}{d\mathbb{Q}} = \frac{L(T_0)}{L(0)} \frac{P_1(0, T_0)}{P_1(T_0, T_0)},$$

więc po zmianie miary (numeraire'a) równość (3.33) przyjmuje postać:

$$V(0) = L(0)\mathbb{E}_L\Big[R_{2,n}(T_0)\frac{P_1(T_0, T_1)}{L(T_0)}\Big]. \tag{3.34}$$

Założenie Z2. Załóżmy, że istnieje różniczkowalna funkcja $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że dla każdego $t \in [0, T_1]$:

$$\frac{P_1(t, T_1)}{L(t)} = G(R_{1,n}(t)).$$

Dla uproszczenia notacji przyjmijmy, że $X_t := R_{2,n}(t)$ oraz $Y_t := R_{1,n}(t)$. Wykorzystując założenie Z2 równość (3.34) może być zapisana następująco:

$$V(0) = L(0)\mathbb{E}_L[X_{T_0}G(Y_{T_0})]. \tag{3.35}$$

Nie rozważamy tutaj problemu istnienia funkcji G. Założenie Z2 pochodzi od Hagana [24] z pracy dotyczącej wyceny kontraktów CMS. Pomysł wprowadzenia funkcji G ma swoje korzenie w teorii wyceny obligacji. Wprowadzenie funkcji G oraz różne jej postacie omówione są dokładnie w cytowanej wyżej pracy Hagana [24].

Definicja 3.15. Niech $\kappa(t)$ będzie kursem wymiany, w chwili t, waluty „2" na walutę „1". Niech $T_0 < T_1 < .. < T_n$ będzie ustalonym ciągiem dat oraz niech $F_{\kappa,n}(t)$ będzie zdefiniowane następująco:

$$F_{\kappa,n}(t) := \kappa(t)\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta(T_{i-1},T_i)P_2(t,T_i)}{\sum_{i=1}^{n}\delta(T_{i-1},T_i)P_1(t,T_i)}. \tag{3.36}$$

Uwaga 3.16. Proces $F_{\kappa,n}(t)$ jest martyngałem względem miary $\mathbb{P}_L$. Istotnie, licznik (3.36) reprezentuje wartość portfela obligacji zerokuponowych z rynku waluty „2" (czyli licznik reprezentuje osiągalną wypłatę), a mianownik to numeraire $L(t)$. Dzięki tej obserwacji zasadne jest przyjęcie założenia Z3 poniżej. Proces $F_{\kappa,n}(t)$ jest nazywany na rynku finansowym kontraktem ARF (Average Rate Forward).

Założenie Z3. Załóżmy, że $F_{\kappa,n}(t)$ jest $\mathbb{F}$- adaptowanym procesem o dynamice zadanej równaniem:

$$dF_{\kappa,n}(t) = \sigma_\kappa F_{\kappa,n}(t)dU_t, \tag{3.37}$$

gdzie U_t jest ruchem Browna względem miary $\mathbb{P}$, a σ_κ jest dodatnią stałą.

Założenie Z4. Niech $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $X_t^* := e^{-\mu t}X_t$, dla każdego $t \geq 0$. Załóżmy, że procesy X_t^*,Y_t, przy mierze $\mathbb{P}_L$, spełniają założenia modelu I oraz niech:

$$d\langle W, U\rangle_t = \psi dt, \tag{3.38}$$

gdzie $\psi \in (-1, 1)$.

Fakt 3.17. Jeśli spełnione są założenia Z3 oraz Z4 to μ jest wyznaczone jednoznacznie i równe:

$$\mu = -\psi\sigma_\kappa\sigma_X. \tag{3.39}$$

Dowód tego faktu można znaleźć w monografii Brigo, Mercurio [8] (fakt 2.3.1 oraz twierdzenie 2.9.2).

Teraz jesteśmy gotowi do obliczenia wartości $V(0)$.

Twierdzenie 3.18. Załóżmy, że spełnione są założenia Z2, Z3, Z4. Niech $a = \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}$. *Jeżeli* G *jest taką funkcją, że* $\mathbb{E}_L(G(Y_{T_0})Y_{T_0}^a) < \infty$, *to wartość* $V(0)$ *zadana formułą (3.35) wyraża się wzorem:*

$$V(0) = L(0)X_0 e^{T_0(\mu - \frac{\sigma_Y^2 a^2}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} G\Big(Y_0 e^{-\frac{\sigma_Y^2}{2}T_0 + \sigma_Y z}\Big) e^{a\sigma_Y z - \frac{z^2}{2T_0}} dz. \tag{3.40}$$

Dowód. Z równości (3.35) oraz założenia Z4 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V(0) &= L(0)\mathbb{E}_L[X_{T_0}G(Y_{T_0})] = L(0)e^{\mu T_0}\mathbb{E}_L[X_{T_0}^* G(Y_{T_0})] \\ &= L(0)e^{\mu T_0}\mathbb{E}_L\Big(G(Y_{T_0})\mathbb{E}[X_{T_0}^*|Y_{T_0}]\Big) \\ &= L(0)e^{\mu T_0}\mathbb{E}_L\Big(G(Y_{T_0})Y_{T_0}^a \frac{X_0}{Y_0^a} e^{T_0\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}\Big) \\ &= L(0)\frac{X_0}{Y_0^a} e^{T_0\left(\mu + \frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)\right)} \mathbb{E}_L(G(Y_{T_0})Y_{T_0}^a). \end{aligned} \tag{3.41}$$

W przedostatniej równości wykorzystaliśmy twierdzenie 3.10 zastosowane do procesów X_t^* oraz Y_t. Wartość oczekiwana w ostatnim wyrażeniu istnieje z założenia. Po wykorzystaniu uwagi 3.1 otrzymamy:

$$\mathbb{E}_L(G(Y_{T_0})Y_{T_0}^a) = Y_0^a e^{-a\frac{\sigma_Y^2}{2}T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} G(Y_0 e^{-\frac{\sigma_Y^2}{2}T_0 + \sigma_Y z}) e^{a\sigma_Y z - \frac{z^2}{2T_0}} dz. \tag{3.42}$$

Po wstawieniu (3.42) do (3.41) otrzymamy tezę twierdzenia. □

Uwaga 3.19. We wspomnianej wyżej pracy dotyczącej wyceny kontraktów CMS, Hagan proponuje zastosowanie liniowego przybliżenia funkcji G wyrazami z rozwinięcia tej funkcji w szereg Taylora. Do tego potrzebna jest różniczkowalność funkcji G. Stosując to samo rozumowanie co Hagan, ale do wyceny kontraktu QCMS, z (3.41) otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X^*_{T_0}G(Y_{T_0}) &\approx \frac{X_0}{Y_0^a}e^{T_0\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}\mathbb{E}\Big([G(Y_0)+G'(Y_0)(Y_{T_0}-Y_0)]Y^a_{T_0}\Big)\\
&= \frac{X_0}{Y_0^a}e^{T_0\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}[(G(Y_0)-G'(Y_0)Y_0)\mathbb{E}Y^a_{T_0}+G'(Y_0)\mathbb{E}Y^{a+1}_{T_0}]\\
&= \frac{X_0}{Y_0^a}e^{T_0\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)}[(G(Y_0)-G'(Y_0)Y_0)Y_0^a e^{\frac{a^2-a}{2}t\sigma_Y^2}\\
&+ G'(Y_0)Y_0^{a+1}e^{\frac{a^2+a}{2}T_0\sigma_Y^2}]\\
&= X_0(G(Y_0)-G'(Y_0)Y_0)+X_0Y_0G'(Y_0)e^{aT_0\sigma_Y^2}\\
&= X_0G(Y_0)+X_0Y_0G'(Y_0)[e^{T_0\rho\sigma_X\sigma_Y}-1]. \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

Po wstawieniu (3.43) do wzoru (3.35) otrzymamy:

$$
V(0)=L(0)e^{\mu T_0}\mathbb{E}[X^*_{T_0}G(Y_{T_0})] \approx
$$

$$
L(0)e^{\mu T_0}\Big[X_0G(Y_0)+X_0Y_0G'(Y_0)[e^{T_0\rho\sigma_X\sigma_Y}-1]\Big]. \qquad (3.44)
$$

Uwaga 3.20. Dla jednowalutowego kontraktu CMS, w modelu lognormalnym ze stałym współczynnikiem zmienności, gdy Y_t jest stopą swapową, Hagan [24] wyprowadził przybliżony wzór na cenę tego kontraktu postaci:

$$
\mathbb{E}[Y_{T_0}G(Y_{T_0})] \approx L(0)\Big[Y_0G(Y_0)+Y_0^2G'(Y_0)[e^{T_0\sigma_Y^2}-1]\Big]. \qquad (3.45)
$$

W modelu I założyliśmy, że $\rho \in (-1,1)$. Gdyby jednak rozważć model I z $W=Z$, czyli $X^*=Y$, $\sigma_X=\sigma_Y$, $\sigma_\kappa=0$ oraz $\rho=1$ to kontrakt QCMS staje się jednowalutowym kontraktem CMS (definicjia 2.19 i uwaga 2.20), a wzory (3.44) i (3.45), mimo różnego ρ, mają tę samą postać.

Wniosek 3.21. Wzór (3.44) z uwagi 3.19 jest rozszerzeniem wyniku Hagana [24] na przypadek wyceny kontraktu QCMS.

3.3 Wypłata opcyjna w modelu lognormalnym ze stałą zmiennością

W tym podrozdziale wyprowadzimy wzór na postać warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[f(X_t)|Y_t]$ dla funkcji $f(x)=(x-K)^+$ w modelu lognormalnym ze stałym współczynnikiem zmienności.

Twierdzenie 3.22. W modelu I, dla $K > 0$, prawdziwa jest równość $\mathbb{P}$ - prawie na pewno:

$$\mathbb{E}[(X_t - K)^+|Y_t] = Bl(K, h(Y_t, t), \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X), \tag{3.46}$$

gdzie:

$$h(Y_t, t) = \mathbb{E}[X_t|Y_t]$$

oraz:

$$\begin{aligned} Bl(K, F, v) &= F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \\ d_1 &= \frac{\ln \frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v}, \\ d_2 &= d_1 - v, \end{aligned}$$

a Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. W rezultacie $Bl(K, h(Y_t, t), \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X)$ jest ciągłą modyfikacją procesu stochastycznego $\mathcal{Z}_t(f)$ dla $f(x) = (x - K)^+$.

Dowód. Udowodnimy, że dla dowolnego $B \in \sigma(Y_t)$ spełniona jest równość:

$$\int_B (X_t - K)^+ d\mathbb{P} = \int_B Bl(K, h(Y_t, t), \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X) d\mathbb{P}. \tag{3.47}$$

Będziemy postępować podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.10. Istnieje zbiór borelowski $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $B = \{Z_t \in D\}$. Przekształcimy lewą stronę równości (3.47):

$$\int_B (X_t - K)^+ d\mathbb{P} =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z)(X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2 + \sigma_X w} - K)^+ f_{Z_t}(z) f_{W_t|Z_t}(w, z) dw dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) f_{Z_t}(z)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}(X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2 + \sigma_X w} - K)^+ f_{W_t|Z_t}(w, z) dw\Big] dz. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Obliczymy całkę w nawiasie kwadratowym wyrażenia (3.48):

$$\int_{-\infty}^{\infty}(X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2 + \sigma_X w} - K)^+ f_{W_t|Z_t}(w, z) dw$$

$$= X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\sigma_X w} - K^*)^+ f_{W_t|Z_t}(w,z)dw,$$

gdzie podstawiliśmy $K^* = (X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2})^{-1} K$. Dalej z równości (3.29) oraz po podstawieniu $y = \sigma_X w$ otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (e^{\sigma_X w} - K^*)^+ f_{W_t|Z_t}(w,z)dw &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\sigma_X w} - K^*)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(w-\rho z)^2}{2t(1-\rho^2)}} dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{y} - K^*)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho\sigma_X z)^2}{2t\sigma_X^2(1-\rho^2)}} dy \\
&= e^{\rho\sigma_X z + \frac{t}{2}\sigma_X^2(1-\rho^2)} \Phi(d_1(z)) - K^*\Phi(d_2(z)),
\end{aligned}$$

gdzie:

$$d_1(z) = \frac{\rho\sigma_X z - \ln K^* + t(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X}$$

oraz:

$$d_2(z) = d_1(z) - \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X.$$

W rezultacie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2 + \sigma_X w} - K)^+ f_{W_t|Z_t}(w,z)dw$$

$$\begin{aligned}
&= X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2} [e^{\rho\sigma_X z + \frac{t}{2}\sigma_X^2(1-\rho^2)} \Phi(d_1(z)) - K^*\Phi(d_2(z))] \\
&= X_0 e^{\rho\sigma_X z - \frac{t}{2}\sigma_X^2\rho^2} \Phi(d_1(z)) - K\Phi(d_2(z)). \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

Z twierdzenia 3.10 mamy prawie na pewno:

$$\mathbb{E}[X_t|Y_t] = h(Y_t,t) = X_0 e^{-\frac{1}{2}t\sigma_X^2\rho^2 + Z_t\rho\sigma_X}. \qquad (3.50)$$

Zdefiniujmy funkcję:

$$\tilde{h}(z,t) := X_0 e^{-\frac{1}{2}t\sigma_X^2\rho^2 + z\rho\sigma_X}.$$

Z definicji $\tilde{h}$ wynika, że:

$$h(Y_t,t) = \tilde{h}(Z_t,t). \qquad (3.51)$$

Po wstawieniu (3.50) oraz (3.51) do (3.49) otrzymamy:

$$X_0 e^{\rho\sigma_X z - \frac{t}{2}\sigma_X^2\rho^2} \Phi(d_1(z)) - K\Phi(d_2(z)) = \tilde{h}(z,t)\Phi(d_1(z)) - K\Phi(d_2(z)),$$

a po wstawieniu $K^* = (X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2})^{-1} K$ do wzorów na d_1 oraz d_2 uzyskamy:

$$\begin{aligned} d_1(z) &= \frac{\rho\sigma_X z - \ln[(X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2})^{-1}K] + t(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X} \\ &= \frac{\ln X_0 + \rho\sigma_X z - \frac{1}{2}t\rho^2\sigma_X^2 - \ln K + \frac{1}{2}t(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X} \\ &= \frac{\ln\frac{\tilde{h}(z,t)}{K} + \frac{1}{2}t(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X} \end{aligned} \tag{3.52}$$

oraz

$$d_2(z) = d_1(z) - \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X. \tag{3.53}$$

W rezultacie, po wstawieniu do równości (3.48) obliczoną całkę z nawiasu kwadratowego otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_B (X_t - K)^+ d\mathbb{P} &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) f_{Z_t}(z) \Big[\int_{-\infty}^{\infty} (X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2 + \sigma_X w} - K)^+ f_{W_t|Z_t}(w,z)dw \Big] dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) f_{Z_t}(z) [\tilde{h}(z,t)\Phi(d_1(z)) - K\Phi(d_2(z))] dz \\ &= \int_B [\tilde{h}(Z_t,t)\Phi(d_1(Z_t)) - K\Phi(d_2(Z_t))] d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Z (3.51), (3.52) oraz (3.53) otrzymamy:

$$d_1(Z_t) = \frac{\ln\frac{h(Y_t,t)}{K} + \frac{1}{2}t(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X}$$

oraz:

$$d_2(Z_t) = d_1(Z_t) - \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X,$$

a stąd dalej:

$$\begin{aligned} \int_B (X_t - K)^+ d\mathbb{P} &= \int_B [h(Y_t,t)\Phi(d_1(Z_t)) - K\Phi(d_2(Z_t))] d\mathbb{P} \\ &= \int_B Bl(K, h(Y_t,t), \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

□

3.4 Wycena opcji na stopę procentową

Problem wyceny instrumentu pochodnego o złożonej funkcji wypłaty pojawia się w procesie wyceny opcji na stopę procentową z przesuniętym terminem wypłaty. Przesunięcie terminu wypłaty powoduje uzależnienie funkcji wypłaty od dwóch różnych, ale skorelowanych, stóp procentowych. Jest to analogiczny problem do tego, który analizuje Hagan [25] przy wycenie opcji binarnych na stopę procentową, jak również Pelsser [45] przy wycenie kontraktów wymiany stopy procentowej z niestandardowym terminem wypłaty. Znajomość postaci warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[f(X_t)|Y_t]$, dla funkcji $f(x) = (x-K)^+$ znacznie ułatwia wycenę opcji caplet w modelu lognormalnym ze stałym współczynnikiem zmienności.

Wartość wypłaty Π (definicja 2.23) jest ustalana w chwili t_f i wypłacana w chwili t_p. Z faktu 2.10 cena $V_\Pi(0)$ w chwili 0 wypłaty Π jest równa:

$$V_\Pi(0) = P(0,t_f)\delta(t_s,t_p)\mathbb{E}_\mathbb{Q}\Big(P(t_f,t_p)[F(t_f,t_s,t_m)-K]^+\Big).$$

Po zmianie miary $\mathbb{Q}$ na miarę t_m - forward, czyli miarę $\mathbb{P}^{t_m}$ (wprowadzimy oznaczenie $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{t_m}} = \mathbb{E}^{t_m}$) generowaną przez numeraire $P(\cdot,t_m)$, cena w chwili 0 wypłaty opcyjnej Π jest równa:

$$\begin{aligned} V_\Pi(0) &= P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\mathbb{E}^{t_m}\Big([F(t_f,t_s,t_m)-K]^+\frac{P(t_f,t_p)}{P(t_f,t_m)}\Big) \\ &= P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\Big[\mathbb{E}^{t_m}[F(t_f,t_s,t_m)-K]^+ \\ &+ \delta(t_p,t_m)\mathbb{E}^{t_m}\Big([F(t_f,t_s,t_m)-K]^+\frac{P(t_f,t_p)-P(t_f,t_m)}{\delta(t_p,t_m)P(t_f,t_m)}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Mamy z założenia $t_p \leq t_m$, więc:

$$\begin{aligned} V_\Pi(0) &= P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\Big[\mathbb{E}^{t_m}[F(t_f,t_s,t_m)-K]^+ \\ &+ \delta(t_p,t_m)\mathbb{E}^{t_m}\Big([F(t_f,t_s,t_m)-K]^+F(t_f,t_p,t_m)\Big)\Big] \\ &= P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\mathbb{E}^{t_m}[F(t_f,t_s,t_m)-K]^+ \\ &+ P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\delta(t_p,t_m)\mathbb{E}^{t_m}\Big([F(t_f,t_s,t_m)-K]^+F(t_f,t_p,t_m)\Big). \end{aligned}$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$I = P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\mathbb{E}^{t_m}[F(t_f,t_s,t_m)-K]^+, \tag{3.55}$$

$$II = P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\delta(t_p,t_m)\mathbb{E}^{t_m}\Big([F(t_f,t_s,t_m)-K]^+F(t_f,t_p,t_m)\Big). \tag{3.56}$$

W konsekwencji przyjętych oznaczeń:

$$V_{\Pi}(0) = I + II.$$

Aby zatem wycenić opcję caplet z definicji 2.23 musimy obliczyć wyrażenia I oraz II. Pokażemy, jak zrobić to w modelu lognormalnym. W tym celu wykorzystamy twierdzenie 3.22. Dla uproszczenia notacji przyjmijmy dla $0 \leq t \leq t_m$, że:

$$F_s(t) := F(t,t_s,t_m),$$
$$F_p(t) := F(t,t_p,t_m).$$

Zauważmy, że z definicji kursu forward (2.21), obie stopy F_s, F_p są martyngałami względem miary $\mathbb{P}^{t_m}$. W dalszej kolejności założymy, że stopy F_s, F_p mają względem miary $\mathbb{P}^{t_m}$ rozkład lognormalny.

Założenie 3.23. Załóżmy, że stopy forward F_s, F_p mają rozkład lognormalny zadany dynamikami:

$$dF_s(t) = \sigma_s F_s(t) dW_t,$$
$$dF_p(t) = \sigma_p F_p(t) dZ_t,$$

gdzie W, Z są skorelowanymi ruchami Browna względem miary $\mathbb{P}^{t_m}$ oraz dla $t \geq 0$ $\langle W, Z\rangle_t = \rho t$. Stałe σ_s, σ_p są dodatnie, a $\rho \in (-1,1)$. $F_s(0), F_p(0)$ są również dodatnimi stałymi.

Twierdzenie 3.24. Jeśli spełnione jest założenie 3.23 wyrażenia (3.55) oraz (3.56) równe są odpowiednio:

$$I = P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)Bl(K,F_s(0),\sigma_s\sqrt{t_f}),$$
$$II = P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\delta(t_p,t_m)H(F_p(0),F_s(0),K,t_f),$$

gdzie:

$$H(F,S,K,t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t\sigma_p^2}{2}+\sigma_p w-\frac{w^2}{2t}} Bl\Big(K, Se^{-\frac{t\sigma_s^2\rho^2}{2}+\sigma_s\rho w}, \sigma_s\sqrt{(1-\rho^2)t}\Big)dw,$$

$$
\begin{aligned}
Bl(K,F,v) &= F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2),\\
d_1 &= \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v},\\
d_2 &= d_1 - v,
\end{aligned}
$$

a Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Dowód. Na mocy założenia 3.23 stopy F_s, F_p spełniają założenia modelu I. Z równości (3.55) oraz uwagi 3.1 otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
I &= P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\mathbb{E}^{t_m}[F_s(t_f) - K]^+\\
&= P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\mathbb{E}^{t_m}\left[F_s(0)e^{-\frac{\sigma_s^2 t_f}{2}+\sigma_s W_{t_f}} - K\right]^+\\
&= P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)Bl(K,F_s(0),\sigma_s\sqrt{t_f}).
\end{aligned}
$$

Dalej obliczymy II. W tym celu wykorzystamy twierdzenie 3.22. Podstawiając odpowiednio $X = F_s$ oraz $Y = F_p$, bezpośrednio z równości (3.46) otrzymujemy:

$$
\mathbb{E}^{t_m}[(F_s(t_f) - K)^+|F_p(t)] = Bl(K, h(F_p(t_f),t_f), \sigma_s\sqrt{(1-\rho^2)t_f}), \tag{3.57}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
h(y,t) &= y^a\frac{F_s(0)}{(F_p(0))^a}e^{\frac{t}{2}\sigma_p^2[a-a^2]},\\
a &= \frac{\rho\sigma_s}{\sigma_p},\\
Bl(K,F,v) &= F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2),\\
d_1 &= \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v},\\
d_2 &= d_1 - v.
\end{aligned}
$$

W rezultacie z równości (3.57) mamy:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{t_m}\Big[(F_s(t_f) - K)^+F_p(t_f)\Big] &= \mathbb{E}^{t_m}\Big(F_p(t_f)\mathbb{E}^{t_m}\Big[(F_s(t_f) - K)^+|F_p(t_f)\Big]\Big)\\
&= \mathbb{E}^{t_m}F_p(t_f)Bl\Big(K, h(F_p(t_f),t_f), \sigma_s\sqrt{(1-\rho^2)t_f}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_p(0)}{\sqrt{2\pi t_f}}e^{-\frac{t_f\sigma_p^2}{2}+\sigma_p w - \frac{w^2}{2t_f}}Bl\Big(K, F_s(0)e^{-\frac{t_f\sigma_s^2\rho^2}{2}+\sigma_s\rho w}, \sigma_s\sqrt{(1-\rho^2)t_f}\Big)dw.
$$

Wstawiając ostatni wynik do równości (3.56) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} II &= P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\delta(t_p,t_m)\mathbb{E}^{t_m}\Big[(F_s(t_f)-K)^+F_p(t_f)\Big] \\ &= P(0,t_m)\delta(t_s,t_p)\delta(t_p,t_m)H(F_p(0),F_s(0),K,t_f), \end{aligned}$$

gdzie:

$$H(F,S,K,t)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{t\sigma_p^2}{2}+\sigma_p w-\frac{w^2}{2t}}Bl\Big(K,Se^{-\frac{t\sigma_s^2\rho^2}{2}+\sigma_s\rho w},\sigma_s\sqrt{(1-\rho^2)t}\Big)dw.$$

□

Uwaga 3.25. Jeżeli $t_p=t_m$, to z twierdzenia 3.24 wynika, że:

$$\begin{aligned} I &= P(0,t_m)\delta(t_s,t_m)Bl(K,F_s(0),\sigma_s\sqrt{t_f}), \\ II &= P(0,t_m)\delta(t_s,t_m)\delta(t_m,t_m)H(F_m(0),F_s(0),K,t_f)=0. \end{aligned}$$

W takim razie:

$$V_{\Pi}(0)=P(0,t_m)\delta(t_s,t_m)Bl(K,F_s(0),\sigma_s\sqrt{t_f}).$$

Caplet, dla którego moment wypłaty t_p pokrywa się z momentem zakończenia okresu odsetkowego t_m, jest standardowym, płynnym instrumentem na rynku opcji na stopę procentową, a ostatni wzór jest powszechnie używany na rynku do wyceny tych instrumentów (Musiela-Rutkowski [38], Brigo-Mercurio [8], Rebonato [50], Gupta [22]). Przesunięcie momentu wypłaty powoduje, że $II>0$. Wielkość II jest nazywana potocznie convexity adjustment.

