

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Janusz Dybizbański

Liczby Ramseya z cyklem C_4

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy
prof. UG dr hab. Andrzej Szepietowski

Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytet Gdański

Listopad 2013

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

25 listopada 2013

data

.....

Janusz Dybizbański

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

25 listopada 2013

data

.....

prof. UG dr hab. Andrzej Szepietowski

Liczby Ramseya z cyklem C_4

Streszczenie

Dla grafów H_1, H_2, \dots, H_m **grafowa liczba Ramseya** $R(H_1, H_2, \dots, H_m)$ to najmniejsza liczba naturalna n taka, że dla dowolnego m -kolorowania krawędziowego grafu pełnego $G = K_n$ istnieje i ($1 \leq i \leq m$) takie, że graf G zawiera podgraf izomorficzny z H_i , którego wszystkie krawędzie są w kolorze i . W rozprawie rozważamy grafowe liczby Ramseya, których jednym z parametrów jest cykl C_4 . Rozpocniemy (rozdział 1) od omówienia wybranych znanych wyników dla klasycznych liczb Ramseya (gdy grafy H_i są klikami) oraz dwu- i wielokolorowych grafowych liczb, których przynajmniej jednym parametrem jest cykl.

W rozdziale 3 rozpatrzmy liczby postaci $R(C_4, K_{2,n})$ wyznaczając dokładne wartości dla $n = 14, 15, 18, 38$ oraz dowodząc górne oszacowanie, które w nieskończenie wielu przypadkach poprawia wynik otrzymany przez Harbortha i Mengersen [36]. Dokładniej, pokażemy, że jeżeli $n \geq 2$ jest parzyste, $q = \lceil \sqrt{n} \rceil$ nieparzyste oraz $n - (q - 1)^2 \leq q/2$, to $R(C_4, K_{2,n}) \leq n + 2q - 1$.

W rozdziale 4 omówimy liczby $R(C_4, W_n)$, gdzie W_n jest kołem o n wierzchołkach. Pokażemy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 11$, $R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1$. Wynik ten poprawia dotychczas znane górne oszacowanie uzyskane przez Surahmata i innych [79]. Dodatkowo, za pomocą modyfikacji grafów Erdősa-Rényiego, pokażemy, że $R(C_4, W_{q^2+1}) = q^2 + q + 1$, gdzie $q \geq 4$ jest potęgą liczby pierwszej.

W rozdziale 5 omówimy trój- i czterokolorowe liczby Ramseya, których przynajmniej jednym z parametrów jest cykl C_4 a jako pozostałe parametry przyjmiemy dowolne grafy o maksymalnie czterech wierzchołkach. Za pomocą metod kombinatorycznych oraz algorytmów komputerowych wyznaczmy wartości liczb $R(C_4, C_4, B_2) = 16$, $R(C_4, B_2, K_3) = R(C_4, B_2, K_3+e) = 17$, $R(C_4, B_2, B_2) = 19$ oraz wyznaczmy szereg oszacowań nieznanymi dotychczas liczb.

Wyniki zawarte w rozprawie zostały opublikowane w pracach [6, 18] oraz umieszczone w zaakceptowanych do druku pracach [17, 19]. Rozprawa została częściowo sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2012/05/N/ST6/03063.

Słowa kluczowe: grafowe liczby Ramseya, wielokolorowe liczby Ramseya, kolorowanie krawędziowe, kolorowania krytyczne, cykle, cykl C_4 , grafy C_4 -wolne, grafy dwudzielne, koła

Matematyczna Klasyfikacja Dziedzin AMS 2000: 05C55, 05D10, 05C15

Ramsey numbers involving cycle C_4

Abstract

For given graphs H_1, H_2, \dots, H_m **graph Ramsey number** $R(H_1, H_2, \dots, H_m) = n$ is the smallest integer n such that if we arbitrarily color the edges of the complete graph of order n with m colors, then it contains a monochromatic copy of H_i in color i , for some $1 \leq i \leq m$. In presented dissertation we consider graph Ramsey numbers for quadrilateral (with C_4 as one of the parameters). First, in Chapter 1, we present selected known results for classical Ramsey numbers (when graphs H_i are cliques) and for two and multicolor graph Ramsey numbers involving cycles.