3.5 Wycena opcji na spread

W tym podrozdziale wyprowadzimy wzór na postać warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[(p(t)X_t-q(t)Y_t-K)^+|Y_t]$ w modelu lognormalnym, dla dodatnich, mierzalnych funkcji czasu p,q. Wyprowadzona formuła posłuży nam następnie do wyceny opcji na spread. Przy okazji zauważmy, że sformułowane twierdzenie 3.26 jest uzupełnieniem twierdzeń 3.10 oraz 3.22. Twierdzenie 3.10 obejmuje przypadek wypłaty $(p(t)x-q(t)y-K)^+$ dla $p\equiv 1$, $q\equiv 0$ oraz $K=0$. Twierdzenie 3.22 obejmuje przypadek $p\equiv 1$, $q\equiv 0$ oraz $K>0$. Twierdzenie 3.26 obejmuje przypadki $p>0$, $q>0$ oraz $K>0$.

Twierdzenie 3.26. Niech $K > 0$. W modelu I, dla funkcji mierzalnych $p : [0, \infty) \to (0, \infty)$, $q : [0, \infty) \to (0, \infty)$ prawdziwa jest równość $\mathbb{P}$ - prawie na pewno:

$$\mathbb{E}[(p(t)X_t - q(t)Y_t - K)^+ | Y_t] = Bl(K + q(t)Y_t, p(t)h(Y_t, t), \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X), \tag{3.58}$$

gdzie:

$$h(Y_t, t) = \mathbb{E}[X_t | Y_t]$$

oraz:

$$\begin{aligned} Bl(K, F, v) &= F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \\ d_1 &= \frac{\ln \frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v}, \\ d_2 &= d_1 - v, \end{aligned}$$

a Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. W rezultacie $Bl(K + q(t)Y_t, p(t)h(Y_t, t), \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X)$ jest ciągłą modyfikacją procesu stochastycznego $\mathcal{Z}_t(f)$ dla funkcji $f(x, y) = (p(t)x - q(t)y - K)^+$.

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzeń 3.10 oraz 3.22, udowodnimy, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \in \sigma(Y_t)$ prawdziwa jest równość:

$$\int_B (p(t)X_t - q(t)Y_t - K)^+ d\mathbb{P} = \int_B Bl(K + q(t)Y_t, p(t)h(Y_t, t), \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X) d\mathbb{P}. \tag{3.59}$$

Istnieje zbiór borelowski D taki, że: $B = \{Z_t \in D\}$. Korzystając z uwagi 3.1, dotyczącej postaci procesów X_t, Y_t zadanych modelem I, przekształcimy lewą stronę równości (3.59):

$$\int_B (p(t)X_t - q(t)Y_t - K)^+ d\mathbb{P}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) H_t(w, z) f_{Z_t}(z) f_{W_t|Z_t}(w, z) dw dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) f_{Z_t}(z) \Big[\int_{-\infty}^{\infty} H_t(w, z) f_{W_t|Z_t}(w, z) dw \Big] dz, \end{aligned} \tag{3.60}$$

gdzie:

$$H_t(w,z) = \Big(p(t)X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2 + \sigma_X w} - q(t)Y_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_Y^2 + \sigma_Y z} - K\Big)^+.$$

Oznaczmy $K(z) = q(t)Y_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_Y^2 + \sigma_Y z} + K$. W szczególności dla $z = Z_t$ otrzymamy:

$$K(Z_t) = q(t)Y_t + K.$$

Obliczymy całkę w nawiasie kwadratowym wyrażenia (3.60):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(p(t)X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2 + \sigma_X w} - K(z)\Big)^+ f_{W_t|Z_t}(w,z)dw$$

$$= p(t)X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{\sigma_X w} - K^*(z)\Big)^+ f_{W_t|Z_t}(w,z)dw,$$

gdzie w ostatniej równości podstawiliśmy $K^*(z) = (p(t)X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2})^{-1} K(z)$. Dalej, dokonując podstawienia $y = \sigma_X w$, otrzymamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{\sigma_X w} - K^*(z)\Big)^+ f_{W_t|Z_t}(w,z)dw$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{\sigma_X w} - K^*(z)\Big)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(w-\rho z)^2}{2t(1-\rho^2)}} dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{y} - K^*(z)\Big)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho\sigma_X z)^2}{2t\sigma_X^2(1-\rho^2)}} dy \\
&= e^{\rho\sigma_X z + \frac{t}{2}\sigma_X^2(1-\rho^2)}\Phi(d_1) - K^*(z)\Phi(d_2),
\end{aligned}$$

gdzie:

$$d_1(z) = \frac{\rho\sigma_X z - \ln K^*(z) + t(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X}, \tag{3.61}$$

$$d_2(z) = d_1(z) - \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X. \tag{3.62}$$

W rezultacie, z ostatniego rachunku, otrzymujemy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (p(t)X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2 + \sigma_X w} - K(z))^+ f_{W_t|Z_t}(w,z)dw$$

$$= p(t)X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2}[e^{\rho\sigma_X z + \frac{t}{2}\sigma_X^2(1-\rho^2)}\Phi(d_1(z)) - K^*(z)\Phi(d_2(z))]$$
$$= p(t)X_0 e^{\rho\sigma_X z - \frac{t}{2}\sigma_X^2\rho^2}\Phi(d_1(z)) - K(z)\Phi(d_2(z)).$$

Z twierdzenia 3.10 mamy, dla $a = \frac{\sigma_X \rho}{\sigma_Y}$, $\mathbb{P}$- prawie na pewno:

$$h(Y_t, t) = Y_t^a \frac{X_0}{Y_0^a} e^{\frac{\sigma_Y^2}{2}t(a-a^2)} = X_0 e^{-\frac{1}{2}t\sigma_X^2\rho^2 + Z_t\rho\sigma_X}.$$

Tak, jak w dowodzie twierdzenia 3.22 definiujemy funkcję:

$$\tilde{h}(z, t) := X_0 e^{-\frac{1}{2}t\sigma_X^2\rho^2 + z\rho\sigma_X}.$$

Z definicji $\tilde{h}$ otrzymujemy:

$$h(Y_t, t) = \tilde{h}(Z_t, t).$$

Ponadto:

$$p(t)X_0 e^{\rho\sigma_X z - \frac{t}{2}\sigma_X^2\rho^2}\Phi(d_1(z)) - K(z)\Phi(d_2(z))$$
$$= p(t)\tilde{h}(z, t)\Phi(d_1(z)) - K(z)\Phi(d_2(z)).$$

Po wstawieniu do (3.60) obliczonej całki z nawiasu kwadratowego otrzymamy:

$$\int_B (p(t)X_t - K(z))^+ d\mathbb{P} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(z) f_{Z_t}(z)[p(t)\tilde{h}(z, t)\Phi(d_1(z)) - K(z)\Phi(d_2(z))]dz$$
$$= \int_B [p(t)\tilde{h}(Z_t, t)\Phi(d_1(Z_t)) - K(Z_t)\Phi(d_2(Z_t))]d\mathbb{P}.$$

Po wstawieniu do (3.61) oraz (3.62) $K^*(z) = (p(t)X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2})^{-1}K(z)$ uzyskamy:

$$d_1(z) = \frac{\rho\sigma_X z - \ln[(p(t)X_0 e^{-\frac{t}{2}\sigma_X^2})^{-1}K(z)] + t(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X}$$
$$= \frac{\ln(p(t)X_0) + \rho\sigma_X z - \frac{1}{2}t\rho^2\sigma_X^2 - \ln K(z) + \frac{1}{2}t(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X}$$
$$= \frac{\ln\frac{p(t)\tilde{h}(z,t)}{K(z)} + \frac{1}{2}t(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X}$$

oraz

$$d_2(z) = d_1(z) - \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X.$$

Ponieważ $\tilde{h}(Z_t, t) = h(Y_t, t)$ p.n., więc:

$$d_1(Z_t) = \frac{\ln \frac{p(t)h(Y_t,t)}{K(Z_t)} + \frac{1}{2}t(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X}$$

oraz

$$d_2(Z_t) = d_1(Z_t) - \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X$$

i stąd

$$\int_B (p(t)X_t - K(Z_t))^+ d\mathbb{P} = \int_B [p(t)h(Y_t, t)\Phi(d_1(Z_t)) - K(Z_t)\Phi(d_2(Z_t))] d\mathbb{P}$$

$$= \int_B Bl(K(Z_t), p(t)h(Y_t, t), \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X) d\mathbb{P}.$$

Ponieważ $K(Z_t) = q(t)Y_t + K$, a zbiór B został wybrany dowolnie, dowód został zakończony. □

Poniżej porównamy wyniki wyceny opcji na spread uzyskane dzięki zastosowaniu twierdzenia 3.26 z wynikami zaproponowanymi przez Brigo-Mercurio [8], fakt 14.5.1.

Definicja 3.27. Dla ustalonych liczb $a > 0, b < 0$, opcją na spread dwóch zadanych procesów S_t, Q_t nazywamy kontrakt finansowy o funkcji wypłaty U_t w chwili t równej:

$$U_t = (aS_t + bQ_t - K)^+. \tag{3.63}$$

Założenie 3.28. Załóżmy, że procesy S_t, Q_t mają rozkłady zadane dynamikami:

$$dS_t = S_t[(r - q_1)dt + \sigma_1 dW_t],$$
$$dQ_t = Q_t[(r - q_2)dt + \sigma_2 dV_t],$$

gdzie $S_0 = s_0 > 0$, $Q_0 = q_0 > 0$, W, V są ruchami Browna, $d\langle W, V\rangle_t = \rho dt$ dla $\rho \in (-1, 1)$, zaś stałe q_1, q_2, r są dodatnie.

Brigo, Mercurio wyprowadzają wzór na cenę w chwili 0 wypłaty U w chwili

T: $U_T = (aS_T + bQ_T - K)^+$, dla $a > 0, b < 0$. Cena w chwili 0 wypłaty U_T otrzymaną przez Brigo, Mercurio [8] jest równa:

$$\Pi_U(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} f(v)dv, \tag{3.64}$$

gdzie:

$$f(v) = A(v)\Phi_1(v) - h^*(v)e^{-rT}\Phi_2(v)$$

oraz

$$\begin{aligned}
A(v) &= as_0 e^{-q_1 T - \frac{1}{2}\rho^2\sigma_1^2 T + \rho\sigma_1\sqrt{T}v}, \\
\Phi_1(v) &= \Phi\Big(\frac{\ln\frac{as_0}{h^*(v)} + [\mu_1 + (\frac{1}{2} - \rho^2)\sigma_1^2]T + \rho\sigma_1\sqrt{T}v}{\sigma_1\sqrt{T(1-\rho^2)}}\Big), \\
\Phi_2(v) &= \Phi\Big(\frac{\ln\frac{as_0}{h^*(v)} + [\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2]T + \rho\sigma_1\sqrt{T}v}{\sigma_1\sqrt{T(1-\rho^2)}}\Big), \\
h^*(v) &= K - bq_0 e^{(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)T + \sigma_2\sqrt{T}}, \\
\mu_1 &= r - q_1, \\
\mu_2 &= r - q_2.
\end{aligned}$$

W tym samym modelu, wycenę wypłaty U_T można uzyskać wykorzystując twierdzenie 3.26. Z założenia 3.28 mamy:

$$\begin{aligned}
\Pi_U(0) &= P(0,T)\mathbb{E}(aS_T + bQ_T - K)^+ \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}(ae^{(r-q_1)T}S_T^* - (-b)e^{(r-q_2)T}Q_T^* - K)^+ \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\mathbb{E}[(ae^{(r-q_1)T}S_T^* - (-b)e^{(r-q_2)T}Q_T^* - K)^+ | Q_T^*],
\end{aligned}$$

gdzie dla $t \geq 0$, $S_t^* = S_t e^{-(r-q_1)t}$, $Q_t^* = Q_t e^{-(r-q_2)t}$ oraz:

$$\begin{aligned}
dS_t^* &= S_t^*\sigma_1 dW_t, \\
dQ_t^* &= Q_t^*\sigma_2 dV_t.
\end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 3.26 dla $X = S^*$, $Y = Q^*$, $p(T) = ae^{(r-q_1)T}$, $q(T) = (-b)e^{(r-q_2)T}$ oraz $\mu_1 = r - q_1$, $\mu_2 = r - q_2$ otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\Pi_U(0) &= e^{-rT}\mathbb{E}\Big(Bl(K - be^{\mu_2 T}Q_T^*, ae^{\mu_1 T}h(Q_T^*, T), \sqrt{T(1-\rho^2)}\sigma_1)\Big) \\
&= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{v^2}{2T}} G(v)dv. \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

gdzie:

$$G(v) = Bl(K - bq_0 e^{\mu_2 T - \frac{\sigma_2^2 T}{2} + \sigma_2 v}, ae^{\mu_1 T} h(q_0 e^{-\frac{\sigma_2^2 T}{2} + \sigma_2 v - \mu_2 T}, T), \sqrt{T(1-\rho^2)}\sigma_1)$$

oraz

$$h(q,T) = q^\alpha \frac{s_0}{q_0^\alpha} e^{\frac{\sigma_2^2}{2} t(\alpha - \alpha^2)},$$
$$\alpha = \frac{\sigma_1 \rho}{\sigma_2},$$

$$Bl(K,F,v) = F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2),$$
$$d_1 = \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v},$$
$$d_2 = d_1 - v,$$

a Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Po podstawieniu $w = \frac{v}{\sqrt{T}}$ w równości (3.65) otrzymamy:

$$\Pi_U(0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} G(w\sqrt{T}) dw,$$

Uwaga 3.29. Aby stwierdzić, że dwa otrzymane wyniki wyceny wypłaty U są takie same, należy pokazać, że dla każdego $v \in \mathbb{R}$:

$$e^{-rT} G(v\sqrt{T}) = f(v).$$

W istocie, z definicji funkcji G:

$$e^{-rT} G(v\sqrt{T}) =$$

$$= e^{-rT} Bl(K - bq_0 e^{\mu_2 T - \frac{\sigma_2^2 T}{2} + \sigma_2 v\sqrt{T}}, ae^{\mu_1 T} h(q_0 e^{-\frac{\sigma_2^2 T}{2} + \sigma_2 v\sqrt{T} - \mu_2 T}, T), \sqrt{T(1-\rho^2)}\sigma_1)$$
$$= e^{-rT}\Big[ae^{\mu_1 T} h(q_0 e^{-\frac{\sigma_2^2 T}{2} + \sigma_2 v\sqrt{T} - \mu_2 T}, T)\Phi(d_1) - (K - bq_0 e^{\mu_2 T - \frac{\sigma_2^2 T}{2} + \sigma_2 v\sqrt{T}})\Phi(d_2)\Big]$$
$$= e^{-rT}\Big[ae^{\mu_1 T}(q_0 e^{-\frac{\sigma_2^2 T}{2} + \sigma_2 v\sqrt{T} - \mu_2 T})^\alpha \frac{s_0}{q_0^\alpha} e^{\frac{\sigma_2^2}{2} t(\alpha-\alpha^2)}\Phi(d_1)$$
$$- (K - bq_0 e^{\mu_2 T - \frac{\sigma_2^2 T}{2} + \sigma_2 v\sqrt{T}})\Phi(d_2)\Big]$$
$$= A(v)\Phi(d_1) - h^*(v) e^{-rT}\Phi(d_2),$$

gdzie w przedostatniej równości podstawiliśmy $\alpha = \frac{\sigma_1 \rho}{\sigma_2}$. Z definicji funkcji Φ_1, Φ_2 mamy również:

$$\begin{aligned} \Phi_1(v) &= \Phi(d_1), \\ \Phi_2(v) &= \Phi(d_2), \end{aligned}$$

ponieważ:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{a e^{\mu_1 T} h(q_0 e^{-\frac{\sigma_2^2 T}{2} + \sigma_2 v \sqrt{T} - \mu_2 T}, T)}{K - b q_0 e^{\mu_2 T - \frac{\sigma_2^2 T}{2} + \sigma_2 v \sqrt{T}}} + \frac{1}{2} v^2}{v}, \\ d_2 &= d_1 - v. \end{aligned}$$

$\square$

Uwaga 3.30. Korzystając z twierdzenia 3.26 możemy uogólnić wynik otrzymany przez Brigo oraz Mercurio zastępując stałe q_1, q_2, r deterministycznymi, mierzalnymi funkcjami czasu.

Rozdział 4

Local volatility model

Celem niniejszego rozdziału jest uogólnienie wyników uzyskanych w rozdziale 3. W tym celu, w założeniach modelu I stałe współczynniki zmienności σ_X, σ_Y zamienione zostaną na zadane mierzalne, deterministyczne funkcje czasu. Powstały w ten sposób model należy do klasy modeli tzw. local volatility model. Dla tego modelu wyprowadzimy postać warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[(p(t)X_t - q(t)Y_t - K)^+|Y_t]$. Tak jak w rozdziale 3, rozpatrywane będą przypadki kolejno $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ oraz $K = 0$, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ oraz $K > 0$ i przypadek $p > 0$, $q > 0$ oraz $K > 0$.

4.1 Warunkowa wartość oczekiwana w modelu local volatility

Model II. Rozważamy dwa $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ - adaptowane procesy X_t, Y_t o dynamikach zadanych równaniami:

$$dX_t = \sigma_X(t)X_t dW_t, \tag{4.1}$$

$$dY_t = \sigma_Y(t)Y_t dZ_t, \tag{4.2}$$

gdzie funkcje $\sigma_X : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $\sigma_Y : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ są całkowalne, W, Z są ruchami Browna oraz $d\langle W, Z\rangle_t = \rho dt$, $\rho \in (-1, 1)$. X_0, Y_0 są dodatnimi stałymi.

Twierdzenie 4.1. W modelu II mamy $\mathbb{P}$ - prawie na pewno:

$$\mathbb{E}[X_t|Y_t] = Y_t^{a(t)} \frac{X_0}{Y_0^{a(t)}} e^{\frac{1}{2}[a(t)-a^2(t)]\int_0^t \sigma_Y^2(u)du}, \tag{4.3}$$

gdzie:

$$a(t) = \rho \frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)du}{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du}.$$

Tym samym prawa strona (4.3) jest ciągłą modyfikacją procesu $(\mathbb{E}[X_t|Y_t])_{0\le t\le T}$.

Uwaga 4.2. W szczególnym przypadku, gdy σ_X, σ_Y są stałe, teza twierdzenia 4.1 sprowadza się do tezy twierdzenia 3.10.

Dowód. Dowód twierdzenia 4.1 przebiega podobnie do dowodu 3.10. Dla pełności wywodu przytaczamy go. Ustalmy $t \ge 0$. Jedynymi, mocnymi rozwiązaniami równań (4.1) oraz (4.2) są odpowiednio procesy:

$$X_t = X_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_X^2(u)du + \int_0^t \sigma_X(u)dW_u},$$
$$Y_t = Y_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_Y^2(u)du + \int_0^t \sigma_Y(u)dZ_u}.$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$M_t := \ln \frac{X_t}{X_0},$$
$$K_t := \ln \frac{Y_t}{Y_0}.$$

Dla ustalonego $t \ge 0$ zmienne losowe M_t, N_t mają rozkłady normalne z parametrami równymi odpowiednio:

$$M_t \sim N(\mu_M(t), \sigma_M^2(t)),$$
$$K_t \sim N(\mu_K(t), \sigma_K^2(t)),$$

gdzie:

$$\mu_M(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_X^2(u)du,$$
$$\sigma_M^2(t) = \int_0^t \sigma_X^2(u)du,$$
$$\mu_K(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_Y^2(u)du,$$
$$\sigma_K^2(t) = \int_0^t \sigma_Y^2(u)du.$$

Wybierzmy dowolny zbiór $B \in \sigma(Y_t)$. Istnieje zbiór borelowski D taki, że $B = \{K_t \in D\}$. Mamy wówczas:

$$\mathbb{E}\Big(1_B X_t\Big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_D(k) X_0 e^m f_{M_t,K_t}(m,k)dmdk,$$

gdzie f_{M_t,K_t} jest gęstością rozkładu łącznego (M_t, K_t). Podobnie jak w dowodzie 3.10 mamy:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_D(k) X_0 e^m f_{M_t,K_t}(m,k)dmdk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_D(k) X_0 e^m f_{M_t|K_t}(m,k) f_{K_t}(k)dmdk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} X_0 e^m f_{M_t|K_t}(m,k)dm\Big] 1_D(k) f_{K_t}(k)dk, \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

gdzie:

$$f_{M_t|K_t}(m,k) = \frac{1}{\sigma_M(t)\sqrt{2\pi(1-(\rho^*(t))^2)}}\exp\Bigg\{-\frac{\Big(\frac{m-\mu_M(t)}{\sigma_M(t)} - \rho^*(t)\frac{k-\mu_K(t)}{\sigma_K(t)}\Big)^2}{2(1-(\rho^*(t))^2)}\Bigg\},$$

$$\rho^*(t) = \rho\frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)du}{\sqrt{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du \int_0^t \sigma_X^2(u)du}},$$

a f_{K_t} jest gęstością zmiennej losowej K_t.

Obliczamy całkę wewnątrz nawiasu kwadratowego (4.4):

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_0 e^m f_{M_t|K_t}(m,k)dm$$

$$= X_0\int_{-\infty}^{\infty} e^m \frac{1}{\sigma_M(t)\sqrt{2\pi(1-(\rho^*(t))^2)}}\exp\Bigg\{-\frac{\Big(\frac{m-\mu_M(t)}{\sigma_M(t)} - \rho^*(t)\frac{k-\mu_K(t)}{\sigma_K(t)}\Big)^2}{2(1-(\rho^*(t))^2)}\Bigg\}dm$$

$$= X_0\exp\Big\{\frac{k-\mu_K(t)}{\sigma_K(t)}\sigma_M(t)\rho^*(t) + \mu_M(t) + (1-(\rho^*(t))^2)\sigma_M^2(t)\Big\} =: \tilde{g}(k,t).$$

Po wstawieniu funkcji $\tilde{g}$ do (4.4) oraz po podstawieniu w uzyskanym wzorze wyrażeń reprezentujących parametry rozkładów K_t, M_t otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(1_B X_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k,t) 1_D(k) f_{K_t}(k) dk \\
&= \frac{X_0}{Y_0^{a(t)}} e^{\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_Y^2(u)du[a(t)-a^2(t)]} \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(k) Y_0^{a(t)} e^{ka(t)} f_{K_t}(k) dk \\
&= \frac{X_0}{Y_0^{a(t)}} e^{\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_Y^2(u)du[a(t)-a^2(t)]} \int_B Y_t^{a(t)} d\mathbb{P},
\end{aligned}$$

gdzie:

$$a(t) = \rho \frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)du}{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du}.$$

Z dowolności wyboru zbioru B otrzymujemy tezę twierdzenia. $\square$

Przykład 4.3. Wróćmy do przykładu wyceny instrumentu QCMS. Brigo i Mercurio [8] (paragraf 14.2) proponują wycenę tego instrumentu w dwufaktorowym modelu Vasicka. Implementacja tego modelu jest numerycznie złożona i wymaga zastosowania symulacji Monte Carlo. W podrozdziale 3.2 pokazaliśmy, że dla dynamik zadanych w modelu I wycena QCMS jest natychmiastowa, a otrzymany wynik jest zamkniętą formułą. Analogiczny rezultat uzyskujemy w modelu II, omawianym w tym rozdziale. Załóżmy, że X_t, Y_t spełniają założenia modelu II, a funkcja G jest taką funkcją jak w stwierdzeniu 3.18. Z twierdzenia 4.1 mamy:

$$\mathbb{E}[X_t G(Y_t)] = \mathbb{E}\mathbb{E}[X_t G(Y_t)|Y_t] = \mathbb{E}\Big(G(Y_t)\mathbb{E}[X_t|Y_t]\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(G(Y_t) Y_t^{a(t)} \frac{X_0}{Y_0^{a(t)}} e^{\frac{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du}{2}(-a(t)^2+a(t))}\Big)$$

$$= \frac{X_0}{Y_0^{a(t)}} e^{\frac{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du}{2}(-a(t)^2+a(t))} \mathbb{E}(G(Y_t) Y_t^{a(t)}).$$

Podobnie jak w podrozdziale 3.2, ponieważ Y_t jest procesem skoncentrownym wokół Y_0, stosujemy przybliżenie $G(Y_t) \approx G(Y_0) + G'(Y_0)(Y_t - Y_0)$ i otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X_tG(Y_t) &\approx \frac{X_0}{Y_0^{a(t)}}e^{\frac{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du}{2}(-a(t)^2+a(t))}\mathbb{E}\Big([G(Y_0)+G'(Y_0)(Y_t-Y_0)]Y_t^{a(t)}\Big) \\
&= X_0(G(Y_0)-G'(Y_0)Y_0)+X_0Y_0G'(Y_0)e^{a(t)\int_0^t \sigma_Y^2(u)du} \\
&= X_0G(Y_0)+X_0Y_0G'(Y_0)[e^{\rho\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)du}-1], \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

gdzie w ostatniej równości podstawiliśmy $a(t)=\rho\frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)du}{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du}$

Uwaga 4.4. Dla stałych funkcji σ_X, σ_Y ze wzoru (4.5) otrzymamy, wcześniej uzyskany w ramach modelu I, wynik (3.44).

4.2 Wypłata opcyjna w modelu local volatility

W tym podrozdziale uogólnimy wynik podrozdziału 3.3.

Twierdzenie 4.5. W modelu II mamy $\mathbb{P}$- prawie na pewno:

$$\mathbb{E}[(X_t-K)^+|Y_t] = Bl\Big(K, h(Y_t,t), \sqrt{(1-(\rho^*(t))^2)\int_0^t \sigma_X^2(u)du}\Big), \qquad (4.6)$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
h(Y_t,t) &= \mathbb{E}[X_t|Y_t], \\
\rho^*(t) &= \rho\frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)du}{\sqrt{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du\int_0^t \sigma_X^2(u)du}}, \\
Bl(K,F,v) &= F\Phi(d_1)-K\Phi(d_2), \\
d_1 &= \frac{\ln\frac{F}{K}+\frac{1}{2}v^2}{v}, \\
d_2 &= d_1 - v,
\end{aligned}
$$

a Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Tym samym prawa strona (4.6) jest ciągłą modyfikacją procesu $\Big(\mathbb{E}[(X_t-K)^+|Y_t]\Big)_{0\le t\le T}$.

Dowód. Dowód przebiega bardzo podobnie do dowodu twierdzenia 4.1. Przyjmujemy oznaczenia użyte w tym dowodzie, czyli:

$$M_t = \ln \frac{X_t}{X_0},$$
$$K_t = \ln \frac{Y_t}{Y_0}.$$

Ustalmy $t \geq 0$. Dla ustalonego t zmienne losowe M_t, N_t mają rozkłady normalne z parametrami równymi odpowiednio:

$$M_t \sim N(\mu_M(t), \sigma_M^2(t)),$$

gdzie:

$$\mu_M(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_X^2(u)du,$$
$$\sigma_M^2(t) = \int_0^t \sigma_X^2(u)du$$

oraz

$$K_t \sim N(\mu_K(t), \sigma_K^2(t)),$$

gdzie:

$$\mu_K(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_Y^2(u)du,$$
$$\sigma_K^2(t) = \int_0^t \sigma_Y^2(u)du.$$

Wybierzmy dowolny zbiór $B \in \sigma(Y_t)$ oraz $B = \{K_t \in D\}$, gdzie D jest zbiorem borelowskim. Mamy wówczas:

$$\begin{aligned}\int_B [X_t - K]^+ d\mathbb{P} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_D(k)[X_0 e^m - K]^+ f_{M_t,K_t}(m,k)dmdk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_D(k)[X_0 e^m - K]^+ f_{M_t|K_t}(m,k) f_{K_t}(k)dmdk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} [X_0 e^m - K]^+ f_{M_t|K_t}(m,k)dm\Big] 1_D(k) f_{K_t}(k)dk,\end{aligned} \tag{4.7}$$

gdzie:

$$f_{M_t|K_t}(m,k) = \frac{1}{\sigma_M(t)\sqrt{2\pi(1-(\rho^*(t))^2)}}\exp\Big\{-\frac{\left(\frac{m-\mu_M(t)}{\sigma_M(t)} - \rho^*(t)\frac{k-\mu_K(t)}{\sigma_K(t)}\right)^2}{2(1-(\rho^*(t))^2)}\Big\},$$

$$\rho^*(t) = \rho\frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)du}{\sqrt{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du \int_0^t \sigma_X^2(u)du}}$$

oraz f_{K_t} jest gęstością zmiennej losowej K_t. Obliczymy całkę wewnątrz nawiasu kwadratowego (4.7). Otrzymujemy:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[X_0e^m - K]^+ f_{M_t|K_t}(m,k)dm =$$

$$= X_0 e^{\xi(t)k + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_Y^2(u)du[\xi(t)-\xi^2(t)]}\Phi(d_1^*) - K\Phi(d_2^*),$$

gdzie:

$$\xi(t) = \rho\frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)du}{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du}$$

oraz:

$$d_1^* = \frac{\ln\frac{X_0}{K} + \xi(t)k + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_Y^2(u)du[\xi(t)-\xi^2(t)] + \frac{1}{2}(1-(\rho^*(t))^2)\int_0^t \sigma_X^2(u)du}{\sqrt{(1-(\rho^*(t))^2)\int_0^t \sigma_X^2(u)du}},$$

$$d_2^* = d_1^* - \sqrt{(1-(\rho^*(t))^2)\int_0^t \sigma_X^2(u)du}.$$

Z twierdzenia 4.1 wiemy, że:

$$\mathbb{E}[X_t|Y_t] = h(Y_t,t) = Y_t^{\xi(t)}\frac{X_0}{Y_0^{\xi(t)}}e^{\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_Y^2(u)du[\xi(t)-\xi^2(t)]},$$

więc:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}[X_0e^m - K]^+ f_{M_t|K_t}(m,k)dm\Big]1_D(k)f_{K_t}(k)dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[X_0 e^{\xi(t)k + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_Y^2(u)du[\xi(t)-\xi^2(t)]}\Phi(d_1^*) - K\Phi(d_2^*)\Big]1_D(k)f_{K_t}(k)dk =$$

$$= \int_B Bl\Big(K, h(Y_t, t), \sqrt{(1-(\rho^*(t))^2)\int_0^t \sigma_X^2(u)du}\Big)d\mathbb{P},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Bl(K, F, v) &= F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \\ d_1 &= \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v}, \\ d_2 &= d_1 - v. \end{aligned}$$

Dowolność wyboru zbioru B kończy dowód. $\square$

4.3 Uzmiennienie korelacji

W tym podrozdziale wykażemy, że twierdzenia 4.1 oraz 4.5 można uogólnić na przypadek korelacji bedącej deterministyczną funkcją czasu. W tym celu stały współczynnik korelacji ρ w modelu II zostanie zastąpiony deterministyczną funkcją czasu. Ponadto sformułujemy i udowodnimy ogólne twierdzenie o wycenie instrumentów pochodnych, o złożonej funkcji wypłaty, w modelu lognormalnym ze współczynnikiem korelacji bedącym deterministyczną funkcją czasu.

Model III. Załóżmy, że mamy dwa $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ - adaptowane procesy X_t, Y_t o dynamikach zadanych równaniami:

$$dX_t = \sigma_X(t)X_t dW_t, \tag{4.8}$$

$$dY_t = \sigma_Y(t)Y_t dZ_t, \tag{4.9}$$

gdzie $\sigma_X : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $\sigma_Y : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ są mierzalnymi, całkowalnymi z kwadratem funkcjami, W, Z są skorelowanymi ruchami Browna oraz $d\langle W, Z\rangle_t = \rho(t)dt$, zaś $\rho : [0, +\infty) \to (-1, 1)$ jest deterministyczną, mierzalną funkcją. Stałe X_0, Y_0 są dodatnie.

Twierdzenie 4.6. W modelu III mamy $\mathbb{P}$ - prawie na pewno:

$$\mathbb{E}[X_t|Y_t] = Y_t^{a(t)}\frac{X_0}{Y_0^{a(t)}}e^{\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_Y^2(u)du[a(t)-a^2(t)]}, \tag{4.10}$$

gdzie:

$$a(t) = \frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)\rho(u)du}{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du}.$$

W rezultacie prawa strona (4.10) jest ciągłą modyfikacją procesu $\Big(\mathbb{E}[X_t|Y_t]\Big)_{0\le t\le T}$.

Twierdzenie 4.7. W modelu III mamy prawie na pewno:

$$\mathbb{E}[(X_t - K)^+|Y_t] = Bl\Big(K, h(Y_t, t), \sqrt{(1-(\rho^*(t))^2)\int_0^t \sigma_X^2(u)du}\Big), \tag{4.11}$$

gdzie:

$$h(Y_t, t) = \mathbb{E}[X_t|Y_t],$$
$$\rho^*(t) = \frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)\rho(u)du}{\sqrt{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du \int_0^t \sigma_X^2(u)du}}$$

oraz:

$$Bl(K, F, v) = F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2),$$
$$d_1 = \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v},$$
$$d_2 = d_1 - v,$$

a Φ *oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. W rezultacie prawa strona (4.11) jest ciągłą modyfikacją procesu* $\Big(\mathbb{E}[(X_t - K)^+|Y_t]\Big)_{0\le t\le T}$.

Dowód. Dowody obu twierdzeń 4.6, 4.7 przebiegają prawie identycznie jak dowody twierdzeń 4.1, 4.5 z jedną różnicą, że $\rho^*(t)$ z dowodu twierdzeń 4.1, 4.5 jest w modelu III równe:

$$\rho^*(t) = \frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)\rho(u)du}{\sqrt{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du \int_0^t \sigma_X^2(u)du}}.$$

Z zadaną wyżej postacią funkcji ρ^*, dla dowolnego zbioru $B \in \sigma(Y_t)$, korzystając jak poprzednio z postaci rozkładu łącznego (X_t, Y_t), obliczamy odpowiednio:

$$\int_B X_t d\mathbb{P}$$

oraz:

$$\int_B [X_t - K]^+ d\mathbb{P}.$$

Rachunki analogiczne do rachunków w dowodach 4.1, 4.5 dają tezy twierdzeń 4.6, 4.7. $\square$

Na zakończenienie tego rozdziału podamy ogólne twierdzenie będące syntezą otrzymanych wyżej wyników. Twierdzenie podaje uniwersalny algorytm wyceny instrumentu pochodnego o złożonej funkcji wypłaty w modelu III.

Twierdzenie 4.8. Załóżmy, że spełnione są założenia modelu III. Niech $H : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją mierzalną oraz dla* $y \geq 0$ *niech* $H_y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją taką, że* $H_y(x) = H(x,y)$ *dla* $x > 0$ *oraz* $H_y(0) = 0$*. Załóżmy, że funkcja* H_y *jest różnicą dwóch funkcji wypukłych na* $[0,\infty)$*. Niech* D^+ *oznacza operator pochodnej prawostronnej. Załóżmy, że dla każdego* $x \geq 0$ *funkcja* $y \mapsto D^+H_y(x)$ *jest mierzalna oraz* $D^+H_y(0+) = 0$*. Ustalmy* $t \geq 0$*. Dla* $n \in \mathbb{N}$ *niech* $(K_{i,n})_{i=0}^{n2^n}$ *będzie ciągiem takim, że* $K_{i,n} = \frac{i}{2^n}$*. Dla każdego* n *zdefiniujmy ciąg* $Q_n(t)$ *następująco:*

$$Q_n(t) = \sum_{i=0}^{n2^n} (X_t - K_{i,n})^+ \Big(D^+H_{Y_t}(K_{i+1,n}) - D^+H_{Y_t}(K_{i,n}) \Big),$$

Jeśli $\mathbb{E}H(X_t, Y_t) < \infty$ *i dla każdego* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$0 \leq Q_n(t) \leq Q_{n+1}(t),$$

to wówczas:

$$\mathbb{E}H(X_t, Y_t) =$$

$$= \mathbb{E}\int_0^\infty Bl\Big(K, h(Y_t,t), \sqrt{(1-(\rho^*(t))^2)\int_0^t \sigma_X^2(u)du}\Big) d(D^+H_{Y_t})(K), \quad (4.12)$$

gdzie:

$$h(Y_t, t) = \mathbb{E}[X_t | Y_t],$$

$$\rho^*(t) = \frac{\int_0^t \sigma_Y(u)\sigma_X(u)\rho(u)du}{\sqrt{\int_0^t \sigma_Y^2(u)du \int_0^t \sigma_X^2(u)du}}$$

oraz:

$$
\begin{aligned}
Bl(K,F,v) &= F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2),\\
d_1 &= \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v},\\
d_2 &= d_1 - v,
\end{aligned}
$$

a Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Dowód. Na mocy wyników pracy Boeknost-Schmidt [51] wiemy, że jeśli funkcja H spełnia założenia twierdzenia, to prawdziwa jest równość:

$$H(x,y) = H_y(x) = \int_0^\infty (x-K)^+ d(D^+H_y)(K). \tag{4.13}$$

Problem ostatniej tożsamości, lecz w mniej ogólnej postaci, był rozpatrywany również przez Carra-Chou [13], [14] oraz Hagana [23].

Jeśli H_y jest różnicą dwóch funkcji wypukłych, to dla $M > 0$ całka Riemanna-Stieltjesa $\int_0^M (x-K)^+ d(D^+H_y)(K)$, jest dobrze zdefiniowana. Ponadto, jeśli dla ustalonych $x, y \geq 0$ mamy:

$$\int_0^\infty (x-K)^+ d(D^+H_y)(K) < \infty,$$

to dla, zdefiniowanego w założeniach twierdzenia, ciągu $(K_{i,n})_{i=0}^{n2^n}$ otrzymujemy:

$$\int_0^\infty (x-K)^+ d(D^+H_y)(K) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n2^n-1} (x-K_{i,n})^+[D^+H_y(K_{i+1,n}) - D^+H_y(K_{i,n})].$$

Ponieważ, z założenia, $\mathbb{E}H(X_t,Y_t)$ istnieje, więc z ostatniej równości, otrzymujemy:

$$\mathbb{E}\int_0^\infty (X_t-K)^+ dD^+H_{Y_t}(K) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n2^n-1} (X_t-K_{i,n})^+[D^+H_{Y_t}(K_{i+1,n}) - D^+H_{Y_t}(K_{i,n})]\\
&= \mathbb{E}\lim_{n\to\infty} Q_n(t)
\end{aligned}
$$

Z założenia twierdzenia, dla ustalonego t oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ciąg $Q_n(t)$ jest nieujemny oraz niemalejący. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej otrzymujemy zatem:

$$\mathbb{E} \lim_{n\to\infty} Q_n(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Q_n(t).$$

Dla każdego $K \geq 0$ funkcja $D^+H_{Y_t}(K)$ jest mierzalna względem $\sigma(Y_t)$ (jeśli H_y jest różnicą dwóch funkcji wypukłych to D^+H_y istnieje i jest mierzalna z założenia). W rezultacie z mierzalności $D^+H_{Y_t}(K)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Q_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \sum_{i=0}^{n2^n-1} (X_t - K_i)^+ [D^+H_{Y_t}(K_{i+1}) - D^+H_{Y_t}(K_i)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n2^n-1} \mathbb{E}\mathbb{E}\Big[(X_t - K_i)^+ [D^+H_{Y_t}(K_{i+1}) - D^+H_{Y_t}(K_i)]|Y_t\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n2^n-1} \mathbb{E}\Big[[D^+H_{Y_t}(K_{i+1}) - D^+H_{Y_t}(K_i)]\mathbb{E}[(X_t - K_i)^+|Y_t]\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \sum_{i=0}^{n2^n-1} \Big[[D^+H_{Y_t}(K_{i+1}) - D^+H_{Y_t}(K_i)]\mathbb{E}[(X_t - K_i)^+|Y_t]\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Q_n^*(t),
\end{aligned}$$

gdzie:

$$Q_n^*(t) = \sum_{i=0}^{n2^n} \mathbb{E}[(X_t - K_i(n))^+|Y_t]\Big(D^+H_{Y_t}(K_{i+1}(n)) - D^+H_{Y_t}(K_i(n))\Big).$$

Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$Q_n^*(t) = \mathbb{E}[Q_n(t)|Y_t],$$

a ponieważ $Q_n(t) \geq 0$ oraz $Q_n(t) \leq Q_{n+1}(t)$, zatem:

$$0 \leq Q_n^*(t) \leq Q_{n+1}^*(t).$$

W takim razie z twierdzenia Lebesguea o zbieżności monotonicznej otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Q_n^*(t) &= \mathbb{E} \lim_{n\to\infty} Q_n^*(t) = \mathbb{E} \int_0^\infty \mathbb{E}[(X_t - K)^+|Y_t] dD^+H_{Y_t}(K) \\
&= \mathbb{E} \int_0^\infty Bl\Big(K, h(Y_t, t), \sqrt{(1 - (\rho^*(t))^2) \int_0^t \sigma_X^2(u) du}\Big) dD^+H_{Y_t}(K).
\end{aligned}$$

W ostatniej równości wykorzystaliśmy twierdzenie 4.7. Podstawiając odpowiednio $x = X_t$, $y = Y_t$ oraz biorąc stronami wartość oczekiwaną w (4.13), otrzymujemy:

$$\mathbb{E}H(X_t, Y_t) = \mathbb{E}\int_0^\infty (X_t - K)^+ d(D^+ H_{Y_t})(K). \tag{4.14}$$

Łącząc ze sobą dwa ostatnie wyniki otrzymamy tezę twierdzenia.

□

Uwaga 4.9. Jeśli funkcja H_y jest dwukrotnie różniczkowalna oraz spełnione są pozostałe założenia twierdzenia 4.8 to wówczas z równości (4.12) otrzymujemy:

$$\mathbb{E}H(X_t, Y_t) =$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{E}\Big[Bl\Big(K, h(Y_t, t), \sqrt{(1-(\rho^*(t))^2)\int_0^t \sigma_X^2(u)du}\Big)\frac{\partial^2 H(K, Y_t)}{\partial x^2}\Big]dK$$
$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}}\Big[\Theta_{K,t}(z)\frac{\partial^2 H(K, g_t(z))}{\partial x^2}\Big]dzdK,$$

gdzie:

$$g_t(z) = Y_0 e^{-\frac{\sigma_Y^2}{2}t + \sigma_Y z},$$

$$\Theta_{K,t}(z) = Bl\Big(K, h(g_t(z), t), \sqrt{(1-(\rho^*(t))^2)\int_0^t \sigma_X^2(u)du}\Big).$$

Uwaga 4.9 wynika natychmiast z tezy twierdzenia 4.8, ponieważ na mocy założeń o H_y otrzymujemy:

$$D^+ H_y(x) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y),$$

i po wstawieniu ostatniego wyrażenia do (4.12) otrzymujemy żądaną równość.

Rozdział 5

Model SABR

Niniejszy rozdział poświęcony jest modelowi stochastic volatility SABR. Jest to jeden z najpopularniejszych obecnie modeli stochastic volatility, w którym współczynnik reprezentujący zmienność procesu, reprezentującego wartość aktywu finansowego, jest procesem stochastycznym o rozkładzie lognormalnym. Popularność swą model ten zawdzięcza bardzo dużej dokładności kalibracji do danych rynkowych (West [54]) oraz wysokiej efektywnosci podczas dynamicznego zabezpieczania pozycji opcyjnych (Hagan et.al [23]). W szczególnym przypadku, gdy jeden z parametrów modelu jest znany i równy $\beta = 1$ udowodnimy, że po rozwiązaniu odpowiednich równań rekurencyjnych, potrafimy wyznaczyć algebraiczny wzór na postać wybranych wartości oczekiwanych procesów stochastycznych związanych z modelem SABR. Co więcej, zaproponujemy sposób przybliżenia drugiego momentu procesu SABR, który to posłuży między innymi do wyceny kontraktów CMS. Do tej pory nikomu nie udało się wyprowadzić skończonej, algebraicznej formuły na drugi moment procesu zadanego dynamiką modelu SABR. W dalszej kolejności udowodnimy, że w modelu SABR dla parametru $\beta = 1$, funkcja charakterystyczna procesu reprezentującego wartość aktywu finansowego, jest całkowalna i dzięki wcześniej wspomnianej aproksymacji, zaproponujemy zupełnie nowy sposób, po raz pierwszy przedstawiony w tej pracy, wyceny opcji waniliowej w modelu SABR dla parametru $\beta = 1$. Wyprowadzimy wzory na ceny opcji waniliowych w tym modelu, które są uogólnieniem znanych wzorów Blacka. Następnie zauważymy, że potrafimy podać algebraiczny wzór na szczególny moment ($\mathbb{E}X_t^{2(1-\beta)}$) procesu stochastycznego zadanego dynamiką modelu SABR dla $\beta \in (0, 1)$. Obserwacja ta posłuży do wyceny kontraktów CMS w niniejszym modelu. Uzyskany wynik jest formułą w modelu

SABR analogiczną do zaprezentowanej przez Hagana [24] formuły w modelu lognormalnym.

Model IV. Załóżmy, że mamy dwa $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ - adaptowane procesy X_t, Y_t o dynamikach zadanych równaniami:

$$dX_t = Y_t X_t^{\beta} dW_t, \tag{5.1}$$

$$dY_t = \sigma Y_t dZ_t, \tag{5.2}$$

gdzie W, Z są ruchami Browna oraz $d\langle W, Z\rangle_t = \rho dt$, $\rho \in (-1,1)$, $\beta \in [0,1]$, $\sigma > 0$, $X_0 > 0$, $Y_0 > 0$.

Uwaga 5.1. W oryginalnej pracy dotyczącej modelu SABR (Hagan et.al [23]) przybliżona cena w chwili 0 waniliowej opcji kupna, o cenie wykonania $K > 0$ wyraża się wzorem:

$$\Pi(0) = P(0,t)\mathbb{E}(X_t - K)^+ = P(0,t)Bl(K, X_0, \sigma^*(K, X_0, t)),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Bl(K,F,v) &= F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \\ d_1 &= \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v}, \\ d_2 &= d_1 - v, \end{aligned}$$

a Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego oraz:

$$\sigma^*(K,F,t) = \frac{Y_0}{H(K,F)}\frac{p(K,F)}{q(p(K,F))}(1 + R(K,F)t),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} H(K,F) &= (FK)^{\frac{1-\beta}{2}}\Big[1 + \frac{(1-\beta)^2}{24}\ln^2\frac{F}{K} + + \frac{(1-\beta)^4}{1920}\ln^4\frac{F}{K}\Big], \\ R(K,F) &= \frac{(1-\beta)^2 Y_0^2}{24(FK)^{1-\beta}} + \frac{\rho\sigma\beta Y_0}{4(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \sigma^2\frac{2-3\rho^2}{24}, \\ p(K,F) &= \frac{\sigma}{Y_0}(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}\ln\frac{F}{K}, \\ q(z) &= \ln\Big(\frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho}\Big). \end{aligned}$$

Hagan et.al uzyskali powyższy wynik rozwiązując równanie Kołmogorowa dla gęstości funkcji przejścia łącznego rozkładu (X_t, Y_t). Dzięki metodzie „singular perturbance“ udało im się znaleźć aproksymację rozwiązania wspomnianego równania różniczkowego, dzięki której wyprowadzony został przybliżony wzór na cenę opcji waniliowej w modelu SABR. W ostatnim kroku z ceny opcji waniliowej uzyskano postać zmienności implikowanej modelu Blacka $\sigma^*(K, F, t)$. Innymi słowy, uzyskano funkcję $\sigma^*(K, F, t)$ taką, która po wstawieniu do wzoru Blacka na cenę opcji waniliowej dała cenę tej samej opcji uzyskaną w modelu SABR. Jak wspomniano we wstępie, wynik ten został odtworzony różnymi technikami przez innych autorów. Parametrami modelu SABR są kolejno Y_0, σ, β, ρ. Liczba X_0 jest zadana z góry i reprezentuje cenę forward aktywu finansowego. Kalibracja modelu SABR do danych rynkowych, polega na znalezieniu odpowiednich wartości parametró Y_0, σ, β, ρ tak, by ceny kwotowane na rynku i ceny otrzymane z modelu przyjmowały te same (albo możliwie bliskie) wartości. W podrozdziałach 5.1 - 5.3 zajmujemy się modelem IV z ustalonym parametrem $\beta = 1$. Jest to graniczny (ze wzgledu na parametr β) przypadek modelu SABR. W podrozdziale 5.3 podamy nowy sposób wyceny opcji waniliowej call. Jak już wspomniano, jest to zupełnie nowa metoda wycena opcji w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$. W podrozdziale 5.4 podamy algebraiczny wzór na szczególny moment $(\mathbb{E}X_t^{2(1-\beta)})$ procesu stochastycznego zadanego dynamiką modelu SABR dla $\beta \in (0, 1)$. Obserwacja ta posłuży do wyceny kontraktów CMS w modelu SABR.