In Chapter 3, we consider Ramsey numbers $R(C_4, K_{2,n})$ and prove upper bounds which in infinitely many cases improve results of Harborth and Mengersen [36]. Specifically, we show that if n is even, $q = \lceil \sqrt{n} \rceil$ is odd, and $n - (q - 1)^2 \leq q/2$, then $R(K_{2,2}, K_{2,n}) \leq n + 2q - 1$. The latter bound gives the exact value $R(K_{2,2}, K_{2,18}) = 27$ and $R(K_{2,2}, K_{2,38}) = 51$. Moreover, we show that $R(K_{2,2}, K_{2,14}) = 22$ and $R(K_{2,2}, K_{2,15}) = 24$.

In Chapter 4, we consider Ramsey number of C_4 versus wheel of order n . We show that $R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1$, for $n \geq 11$. This result improve results of Surahmat *et al.* [79]. Moreover by modification of the Erdős - Rényi graphs we obtain the exact value $R(C_4, W_{q^2+1}) = q^2 + q + 1$, for $q \geq 4$ being a prime power. In addition, we provide the exact values of Ramsey numbers $R(C_4, W_n)$, for $13 \leq n \leq 17$.

In the last chapter we consider 3 and 4-color Ramsey numbers involving C_4 and graphs with at most four vertices. Using combinatorial methods and computer algorithms we obtain exact values of $R(C_4, C_4, B_2) = 16$, $R(C_4, B_2, K_3) = R(C_4, B_2, K_3 + e) = 17$, $R(C_4, B_2, B_2) = 19$, and improve upper and lower bounds for several other multicolor Ramsey number.

Results of the dissertation are published in [6, 18] or accepted for publication in [17, 19]. This research was partially funded by the Polish National Science Centre (contract number DEC-2012/05/N/ST6/03063).

Key words: graph Ramsey numbers, multicolor Ramsey numbers, edge-coloring, critical coloring, cycles, cycle C_4 , C_4 -free graphs, bipartite graphs, wheels

AMS Mathematical Subject Classification 2000: 05C55, 05D10, 05C15

Spis treści

1	Wprowadzenie	5
1.1	Klasyczne liczby Ramseya	6
1.2	Grafowe liczby Ramseya	8
1.3	Historia problemów	9
1.3.1	Cykle i ścieżki	9
1.3.2	Dwa cykle	9
1.3.3	Cykle i grafy pełne	10
1.3.4	Cykle i pełne grafy dwudzielne	10
1.3.5	Cykle i koła	11
1.3.6	Trój- i czterokolorowe liczby z cyklem C_4	12
1.4	Wyniki rozprawy	12
2	Definicje i oznaczenia	15
2.1	Podstawowe pojęcia teorii grafów	15
2.2	Liczby Ramseya w języku teorii grafów	17
2.3	Liczby Turana i grafy C_4 -wolne	19
3	Liczby Ramseya postaci $R(C_4, K_{2,n})$	23
3.1	Znane wyniki	23
3.2	Nowe górne oszacowanie dla liczb $R(C_4, K_{2,n})$	25
3.3	Nowe dokładne wartości dla małych n	27
3.3.1	Zastosowany algorytm	27
3.3.2	Wartości liczb Ramseya $R(C_4, K_{2,n})$ dla małych n	29
4	Liczby Ramseya postaci $R(C_4, W_n)$	33
4.1	Znane wyniki dla kół i cykli	33

4.2	Nowe górne oszacowanie	34
4.3	Nowe dolne oszacowanie	39
4.4	Nowe dokładne wartości dla małych n	39
5	Trój- i czterokolorowe liczby Ramseya	43
5.1	Znane wyniki	43
5.2	Zastosowane algorytmy	46
5.2.1	Izomorfizm kolorowań	46
5.2.2	Algorytm rozszerzający	47
5.2.3	Algorytm łączący	48
5.2.4	Symulowane wyźarzanie	49
5.3	Wyniki	50
5.3.1	Nowe dokładne wartości trójkolorowych liczb Ramseya	50
5.3.2	Nowe oszacowania trójkolorowych liczb Ramseya	55
5.3.3	Trójkolorowe liczby Ramseya z cyklem C_4 oraz grafem $K_3 + e$	56
5.3.4	Czterokolorowe liczby Ramseya	60
6	Podsumowanie i kierunki dalszych badań	65
	Bibliografia	67

Rozdział 1

Wprowadzenie

W 1930 roku angielski matematyk, ekonomista i filozof Frank Ramsey udowodnił następujące twierdzenie, które stało się przedmiotem szeregu badań i dzisiaj nazywane jest jego imieniem.