Uwaga 5.2. Jourdain [33] udowodnił, że dla parametru $\beta = 1$ proces zadany dynamiką modelu IV jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho \leq 0$. Co więcej, w tej samej pracy znajdujemy wynik mówiący o istnieniu momentów tego procesu $\mathbb{E}X_t^\delta$, dla $\delta > 1$. Otóż dla $\rho < 0$ mamy: $\mathbb{E}X_t^\delta < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta \leq \frac{1}{1-\rho^2}$. W szczególności, dla $\delta = 2$ otrzymamy równoważność warunków: $\mathbb{E}X_t^2 < \infty \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{1-\rho^2}$. Jourdain uzasadnia również fakt, że dla parametru $\beta \in [0, 1)$ proces zadany dynamiką SABR jest martyngałem dla dowolnego $\rho \in (-1, 1)$. Kolejnym, bardzo istotnym wynikiem uzyskanym przez Jourdaina, jest wyznaczenie momentu $\mathbb{E}X_t^\delta$ dla $\delta > 1$ w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$. Wynik uzyskany przez Jourdaina jest następujący:

$$\mathbb{E}X_t^\delta = X_0^\delta \mathbb{E} \exp\Big[\frac{\delta\rho}{\sigma}(Y_t - Y_0) + \frac{1}{2}(\delta(1-\rho^2) - 1)\int_0^t Y_u^2 du\Big]. \tag{5.3}$$

W szczególności, jeśli $\rho < 0$ oraz $1 < \delta \leq \frac{1}{1-\rho^2}$, to z równości (5.3) otrzymujemy oszacowanie:

$$\mathbb{E}X_t^\delta \leq X_0^\delta e^{-\frac{\delta\rho}{\sigma}Y_0}. \tag{5.4}$$

Uwaga 5.3. Rozważamy model IV w ogólnym przypadku. Niech $\mathbb{R}_+$ oznacza zbiór dodatnich liczb rzeczywistych. Oznaczmy $\mathbb{X}_t := (X_t, Y_t)$ dla $t \geq 0$. Ruch Browna W_t możemy przedstawić jako $W_t = \rho Z_t + \sqrt{1-\rho^2}V_t$, gdzie $\mathbb{V}_t := (V_t, Z_t)$ jest dwuwymiarowym, standardowym procesem Wienera. Wówczas równania (5.1), (5.2) możemy zapisać jako:

$$d\mathbb{X}_t = \sigma^*(\mathbb{X}_t)d\mathbb{V}_t, \tag{5.5}$$

gdzie $\sigma^* : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ jest ciągłą funkcją zdefiniowaną następująco:

$$\sigma^*(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2}x^\beta y & \rho x^\beta y \\ 0 & \sigma y \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Oznaczmy dalej przez $\{\Delta\}$ jednopunktowe uzwarcenie zbioru $\mathbb{R}^2$. Oznaczmy $\hat{\mathbb{R}_+^2} = \mathbb{R}_+^2 \cup \{\Delta\}$, a przez $\mathcal{C}$ zbiór funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0,\infty)$ i o wartościach w $\hat{\mathbb{R}_+^2}$. Oznaczmy też dalej:

$$\mathcal{W}^2 = \{\omega \in \mathcal{C} : \omega(t) = \Delta \Rightarrow \omega(t') = \Delta, t' > t\}.$$

Niech $\mathcal{B}(\mathcal{W}^2)$ będzie sigma-ciałem generowanym przez zbiór $\mathcal{W}^2$. Zdefiniujmy moment „eksplozji“ funkcji ω jako:

$$\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 : \omega(t) = \Delta\}. \tag{5.7}$$

Definicja 5.4. Słabym rozwiązaniem $\mathbb{X}$ równania (5.5) nazywamy zmienną losową o wartościach w $(\mathcal{W}^2, \mathcal{B}(\mathcal{W}^2))$, zdefiniowaną na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z filtracją $(\mathcal{F}_t)$, taką, że istnieje dwuwymiarowy proces Wienera $\mathbb{V}_t$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ taki, że $\mathbb{V}_0 = 0$, proces $\mathbb{X}_t$ jest adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_t)$ oraz równanie jest spełnione $\mathbb{P}$- prawie na pewno dla każdego $t \in [0, \tau(\mathbb{X}))$.

Ikeda oraz Watanabe ([28], twierdzenie 2.3, s. 159) udowodnili, że równanie (5.5), dla ciągłych funkcji σ^*, posiada słabe rozwiązanie w sensie definicji 5.4. Istnienie słabych rozwiązań równań postaci (5.5) rozpatrywali również Kurenok oraz Lepeyev [34], którzy uzyskali warunki dostateczne na istnienie słabych rozwiązań bez założenia ciągłości funkcji σ^*. Ponieważ w przypadku modelu IV funkcja σ^* jest ciągła, więc powołujemy się na wynik uzyskany przez Ikeda, Watanabe [28]. Dowód zaprezentowany przez Ikeda, Watanabe i pierwotnie obejmujący przypadek funkcji ciągłych $\sigma^* : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, przenosi się bez zmian na przypadek $\sigma^* : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$. Rezultatem tego twierdzenia jest wniosek:

Wniosek 5.5. Istnieje słabe, w sensie definicji 5.4, rozwiązanie równania stochastycznego zadanego dynamiką SABR. Takie rozwiązania rozpatrujemy w niniejszej pracy.

5.1 Przybliżenie drugiego momentu procesu SABR dla $\beta = 1$

W tym podrozdziale sformułujemy i udowodnimy twierdzenie dotyczące przybliżenia drugiego momentu procesu zadanego dynamiką SABR w przypadku $\beta = 1$. W tym celu wykorzystamy pewną, wyprowadzoną przez Carra oraz Chou [14], tożsamość całkową (wykorzystaną również w pracach Boenkost-Schmidt [6], Hagan [24]). Następnie udowodnimy, że klasa funkcji dla których spełnione są założenia wspomnianego wyżej twierdzenia jest niepusta. Dla odpowiednio wybranych parametrów modelu znajdziemy funkcję, która spełnia wspomniane założenia oraz dzięki której przybliżymy moment $\mathbb{E}X_t^2$. Niemniej jednak, będziemy musieli nałożyć dodatkowo odpowiednie ograniczenia na wartości parametrów X_0, Y_0.

Twierdzenie 5.6. Rozważmy model IV z parametrem $\beta = 1$. Załóżmy, że $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że: $y \mapsto f(t,y)$ jest dwukrotnie różniczkowalna na $[0,\infty)\times[0,\infty)$, a druga pochodna cząstkowa $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ jest ciągła. Załóżmy dalej, że dla ustalonych $\rho \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $t \geq 0$ oraz $\epsilon > 0$ zachodzi nierówność:

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}[X_t^2|Y_t] - f(t,Y_t)\Big)^2 < \epsilon^2. \tag{5.8}$$

Wówczas $\mathbb{E}(X_t^2 Y_t^2) < \infty$ oraz:

$$\left|\mathbb{E}X_t^2 - f(t,0) - Y_0\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \int_0^\infty Bl(K, Y_0, \sigma\sqrt{t})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,K)dK\right| < \epsilon, \tag{5.9}$$

$$\Big|\mathbb{E}X_t^2 Y_t^2 - Y_0^2 e^{t\sigma^2} f(t,0) - Y_0^3 e^{3t\sigma^2}\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) -$$

$$-Y_0^2 e^{\sigma^2 t}\int_0^\infty Bl(K, Y_0 e^{2\sigma^2 t}, \sigma\sqrt{t})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,K)dK\Big| < \epsilon Y_0^2 e^{3t\sigma^2}, \qquad (5.10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Bl(K,F,v) &= F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2),\\ d_1 &= \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v},\\ d_2 &= d_1 - v. \end{aligned}$$

Dowód. Udowodnimy najpierw, że $\mathbb{E}(X_t^2 Y_t^2) < \infty$. Na mocy uwagi 5.2, założenie $\rho \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ (które wynika z połączenia warunków $\rho \leq 0$ oraz $2 < \frac{1}{1-\rho^2}$) implikuje, że X_t jest martyngałem oraz istnieje jego drugi moment. Ustalmy $\rho \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y > 0$, $\delta > 0$, $p = 1 + \delta$ oraz $q = \frac{p}{p-1}$ zachodzi nierówność:

$$x^2 y^2 \leq \frac{x^{2(1+\delta)}}{1+\delta} + \frac{y^{2q}}{q}.$$

Podstawiając $x = X_t$, $y = Y_t$ i biorąc w ostatniej równości stronami wartość oczekiwaną otrzymujemy:

$$\mathbb{E}(X_t^2 Y_t^2) \leq \mathbb{E}\Big(\frac{{X_t}^{2(1+\delta)}}{1+\delta}\Big) + \mathbb{E}\Big(\frac{{Y_t}^{2q}}{q}\Big).$$

Zauważmy teraz, że istnieje $\delta^* > 0$ taka, że dla ustalonego $\rho \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$:

$$2(1+\delta^*) \leq \frac{1}{1-\rho^2}.$$

Na mocy uwagi 5.2 mamy $\mathbb{E}X_t^{2(1+\delta^*)} < \infty$. W rezultacie, z ostatniej obserwacji i uwagi 3.2 (zastosowanej do procesu Y_t) otrzymujemy:

$$\mathbb{E}(X_t^2 Y_t^2) \leq \mathbb{E}\Big(\frac{{X_t}^{2(1+\delta^*)}}{1+\delta^*}\Big) + \mathbb{E}\Big(\frac{{Y_t}^{2q^*}}{q^*}\Big) < \infty,$$

gdzie $q^* = \frac{p^*}{p^*-1}$, a $p^* = 1 + \delta^*$.

Na mocy prac Carra oraz Chou [13]-[14] (patrz także Boenkost-Schmidt [6] oraz Hagan [23]), założenia twierdzenia 5.6 dotyczące funkcji f implikują, że dla $(y,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ mamy spełnione tożsamości całkowe:

$$f(t,y) = f(t,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) + \int_0^\infty (y-K)^+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,K)dK, \tag{5.11}$$

a także:

$$f(t,y)y^2 = y^2 f(t,0) + y^3\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) + \int_0^\infty (y-K)^+ y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,K)dK. \tag{5.12}$$

Po podstawieniu $y = Y_t$ w równości (5.11) oraz po wzięciu stronami wartości oczekiwanej i skorzystaniu z tw. Fubiniego otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(t,Y_t) &= f(t,0) + Y_0\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) + \int_0^\infty \mathbb{E}(Y_t-K)^+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,K)dK \\ &= f(t,0) + Y_0\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) + \int_0^\infty Bl(K,Y_0,\sigma\sqrt{t}) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,K)dK.\end{aligned}$$

W rezultacie, z ostatniej równości otrzymujemy:

$$\left|\mathbb{E}X_t^2 - f(t,0) - Y_0\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \int_0^\infty Bl(K,Y_0,\sigma\sqrt{t}) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,K)dK\right| =$$

$$\begin{aligned}&= \left|\mathbb{E}X_t^2 - \mathbb{E}f(t,Y_t)\right| = \left|\mathbb{E}(\mathbb{E}[X_t^2|Y_t] - f(t,Y_t))\right| \le \mathbb{E}\left|(\mathbb{E}[X_t^2|Y_t] - f(t,Y_t))\right| \\ &\le \sqrt{\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}[X_t^2|Y_t] - f(t,Y_t)\Big)^2} \le \epsilon.\end{aligned}$$

W ostatnim oszacowaniu wykorzystaliśmy (5.8).

Po podstawieniu $y = Y_t$ w równości (5.12) oraz po wzięciu stronami wartości oczekiwanej i skorzystaniu z Tw. Fubiniego otrzymujemy:

$$\mathbb{E}(f(t,Y_t)Y_t^2) = Y_0^2 e^{t\sigma^2} f(t,0) + Y_0^3 e^{3t\sigma^2}\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) + \int_0^\infty \mathbb{E}[(Y_t-K)^+ Y_t^2] \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,K)dK.$$

Ponieważ Y_t ma, z założenia, rozkład lognormalny, więc:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Y_t-K)^+Y_t^2] &= Y_0^2 e^{-\sigma^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\Big(Y_0 e^{\frac{-\sigma^2 t}{2}+\sigma z}-K\Big)^+ e^{2\sigma z-\frac{z^2}{2t}}dz \\
&= Y_0^3 e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\Big(e^y-K^*\Big)^+ e^{-\frac{(y-2\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2 t}}dy \\
&= Y_0^2 e^{\sigma^2 t}\Big[Y_0 e^{2\sigma^2 t}\Phi(d_1)-K\Phi(d_2)\Big] \\
&= Y_0^2 e^{\sigma^2 t} Bl(K, Y_0 e^{2\sigma^2 t}, \sigma\sqrt{t}), \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

gdzie w przedostatniej równości parametry d_1, d_2 są równe odpowiednio:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln\frac{Y_0 e^{2\sigma^2 t}}{K}+\frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}, \\
d_2 &= d_1-\sigma\sqrt{t}.
\end{aligned}$$

W trzeciej równości dokonaliśmy podstawienia $K^* = K\Big(Y_0 e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}\Big)^{-1}$ oraz $y=\sigma z$.

W konsekwencji, z równości (5.13), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}X_t^2Y_t^2 - Y_0^2 e^{t\sigma^2} f(t,0) - Y_0^3 e^{3t\sigma^2}\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)- \\
&-Y_0^2 e^{\sigma^2 t}\int_0^{\infty} Bl(K, Y_0 e^{2\sigma^2 t}, \sigma\sqrt{t})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,K)dK\Big| \\
&= \Big|\mathbb{E}X_t^2Y_t^2 - \mathbb{E}(f(t,Y_t)Y_t^2)\Big| = \Big|\mathbb{E}(Y_t^2[\mathbb{E}[X_t^2|Y_t]-f(t,Y_t)])\Big| \\
&\le \mathbb{E}\Big|Y_t^2[\mathbb{E}[X_t^2|Y_t]-f(t,Y_t)]\Big| \le \sqrt{\mathbb{E}Y_t^4}\sqrt{\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t^2|Y_t]-f(t,Y_t)]^2} \le \epsilon Y_0^2 e^{3t\sigma^2},
\end{aligned}$$

gdzie w ostatnim oszacowaniu skorzystaliśmy z założenia (5.8). □

Poniżej sformułujemy i udowodnimy twierdzenie, w którym znajdziemy funkcję f spełniającą założenia twierdzenia 5.6. Niestety, nie uda nam się tego zrobić dla dowolnie wybranych parametrów X_0, Y_0. Celem twierdzenia 5.7 jest udowodnienie, że klasa funkcji spełniających założenia twierdzenia 5.6

jest niepusta, a tym samym jest sens rozważać zaproponowane w twierdzeniu 5.6 przybliżenie drugiego momentu procesu X_t.

Twierdzenie 5.7. W modelu IV niech $\beta = 1$ oraz $\rho \in (-1, -\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}]$. Niech t oraz ϵ będą ustalonymi liczbami dodatnimi. Wówczas, jeżeli $X_0 < \sqrt{\epsilon}$ oraz $Y_0 < \min\left\{1, \frac{\sigma\sqrt{7}e^{-\frac{2}{\sigma}}}{\sqrt{56(e^{3t\sigma^2}-1)+3t(e^{14t\sigma^2}-1)}}\right\}$, to istnieje $c > 0$ takie, że dla $f(y) := X_0^2 + cy^2$ mamy:

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}[X_t^2|Y_t] - f(Y_t)\Big)^2 < \epsilon^2.$$

Dowód. Zauważmy, że spełniona jest nierówność:

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}[X_t^2|Y_t] - f(Y_t)\Big)^2 \leq \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}[X_t^2 - f(Y_t)|Y_t]\Big)^2$$

$$\leq \mathbb{E}\mathbb{E}[(X_t^2 - f(Y_t))^2|Y_t] = \mathbb{E}(X_t^2 - f(Y_t))^2.$$

W przedostatniej nierówności skorzystaliśmy z nierówności Jensena dla funkcji wypukłej $g(x) = x^2$.

Dalej, z (5.1) oraz lematu Ito mamy:

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_u^2 Y_u dW_u + \int_0^t X_u^2 Y_u^2 du.$$

Po wstawieniu prawej strony ostatniej równości do wyrażenia $(X_t^2 - f(Y_t))^2$ otrzymamy:

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}[X_t^2|Y_t] - f(Y_t)\Big)^2 \leq \mathbb{E}\Big(X_0^2 + 2\int_0^t X_u^2 Y_u dW_u + \int_0^t X_u^2 Y_u^2 du - f(Y_t)\Big)^2. \tag{5.14}$$

Oszacujemy prawą stronę (5.14). Wybierzmy w tym celu funkcję f postaci

$f(y) := X_0^2 + cy^2$, gdzie $c > 0$. W rezultacie otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
I &:= \mathbb{E}\Big(X_0^2 + 2\int_0^t X_u^2 Y_u dW_u + \int_0^t X_u^2 Y_u^2 du - f(Y_t)\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}\Big(2\int_0^t X_u^2 Y_u dW_u + \int_0^t X_u^2 Y_u^2 du - cY_t^2\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}\Big(2\int_0^t X_u^2 Y_u dW_u + \int_0^t X_u^2 Y_u^2 du - cY_0^2 - 2c\int_0^t Y_u^2 dZ_u - c\sigma^2\int_0^t Y_u^2 du\Big)^2 \\
&\le 2c^2 Y_0^4 + 2\mathbb{E}\Big(2\int_0^t X_u^2 Y_u dW_u + \int_0^t Y_u^2[X_u^2 - c\sigma^2]du - 2c\int_0^t Y_u^2 dZ_u\Big)^2 \\
&= 2c^2 Y_0^4 + 8\int_0^t \mathbb{E}X_u^4 Y_u^2 du + 2\mathbb{E}\Big(\int_0^t Y_u^2[X_u^2 - c\sigma^2]du\Big)^2 + \\
&+ 8c^2\mathbb{E}\int_0^t Y_u^4 du - 8c\rho\mathbb{E}\int_0^t X_u^2 Y_u^3 du \\
&\le 2c^2 Y_0^4 + 8\int_0^t \sqrt{\mathbb{E}X_u^8}\sqrt{\mathbb{E}Y_u^4}du + 2t\mathbb{E}\int_0^t Y_u^4[X_u^2 - c\sigma^2]^2 du + \\
&+ 8c^2\frac{Y_0^4}{6\sigma^2}[e^{6t\sigma^2} - 1] - 8c\rho\int_0^t \sqrt{\mathbb{E}X_u^4}\sqrt{\mathbb{E}Y_u^6}du. \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

W przedostatniej równości wykorzystaliśmy kolejno: fakt, że $\int_0^t X_u^2 Y_u dW_u$, $\int_0^t Y_u^2 dZ_u$ są martyngałami oraz izometrię całki stochastycznej. $\int_0^t X_u^2 Y_u dW_u$ jest martyngałem, ponieważ dla dowolnego $s > 0$ z nierówności Schwartza mamy:

$$
\begin{aligned}
\int_0^s \mathbb{E}X_u^4 Y_u^2 du &\le \int_0^s \sqrt{\mathbb{E}X_u^8}\sqrt{\mathbb{E}Y_u^4} \le X_0^4 e^{-4Y_0\frac{\rho}{\sigma}}\int_0^s Y_0^2 e^{3\sigma^2 u}du \\
&= X_0^4 e^{-4Y_0\frac{\rho}{\sigma}}\frac{Y_0^2}{3\sigma^2}[e^{3\sigma^2 s} - 1] < \infty.
\end{aligned}
$$

$\int_0^t Y_u^2 dZ_u$ jest martyngałem z uwagi 3.2. W drugiej z ostatnich nierówności wykorzystaliśmy oszacowanie (5.4). Mogliśmy to zrobić, ponieważ założenie $\rho \in (-1, -\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}]$ implikuje, że $8 \le \frac{1}{1-\rho^2}$, więc na mocy uwagi 5.2 moment $\mathbb{E}X_t^8$ istnieje i prawdziwa jest nierówność (5.4) dla $\delta = 8$. W ostatniej nierówności wykorzystaliśmy nierówność Schwartza oraz nierówność Jensena dla funkcji nieujemnej g: $(\int_0^t g(u)du)^2 \le t\int_0^t g^2(u)du$.

W dalszym oszacowaniu wyrażenia (5.15) wykorzystamy jeszcze raz nierówność (5.4) oraz nierówność Schwartza. W rezultacie otrzymamy (pamiętajmy, że $\rho < 0$):

$$
\begin{aligned}
I &\leq 2c^2Y_0^4 + 8\int_0^t \sqrt{\mathbb{E}X_u^8}\sqrt{\mathbb{E}Y_u^4}du + 2t\mathbb{E}\int_0^t \sqrt{\mathbb{E}X_u^8}\sqrt{\mathbb{E}Y_u^8}du \\
&- 4tc\sigma^2\mathbb{E}\int_0^t Y_u^4X_u^2du + 2tc^2\sigma^4\mathbb{E}\int_0^t Y_u^4du + 4c^2\frac{Y_0^4}{3\sigma^2}[e^{6t\sigma^2}-1] \\
&- 8c\rho\int_0^t \sqrt{\mathbb{E}X_u^4}\sqrt{\mathbb{E}Y_u^6}du \\
&\leq 2c^2Y_0^4 + 8X_0^4e^{-\frac{4\rho Y_0}{\sigma}}Y_0^2\frac{e^{3t\sigma^2}-1}{3\sigma^2} + 2tX_0^4e^{-\frac{4\rho Y_0}{\sigma}}Y_0^4\frac{e^{14t\sigma^2}-1}{14\sigma^2} \\
&+ 2tc^2\sigma^4Y_0^4\frac{e^{6t\sigma^2}-1}{6\sigma^2} + 4c^2\frac{Y_0^4}{3\sigma^2}[e^{6t\sigma^2}-1] - 8c\rho X_0^2e^{-\frac{2\rho Y_0}{\sigma}}Y_0^3\frac{e^{\frac{15}{2}t\sigma^2}-1}{\frac{15}{2}\sigma^2} \\
&= 2X_0^4e^{-\frac{4\rho Y_0}{\sigma}}\Big(4Y_0^2\frac{e^{3t\sigma^2}-1}{3\sigma^2} + tY_0^4\frac{e^{14t\sigma^2}-1}{14\sigma^2}\Big) \\
&+ c^2\Big(2Y_0^4 + t\sigma^2Y_0^4\frac{e^{6t\sigma^2}-1}{3} + 4\frac{Y_0^4}{3\sigma^2}(e^{6t\sigma^2}-1)\Big) - 8c\rho X_0^2e^{-\frac{2\rho Y_0}{\sigma}}Y_0^3\frac{e^{\frac{15}{2}t\sigma^2}-1}{\frac{15}{2}\sigma^2}.
\end{aligned}
$$

Ponieważ $X_0 < (\epsilon)^{\frac{1}{2}}$, $\rho \geq -1$ oraz $Y_0 < \min\Big\{1, \frac{\sigma\sqrt{7}e^{-\frac{2}{\sigma}}}{\sqrt{56(e^{3t\sigma^2}-1)+3t(e^{14t\sigma^2}-1)}}\Big\}$, więc:

$$
\begin{aligned}
&2X_0^4e^{-\frac{4\rho Y_0}{\sigma}}\Big(Y_0^2\frac{4(e^{3t\sigma^2}-1)}{3\sigma^2} + tY_0^4\frac{e^{14t\sigma^2}-1}{14\sigma^2}\Big) \\
&< 2\epsilon^2e^{\frac{4}{\sigma}}Y_0^2\Big(\frac{4(e^{3t\sigma^2}-1)}{3\sigma^2} + t\frac{e^{14t\sigma^2}-1}{14\sigma^2}\Big) \\
&= \frac{\epsilon^2}{3}e^{\frac{4}{\sigma}}Y_0^2\frac{56(e^{3t\sigma^2}-1)+3t(e^{14t\sigma^2}-1)}{7\sigma^2} < \frac{\epsilon^2}{3}.
\end{aligned}
$$