Twierdzenie 1.1 (Ramsey [69]). *Dla dowolnych liczb naturalnych r i m oraz dla dowolnego ciągu liczb naturalnych k_1, k_2, \dots, k_m istnieje liczba naturalna n taka, że:*

() dla dowolnego zbioru X , $|X| \geq n$ oraz podziału $\binom{X}{r} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ istnieje $1 \leq i \leq m$ oraz zbiór $Y \subseteq X$ o co najmniej k_i elementach taki, że $\binom{Y}{r} \subseteq A_i$.*

Symbolem $\binom{X}{r}$ oznaczamy wszystkie r -elementowe podzbiory zbioru X . W przypadku $r = 1$ twierdzenie to jest równoważne zasadzie szufladkowej Dirichleta. W niniejszej rozprawie będziemy się zajmować tylko przypadkami, gdy $r = 2$. Nieformalnie mówiąc, twierdzenie 1.1 orzeka, że w dostatecznie dużej strukturze znajdziemy zorganizowaną podstrukturę o arbitralnym rozmiarze. Naturalną konsekwencją tego faktu jest pytanie jak duża musi być ta struktura? Inaczej mówiąc, jaka jest najmniejsza wartość liczby n spełniająca warunek (*)?

Definicja 1.2. Dla $r = 2$ oraz dowolnego ciągu liczb naturalnych k_1, k_2, \dots, k_m najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą warunek (*) nazywamy **liczbą Ramseya** i oznaczamy przez $R(k_1, k_2, \dots, k_m)$.

Podobnym problemem zajmowała się w 1935 roku grupa węgierskich matematyków, w której znajdował się 20 letni wówczas Paul Erdős. Esther Klein udowodniła, że w dowolnym zbiorze 5 punktów takich, że żadne 3 z nich nie są współliniowe, zawsze można

znaleźć czworokąt wypukły oraz zapytała, czy możemy wyznaczyć liczbę $N(n)$ taką, że w dowolnym zbiorze $N(n)$ punktów, w którym żadne 3 nie są współliniowe, znajduje się n punktów wyznaczających n -kąąt wypukły. Problemem tym zajmowali się Erdős i Szekeres w pracy [21]. Przedstawili dwa dowody faktu istnienia tych liczb. Pierwszy z nich zawiera nowy dowód twierdzenia Ramseya dający lepsze górne oszacowanie dla liczb Ramseya.

1.1 Klasyczne liczby Ramseya

W 1953 roku na zawodach matematycznych The William Lowell Putnam Mathematical Competition uczestnicy, jako jeden z problemów, mieli do rozwiązania zadanie o następującej treści:

Graf pełny o 6 wierzchołkach i 15 krawędziach ma każdą krawędź pokolorowaną na czerwono albo niebiesko. Udowodnij, że istnieją 3 punkty, takie że 3 łączące je krawędzie mają ten sam kolor.

Łatwo zauważyć, że graf pełny o 5 wierzchołkach i 10 krawędziach pokolorowanych dwoma kolorami, nie musi zawierać jednokolorowego trójkąta. Fakt ten wraz z pozytywnym rozwiązaniem powyższego zadania wyznacza dokładną wartość liczby Ramseya $R(3, 3) = 6$.

Zadanie można przeformułować i zapytać: ile osób należy zaprosić na przyjęcie, aby były wśród nich trzy znające się wzajemnie lub trzy, które się wzajemnie nie znają? Idąc dalej, ile osób należy zaprosić, aby było wśród nich n znających się wzajemnie lub n , które się wzajemnie nie znają. Trudność wyznaczania dokładnych wartości liczb Ramseya Paul Erdős często opisywał w formie zabawnej anegdoty. W filmie dokumentalnym z 1993 roku „N is a Number - A Portrait of Paul Erdős” opowiada:

Przypuśćmy, że zły duch powie ludzkości: podajcie odpowiedź dla 5 osób (dokładną wartość $R(5, 5)$ z dowodem poprawności) albo doprowadzę do eksterminacji ludzkiej rasy. Najlepszym co moglibyśmy zrobić, to zaangażowanie wszystkich matematyków oraz wszystkich komputerów, aby obliczyć żadaną wartość. Jeżeli jednak zapyta o 6 osób, najlepsze co moglibyśmy zrobić, to starać się zniszczyć go, zanim on zniszczy nas.

Faktycznie, 20 lat po opowiedzeniu tej historii ciągle nie jest znana dokładna wartość $R(5, 5)$. Wiadomo jedynie, że liczba ta jest pomiędzy 43 [24] a 49 [56]. O liczbie $R(6, 6)$ wiadomo, że jest pomiędzy 102 [44] a 165 [54]. Dotychczas policzono tylko 9 dokładnych (nietrywialnych) wartości dwukolorowych liczb Ramseya. Wszystkie znane wartości wraz z autorami i rokiem odkrycia przedstawia tabela 1.1.