Wybierzmy $c > 0$ tak by spełniona była nierówność:

$$c < \min\Big\{\frac{\epsilon^2}{3}g_1, g_2\Big\},$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \Big(8X_0^2e^{-\frac{2\rho Y_0}{\sigma}}Y_0^3\frac{e^{\frac{15}{2}t\sigma^2}-1}{\frac{15}{2}\sigma^2}\Big)^{-1}, \\
g_2 &= \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\Big(2Y_0^4 + t\sigma^2Y_0^4\frac{e^{6t\sigma^2}-1}{3} + 4\frac{Y_0^4}{3\sigma^2}(e^{6t\sigma^2}-1)\Big)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Wtedy prawdziwe jest oszacowanie:

$$c^2\Big(2Y_0^4 + t\sigma^2 Y_0^4 \frac{e^{6t\sigma^2}-1}{3} + 4\frac{Y_0^4}{3\sigma^2}(e^{6t\sigma^2}-1)\Big) - 8c\rho X_0^2 e^{-\frac{2\rho Y_0}{\sigma}} Y_0^3 \frac{e^{\frac{15}{2}t\sigma^2}-1}{\frac{15}{2}\sigma^2}$$

$$< \frac{\epsilon^2}{3} + \frac{\epsilon^2}{3}.$$

W rezultacie, z ostatnich nierówności otrzymujemy oszacowanie:

$$I < \epsilon^2.$$

□

Uwaga 5.8. Twierdzenie 5.6 porusza problem przybliżenia momentu $\mathbb{E}X_t^2$ w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$. Jeśli istnieje funkcja spełniająca założenia twierdzenia 5.4, nierówność (5.9) gwarantuje przybliżenie wspomnianego, drugiego momentu X_t z dokładnością zadaną przez liczbę dodatnią ϵ. Aby znaleziona w dowodzie twierdzenia 5.7 funkcja była szukaną aproksymacja, parametr początkowy X_0 musi być mniejszy niż $\sqrt{\epsilon}$. Przykładowo dla $\epsilon = 10^{-2}$ oznacza to $X_0 < 0.1$. W środowisku niskich stóp procentowych warunek ten może być spełniony. Jeśli cena forward stopy procentowej jest niższa niż 0.1 oraz $Y_0 < \min\left\{1, \frac{\sigma\sqrt{7}e^{-\frac{2}{\sigma}}}{\sqrt{56(e^{3t\sigma^2}-1)+3t(e^{14t\sigma^2}-1)}}\right\}$ to z nierówności (5.9) otrzymujemy:

$$\Big|\mathbb{E}X_t^2 - f(t,0) - Y_0\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \int_0^\infty Bl(K, Y_0, \sigma\sqrt{t})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,K)dK\Big|$$

$$= \Big|\mathbb{E}X_t^2 - X_0^2 - 2c\int_0^\infty Bl(K, Y_0, \sigma\sqrt{t})dK\Big| < \frac{1}{100},$$

gdzie dla $\epsilon = 10^{-2}$:

$$c < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\min\Big\{\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}g_1, g_2\Big\},$$

przy czym:

$$g_1 = \Big(8X_0^2 e^{-\frac{2\rho Y_0}{\sigma}} Y_0^3 \frac{e^{\frac{15}{2}t\sigma^2}-1}{\frac{15}{2}\sigma^2}\Big)^{-1},$$

$$g_2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\Big(2Y_0^4 + t\sigma^2 Y_0^4\frac{e^{6t\sigma^2}-1}{3} + 4\frac{Y_0^4}{3\sigma^2}(e^{6t\sigma^2}-1)\Big)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ponieważ spełniona jest tożsamość:

$$Y_0^2 e^{t\sigma^2} = \mathbb{E}Y_t^2 = 2\int_0^\infty Bl(K, Y_0, \sigma\sqrt{t})dK,$$

więc ostatecznie, na mocy (5.9), mamy prawdziwą nierówność:

$$\left|\mathbb{E}X_t^2 - X_0^2 - cY_0^2 e^{t\sigma^2}\right| < \frac{1}{100}.$$

5.2 Własność procesu SABR dla $\beta = 1$

Proces stochastyczny X_t zadany dynamiką SABR dla $\beta = 1$ ma ciekawą własność. Tą własnością jest zależność rekurencyjna między zdefiniowanymi następująco funkcjami ($n = 0, 1, 2, ..$):

$$\phi_n(t) := \mathbb{E}\Big(X_t e^{-n\sigma Z_t}\Big). \tag{5.16}$$

Jeżeli $\rho \in (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ to dla ustalonego $t \geq 0$ z uwagi 5.2: $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$, czyli funkcja ϕ_n jest dobrze zdefiniowana. Wynika to z nierówności Schwartza:

$$\mathbb{E}\Big(X_t e^{-n\sigma Z_t}\Big) \leq \Big(\mathbb{E}X_t^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\mathbb{E}e^{-2n\sigma Z_t}\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Co więcej, gdy X_t jest martyngałem (czyli na mocy uwagi 5.2 dla $\rho \leq 0$), znamy postać funkcji ϕ_0, a tym samym w kolejnych iteracjach, dzięki wyprowadzonej niżej zależności rekurencyjnej, potrafimy wyznaczyć postać funkcji $\phi_1, \phi_2, ...$ Pamiętamy, że X_t oraz Y_t mają z założenia ciągłe trajektorie.

Twierdzenie 5.9. W modelu IV, dla $\rho \in (-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$ oraz $n = 0, 1, 2, ..$, funkcja ϕ_n jest ciągła oraz spełnia rekurencyjną zależność:

$$\phi_n(t) = X_0 + \frac{n^2\sigma^2}{2}\int_0^t \phi_n(s)ds - n\sigma\rho Y_0 \int_0^t e^{-\frac{\sigma^2 s}{2}}\phi_{n-1}(s)ds, \tag{5.17}$$

gdzie:

$$\phi_0(t) = X_0.$$

W szczególności:

$$\phi_1(t) = e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}\Big[X_0 - X_0 Y_0 \frac{\rho}{\sigma}\Big] + e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}} X_0 Y_0 \frac{\rho}{\sigma}.$$

Dowód. Z założenia mamy:

$$\rho \in \Big(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big].$$

Zatem:

$$4 \leq \frac{1}{1-\rho^2},$$

i na mocy uwagi 5.2, dla każdego $t \geq 0$, czwarty moment X_t istnieje i jest skończony. Zatem istnieje również drugi moment X_t. Zauważmy, że dla $\beta = 1$ mamy dla każdego $t \geq 0$: $X_t > 0$. Wynika to z faktu, że X_t jest eksponentą stochastyczną. Bezpośrednio z założeń modelu IV mamy:

$$X_t = X_0 e^{\int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds} > 0.$$

Udowodnimy ciągłość funkcji $t \mapsto \phi_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Wybierzmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że ruch Browna W_t z założeń modelu IV możemy przedstawić jako:

$$W_t = \rho Z_t + \sqrt{1-\rho^2} V_t,$$

gdzie V_t jest niezależnym od Z_t ruchem Browna. W takim razie mamy:

$$\begin{aligned}
\phi_n(t) &= \mathbb{E}[X_t e^{-n\sigma Z_t}] = \mathbb{E}\Big[X_0 e^{\int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds - n\sigma Z_t}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[X_0 e^{\rho\int_0^t Y_s dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds - n\sigma Z_t}\mathbb{E}\Big[e^{\sqrt{1-\rho^2}\int_0^t Y_s dV_s}\Big|\mathcal{F}_t^Z\Big]\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[X_0 e^{\rho\int_0^t Y_s dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds - n\sigma Z_t} e^{\frac{1-\rho^2}{2}\int_0^t Y_s^2 ds}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[X_0 e^{\rho\int_0^t Y_s dZ_s - \frac{\rho^2}{2}\int_0^t Y_s^2 ds - n\sigma Z_t}\Big] = \mathbb{E}\Big[X_0 M_t e^{-n\sigma Z_t}\Big],
\end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{F}_t^Z = \sigma(Z_s : s \leq t)$ oraz $M_t = e^{\rho\int_0^t Y_s dZ_s - \frac{\rho^2}{2}\int_0^t Y_s^2 ds}$. Zauważmy, że:

$$M_t = e^{\rho\int_0^t Y_s dZ_s - \frac{\rho^2}{2}\int_0^t Y_s^2 ds} = e^{\frac{\rho}{\sigma}[Y_t - Y_0] - \frac{\rho^2}{2}\int_0^t Y_s^2 ds} \leq e^{-\frac{\rho}{\sigma}Y_0},$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $\rho < 0$. Mamy teraz dla $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\Big|\phi_n(t) - \phi_n(s)\Big| &= X_0\Big|\mathbb{E}\Big(M_t e^{-n\sigma Z_t} - M_s e^{-n\sigma Z_s}\Big)\Big| \\
&\leq X_0\mathbb{E}\Big(e^{-n\sigma Z_t}\Big|M_t - M_s\Big|\Big) + X_0\mathbb{E}\Big(M_s\Big|e^{-n\sigma Z_t} - e^{-n\sigma Z_s}\Big|\Big).
\end{aligned}$$

Bez straty ogólności załóżmy, że $t \geq s$. Zauważmy, że z nierówności Schwartza:

$$\mathbb{E}\Big(e^{-n\sigma Z_t}\Big|M_t - M_s\Big|\Big) \leq \sqrt{\mathbb{E}e^{-2n\sigma Z_t}}\sqrt{\mathbb{E}(M_t - M_s)^2} =: I_{s,t}$$

oraz

$$\mathbb{E}\Big(M_s\Big|e^{-n\sigma Z_t} - e^{-n\sigma Z_s}\Big|\Big) \leq \sqrt{\mathbb{E}M_s^2}\sqrt{\mathbb{E}(e^{-n\sigma Z_t} - e^{-n\sigma Z_s})^2} =: II_{s,t}.$$

Udowdnimy teraz, że:

$$\lim_{s \to t} I_{s,t} = 0,$$
$$\lim_{s \to t} II_{s,t} = 0.$$

Z_t jest ruchem Browna, więc:

$$\mathbb{E}e^{-2n\sigma Z_t} = e^{2n^2\sigma^2 t}$$

oraz

$$\mathbb{E}(e^{-n\sigma Z_t} - e^{-n\sigma Z_s})^2 = e^{2n^2\sigma^2 t} + e^{2n^2\sigma^2 s} - 2e^{\frac{1}{2}n^2\sigma^2 t + \frac{3}{2}n^2\sigma^2 s},$$

bo:

$$\mathbb{E}e^{-n\sigma(Z_t+Z_s)} = \mathbb{E}\Big(e^{-n\sigma(Z_t-Z_s)}e^{-2n\sigma Z_s}\Big) = \mathbb{E}e^{-n\sigma(Z_t-Z_s)}\mathbb{E}e^{-2n\sigma Z_s}.$$

Wykazaliśmy wyżej, że $M_t \leq e^{-\frac{\varrho}{\sigma}Y_0}$, więc:

$$(M_t - M_s)^2 \leq 2M_t^2 + 2M_s^2 \leq 4e^{-2\frac{\varrho}{\sigma}Y_0},$$

zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej oraz z ciągłości trajektorii procesu Y_t otrzymujemy:

$$\lim_{s \to t} I_{s,t} = e^{n^2\sigma^2 t}\sqrt{\mathbb{E}\lim_{s \to t}(M_t - M_s)^2} = 0.$$

Ponadto:

$$\begin{aligned}
\lim_{s \to t} II_{s,t} &= \lim_{s \to t}\left(\sqrt{\mathbb{E}M_s^2}\sqrt{\mathbb{E}(e^{-n\sigma Z_t} - e^{-n\sigma Z_s})^2}\right) \\
&= \lim_{s \to t}\left(\sqrt{\mathbb{E}M_s^2}\sqrt{e^{2n^2\sigma^2 t} + e^{2n^2\sigma^2 s} - 2e^{\frac{1}{2}n^2\sigma^2 t + \frac{3}{2}n^2\sigma^2 s}}\right) \\
&\leq \lim_{s \to t}\left(e^{-\frac{\varrho}{\sigma}Y_0}\sqrt{e^{2n^2\sigma^2 t} + e^{2n^2\sigma^2 s} - 2e^{\frac{1}{2}n^2\sigma^2 t + \frac{3}{2}n^2\sigma^2 s}}\right) \\
&= e^{-\frac{\varrho}{\sigma}Y_0}\sqrt{\lim_{s \to t}\left[e^{2n^2\sigma^2 t} + e^{2n^2\sigma^2 s} - 2e^{\frac{1}{2}n^2\sigma^2 t + \frac{3}{2}n^2\sigma^2 s}\right]} = 0.
\end{aligned}$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$\lim_{s\to t}\Big|\phi_n(t)-\phi_n(s)\Big| \le X_0 \lim_{s\to t}(I_{s,t}+II_{s,t})=0.$$

Wykazaliśmy ciągłość funkcji ϕ_n.

Wykażemy teraz zależność rekurencyjną (5.17). Ze wzoru Ito oraz równości (5.1), dla $n=0,1,2,..$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} d\Big(X_t e^{-n\sigma Z_t}\Big) &= e^{-n\sigma Z_t}dX_t - n\sigma X_t e^{-n\sigma Z_t}dZ_t + \frac{n^2\sigma^2}{2}X_t e^{-n\sigma Z_t}dt \\ &\quad - n\sigma\rho X_t Y_0 e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}-(n-1)\sigma Z_t}dt. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ponieważ Z_t jest standardowym ruchem Browna, dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ oraz dla każdego $t\ge 0$ mamy:

$$\int_0^t \Big(\mathbb{E}e^{-2n\sigma Z_s}\Big)^{\frac{1}{2}}ds = \int_0^t \Big(e^{2n^2\sigma^2 s}\Big)^{\frac{1}{2}}ds = \int_0^t e^{n^2\sigma^2 s}ds < \infty.$$

X_t jest martyngałem, więc X_t^4 jest podmartyngałem i w rezultacie mamy oszacowanie:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{E}\Big[X_s^2 Y_0^2 e^{-\sigma^2 s-2(n-1)\sigma Z_s}\Big]ds &\le Y_0^2\int_0^t e^{-\sigma^2 s}\Big(\mathbb{E}X_s^4\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\mathbb{E}e^{-4(n-1)\sigma Z_s}\Big)^{\frac{1}{2}}ds \\ &\le Y_0^2\int_0^t e^{-\sigma^2 s}\Big(\mathbb{E}X_t^4\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\mathbb{E}e^{-4(n-1)\sigma Z_s}\Big)^{\frac{1}{2}}ds \\ &\le Y_0^2\Big(\mathbb{E}X_t^4\Big)^{\frac{1}{2}}\int_0^t \Big(\mathbb{E}e^{-4(n-1)\sigma Z_s}\Big)^{\frac{1}{2}}ds < \infty. \end{aligned}$$

W takim razie martyngały lokalne z prawej strony (5.18) są martyngałami i po wzięciu stronami wartości oczekiwanej, z (5.18) otrzymujemy:

$$\phi_n(t) = \phi_n(0) + \frac{n^2\sigma^2}{2}\int_0^t \phi_n(u)du - n\sigma\rho\int_0^t Y_0 e^{-\frac{\sigma^2 u}{2}}\phi_{n-1}(u)du. \tag{5.19}$$

Załóżmy teraz, na chwilę, że funkcje $t\mapsto \mathbb{E}X_t e^{-n\sigma Z_t}$ są różniczkowalne. W rezultacie rozpatrujemy, odpowiadające równaniu całkowemu (5.19), równanie różniczkowe:

$$\phi_n'(t) = \frac{n^2\sigma^2}{2}\phi_n(t) - n\sigma\rho Y_0 e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}\phi_{n-1}(t).$$

Dla każdego $n = 0, 1, 2, .., $ z (5.16), prawdziwa jest równość $\phi_n(0) = X_0$. Dla $n = 1$ ostatnie równanie różniczkowe przyjmuje postać:

$$\phi_1^{'}(t) = \frac{\sigma^2}{2}\phi_1(t) - \sigma\rho Y_0 e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}\phi_0(t). \tag{5.20}$$

Ponieważ $\phi_0(t) = X_0$ oraz $\phi_1(0) = X_0$, więc istnieje dokładnie jedno ciągłe rozwiązanie równania (5.20) i jest ono postaci:

$$\phi_1(t) = e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}\left[X_0 - X_0 Y_0 \frac{\rho}{\sigma}\right] + e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}} X_0 Y_0 \frac{\rho}{\sigma}.$$

Mając postać funkcji $\phi_1(t)$, rozwiązujemy równanie (5.19) dla $n = 2$:

$$\phi_2^{'}(t) = 2\sigma^2\phi_2(t) - 2\sigma\rho Y_0 e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}\phi_1(t)$$

i w rezultacie otrzymujemy postać funkcji $\phi_2(t)$. Postepując iteracyjnie dla $n = 3, 4, ..$ znajdujemy wszystkie funkcje ϕ_n i stwierdzamy, że teza twierdzenia jest prawdziwa dla funkcji różniczkowalnych ϕ_n.

Aby zakończyć dowód pokażemy, że równanie całkowe (5.19) ma jednoznaczne rozwiązanie. Ponieważ znaleziona funkcja ϕ_n spełnia to równanie, więc jest tym jedynym rozwiązaniem. Załóżmy niewprost, że istnieją dwa ciągi funkcji ciągłych ϕ_n^j $j = 1, 2$ spełniające równanie (5.19) oraz takie, że $\phi_0^1 \equiv X_0$, $\phi_0^2 \equiv X_0$ oraz $\phi_n^1(0) = X_0$, $\phi_n^2(0) = X_0$. Niech $\phi_n^* := \phi_0^1 - \phi_0^2$. Zatem ϕ_n^* spełnia równanie (5.19), $\phi_0^*(t) = 0$ oraz $\phi_n^*(0) = 0$. Mamy dalej:

$$\phi_n^*(t) = \frac{n^2\sigma^2}{2}\int_0^t \phi_n^*(u)du - n\sigma\rho\int_0^t Y_0 e^{-\frac{\sigma^2 u}{2}}\phi_{n-1}^*(u)du.$$

Ponieważ $\phi_0^*(t) = 0$ więc dla $n = 1$:

$$\phi_1^*(t) = \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \phi_1^*(u)du.$$

Z ostatniej równości otrzymujemy:

$$|\phi_1^*(t)| \leq \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t |\phi_1^*(u)|du,$$

a zatem z nierówności Gronwalla otrzymujemy $\phi_1^* \equiv 0$. Dalej dowodzimy przez indukcję. Dla $n > 1$ załóżmy, że $\phi_{n-1}^* \equiv 0$. W takim razie mamy:

$$\phi_n^*(t) = \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \phi_n^*(u)du$$

i postępujemy jak dla $n = 1$, czyli z nierówności:

$$|\phi_n^*(t)| \leq \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t |\phi_n^*(u)| du$$

oraz nierówności Gronwalla otrzymujemy $\phi_n^* \equiv 0$. □

5.3 Nowa metoda wyceny opcji w modelu SABR dla $\beta = 1$

W tym podrozdziale wyprowadzimy kolejną, rekurencyjną zależność między momentami procesu zadanego dynamiką SABR dla $\beta = 1$. Znaleziona rekurencyjna formuła pozwala na obliczenie, dla każdej liczby naturalnej n, momentów $\mathbb{E}(\ln X_t)^n$. W konsekwencji, dla ustalonego $t > 0$ będziemy mogli przybliżyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $V_t = \ln X_t$. Nastepnie wykażemy, że funkcja charakterystyczna zmiennej losowej V_t jest całkowalna, a dzięki temu stwierdzimy, że istnieje gęstość V_t. Dzięki przyblizeniu gęstości zmiennej losowej V_t bedziemy mogli zaprezentować zupełnie nowy sposób wyceny opcji w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$. Wyznaczona gestość pozwala wycenić w tym modelu dowolny instrument pochodny o wypłacie bedącej funkcją X_t. Wyprowadzimy również teoretyczne wzory na ceny opcji waniliowych w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$, które będą uogólnieniem cen opcji waniliowych w modelu Blacka. Dzięki uzyskanym wynikom, możemy przyblizyć cenę kontraktu CMS. Nasze rozważania nad nową metodą wyceny, w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$, rozpoczniemy od krótkiej analizy wyceny kontraktów CMS. Do tej pory, problem wyceny kontraktu CMS rozwiązywano poprzez oszacowanie funkcji drugiego momentu procesu reprezentującego stopę swapową. W swoich pracach Mercurio-Pallavicini [37], a także Mercurio-Morini [35] podają sposób obliczenia drugiego momentu SABR poprzez aproksymację całki po wszystkich wartościach kursu wykonania cen opcji kupna w modelu SABR. W tym celu korzystają z algebraicznej tożsamości:

$$x^2 = 2 \int_0^\infty (x - K)^+ dK,$$

która po podstawieniu X_t w miejsce x oraz po wzięciu stronami wartości oczekiwanej, przyjmuje postać:

$$\mathbb{E}X_t^2 = 2\int_0^\infty \mathbb{E}(X_t - K)^+ dK,$$

gdzie wartość oczekiwana pod całką jest ceną opcji kupna w modelu SABR. Trudność wyceny kontraktu CMS w modelu SABR polega na obliczeniu drugiego momentu procesu X_t. Aby wyznaczyć ten drugi moment procesu modelowanego dynamiką SABR, Mercurio et.al proponują przybliżać ów moment poprzez wyznaczenie powyższej całki metodami numerycznymi. Poniżej zaproponujemy inny sposób przybliżenia wartości oczekiwanej $\mathbb{E}X_t^\delta$ dla $\delta > 1$. W szczególności otrzymamy nową metodę przybliżenia $\mathbb{E}X_t^2$ i wyceny kontraktu CMS.

Lemat 5.10. Dla każdego $x > 0$ oraz $\delta \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość:

$$x^\delta = \sum_{n=0}^\infty \frac{\delta^n (\ln x)^n}{n!}. \tag{5.21}$$

Dowód. Ponieważ dla $y \in \mathbb{R}$ mamy:

$$e^y = \sum_{n=0}^\infty \frac{y^n}{n!},$$

więc podstawiając w tej równości $y = \delta \ln x$ otrzymujemy tezę lematu.

□

Lemat 5.11. W modelu IV z parametrem $\beta = 1$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \geq 0$:

$$\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}|\ln X_s|^n < \infty.$$

Dowód. Bezpośrednio z założeń modelu IV, a dokładniej z (5.1), otrzymujemy:

$$\ln X_t = \ln X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t Y_u^2 du + \int_0^t Y_u dW_u.$$

Prawdziwe jest oszacowanie:

$$\mathbb{E}|\ln X_t|^n \leq 3^{n-1}\Big(\mathbb{E}|\ln X_0|^n + \mathbb{E}(\frac{1}{2}\int_0^t Y_u^2 du)^n + \mathbb{E}(\int_0^t Y_u dW_u)^n\Big).$$

Zauważmy dalej, że dla ciągłej funkcji $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $t \geq 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność:

$$\Big(\int_0^t f(u)du\Big)^n \leq t^{n-1}\int_0^t f^n(u)du.$$

Istotnie, z nierówności *Höldera* dla $p = n$ oraz $q = \frac{n}{n-1}$ otrzymujemy:

$$\int_0^t f(u)du \leq \Big(\int_0^t f^n(u)du\Big)^{\frac{1}{n}}\Big(\int_0^t 1du\Big)^{1-\frac{1}{n}}.$$

Korzystając z powyższej nierówności otrzymujemy kolejne oszacowanie:

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t Y_u^2 du\Big)^n \leq t^n\mathbb{E}\Big(\int_0^t Y_u^{2n}du\Big) =: c_n(t),$$

gdzie funkcja c_n jest ciągła.

Z drugiej strony, jeśli skorzystamy z faktu (Karatzas-Shreve [30], fakt 3.3.25, s. 163): jeśli S_t jest procesem $\mathcal{F}_t$- mierzalnym, $m \in \mathbb{N}$ oraz

$$\mathbb{E}\int_0^t |S_u|^m du < \infty,$$

to prawdziwa jest nierówność:

$$\mathbb{E}\Big|\int_0^t S_u dW_u\Big|^m \leq \Big(\frac{m(m-1)}{2}\Big)^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m}{2}-1}\mathbb{E}\int_0^t |S_u|^m du.$$

Powyższy fakt jest prawdziwy dla $S_t := Y_t$ ponieważ:

$$\mathbb{E}\int_0^t Y_u^m du = Y_0^m \int_0^t e^{\frac{m(m-1)}{2}\sigma^2 u}du < \infty.$$

W rezultacie dla $m = n$ otrzymujemy oszacowanie:

$$\mathbb{E}(\int_0^t Y_u dW_u)^n \leq \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}-1}\mathbb{E}\int_0^t |Y_u|^n du := d_n(t),$$

gdzie d_n jest funkcją ciągłą. W takim razie, z ostatnich nierówności otrzymujemy oszacowanie:

$$\mathbb{E}|\ln X_t|^n \leq 3^{n-1}\Big(\mathbb{E}|\ln X_0|^n + c_n(t) + d_n(t)\Big) =: F_n(t),$$

gdzie F jest funkcja ciągłą.

Ponieważ funkcja ciągła na przedziale skończonym jest ograniczona, więc w rezultacie dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $t \geq 0$ otrzymujemy:

$$\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}|\ln X_s|^n \leq \sup_{s\in[0,t]} F_n(s) < \infty$$

□

Poniżej zaproponujemy nową metodę przybliżenia momentów $\mathbb{E}X_t^\delta$.

Uwaga 5.12. Z lematu 5.10 wiemy, że funkcję $x \mapsto x^\delta$ mozemy aproksymować wielomianem $w_N(x)$ postaci:

$$w_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\delta^n (\ln x)^n}{n!}. \tag{5.22}$$

Podstawiając X_t w miejsce x oraz biorąc w równości (5.22) stronami wartość oczekiwaną otrzymamy:

$$\mathbb{E}w_N(X_t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\delta^n}{n!}\mathbb{E}(\ln X_t)^n.$$

Z lematu 5.11 prawa strona ostatniej równości jest dobrze określona. W rezultacie, dla $\delta > 1$ (gdy moment $\mathbb{E}X_t^\delta$ istnieje) i dużego N otrzymujemy przybliżenie:

$$\mathbb{E}X_t^\delta \approx \mathbb{E}w_N(X_t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\delta^n}{n!}\mathbb{E}(\ln X_t)^n. \tag{5.23}$$

Aby wykorzystać zaproponowane przybliżenie musimy obliczyć wartości oczekiwane $\mathbb{E}(\ln X_t)^n$. W dowodzie poniższego twierdzenia zaprezentujemy jak to zrobić.