Rok wyznaczenia	Liczba i wartość	Autorzy
≤ 1953	$R(3, 3) = 6$	
1955	$R(3, 4) = 9$ $R(3, 5) = 14$ $R(4, 4) = 18$	Greenwood, Gleason [33]
1964	$R(3, 6) = 18$	Kéry [42]
1968	$R(3, 7) = 23$	Graver, Yackel [32]
1982	$R(3, 9) = 36$	Grinstead, Roberts [34]
1992	$R(3, 8) = 28$	McKay, Zhang Ke Min [57]
1995	$R(4, 5) = 25$	McKay, Radziszowski [55]

Tabela 1.1: Wartości klasycznych liczb Ramseya.

W 4 ostatnich wierszach tabeli przedstawieni są autorzy górnych oszacowań. Dolne oszacowania wyznaczone zostały wcześniej przez Kalbfleischa w pracy [43] dla liczb $R(3, 7)$ i $R(3, 9)$ oraz w pracy [44] dla liczby $R(4, 5)$. Dolne oszacowanie liczby $R(3, 8)$ wyznaczone zostało wraz z wartością liczby $R(3, 9)$ przez Grinsteada i Roberta [34]. Przy wyznaczaniu trzech ostatnich wartości z tabeli 1.1 używane były komputery.

W przypadku większej liczby kolorów dokładna wartość klasycznych liczb Ramseya znana jest tylko w jednym przypadku. W 1955 roku Greenwood i Gleason [33] wyznaczyli wartość $R(3, 3, 3) = 17$. Oczywiście badane są także inne liczby i znane są ograniczenia ich wartości. Wszystkie znane dokładne wartości oraz oszacowania dla różnego typu liczb Ramseya można znaleźć w regularnie aktualizowanej pracy przeglądowej Radziszowskiego [64].

1.2 Grafowe liczby Ramseya

O liczbach Ramseya często mówi się w języku teorii grafów. Wszelkie definicje i oznaczenia wraz z podstawowymi twierdzeniami przedstawiono w rozdziale 2. W języku teorii grafów definicję równoważną definicji 1.2 można przedstawić następująco.

Definicja 1.3. *Klasyczna liczba Ramseya* $R(k_1, k_2, \dots, k_m)$ to najmniejsza liczba naturalna n taka, że dla dowolnego m -kolorowania krawędziowego grafu pełnego $G = K_n$ istnieje i ($1 \leq i \leq m$) takie, że graf G zawiera podgraf izomorficzny z K_{k_i} (grafu pełnego o k_i wierzchołkach), którego wszystkie krawędzie są w kolorze i .

Rozpatruje się wiele pokrewnych problemów, gdzie w kolorowaniu krawędziowym grafu pełnego K_n nie szukamy grafów pełnych danego rozmiaru lecz innych grafów. Liczby te są zdefiniowane w następujący sposób:

Definicja 1.4. Dla dowolnych grafów H_1, H_2, \dots, H_m *grafowa liczba Ramseya* $R(H_1, H_2, \dots, H_m)$ to najmniejsza liczba naturalna n taka, że dla dowolnego m -kolorowania krawędziowego grafu pełnego $G = K_n$ istnieje i ($1 \leq i \leq m$) takie, że graf G zawiera podgraf izomorficzny z H_i , którego wszystkie krawędzie są w kolorze i .

Badane są także inne, nierozpatrywane w tej rozprawie, warianty problemu. Są to między innymi: (a) dwudzielne liczby Ramseya, wprowadzone przez Beineke i Schwenka [4] w 1975 roku, jest to problem polegający na wyznaczeniu najmniejszej liczby n takiej, że dowolne kolorowanie krawędziowe pełnego grafu dwudzielnego $K_{n,n}$ zawiera podgraf izomorficzny z zadany grafem dwudzielnym H_i , którego wszystkie krawędzie są w kolorze i ; (b) krawędziowe liczby Ramseya, wprowadzone przez Erdősa, Faudree, Rousseau i Schelpa [23], czyli problem polegający na wyznaczeniu najmniejszej liczby n takiej, że istnieje graf o n krawędziach, którego każde kolorowanie krawędziowe zawiera podgraf izomorficzny z H_i , o krawędziach w kolorze i ; (c) wariant online krawędziowych liczb Ramseya, został wprowadzony niezależnie przez Becka [3] oraz Kurka i Rucińskiego [48] jest to gra, w której każda runda polega na wskazaniu krawędzi przez jednego gracza oraz pokolorowaniu jej przez drugiego. Gra kończy się, gdy po pokolorowaniu krawędzi przez drugiego gracza powstał jeden z zabronionych grafów H_i zbudowany z krawędzi w kolorze i . Wartością takiej liczby Ramseya jest minimalna liczba tur, w której gra się zakończy (przy optymalnej grze obu graczy).