Zanim przedstawimy twierdzenie dotyczące wyznaczenia momentów $\mathbb{E}(\ln X_t)^n$ udowodnimy, że przy dodatkowych założeniach, po podstawieniu w równości (5.21) X_t w miejsce x oraz $-\delta$ w miejsce δ, możemy wejść z wartością oczekiwaną pod znak nieskończonej sumy.

Twierdzenie 5.13. W modelu IV z parametrem $\beta = 1$, niech $X_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\rho Y_0}{\sigma}}$, $\delta > 0$ oraz $\rho \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$. Wówczas:

$$\mathbb{E}X_t^{-\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \delta^n}{n!} \mathbb{E}(\ln X_t)^n, \tag{5.24}$$

o ile któraś ze stron (5.24) jest skończona.

W dowodzie twierdzenia 5.13 wykorzystamy następujący lemat:

Lemat 5.14. W modelu IV, dla $\beta = 1$, niech $X_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\rho Y_0}{\sigma}}$ oraz $\rho \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$. Dla $M \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy ciąg θ_M następująco:

$$\theta_M = \mathbb{P}(X_t \leq M) + \mathbb{P}\Big(X_t \leq \frac{1}{M+1}\Big).$$

Wtedy ciąg θ_M maleje monotonicznie do 1 gdy $M \to \infty$.

Dowód. Z definicji θ_M oraz własności dystrybuanty zmiennej losowej X_t mamy $\lim_{M\to\infty} \theta_M = 1$. Zauważmy, że ruch Browna W_t z założeń modelu IV możemy przedstawić jako:

$$W_t = \rho Z_t + \sqrt{1-\rho^2} B_t,$$

gdzie B_t jest niezależnym od Z_t ruchem Browna. Zauważmy dalej, że dla dowolnej liczby $r > 0$ mamy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t \leq r) &= \mathbb{E}1_{\{X_0 e^{\int_0^t Y_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t Y_u^2 du} \leq r\}} \\
&= \mathbb{E}\mathbb{E}\Big[1_{\Big\{\rho \int_0^t Y_u dZ_u + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t Y_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t Y_u^2 du \leq \ln \frac{r}{X_0}\Big\}} |\mathcal{F}_t^Z\Big] \\
&= \mathbb{E}\mathbb{P}\Big(\mu_Z + \sigma_Z g \leq \ln \frac{r}{X_0} |\mathcal{F}_t^Z\Big) \\
&= \mathbb{E}\mathbb{P}\Big(g \leq \frac{\ln \frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z} |\mathcal{F}_t^Z\Big),
\end{aligned} \tag{5.25}$$

gdzie g jest zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$, niezależną od $\mathcal{F}_t^Z = \sigma(Z_u : u \leq t)$ oraz:

$$\mu_Z = \rho \int_0^t Y_u dZ_u - \frac{1}{2}\int_0^t Y_u^2 du = \frac{\rho}{\sigma}[Y_t - Y_0] - \frac{1}{2}\int_0^t Y_u^2 du \tag{5.26}$$

$$\sigma_Z^2 = (1-\rho^2)\int_0^t Y_u^2 du. \tag{5.27}$$

W rezultacie, z równości (5.25) otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(X_t \leq r) = \mathbb{E}\Phi\Big(\frac{\ln \frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big), \tag{5.28}$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$. Z równości (5.28) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\theta_M &= \mathbb{P}(X_t \leq M) + \mathbb{P}\Big(X_t \leq \frac{1}{M+1}\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big[\Phi\Big(\frac{\ln \frac{M}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) + \Phi\Big(\frac{\ln \frac{1}{(M+1)X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{5.29}$$

Udowodnimy teraz, że dla każdego $M = 1,2,3,...$ mamy $\mathbb{P}$- prawie na pewno:

$$\Phi\Big(\frac{\ln \frac{M}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) + \Phi\Big(\frac{\ln \frac{1}{(M+1)X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) \geq 1.$$

Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego, więc ostatnia nierówność jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\frac{\ln \frac{M}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z} + \frac{\ln \frac{1}{(M+1)X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z} \geq 0.$$

Ale $\sigma_Z > 0$, więc równoważny zapis ostatniej nierówności jest następujący:

$$\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{M}{M+1}\Big) + \ln\frac{1}{X_0} - \mu_Z \geq 0. \tag{5.30}$$

Z równości (5.26) mamy:

$$\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{M}{M+1}\Big) + \ln\frac{1}{X_0} - \mu_Z = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{M}{M+1}\Big) + \ln\frac{1}{X_0} - \frac{\rho}{\sigma}[Y_t - Y_0] + \frac{1}{2}\int_0^t Y_u^2 du.$$

Ale zauważmy, że z założeń lematu $\rho < 0$ oraz $X_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\rho Y_0}{\sigma}}$ zatem nierówność (5.30) jest prawdziwa, ponieważ:

$$\ln\Big(\sqrt{\frac{M}{M+1}}\frac{1}{X_0}e^{\frac{\rho Y_0}{\sigma}}\Big) \geq \ln\Big(\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{X_0}e^{\frac{\rho Y_0}{\sigma}}\Big) \geq \ln 1 = 0.$$

W rezultacie z (5.29) oraz (5.30) otrzymujemy dla każdego $M \in \mathbb{N}$:

$$\theta_M = \mathbb{E}\Big[\Phi\Big(\frac{\ln\frac{M}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) + \Phi\Big(\frac{\ln\frac{1}{(M+1)X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big] \geq 1.$$

Rozważmy teraz funkcję $\theta : [1, \infty) \to [1, 2]$ zdefiniowaną następująco:

$$\theta(x) = \mathbb{E}\Big[\Phi\Big(\frac{\ln\frac{x}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) + \Phi\Big(\frac{\ln\frac{1}{(x+1)X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big]. \tag{5.31}$$

Zauważmy, że funkcja pod znakiem wartości oczekiwanej (5.31) jest różniczkowalna względem x, a jej pochodna jest ograniczona przez całkowalną zmienną losową. W istocie:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\Phi\Big(\frac{\ln\frac{x}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) + \Phi\Big(\frac{\ln\frac{1}{(x+1)X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x\sigma_Z}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{x}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) - \frac{1}{(x+1)\sigma_Z}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{1}{(x+1)X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) \\
&\leq \frac{2x+1}{\sqrt{2\pi}x(x+1)\sigma_Z} \leq \frac{2x+1}{\sqrt{2\pi}x(x+1)}\Big[1 + \frac{1}{\sigma_Z^2}\Big].
\end{aligned}$$

Po wstawieniu prawej strony (5.27) do ostatniego wyrażenia mamy dalej:

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{\sqrt{2\pi}x(x+1)}\Big[1 + \frac{1}{\sigma_Z^2}\Big] &= \frac{2x+1}{\sqrt{2\pi}x(x+1)}\Big[1 + \frac{1}{(1-\rho^2)\int_0^t Y_u^2 du}\Big] \\
&\leq \frac{2x+1}{\sqrt{2\pi}x(x+1)}\Big[1 + \frac{1}{(1-\rho^2)}\frac{1}{t^2}\int_0^t Y_u^{-2} du\Big]
\end{aligned}$$

bo, z całkowej wersji nierówności Jensena dla funkcji wypukłej $f(y) = \frac{1}{y}$, dla $y > 0$, mamy:

$$\frac{1}{\int_0^t Y_u^2 du} \leq \frac{1}{t^2}\int_0^t Y_u^{-2} du.$$

Z ostatniego oszacowania otrzymujemy:

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{x\sigma_Z}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{x}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)-\frac{1}{(x+1)\sigma_Z}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{1}{(x+1)X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big]$$

$$\begin{aligned}&\leq\frac{2x+1}{\sqrt{2\pi}x(x+1)}\Big[1+\frac{1}{(1-\rho^2)}\frac{1}{t^2}\int_0^t\mathbb{E}Y_u^{-2}du\Big]\\&=\frac{2x+1}{\sqrt{2\pi}x(x+1)}\Big[1+\frac{1}{(1-\rho^2)}\frac{1}{3\sigma^2t^2}Y_0^{-2}(e^{3\sigma^2t}-1)\Big]<\infty.\end{aligned}$$

W rezultacie możemy skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem wartości oczekiwanej (na przykład Cheng [15]) i otrzymamy:

$$\begin{aligned}\theta'(x)&=\mathbb{E}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\Phi\Big(\frac{\ln\frac{x}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)+\Phi\Big(\frac{\ln\frac{1}{(x+1)X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big]\\&=\frac{1}{x\sigma_Z}\mathbb{E}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{x}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)-\frac{1}{(x+1)\sigma_Z}\mathbb{E}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{1}{(x+1)X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\\&=\frac{1}{\sigma_Z}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{x}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{x}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)-\frac{1}{x+1}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{1}{(x+1)X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Udowodnimy teraz, że dla każdego $x\geq 1$ mamy $\mathbb{P}$- prawie na pewno:

$$\frac{1}{x}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{x}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)-\frac{1}{x+1}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{1}{(x+1)X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\leq 0.$$

Ponieważ $\Phi'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$ ostatnia nierówność dla $x\geq 1$ jest równoważna nierówności:

$$\frac{x+1}{x}\leq e^{\frac{d_1^2}{2}-\frac{d_2^2}{2}},$$

gdzie:

$$\begin{aligned}d_1&=\frac{\ln\frac{x}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z},\\d_2&=\frac{\ln\frac{1}{(x+1)X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $x\geq 1$ mamy: $\frac{x+1}{x}\leq 2$, zatem:

$$2\leq e^{\frac{d_1^2}{2}-\frac{d_2^2}{2}}\Rightarrow\frac{x+1}{x}\leq e^{\frac{d_1^2}{2}-\frac{d_2^2}{2}}.$$

Udowodnimy teraz, że $\mathbb{P}$- prawie na pewno:

$$2 \leq e^{\frac{d_1^2}{2} - \frac{d_2^2}{2}}.$$

Wystarczy udowodnić, że:

$$d_1^2 - d_2^2 \geq 2 \ln 2.$$

Z przyjętych oznaczeń mamy:

$$d_1^2 - d_2^2 = (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) = \frac{1}{\sigma_Z^2} \ln[x(x+1)] \Big(\ln \Big[\frac{x}{x+1} \Big] + \ln \Big[\frac{1}{X_0^2} \Big] - 2\mu_Z \Big).$$

Ponieważ dla $x \geq 1$ mamy $\ln[x(x+1)] \geq \ln 2$, zatem wystarczy udwodnić, że:

$$\ln \Big[\frac{x}{x+1} \Big] + \ln \Big[\frac{1}{X_0^2} \Big] - 2\mu_Z - 2\sigma_Z^2 \geq 0.$$

Zauważmy teraz, że dla $x \geq 1$ mamy $\ln \left[\frac{x}{x+1} \right] \geq \ln \frac{1}{2}$, zatem po podstawieniu w ostatnim oszacowaniu (5.26) oraz (5.27) otrzymamy:

$$\ln \Big[\frac{x}{x+1} \Big] + \ln \Big[\frac{1}{X_0^2} \Big] - 2\mu_Z - 2\sigma_Z^2 \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \ln \frac{1}{2} + \ln \Big[\frac{1}{X_0^2} \Big] - 2 \Big[\frac{\rho}{\sigma} Y_t - \frac{\rho}{\sigma} Y_0 \Big] + \int_0^t Y_u^2 du - 2(1-\rho^2) \int_0^t Y_u^2 du \\ &= \ln \Big[\frac{1}{2X_0^2} e^{2\frac{\rho}{\sigma} Y_0} \Big] - 2\frac{\rho}{\sigma} Y_t + [2\rho^2 - 1] \int_0^t Y_u^2 du \geq 0. \end{aligned}$$

W ostatniej nierówności wykorzystaliśmy kolejno założenia $X_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\rho Y_0}{\sigma}}$ oraz $\rho \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$. Wykazaliśmy, że dla każdego $x \geq 1$: $\theta'(x) \leq 0$. Zatem funkcja $\theta(x)$ dla $x \geq 1$ jest nierosnąca. W rezultacie pokazaliśmy, że dla każdego $M \in \mathbb{N}$: $\theta_M \geq 1$, $\theta_{M+1} \leq \theta_M$ oraz $\lim_{M\to\infty} \theta_M = 1$. Oznacza to, że $\theta_M \searrow 1$. □

Dowód twierdzenia 5.13. Dla $M \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\mathbb{E} X_t^{-\delta} = \lim_{M \to \infty} \mathbb{E} \Big(X_t^{-\delta} 1_{\{\frac{1}{M+1} \leq X_t \leq M\}} \Big). \tag{5.32}$$

Istotnie, ponieważ $X_t > 0$ oraz dla $M \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq X_t^{\delta} 1_{\{\frac{1}{M+1} \leq X_t \leq M\}} \leq X_t^{\delta} 1_{\{\frac{1}{M+2} \leq X_t \leq M+1\}},$$

więc równość (5.32) jest prawdziwa z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej. Z lematu 5.10 otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(X_t^{-\delta} 1_{\{\frac{1}{M+1} \leq X_t \leq M\}}\Big) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \delta^n}{n!} (\ln X_t)^n 1_{\{\frac{1}{M+1} \leq X_t \leq M\}}\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \delta^n}{n!} \mathbb{E}\Big((\ln X_t)^n 1_{\{\frac{1}{M+1} \leq X_t \leq M\}}\Big).\end{aligned}$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej dla ciągu sum częściowych:

$$\Big(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n \delta^n}{n!} (\ln X_t)^n 1_{\{\frac{1}{M+1} \leq X_t \leq M\}}\Big)_{N=0,1,2,\ldots}.$$

Zdefiniujmy teraz miarę skończoną na $\mathbb{N}$ następująco $\nu(n) = \frac{\delta^n}{n!}$. Wówczas mamy:

$$\int_{\mathbb{N}} 1 d\nu(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} = e^{\delta}$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} (-1)^n \mathbb{E}\Big((\ln X_t)^n 1_{\{\frac{1}{M+1} \leq X_t \leq M\}}\Big) = \int_{\mathbb{N}} U_M(n) d\nu(n),$$

gdzie dla $n \in \mathbb{N}$:

$$U_M(n) = (-1)^n \mathbb{E}\Big((\ln X_t)^n 1_{\{\frac{1}{M+1} \leq X_t \leq M\}}\Big).$$

Zauważmy teraz, że dla parzystych $n = 2k$ oraz $M \in \mathbb{N}$ mamy:

$$U_{M+1}(2k) - U_M(2k) = \mathbb{E}\Big((\ln X_t)^{2k} [1_{\{\frac{1}{M+2} \leq X_t < \frac{1}{M+1}\}} + 1_{\{M < X_t \leq M+1\}}]\Big) \geq 0.$$

Dla $n = 2k+1$ mamy:

$$U_{M+1}(2k+1) - U_M(2k+1) = -\mathbb{E}\Big((\ln X_t)^{2k+1} [1_{\{\frac{1}{M+2} \leq X_t < \frac{1}{M+1}\}} + 1_{\{M < X_t \leq M+1\}}]\Big)$$

$$= -\mathbb{E}\Big((\ln X_t)^{2k+1} 1_{\{\frac{1}{M+2} \le X_t < \frac{1}{M+1}\}}\Big) - \mathbb{E}\Big((\ln X_t)^{2k+1} 1_{\{M < X_t \le M+1\}}\Big).$$

Zauważmy, że:

$$-\mathbb{E}\Big((\ln X_t)^{2k+1} 1_{\{\frac{1}{M+2} \le X_t < \frac{1}{M+1}\}}\Big)$$
$$\ge (\ln(M+1))^{2k+1}\Big[\mathbb{P}\Big(X_t \le \frac{1}{M+1}\Big) - \mathbb{P}\Big(X_t \le \frac{1}{M+2}\Big)\Big]$$

oraz:

$$-\mathbb{E}\Big((\ln X_t)^{2k+1} 1_{\{M < X_t \le M+1\}}\Big)$$
$$\ge -(\ln(M+1))^{2k+1}\Big[\mathbb{P}(X_t \le M+1) - \mathbb{P}(X_t \le M)\Big].$$

W takim razie z dwóch ostatnich oszacowań otrzymujemy:

$$\begin{aligned} U_{M+1}(2k+1) - U_M(2k+1) &\ge (\ln(M+1))^{2k+1}\Big[\mathbb{P}\Big(X_t \le M\Big) + \mathbb{P}\Big(X_t \le \frac{1}{M+1}\Big) \\ &\quad - \mathbb{P}\Big(X_t \le M+1\Big) - \mathbb{P}\Big(X_t \le \frac{1}{M+2}\Big)\Big] \\ &= (\ln(M+1))^{2k+1}[\theta_M - \theta_{M+1}] \ge 0, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej nierówności skorzystaliśmy z lematu 5.15. W takim razie dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $M \in \mathbb{N}$ mamy:

$$U_{M+1}(n) - U_M(n) \ge 0.$$

W rezultacie, ponieważ $U_M - U_1 \ge 0$, z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej mamy:

$$\lim_{M\to\infty} \int_{\mathbb{N}} [U_M(n) - U_1(n)] d\nu(n) = \int_{\mathbb{N}} \lim_{M\to\infty} [U_M(n) - U_1(n)] d\nu(n).$$

W takim razie:

$$\lim_{M\to\infty} \int_{\mathbb{N}} U_M(n) d\nu(n) = \int_{\mathbb{N}} \lim_{M\to\infty} U_M(n) d\nu(n).$$

Zauważmy teraz, że:

$$\Big|(-1)^n\Big((\ln X_t)^n 1_{\{M^{-1} \le X_t \le M+1\}}\Big)\Big| \le |\ln X_t|^n$$

oraz

$$\Big|(-1)^n \mathbb{E}\Big((\ln X_t)^n 1_{\{M^{-1} \le X_t \le M+1\}}\Big)\Big| \le \mathbb{E}|\ln X_t|^n < \infty,$$

więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej mamy:

$$\lim_{M\to\infty} U_M(n) = \lim_{M\to\infty} (-1)^n \mathbb{E}\Big((\ln X_t)^n 1_{\{M^{-1}\le X_t\le M+1\}}\Big) = (-1)^n \mathbb{E}(\ln X_t)^n.$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_t^{-\delta} &= \lim_{M\to\infty} \mathbb{E}\Big(X_t^{-\delta} 1_{\{M^{-1}\le X_t\le M+1\}}\Big) \\
&= \lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\delta^n}{n!} \mathbb{E}\Big((\ln X_t)^n 1_{\{M^{-1}\le X_t\le M+1\}}\Big) \\
&= \lim_{M\to\infty} \int_{\mathbb{N}} U_M(n) d\nu(n) = \int_{\mathbb{N}} \lim_{M\to\infty} U_M(n) d\nu(n) \\
&= \int_{\mathbb{N}} (-1)^n \mathbb{E}(\ln X_t)^n d\nu(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\delta^n}{n!} \mathbb{E}(\ln X_t)^n.
\end{aligned}$$

Jeśli zatem któraś ze stron (5.24) jest skończona, to teza twierdzenia jest prawdziwa. □

Twierdzenie 5.15. W modelu IV dla $\beta = 1$, istnieje algorytm, dzięki któremu dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $t \ge 0$ można wyznaczyć algebraiczny wzór na wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(\ln X_t)^n$.

Dowód. W dowodzie zaprezentujemy algorytm, dzieki któremu dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $t \ge 0$ można wyznaczyć algebraiczny wzór na wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(\ln X_t)^n$. Wprowadźmy oznaczenie:

$$u_{n,k}(t) = \mathbb{E}[(\ln X_t)^n Y_t^k], \tag{5.33}$$

dla $n, k = 0, 1, 2, ...$ oraz $t \ge 0$. Zauważmy, że z uwagi 3.2 oraz lematu 5.11:

$$\mathbb{E}[(\ln X_t)^n Y_t^k] \le \sqrt{\mathbb{E}(\ln X_t)^{2n}}\sqrt{\mathbb{E}(Y_t)^{2k}} < \infty,$$

więc funkcja $u_{n,k}$ jest dobrze określona. W pierwszej kolejności udowodnimy, że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ funkcja $t \mapsto u_{n,k}(t)$ jest ciągła. Ustalmy $t^* > 0$. Dla dowolnych $s, t \in [0, t^*]$ mamy z nierówności trójkąta oraz nierówności

Schwartza:

$$\begin{aligned}|u_{n,k}(t)-u_{n,k}(s)| &\le \mathbb{E}\Big(Y_t^k\Big|(\ln X_t)^n-(\ln X_s)^n\Big|\Big)+\mathbb{E}\Big((\ln X_s)^n\Big|Y_t^k-Y_s^k\Big|\Big)\\ &\le \sqrt{\mathbb{E}Y_t^{2k}}\sqrt{\mathbb{E}[(\ln X_t)^n-(\ln X_s)^n]^2}\\ &+\sqrt{\mathbb{E}(\ln X_s)^{2n}}\sqrt{\mathbb{E}[Y_t^k-Y_s^k]^2}=I_{s,t}+II_{s,t}, \qquad (5.34)\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}I_{s,t} &= \sqrt{\mathbb{E}Y_t^{2k}}\sqrt{\mathbb{E}[(\ln X_t)^n-(\ln X_s)^n]^2},\\ II_{s,t} &= \sqrt{\mathbb{E}(\ln X_s)^{2n}}\sqrt{\mathbb{E}[Y_t^k-Y_s^k]^2}.\end{aligned}$$

Udowodnimy, że:

$$\lim_{s\to t} I_{s,t}=0, \qquad (5.35)$$

$$\lim_{s\to t} II_{s,t}=0. \qquad (5.36)$$

Bez straty ogólności załóżmy, że $t\ge s$. Z lematu 5.11 istnieje $C>0$:

$$\sup_{s\in[0,t^*]}\mathbb{E}|\ln X_s|^{2n}<C^2.$$

W rezultacie:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t} II_{s,t} &\le C\lim_{s\to t}\sqrt{\mathbb{E}[Y_t^k-Y_s^k]^2}=C\lim_{s\to t}\sqrt{\mathbb{E}[Y_t^{2k}+Y_s^{2k}-2Y_t^kY_s^k]}\\ &= C\lim_{s\to t}Y_0^k\sqrt{e^{\frac{\sigma^2}{2}t[4k^2-2k]}+e^{\frac{\sigma^2}{2}s[4k^2-2k]}-2e^{t\frac{\sigma^2}{2}[k^2-k]+s\frac{\sigma^2}{2}[3k^2-k]}]}\\ &= CY_0^k\sqrt{\lim_{s\to t}\Big(e^{\frac{\sigma^2}{2}t[4k^2-2k]}+e^{\frac{\sigma^2}{2}s[4k^2-2k]}-2e^{t\frac{\sigma^2}{2}[k^2-k]+s\frac{\sigma^2}{2}[3k^2-k]}]\Big)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ponadto:

$$\lim_{s\to t} I_{s,t}=Y_0^k e^{t\frac{\sigma^2}{2}[2k^2-k]}\sqrt{\lim_{s\to t}\mathbb{E}[(\ln X_t)^n-(\ln X_s)^n]^2}. \qquad (5.37)$$

Z tożsamości $(a^n-b^n)=(a-b)\sum_{i=0}^{n-1}a^ib^{n-i-1}$ oraz z nierówności Schwartza mamy:

$$\mathbb{E}[(\ln X_t)^n-(\ln X_s)^n]^2\le\sqrt{\mathbb{E}\Big(\ln\frac{X_t}{X_s}\Big)^4}\sqrt{\mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(\ln X_t)^i(\ln X_s)^{n-i-1}\Big)^4}.$$

Z lematu 5.11 istnieje $C^* > 0$ takie, że dla $s, t \in [0, t^*]$:

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} (\ln X_t)^i (\ln X_s)^{n-i-1}\Big)^4 < (C^*)^2.$$

Istotnie, z nierówności Jensena dla funkcji $f(x) = x^4$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} (\ln X_t)^i (\ln X_s)^{n-i-1}\Big)^4 &\leq n^3 \mathbb{E} \sum_{i=0}^{n-1} (\ln X_t)^{4i} (\ln X_s)^{4(n-i-1)} \\ &\leq n^3 \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\mathbb{E}(\ln X_t)^{8i}} \sqrt{\mathbb{E}(\ln X_s)^{8(n-i-1)}} \\ &\leq n^3 \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{a_i} \sqrt{a_{n-i-1}},\end{aligned}$$

gdzie:

$$a_i = \sup_{s \in [0,t^*]} \mathbb{E} |\ln X_s|^{8i}.$$

W takim razie, z ostatnich oszacowań otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[(\ln X_t)^n - (\ln X_s)^n]^2 \leq C^* \sqrt{\mathbb{E}\Big(\ln \frac{X_t}{X_s}\Big)^4}. \tag{5.38}$$

Udowodnimy teraz, że:

$$\lim_{s \to t} \mathbb{E}\Big(\ln \frac{X_t}{X_s}\Big)^4 = 0. \tag{5.39}$$

Ze wzoru Ito oraz (5.1) mamy:

$$\ln X_t = \ln X_0 + \int_0^t Y_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t Y_u^2 du.$$

W takim razie, z ostatniej równości i nierówności $(a-b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\ln \frac{X_t}{X_s}\Big)^4 &= \mathbb{E}\Big(\int_s^t Y_u dW_u - \frac{1}{2} \int_s^t Y_u^2 du\Big)^4 \\ &\leq 8\mathbb{E}\Big(\int_s^t Y_u dW_u\Big)^4 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big(\int_s^t Y_u^2 du\Big)^4.\end{aligned}$$

Z nierówności:

$$\mathbb{E}\Big(\int_s^t Y_u^2 du\Big)^4 \leq (t-s)^3 \mathbb{E}\int_s^t Y_u^8 du$$

oraz z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t}\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big(\int_s^t Y_u^2 du\Big)^4 &\leq \lim_{s\to t}\frac{1}{2}(t-s)^3\mathbb{E}\int_s^t Y_u^8 du\\ &= \frac{1}{2}\lim_{s\to t}\Big((t-s)^3\int_s^t \mathbb{E}Y_u^8 du\Big) = 0.\end{aligned}$$

Zauważmy, że ruch Browna W_t z założeń modelu IV możemy przedstawić jako:

$$W_t = \rho Z_t + \sqrt{1-\rho^2}V_t,$$

gdzie V_t jest niezależnym od Z_t ruchem Browna. Zatem mamy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_s^t Y_u dW_u\Big)^4 &= \mathbb{E}\Big(\rho\int_s^t Y_u dZ_u + \sqrt{1-\rho^2}\int_s^t Y_u dV_u\Big)^4\\ &\leq 8\rho^4\mathbb{E}\Big(\int_s^t Y_u dZ_u\Big)^4 + 8(1-\rho^2)^2\mathbb{E}\Big(\int_s^t Y_u dV_u\Big)^4\\ &= 8\frac{\rho^4}{\sigma^4}\mathbb{E}[Y_t - Y_s]^4 + 24(1-\rho^2)^2\mathbb{E}\Big(\int_s^t Y_u^2 du\Big)^2\\ &\leq 8\frac{\rho^4}{\sigma^4}\mathbb{E}[Y_t - Y_s]^4 + 24(1-\rho^2)^2(t-s)\mathbb{E}\int_s^t Y_u^4 du. \quad (5.40)\end{aligned}$$

W ostatniej równości wykorzystalismy fakt, że $Y_t = Y_0 + \sigma\int_0^t Y_u dZ_u$ oraz, że dla ustalonej trajektorii Y_u dla $u \in [s,t]$ zmienna losowa $\int_s^t Y_u dV_u$ ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją $\int_s^t Y_u^2 du$. Z oszacowania (5.40) otrzymujemy dalej:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t}\mathbb{E}\Big(\int_s^t Y_u dW_u\Big)^4 &\leq \lim_{s\to t} 8\frac{\rho^4}{\sigma^4}\mathbb{E}[Y_t - Y_s]^4 + \lim_{s\to t} 24(1-\rho^2)^2(t-s)\mathbb{E}\int_s^t Y_u^4 du\\ &= \lim_{s\to t} 8\frac{\rho^4}{\sigma^4}\sum_{i=0}^{4}\frac{4!}{i!(4-i)!}\mathbb{E}Y_t^i(-Y_s)^{4-i} = 0.\end{aligned}$$

W rezultacie wykazaliśmy (5.39). Zauważmy teraz, że z (5.39), (5.38) oraz (5.37) wynika (5.35). Ciągłość funkcji $t \mapsto u_{n,k}(t)$ wynika z (5.34), (5.35) oraz (5.36).

Zaprezentujemy teraz algorytm obliczania $\mathbb{E}(\ln X_t)^n$. Ze wzoru Ito oraz z (5.1), (5.2) otrzymujemy (wzór jest prawdziwy dla dowolnych $n, k \in \mathbb{R}$):

$$
\begin{aligned}
(\ln X_t)^n Y_t^k = (\ln X_0)^n Y_0^k &+ n \int_0^t (\ln X_u)^{n-1} Y_u^{k+1} dW_u \\
&+ \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t (\ln X_u)^{n-2} Y_u^{k+2} du \\
&- \frac{n}{2} \int_0^t (\ln X_u)^{n-1} Y_u^{k+2} du + k\sigma \int_0^t (\ln X_u)^n Y_u^k dZ_u \\
&+ \frac{k(k-1)}{2} \sigma^2 \int_0^t (\ln X_u)^n Y_u^k du \\
&+ nk\sigma\rho \int_0^t (\ln X_u)^{n-1} Y_u^{k+1} du.
\end{aligned} \tag{5.41}
$$

Następnie zauważmy, że dla każdego $t \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_0^t (\ln X_u)^{2n} Y_u^{2k} du &\leq \frac{1}{2} \Big[\mathbb{E} \int_0^t (\ln X_u)^{4n} du + \mathbb{E} \int_0^t Y_u^{4k} du \Big] \\
&\leq \frac{1}{2} \Big[t \sup_{u \in [0,t]} \mathbb{E} |\ln X_u|^{4n} + \int_0^t \mathbb{E} Y_u^{4k} du \Big] \\
&= \frac{1}{2} \Big[t \sup_{u \in [0,t]} \mathbb{E} |\ln X_u|^{4n} + \frac{Y_0^{4k}}{\sigma^2 (8k^2 - 2k)} [e^{t\sigma^2(8k^2-2k)} - 1] \Big] \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

W ostatnim oszacowaniu skorzystaliśmy z twierdzenia Fubiniego, lematu 5.11 oraz uwagi 3.2. W konsekwencji, martyngały lokalne z prawej strony wzoru (5.41) są martyngałami. Po wzięciu w (5.41) stronami wartości oczekiwanych otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\ln X_t)^n Y_t^k] = (\ln X_0)^n Y_0^k &+ \frac{n(n-1)}{2}\int_0^t \mathbb{E}\Big((\ln X_u)^{n-2} Y_u^{k+2}\Big) du \\
&- \frac{n}{2}\int_0^t \mathbb{E}\Big((\ln X_u)^{n-1} Y_u^{k+2}\Big) du \\
&+ \frac{k(k-1)}{2}\sigma^2 \int_0^t \mathbb{E}\Big((\ln X_u)^{n} Y_u^{k}\Big) du \\
&+ nk\sigma\rho \int_0^t \mathbb{E}\Big((\ln X_u)^{n-1} Y_u^{k+1}\Big) du. \qquad (5.42)
\end{aligned}
$$

Załóżmy, na chwilę, że funkcje $t \mapsto u_{n,k}(t)$ są różniczkowalne. Wówczas, z równosci (5.42), otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne:

$$
\begin{aligned}
u'_{n,k}(t) = &\frac{n(n-1)}{2} u_{n-2,k+2}(t) - \frac{n}{2} u_{n-1,k+2}(t) \\
&+ \frac{k(k-1)}{2}\sigma^2 u_{n,k}(t) + nk\sigma\rho u_{n-1,k+1}(t). \qquad (5.43)
\end{aligned}
$$

Bezpośrednio z (5.33) mamy:

$$u_{n,k}(0) = (\ln X_0)^n Y_0^k.$$

Zauważmy teraz, że:

$$\mathbb{E}(\ln X_t)^n = u_{n,0}(t),$$

więc zadanie obliczenia momentu $\mathbb{E}(\ln X_t)^n$ sprowadza się do wyznaczenia, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, funkcji czasu $u_{n,0}$. Udowodnimy, że potrafimy iteracyjnie obliczać te funkcje. Zauważmy od razu, że z równości (5.43) dla $n = 0$ mamy dla każdego $k = 0, 1, 2, ..$:

$$u'_{0,k}(t) = \frac{k(k-1)}{2}\sigma^2 u_{0,k}(t) \qquad (5.44)$$

oraz $u_{0,k}(0) = Y_0^k$. Równanie (5.44) ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$u_{0,k}(t) = e^{\frac{k(k-1)}{2}\sigma^2 t} Y_0^k.$$

Ze wzoru Ito oraz (5.1) mamy:

$$\ln X_t = \ln X_0 + \int_0^t Y_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t Y_u^2 du,$$

więc z uwagi 3.2 otrzymujemy:

$$u_{1,0}(t) = \mathbb{E}[\ln X_t] = \ln X_0 - \frac{1}{2\sigma^2} Y_0^2 [e^{\sigma^2 t} - 1].$$

Czyli dla każdego $k \in \mathbb{N}$ znaleźliśmy wzory na $u_{0,k}$ oraz $u_{1,0}$. Ponadto, gdy $n = 1$ z równości (5.43) otrzymujemy:

$$u'_{1,k}(t) = -\frac{1}{2} u_{0,k+2}(t) + \frac{k(k-1)}{2} \sigma^2 u_{1,k}(t) + k\sigma\rho u_{0,k+1}(t),$$

a ponieważ znaleźliśmy wzory na $u_{0,k}$, więc rozwiązując ostatnie równanie znajdujemy $u_{1,k}$ dla wszystkich $k = 0, 1, 2, ...$

Ponieważ dla $k = 0$ z (5.43) mamy:

$$u'_{n,0}(t) = \frac{n(n-1)}{2} u_{n-2,2}(t) - \frac{n}{2} u_{n-1,2}(t), \tag{5.45}$$

więc żeby obliczyć $u_{n,0}$ musimy znać $u_{n-2,2}$ oraz $u_{n-1,2}$. Wiemy, że $u_{n,0}(0) = (\ln X_0)^n$. Funkcję $u_{2,0}$ potrafimy wyznaczyć, bo wcześniej wyznaczyliśmy $u_{0,2}$ oraz $u_{1,2}$. Dalej, dla $n = 3$ mamy z (5.43):

$$u'_{3,0}(t) = 3u_{1,2}(t) - \frac{3}{2} u_{2,2}(t).$$

Musimy teraz znać postać funkcji $u_{2,2}$, ponieważ funkcję $u_{1,2}$ wyznaczyliśmy wcześniej. Z równości (5.43) otrzymujemy:

$$u'_{2,2}(t) = u_{0,4}(t) - u_{1,4}(t) + \sigma^2 u_{2,2}(t) + 4\sigma\rho u_{1,3}(t).$$

Znaleźliśmy wcześniej $u_{0,k}$ i $u_{1,k}$ więc rozwiązując ostatnie równanie znajdujemy $u_{2,2}$ i dalej $u_{3,0}$.

W ogólności, aby wyznaczyć $u_{n,0}$ dla dowolnego n, korzystając z równania (5.45), musimy wyznaczyć przedtem $u_{n-2,2}$ oraz $u_{n-1,2}$. Aby znaleźć $u_{n-1,2}$ musimy wyznaczyć $u_{n-2,4}$, $u_{n-3,4}$ oraz $u_{n-2,3}$. Aby znaleźć $u_{n-2,2}$ musimy wyznaczyć $u_{n-4,4}$, $u_{n-3,4}$ oraz $u_{n-3,3}$. Rozumując w ten sam sposób schodzimy coraz niżej z wartością pierwszego indeksu funkcji $u_{n,k}$, aż dochodzimy do $u_{0,2(n-1)}$, $u_{1,2(n-1)}$ oraz $u_{1,2n-1}$. Ale wykazaliśmy wcześniej, że potrafimy wyznaczyć wzory ostatnich z wymienionych funkcji.

Aby zakończyć dowód wykażemy indukcyjnie, że równanie całkowe odpowiadające równaniu (5.43) ma jednoznaczne rozwiązanie w klasie funkcji ciągłych. Z równania (5.43) mamy dla całkowitych, nieujemnych liczb n, k:

$$u_{n,k}(t) = u_{n,k}(0) + \frac{n(n-1)}{2}\int_0^t u_{n-2,k+2}(s)ds - \frac{n}{2}\int_0^t u_{n-1,k+2}(s)ds$$
$$+ \frac{k(k-1)}{2}\int_0^t \sigma^2 u_{n,k}(s)ds + nk\sigma\rho\int_0^t u_{n-1,k+1}(s)ds. \qquad (5.46)$$

Wiemy, że $u_{n,k}(0) = (\ln X_0)^n Y_0^k$. Gdy $n = 0$ z równości (5.46) otrzymujemy dla każdego k:

$$u_{0,k}(t) = u_{0,k}(0) + \frac{k(k-1)}{2}\int_0^t \sigma^2 u_{0,k}(s)ds.$$

Załóżmy teraz niewprost, że istnieją dwie, różne funkcje ciągłe $u^1_{0,k}$, $u^2_{0,k}$ spełniające ostatnie równanie całkowe. Wtedy funkcja $u^*_{0,k} := u^1_{0,k} - u^2_{0,k}$ spełnia równanie całkowe:

$$u^*_{0,k}(t) = \frac{k(k-1)}{2}\int_0^t \sigma^2 u^*_{0,k}(s)ds.$$

W takim razie, z ostatniej równości, otrzymujemy oszacowanie:

$$|u^*_{0,k}(t)| \leq \frac{k(k-1)}{2}\int_0^t \sigma^2 |u^*_{0,k}(s)|ds.$$

Z nierówności Gronwalla, dla każdego $t \geq 0$, otrzymujemy: $|u^*_{0,k}(t)| \leq 0$. Zatem istnieje tylko jedno ciągłe rozwiązania równania (5.46) dla $n = 0$.

Gdy $n = 1$, równanie (5.46) przybiera postać:

$$u_{1,k}(t) = u_{1,k}(0) - \frac{1}{2}\int_0^t u_{0,k+2}(s)ds + \frac{k(k-1)}{2}\int_0^t \sigma^2 u_{1,k}(s)ds + k\sigma\rho\int_0^t u_{0,k+1}(s)ds.$$

Załóżmy, że istnieją dwie, różne funkcje ciągłe $u^1_{1,k}$, $u^2_{1,k}$ spełniające ostatnie równanie całkowe. Ponieważ wykazaliśmy, że dla każdego k istnieje tylko jedna funkcja $u_{0,k}$ spełniająca równanie (5.46), więc funkcja $u^*_{1,k} := u^1_{1,k} - u^2_{1,k}$ spełnia równanie:

$$u^*_{1,k}(t) = \frac{k(k-1)}{2}\int_0^t \sigma^2 u^*_{1,k}(s)ds,$$

a stąd:

$$|u^*_{1,k}(t)| \leq \frac{k(k-1)}{2} \int_0^t \sigma^2 |u^*_{1,k}(s)| ds$$

i z nierówności Gronwalla otrzymujemy $u^*_{1,k} \equiv 0$.

Wykonamy teraz krok indukcyjny. Załóżmy, że równanie całkowe (5.46) ma jednoznaczne rozwiązanie dla $i \leq n-1$ i $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedna funkcja $u_{n,k}$ spełniająca równanie (5.46). Załóżmy niewprost, że istnieją dwie takie funkcje: $u^1_{n,k}$, $u^2_{n,k}$. Wówczas, na mocy założenia indukcyjnego, funkcja $u^*_{n,k} = u^1_{n,k} - u^2_{n,k}$ spełnia równanie:

$$u^*_{n,k}(t) = \frac{k(k-1)}{2} \int_0^t \sigma^2 u^*_{n,k}(s) ds.$$

Podobnie jak wcześniej, z ostatniej równości otrzymujemy oszacowanie:

$$|u^*_{n,k}(t)| \leq \frac{k(k-1)}{2} \int_0^t \sigma^2 |u^*_{n,k}(s)| ds.$$

Ostatecznie, z nierównosci Gronwalla, otrzymujemy $u^*_{n,k} \equiv 0$. Krok indukcyjny został wykonany.

W rezultacie, opuszczamy założenie o różniczkowalności funkcji $u_{n,k}$ i tym samym kończymy dowód twierdzenia 5.15.

□

Wniosek 5.16. Z twierdzenia 5.15 wynika, że w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$, przy spełnionym założeniu $\rho \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, możliwe jest przybliżenie drugiego momentu X_t zgodnie z uwagą 5.12. Jak już stwierdziliśmy, problem wyceny kontraktu CMS sprowadza się do wyznaczenia $\mathbb{E}X_t^2$. Dzięki uwadze 5.12 oraz twierdzeniu 5.15 otrzymujemy zupełnie nowy sposób wyceny tych kontraktów w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$.

Głębokim wnioskiem z twierdzenia 5.15 jest zupełnie nowy, odmienny od zaproponowanego przez Hagana et al. [24], sposób wyceny, w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$, opcji waniliowej kupna z ceną wykonania $K > 0$. Sposób ten zostanie przedstawiony poniżej.

Twierdzenie 5.17. Załóżmy, że spełnione są założenia modelu IV oraz niech $\rho \in (-1,0)$. Wówczas dla każdego $t \geq 0$ funkcja charakterystyczna ϕ_{V_t} zmiennej losowej $V_t := \ln X_t$ jest całkowalna. Zatem istnieje ciągła i ograniczona gęstość g_{V_t} zmiennej losowej V_t oraz:

$$\mathbb{E}(X_t - K)^+ = \int_{\ln K}^{\infty} (e^v - K) g_{V_t}(v) dv, \tag{5.47}$$

gdzie:

$$g_{V_t}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isv} \phi_{V_t}(s) ds.$$

Dowód. Ustalmy $t \geq 0$. Z uwagi 5.2, założenie $\rho \in (-1,0)$ implikuje, że X_t jest martyngałem. Zauważmy, że ruch Browna W_t z założeń modelu IV możemy przedstawić jako:

$$W_t = \rho Z_t + \sqrt{1-\rho^2} B_t,$$

gdzie B_t jest niezależnym od Z_t ruchem Browna. Założenie $\rho > -1$ implikuje, że proces W_t możemy zapisać jako kombinację liniową dwóch niezależnych ruchów Browna. W takim razie, dla $\beta = 1$, równanie reprezentujące dynamikę modelu SABR możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t Y_t (\rho dZ_t + \sqrt{1-\rho^2} dB_t), \\ dY_t &= \sigma Y_t dZ_t, \end{aligned}$$

gdzie Z_t, B_t są niezależnymi ruchami Browna. Mamy stąd i ze wzoru Ito:

$$\ln X_t = \ln X_0 + \rho \int_0^t Y_u dZ_u + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t Y_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t Y_u^2 du.$$

Oznaczmy:

$$\theta_Z(t) := \rho \int_0^t Y_u dZ_u - \frac{1}{2} \rho^2 \int_0^t Y_u^2 du$$

oraz

$$\theta_B(t) := \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t Y_u dB_u - \frac{1}{2}(1-\rho^2) \int_0^t Y_u^2 du.$$

Po przyjęciu powyższych oznaczeń otrzymujemy:

$$\ln X_t = \ln X_0 + \theta_Z(t) + \theta_B(t).$$

Mamy zatem dla $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}|\phi_{V_t}(s)| = |\mathbb{E}e^{is(\theta_Z(t)+\theta_B(t))}| &= \Big|\mathbb{E}\Big(e^{is\theta_Z(t)}\mathbb{E}[e^{is\theta_B(t)}|\mathcal{F}_t^Z]\Big)\Big| \\ &\le \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}[e^{is\theta_B(t)}|\mathcal{F}_t^Z]\Big|.\end{aligned}$$

Ponieważ B_t, Z_t są niezależnymi ruchami Browna, więc dla ustalonej trajektorii $Z_u, u \le t$ zmienna losowa $\theta_B(t)$ ma rozkład normalny o średniej:

$$\hat{\mu} = -\frac{1}{2}(1-\rho^2)\int_0^t Y_u^2 du$$

i wariancji:

$$\hat{\sigma}^2 = (1-\rho^2)\int_0^t Y_u^2 du.$$

Zauważmy, że w rezultacie mamy $\mathbb{P}$- prawie na pewno:

$$\mathbb{E}[e^{is\theta_B(t)}|\mathcal{F}_t^Z] = e^{i\hat{\mu}s-\frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2}}. \tag{5.48}$$

W istocie, równość (5.48) wynika z faktu, że dla całkowalnej funkcji $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sigma ciała $\mathcal{M}$ oraz zmiennych losowych U, V takich, że U -$\mathcal{M}$ mierzalne, a V jest niezależne od $\mathcal{M}$, prawdziwa jest równość $\mathbb{P}$- prawie na pewno:

$$\mathbb{E}[f(U,V)|\mathcal{M}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(U,v)g_V(v)dv,$$

gdzie g_V jest gęstością zmiennej losowej V. Dowód tego faktu można znaleźć w książce Jakubowski-Sztencel [29]. Po skorzystaniu z tego faktu otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[e^{is\theta_B(t)}|\mathcal{F}_t^Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} e^{isv-\frac{(v-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}}dv = e^{i\hat{\mu}s-\frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2}}.$$

Udowodniliśmy zatem równość (5.48). W rezultacie, z (5.48) mamy:

$$\mathbb{E}\Big|\mathbb{E}[e^{is\theta_B(t)}|\mathcal{F}_t^Z]\Big| = \mathbb{E}e^{-s^2\frac{(1-\rho^2)}{2}\int_0^t Y_u^2 du}.$$

Z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy dalej:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{B_t}(s)| ds &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E} e^{-s^2 \frac{(1-\rho^2)}{2} \int_0^t Y_u^2 du} ds \\
&= \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2 \frac{(1-\rho^2)}{2} \int_0^t Y_u^2 du} ds \\
&= \mathbb{E} \sqrt{\frac{2\pi}{(1-\rho^2)} \Big(\int_0^t Y_u^2 du \Big)^{-1}} \\
&\leq \sqrt{\frac{2\pi}{(1-\rho^2)} \mathbb{E} \Big(\int_0^t Y_u^2 du \Big)^{-1}}.
\end{aligned}$$

W ostatniej nierówności wykorzystalismy nierówność Jensena dla funkcji wklęsłej $f(x) = \sqrt{x}$.

Dalej, z całkowej wersji nierówności Jensena dla funkcji wypukłej $f(x) = \frac{1}{x}$, dla $x > 0$, mamy:

$$\frac{1}{\int_0^t Y_u^2 du} \leq \frac{1}{t^2} \int_0^t Y_u^{-2} du,$$

zatem:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2\pi}{(1-\rho^2)} \mathbb{E} \Big(\int_0^t Y_u^2 du \Big)^{-1}} &\leq \sqrt{\frac{2\pi}{(1-\rho^2)}} \frac{1}{t} \sqrt{\mathbb{E} \int_0^t Y_u^{-2} du} \\
&= \frac{1}{Y_0 t} \sqrt{\frac{2\pi}{3\sigma^2(1-\rho^2)} [e^{3\sigma^2 t} - 1]} < \infty.
\end{aligned}$$

W takim razie, funkcja charakterystyczna ϕ_{V_t} jest całkowalna i z twierdzenia o odwrotnym przekształceniu Fouriera (Jakubowski-Sztencel [29], Carr-Madan [12], Kawata [33]) istnieje ograniczona i ciągła gestość zmiennej losowej V_t i jest równa:

$$g_{V_t}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isv} \phi_{V_t}(s) ds.$$

Mając gestość g_{V_t} od razu otrzymujemy:

$$\mathbb{E}(X_t - K)^+ = \int_{\ln K}^{\infty} (e^v - K) g_{V_t}(v) dv.$$

To kończy dowód twierdzenia 5.17. □

Uwaga 5.18. Z algorytmu twierdzenia 5.15 potrafimy wyznaczyć momenty $\mathbb{E}(\ln X_t)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dzięki temu możemy przybliżyć funkcję charakterystyczną ϕ_{V_t} zmiennej losowej $V_t = \ln X_t$. W istocie, ponieważ:

$$\phi_{V_t}(s) = \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^n}{n!}(\ln X_t)^n,$$

zatem możemy zastosować przybliżenie:

$$\phi_{V_t}(s) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{(is)^n}{n!}\mathbb{E}(\ln X_t)^n.$$

Z twierdzenia 5.17 wiemy, że funkcja charakterystyczna jest całkowalna i istnieje gęstość zmiennej losowej V_t. Przybliżenie funkcji charakterystycznej umożliwia tym samym przybliżenie funkcji gęstości V_t. W rezultacie otrzymamynowy sposób przybliżenia ceny opcji waniliowej w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$. Opisana wyżej technika jest powszechnie stosowaną metodą wyceny instrumentów pochodnych w sytuacji, gdy nie potrafimy obliczyć bezpośrednio wartości oczekiwanej $\mathbb{E}f(X_t)$, gdzie f jest pewną funkcją z określonej klasy (Brigo-Mercurio [8], Hagan [24], Pelsser [45]). Aby wycenić instrument pochodny o funkcji wypłaty $f(X_t)$, gdy f jest funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ (czyli funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną), przybliżamy f wyrazami rozwinięcia tej funkcji w szereg. Jeśli potrafimy obliczyć wartości oczekiwane wyrazów rozwinięcia, możemy wówczas przybliżać cenę $\mathbb{E}f(X_t)$.