1.3 Historia problemów

W niniejszej rozprawie zajmować się będziemy grafowymi liczbami Ramseya, w których jednym z parametrów jest cykl C_4 . W tym podrozdziale opiszemy najlepsze znane wyniki dla liczb, których jednym z parametrów jest cykl C_n . W szczególności tych, w których występuje cykl C_4 .

1.3.1 Cykle i ścieżki

W 1974 roku Faudree, Lawrence, Parsons oraz Schelp wyznaczyli dokładne wartości wszystkich dwukolorowych liczb Ramseya dla ścieżek i cykli. Wartości tych liczb przedstawia następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.5 (Faudree i inni [29]).

$$R(C_m, P_n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{dla } 3 \leq m \leq n \text{ i nieparzystego } m \\ n - 1 + \frac{m}{2} & \text{dla } 4 \leq m \leq n \text{ i parzystego } m \\ \max\{m - 1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2n - 1\} & \text{dla } 2 \leq n \leq m \text{ i nieparzystego } m \\ m - 1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \text{dla } 2 \leq n \leq m \text{ i parzystego } m \end{cases}$$

Ponadto wiadomo, że dla wszystkich n i m spełniona jest nierówność $R(P_n, P_m) \leq R(C_n, P_m) \leq R(C_n, C_m)$ [29].

1.3.2 Dwa cykle

Pierwsza liczba Ramseya dla dwóch cykli wyznaczona została w 1955 r. przez Greenwooda i Gleasona [33]. Ponieważ $C_3 = K_3$ to $R(C_3, C_3) = 6$. W 1972 r. Chvátal i Harary [13] wyznaczyli $R(C_4, C_4) = 6$. Chartrand i Schuster [9] przedstawili pierwsze ogólne wyniki dla tego typu liczb. Udowodnili oni następujące własności: $R(C_3, C_n) = 2n - 1$ dla $n \geq 4$, $R(C_4, C_n) = n + 1$ dla $n \geq 6$, $R(C_5, C_n) = 2n - 1$ dla $n \geq 5$ oraz wyznaczyli dokładną wartość $R(C_6, C_6) = 8$. W 1973 roku Rosta [71] i niezależnie w 1974 r. Faudree i Schelp [28] wyznaczyli dokładne wartości dla wszystkich dwukolorowych liczb Ramseya postaci $R(C_n, C_m)$.

Twierdzenie 1.6 (Rosta [71] oraz niezależnie Faudree i Schelp [28]).

$$R(C_m, C_n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{dla } 3 \leq m \leq n, n \neq 3 \text{ i nieparzystego } m, \\ n - 1 + \frac{m}{2} & \text{dla } 4 \leq m \leq n, n \neq 4 \text{ i parzystego } m \text{ i } n, \\ \max\{n - 1 + \frac{m}{2}, 2m - 1\} & \text{dla } 4 \leq m < n, \text{ parzystego } m \text{ i nieparzystego } n \end{cases}$$

1.3.3 Cykle i grafy pełne

Z liczbami Ramseya typu $R(C_n, K_m)$ wiąże się słynna hipoteza zaproponowana w 1976 r. przez Erdősa, Faudree, Rousseau i Schelpa [22]. Mówi ona, że $R(C_n, K_m) = (n - 1)(m - 1) + 1$ dla $n \geq m \geq 3$. Do dzisiaj nie jest znany dowód tej hipotezy. Została ona potwierdzona dla $n \geq m$ i $m = 3, 4, 5, 6, 7$ przez różnych autorów. Ostatni z tych przypadków, dla $m = 7$, udowodnili w 2008 roku Yaojun Chen i inni [84].

Dokładne wartości liczb postaci $R(C_4, K_n)$ znane są dla $n \leq 8$. Tabela 1.2 przedstawia te wyniki razem z cytowaniami prac, w których udowodnione zostało górne oszacowanie.

n	3	4	5	6	7	8
$R(C_4, K_n)$	7 [9]	10 [14]	14 [15]	18 [72]	22 [40]	26 [67]

Tabela 1.2: $R(C_4, K_n)$ dla $3 \leq n \leq 8$.