Uwaga 5.19. W dowodzie lematu 5.14 wyprowadziliśmy równość (5.28) dającą postać dystrybuanty X_t. Ponadto uzasadniliśmy, że w równości (5.28) możemy różniczkować pod znakiem wartości oczekiwanej. W rezultacie, ponieważ funkcja $0 < r \mapsto \mathbb{E}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)$ jest ciągła i dobrze określona, dla ustalonego $t \geq 0$ gęstość g_{X_t} zmiennej losowej X_t istnieje i jest równa dla $r > 0$:

$$g_{X_t}(r) = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{r\sigma_Z}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big], \tag{5.49}$$

gdzie μ_Z, σ_Z są zdefiniowane odpowiednio w równościach (5.26) oraz (5.27).

Istotnie, równość (5.49) zadaje gęstość, bo z twierdzenia Fubiniego mamy:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g_{X_t}(r)dr &= \int_0^\infty \mathbb{E}\Big[\frac{1}{r\sigma_Z}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big]dr \\
&= \mathbb{E}\int_0^\infty \Big[\frac{1}{r\sigma_Z}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big]dr \\
&= \mathbb{E}\lim_{D\to\infty}\int_0^D \frac{\partial}{\partial r}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big)dr \\
&= \mathbb{E}\lim_{D\to\infty}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{D}{X_0}-\mu_Z}{\sigma_Z}\Big) = 1.
\end{aligned}$$

Poniżej wyprowadzimy wzory na ceny opcji waniliowych w modelu SABR z parametrem $\beta = 1$. Uzyskany wynik jest naturalnym uogólnieniem znanych wzorów Blacka wyceny opcji waniliowych na przypadek modelu o stochastycznej zmiennosci.

Twierdzenie 5.20. W modelu IV niech $\rho \in (-1, 0)$. Wówczas dla dowolnego $K > 0$:

$$\mathbb{E}[X_t - K]^+ = X_0\mathbb{E}[e^{\mu_Z+\frac{\sigma_Z^2}{2}}\Phi(d_1)] - K\mathbb{E}\Phi(d_2), \tag{5.50}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\mu_Z &= \frac{\rho}{\sigma}[Y_t - Y_0] - \frac{1}{2}\int_0^t Y_u^2 du \\
\sigma_Z^2 &= (1-\rho^2)\int_0^t Y_u^2 du, \\
d_1 &= \frac{\ln\frac{X_0}{K} + \mu_Z + \sigma_Z^2}{\sigma_Z}, \\
d_2 &= d_1 - \sigma_Z.
\end{aligned}$$

Dowód. Wybierzmy dowolne $K > 0$. Obliczymy $\mathbb{E}[K - X_t]^+$. Z uwagi 5.19

oraz ze wzoru na całkowanie przez części mamy:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[K - X_t]^+ &= \int_0^\infty (K-r)^+ g_{X_t}(r)dr \\
&= \int_0^\infty (K-r)^+ \frac{\partial}{\partial r}\mathbb{E}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)dr \\
&= \int_0^K (K-r)\frac{\partial}{\partial r}\mathbb{E}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)dr \\
&= (K-r)\mathbb{E}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big|_0^K + \int_0^K \mathbb{E}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)dr \\
&= \int_0^K \mathbb{E}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)dr.
\end{aligned}
$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej dla ograniczonej przez 1 funkcji (dystrybuanty) Φ:

$$
\lim_{r\to 0}\mathbb{E}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) = \mathbb{E}\lim_{r\to 0}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) = 0.
$$

Następnie, z twierdzenia Fubiniego, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\int_0^K \mathbb{E}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)dr &= \mathbb{E}\int_0^K \Phi\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)dr \\
&= \mathbb{E}\int_0^K \int_{-\infty}^{\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}dsdr \\
&= \mathbb{E}\int_0^K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}1_{\Big\{s\leq\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big\}}dsdr \\
&= \mathbb{E}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}\Big[\int_0^K 1_{\Big\{r\geq X_0e^{s\sigma_Z+\mu_Z}\Big\}}dr\Big]ds \\
&= \mathbb{E}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}\Big[K - X_0e^{s\sigma_Z+\mu_Z}\Big]^+ds.
\end{aligned}
$$

Po podstawieniu $K^* = \frac{K}{X_0}e^{-\mu_Z}$ oraz $v = s\sigma_Z$ otrzymujemy:

$$
\mathbb{E}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}\Big[K - X_0e^{s\sigma_Z+\mu_Z}\Big]^+ds
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\Big(X_0 e^{\mu_Z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_Z^2}} \Big[K^* - e^v\Big]^+ ds\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(X_0 e^{\mu_Z} \Big[K^* \Phi\Big(\frac{\ln K^*}{\sigma_Z}\Big) - e^{\frac{\sigma_Z^2}{2}} \Phi\Big(\frac{\ln K^* - \sigma_Z^2}{\sigma_Z}\Big)\Big]\Big) \\
&= K\mathbb{E}\Phi\Big(\frac{\ln \frac{K}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big) - X_0 \mathbb{E}\Big[e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}} \Phi\Big(\frac{\ln \frac{K}{X_0} - \mu_Z - \sigma_Z^2}{\sigma_Z}\Big)\Big] \\
&= K\mathbb{E}\Phi(-d_2) - X_0 \mathbb{E}\Big[e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}} \Phi(-d_1)\Big],
\end{aligned}
$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z przyjętych oznaczeń d_1, d_2.
W rezultacie otrzymaliśmy:

$$
\mathbb{E}[K - X_t]^+ = K\mathbb{E}\Phi(-d_2) - X_0 \mathbb{E}\Big[e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}} \Phi(-d_1)\Big]. \tag{5.51}
$$

Ponieważ, na mocy założeń, X_t jest martyngałem, zatem:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t - K]^+ &= X_0 - K - \mathbb{E}[K - X_t]^+ \\
&= X_0 - K - K\mathbb{E}\Phi(-d_2) - X_0 \mathbb{E}\Big[e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}} \Phi(-d_1)\Big] \\
&= X_0\Big(1 - \mathbb{E}\Big[e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}} \Phi(-d_1)\Big]\Big) - K\Big(1 - \mathbb{E}\Phi(-d_2)\Big).
\end{aligned}
$$

Zauważmy teraz, że z oznaczeń:

$$
\begin{aligned}
\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2} &= \frac{\rho}{\sigma}[Y_t - Y_0] - \frac{1}{2}\int_0^t Y_u^2 du + \frac{1}{2}(1 - \rho^2)\int_0^t Y_u^2 du \\
&= \rho \int_0^t Y_u dZ_u - \frac{\rho^2}{2}\int_0^t Y_u^2 du.
\end{aligned}
$$

Z ostatniej równości oraz ze wzoru Ito otrzymujemy:

$$
e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}} = 1 + \rho \int_0^t e^{\rho \int_0^s Y_u dZ_u - \frac{\rho^2}{2}\int_0^s Y_u^2 du} Y_s dZ_s.
$$

Ponadto:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\rho^2 \int_0^t e^{2\rho \int_0^s Y_u dZ_u - \rho^2 \int_0^s Y_u^2 du} Y_s^2 ds\Big) &= \rho^2 \int_0^t \mathbb{E}\Big(e^{2\frac{\rho}{\sigma}[Y_s - Y_0] - \rho^2 \int_0^s Y_u^2 du} Y_s^2\Big) ds \\
&\leq \rho^2 e^{-2\frac{\rho}{\sigma} Y_0} \int_0^t \mathbb{E} Y_s^2 ds \\
&= \rho^2 e^{-2\frac{\rho}{\sigma} Y_0} \frac{Y_0^2}{\sigma^2}[e^{\sigma^2 t} - 1] < \infty,
\end{aligned}
$$

gdzie w pierwszej nierówności wykorzystaliśmy fakt, że $\rho < 0$. Zatem $e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}}$ jest martyngałem oraz:

$$\mathbb{E}e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}} = 1.$$

W rezultacie, z ostatniej równości i z własności dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego, otrzymujemy :

$$X_0\Big(1 - \mathbb{E}\Big[e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}}\Phi(-d_1)\Big]\Big) - K\Big(1 - \mathbb{E}\Phi(-d_2)\Big)$$

$$= X_0\mathbb{E}\Big[e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}}\Big(1 - \Phi(-d_1)\Big)\Big] - K\mathbb{E}\Big(1 - \Phi(-d_2)\Big)$$
$$= X_0\mathbb{E}\Big[e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}}\Phi(d_1)\Big] - K\mathbb{E}\Phi(d_2).$$

Dowód twierdzenia 5.20 został zakończony. □

Uwaga 5.21. Otrzymany w twierdzeniu 5.20 wynik jest naturalnym uogólnieniem wzorów Blacka na cenę opcji waniliowej. Wzór (5.50) jest po raz pierwszy przedstawiony w tej pracy. Wynik ten jest zgodny z intuicją, ponieważ model SABR z parametrem $\beta = 1$ powstaje w wyniku zamiany stałego współczynnika zmienności, w modelu Blacka, na proces stochastyczny o rozkładzie lognormalnym. Równość (5.50) pokazuje, że wzór na cenę opcji waniliowej w tak otrzymanym modelu jest odpowiednikiem wzoru Blacka na cenę opcji kupna w modelu lognormalnym ze stałym współczynnikiem zmienności. Zauważmy, że zarówno w uwadze 5.19 jak i w dowodzie twierdzenia 5.20 nie korzystaliśmy z faktu, że Y_t ma rozkład lognormalny. Korzystaliśmy natomiast z faktu, że $e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}}$ jest martyngałem. Oznacza to, że jeśli ostatnia własność będzie zachowana, to wynik twierdzenia 5.20 powinien się przenosić na inne modele ze stochastycznym współczynnikiem zmienności.

5.4 Własność modelu SABR dla $\beta \in (0, 1)$

W tym podrozdziale wyznaczymy, w modelu SABR dla $\beta \in (0, 1)$, wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X_t^{2(1-\beta)}$. Następnie pokażemy jak tę wiedzę przełożyć na wycenę instrumentów pochodnych. W szczególności zaprezentujemy propozycję przybliżonej wyceny kontraktów CMS w modelu SABR, bez wykorzystania wyników oryginalnej pracy Hagana et.al [23] dotyczącej modelu SABR, sformułowanych w uwadze do założeń modelu IV. Otrzymany rezultat jest analogiczny do formuły wyprowadzonej przez Hagana [24] w modelu lognormalnym. Nasze rozważania zaczniemy od użytecznego lematu.

Lemat 5.22. W modelu IV dla każdego $\beta \in (0,1)$ oraz $t \geq 0$ mamy:

$$\mathbb{E}\int_0^t X_s^{2(1-\beta)} Y_s^2 ds < \infty. \tag{5.52}$$

Dowód. Wybierzmy dowolne $t \geq 0$. Przyjmijmy oznaczenie ($s \in [0,t]$):

$$V_s := X_s^{2(1-\beta)} Y_s^2 \geq 0.$$

Dla ustalonego $s \geq 0$ na zbiorze $\{X_s \neq 0\}$, z nierówności Younga mamy:

$$V_s \leq (1-\beta)X_s^2 + \beta Y_s^{\frac{2}{\beta}}.$$

Z ostatniego oszacowania i uwagi 3.2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^t V_s ds &\leq \mathbb{E}\int_0^t \Big[(1-\beta)X_s^2 + \beta Y_s^{\frac{2}{\beta}}\Big] ds \\ &= (1-\beta)\mathbb{E}\int_0^t X_s^2 ds + \beta Y_0^{\frac{2}{\beta}}[e^{t\sigma^2 \frac{2-2\beta}{\beta^2}} - 1].\end{aligned}$$

Aby udowodnić (5.52) wystarczy teraz pokazać, że:

$$\mathbb{E}\int_0^t X_s^2 ds < \infty.$$

Jourdain [33] wykazał, że $\int_0^t X_s^\beta Y_s dW_s$ jest martyngałem. Ściślej, Jourdain wykazał, że dla $t \geq 0$ mamy: $\mathbb{E}\int_0^t X_s^{2\beta} Y_s^2 ds < \infty$. W konsekwencji, po wykorzystaniu izometrii całki stochastycznej, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_t^2 &= \mathbb{E}\Big(X_0 + \int_0^t X_s^\beta Y_s dW_s\Big)^2 \\ &= \mathbb{E}\Big(X_0^2 + 2X_0\int_0^t X_s^\beta Y_s dW_s + (\int_0^t X_s^\beta Y_s dW_s)^2\Big) \\ &= X_0^2 + \mathbb{E}\int_0^t X_s^{2\beta} Y_s^2 ds < \infty. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Skorzystamy teraz z nierówności:

$$\int_0^t X_s^2 ds \le t\Big[\sup_{s\in[0,t]} X_s\Big]^2.$$

Ponieważ X_t jest martyngałem, X_t^2 jest podmartyngałem. W rezultacie z ostatniego oszacowania oraz nierówności Dooba otrzymujemy:

$$\mathbb{E}\int_0^t X_s^2 ds \le t\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]} X_s\Big]^2 \le 4t\mathbb{E}X_t^2 < \infty.$$

Dowód lematu został zakończony.

□

Twierdzenie 5.23. Przy spełnionych założeniach modelu IV, dla każdego $\beta \in (0,1)$ *prawdziwa jest równość:*

$$\mathbb{E}X_t^{2(1-\beta)} = X_0^{2(1-\beta)} + (1-\beta)(1-2\beta)\frac{Y_0^2}{\sigma^2}[e^{\sigma^2 t} - 1]. \tag{5.54}$$

Dowód. Ze wzoru Ito zastosowanego do procesu $X_t^{2(1-\beta)}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} X_t^{2(1-\beta)} &= X_0^{2(1-\beta)} + 2(1-\beta)\int_0^t X_s^{1-2\beta}dX_s + (1-\beta)(1-2\beta)\int_0^t Y_s^2 ds \\ &= X_0^{2(1-\beta)} + 2(1-\beta)\int_0^t X_s^{1-\beta}Y_s dW_s + (1-\beta)(1-2\beta)\int_0^t Y_s^2 ds. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Z lematu 5.22 mamy $\mathbb{E}\int_0^t X_s^{1-\beta}Y_s dW_s = 0$, więc biorąc stronami wartości oczekiwane w równości (5.55) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_t^{2(1-\beta)} &= X_0^{2(1-\beta)} + (1-\beta)(1-2\beta)\int_0^t \mathbb{E}Y_s^2 ds \\ &= X_0^{2(1-\beta)} + (1-\beta)(1-2\beta)\frac{Y_0^2}{\sigma^2}[e^{\sigma^2 t} - 1]. \end{aligned}$$

□

Uwaga 5.24. W modelu IV dla $\beta \in (0,1)$ oraz $\beta \neq \{\frac{1}{2}\}$, dla różniczkowalnej funkcji $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ możemy zastosować następujące przybliżenie:

$$\mathbb{E}[X_t G(X_t)] \approx X_0 G(X_0) + (1-\beta)(1-2\beta)\frac{(Y_0 X_0^\beta)^2}{\sigma^2} G'(X_0)[e^{\sigma^2 t} - 1].$$

Otrzymana formuła jest „praktyczną“ metodą wyceny kontraktu CMS w ogólnym modelu SABR. W istocie dla $\beta \neq \frac{1}{2}$ niech $G_1(x) = G(x^{\frac{1}{1-2\beta}})$. Z definicji, funkcja G_1 jest różniczkowalna. Mamy dalej:

$$\mathbb{E}[X_t G(X_t)] = \mathbb{E}[X_t G_1(X_t^{1-2\beta})].$$

X_t jest martyngałem oraz procesem skoncentrowanym wokół X_0 czyli $X_t^{1-2\beta}$ jest procesem skoncentrowanym wokół $X_0^{1-2\beta}$, a tym samym możemy zastosować przybliżenie z rozwinięcia funkcji G_1 w szereg Taylora (podobnie jak w pracy Hagana [24] dotyczącej wyceny kontraktów CMS w modelu lognormalnym):

$$G_1(X_t^{1-2\beta}) \approx G_1(X_0^{1-2\beta}) + G_1'(X_0^{1-2\beta})[X_t^{1-2\beta} - X_0^{1-2\beta}].$$

W rezultacie otrzymamy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t G_1(X_t^{1-2\beta})] &\approx \mathbb{E}[X_t(G_1(X_0^{1-2\beta}) + G_1'(X_0^{1-2\beta})[X_t^{1-2\beta} - X_0^{1-2\beta}]] \\ &= X_0 G_1(X_0^{1-2\beta}) + G_1'(X_0^{1-2\beta})\mathbb{E}X_t^{2(1-\beta)} - G_1'(X_0^{1-2\beta})X_0^{2(1-\beta)}.\end{aligned}$$

Następnie korzystamy z twierdzenia 5.23 oraz z faktu, że dla każdego x mamy:

$$G'(x) = G_1'(x^{1-2\beta})x^{-2\beta}.$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[X_t G(X_t)] \approx X_0 G(X_0) + \frac{(Y_0 X_0^\beta)^2}{2\sigma^2} G'(X_0)[e^{\sigma^2 t} - 1].$$

□

Rozdział 6

Bibliografia

1. Andreasen J. (2006). *Stochastic Volatility for Real.* Working paper.

2. Andersen L., Piterbarg V. (2005). *Moment Explosions in Stochastic Volatility Models.* Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=559481.

3. Berestycki H., Busca J., Florent I.(2004). *Computing the Implied Volatility in Stochastic Volatility Models.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 57(10), pp. 1352 - 1373.

4. Berrahoui M. (2007). *Pricing CMS Spread Options and Digital CMS Spread Options with Smile. Wilmott magazine*, (5), pp. 63-69.

5. Benhamou E., Croissant O. (2007). *Local Time for the SABR Model: Connection with the Complex Black Scholes and Application to CMS and Spread Options.* Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1064461

6. Boenkost W., Schmidt W. (2006). *Interest Rate Convexity and the Volatility Smile.* Working Paper No. 4, Centre of Practical Quantitative Finance, HfB, pp. 1-23.

7. Borland L., Bouchaud J. (2004). *A non-Gaussian option pricing model with skew.* Quantitative Finance, Vol. 4, Number 5, pp. 499-514.

8. Brigo D., Mercurio F. (2006). *Interest Rate Models: Theory and Practice.* Springer-Verlag (II ed).

9. Brigo D., Mercurio F. (2002). *Lognormal-Mixture Dynamics and Calibration to Market Volatility Smiles.* International Journal of Theoretical and Applied Finance 5(4), pp. 427-446.

10. Brigo D., Mercurio F. (2002). *Joint Calibration of the LIBOR Market Model to Caps and Swaptions Volatilities.* Risk 1, pp. 117-121.

11. Carmona R., Durrleman V. (2003). *Pricing and Hedging Spread Options in a Log-Normal Model.* SIAM Review, vol. 45, No. 4, pp. 627-685.

12. Carr P., Madan D. (1999). *Option Valuation Using the Fast Fourier Transform.* Journal of Computational Finance, vol. 2, no. 4, pp. 61–73.

13. Carr P., Chou A. (1997). *Hedging Complex Barrier Options.* Working paper.

14. Carr P., Chou A. (1997). *Breaking Barriers.* Risk 2, pp. 139-145.

15. Cheng S. (2006). *Differentiation Under the Integral Sign with Weak Derivatives.* Working paper.

16. Derman E., Kani I. (1994). *Riding on a Smile.* Risk 7, pp. 32-39.

17. Derman E., Kani I. (1998). *Stochastic Impied Trees: Arbitrage Pricing with Stochastic Term and Strike Structure of Volatility.* International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1(1), pp. 61-110.

18. Dupire B. (1994). *Pricing with a Smile.* Risk 7(1), pp. 18- 20.

19. Dupire B. (1997). *Pricing and Hedging with Smiles.* Cambridge Univesrity Press, pp. 103-111.

20. Engelbert H., Kurenok W. (2000). *On Multidimensional SDEs Without Drift and with a Time-Dependent Diffusion Matrix.* Georgian Mathematical Journal, Vol. 7 (4), pp.643-664.

21. Geman H., Yor M. (1996). *Pricing and Hedging Double-barrier Options: a Probabilistic Approach.* Mathematical Finance, 6 (4), pp. 365–378.

22. Gupta A., Subrahmanyam M. (2002). *Pricing and Hedging Interest Rate Options: Evidence from Cap-Floor Markets. EFMA 2002 London Meetings.* Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=314878

23. Hagan P., Kumar D., Lesniewski A., Woodward D. (2002). *Managing Smile Risk.* Wilmott Magazine, September, pp. 84-108.

24. Hagan P. (2003). *Convexity Conundrums: Pricing CMS Swaps, Caps and Floors.* Wilmott Magazine, March, pp.38-44.

25. Hagan P. (2004). *Accrual Swaps and Range Notes.* Working paper.

26. Hagan P., Lesniewski A., Woodward D. (2004). *Probability Distribution in the SABR Model of Stochastic Volatility.* Working paper.

27. Henry-Labordere P. (2005). *A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models.* Barclays Capital working paper.

28. Henry-Labordere P. (2007). *Unifying the BGM and SABR Models: a Short Ride in Hyperbolic Geometry.* Working paper. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=877762

29. Ikeda N., Watanabe S. (1981). *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North-Holland Kodansha.

30. Jakubowski J., Sztencel R. (2001). *Wstep do teorii prawdopodobienstwa.* Script, Warszawa, pp.1-491 (wydanie II).

31. Jakubowski J. (2006). *Modelowanie rynków finansowych.* Script, Warszawa, pp.1-255.

32. Janson S., Tysk J. (2006). *Feynman–kac Formulas for Black–Scholes–Type Operators.* Bulletin of the London Mathematical Society, 38, pp. 269-282.

33. Jourdain B. (2004). *Loss of Martingality in Asset Price Model with Lognormal Stochastic Volatility.* ENPC-CERMICS, Working paper.

34. Karatzas I., Shreve S. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag.

35. Kawata T. (1969). *On The Inversion Formula For The Characteristic Function.* Pacific Journal of mathematics, Vol. 31, No. 1, 1969, pp. 81-85.

36. Kurenok W., Lepeyev A. (2005). *On Multidimensional SDEs with Locally Integrable Coefficients.* Working paper.

37. Mercurio F., Morini M. (2006). *A Note on the SABR Model.* Working paper.

38. Mercurio F. (2002). *Pricing the Smile in a Forward Libor Market Model.* Quantitative Finance, 3 15-27.

39. Mercurio F., Pallavicini A. (2006). *Smiling at convexity: bridging swaption skews and CMS adjustments.* Risk 8, pp. 64.

40. Montero M., Kohatsu-Higa A. (2003) *Malliavin Calculus applied to finance.* Physica, Vol. 320, pp. 548-570.

41. Musiela M., Rutkowski M. (2004). *Martingale Methods in Financial Modeling.* Springer-Verlag (II ed).

42. Obłój J. (2007). *Fine-Tune Your Smile; correction to Hagan et al.* Working Paper.

43. Oksendal B. (1996). *An introduction to Malliavin calculus with applications to economics.* Lecture notes, Norwegian School of Economics and Business Administration.

44. Osajima Y. (2007). *The Asymptotic Expansion Formula of Implied Volatility for Dynamic SABR Model and FX Hybrid Model.* Working paper

45. Pelsser A. (2003). *Mathematical Foundation of Convexity Correction.* Quantitative Finance 3, pp. 59-65.

46. Poulsen R., Schenk-Hoppé K., Ewald C. (2007). *Risk Minimization in Stochastic Volatility Models: Model Risk and Empirical Performance.* FINRISK Working Paper, No. 361.

47. Protter P. (2004). *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer-Verlag (II ed).

48. Ravindran K. (1993). *Low Fat Spread.* Risk Magazine, 6:10, pp. 66-7.

49. Revuz D., Yor M. (1991). *Continous Martingales and Brownian Motion.* Springer-Verlag.

50. Rebonato R. (2002). *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The Libor Market Model and Beyond.* Princeton University Press.

51. Rebonato R. (2004). *Volatility and Correlation. The Perfect Hedger and the Fox.* John Wiley and Sons(II Ed).

52. Rutkowski M. (1999). *Modeling of forward Libor and swap rates.* Applied Mathematical Finance, Vol. 6., No. 1, pp. 29-60.

53. Shiryaev A. (1999). *Essentials of Stochastic Finance.* World Scientific. Singapore.

54. West G. (2005). *Calibration of The SABR Model in Illiquid Markets.* Applied Mathematical Finance, Vol. 12., December, No. 4, pp. 371-385.