Znane są także asymptotyczne oszacowania. Spencer [74] udowodnił, że istnieje stała c_1 taka, że $c_1(\frac{m}{\log m})^{3/2} \leq R(C_4, K_m)$. Górne oszacowanie zostało udowodnione przez Caro i innych [8], którzy pokazali, że istnieje stała c_2 taka, że $R(C_4, K_m) \leq c_2(\frac{m}{\log m})^2$.

1.3.4 Cykle i pełne grafy dwudzielne

Liczby Ramseya dla cykli i pełnych grafów dwudzielnych były szeroko badane między innymi w pracach [35, 36, 51, 52, 53, 61]. Harary [35] pokazał, że

$$R(K_{1,n}, K_{1,m}) = n + m - \epsilon,$$

gdzie $\epsilon = 1$, jeżeli n i m są parzyste, oraz $\epsilon = 0$ w pozostałych przypadkach. Harborth i Mengersen [36] badali liczby postaci $R(K_{2,2} = C_4, K_{m,n})$ dla $2 \leq m \leq 3$ oraz $m \leq n$.

Przypadek $m = 1$ szczegółowo badał Parsons [61] a wartości dla $m = 3$ i $3 \leq n \leq 10$ wyznaczył Lortz [51].

Harborth i Mengersen [36] udowodnili następujące górne oszacowanie:

Dla $n \geq 2$ niech $q = \lceil \sqrt{n} \rceil$, $s = n - (q - 1)^2$ oraz $M = \{2, 5, 37, 3137\}$. Wtedy

$$R(C_4, K_{2,n}) \leq \begin{cases} n + 2q - 1 & \text{dla } s = 1 \text{ oraz } n \notin M \\ n + 2q & \text{dla } 2 \leq s \leq q - 1 \text{ lub } n \in M \\ n + 2q + 1 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Ponadto, pokazali, że w nieskończenie wielu przypadkach dokładna wartość liczb Ramseya $R(C_4, K_{2,n})$ jest równa podanemu górnemu oszacowaniu.

Dokładne wartości liczb $R(C_4, K_{2,n})$ dla $n = 1$ i $n = 2$ wyznaczyli Chvátal i Harary [13, 14]. Wartości dla $3 \leq n \leq 13$ oraz $n = 16, 17, 20, 21$ wyznaczone zostały w [36]. W pracy [36] przedstawiono także oszacowania: $22 \leq R(C_4, K_{2,14}) \leq 23$, $22 \leq R(C_4, K_{2,15}) \leq 24$, $27 \leq R(C_4, K_{2,18}) \leq 28$ oraz $28 \leq R(C_4, K_{2,19}) \leq 29$.

1.3.5 Cykle i koła

W 1983 r. Burr i Erdős [7] udowodnili, że $R(C_3, W_n) = 2n - 1$ dla $n \geq 6$. Dokładne wartości liczb $R(C_m, W_n) = 2n - 1$ dla nieparzystego m oraz $n \geq 5m - 6$ wyznaczył Zhou Huai Lu [86]. Surahmat i inni postawili hipotezę [76, 77, 78] mówiącą, że $R(C_m, W_n) = 3m - 2$ dla parzystego $n \geq 4$ oraz $m \geq n - 1$, $m \neq 3$. Częściowo została ona udowodniona w pracach [49, 50, 78] a kompletny dowód przedstawili Yaojun Chen i inni [83]. Surahmat postawił także hipotezę $R(C_m, W_n) = 2m - 1$ dla nieparzystego $n \geq 3$ oraz $m > n$ i $m \geq 5$ [76]. Hipoteza ta została początkowo udowodniona dla $2m \geq 5n - 7$ [78] a w 2009 r. dla $2m \geq 3n - 1$ [85].

Dokładne wartości liczb typu $R(C_4, W_n)$ dla $4 \leq n \leq 6$ wyznaczone zostały w pracach [14, 15, 41] oraz dla $7 \leq n \leq 13$ przez Kung-Kuen Tse w pracy [47]. Surahmat i inni [79] udowodnili następujące górne oszacowanie:

$$R(C_4, W_n) \leq n + \lceil (n - 1)/3 \rceil.$$

1.3.6 Trój- i czterokolorowe liczby z cyklem C_4

Liczbami Ramseya dla trzech grafów o co najwyżej 4 wierzchołkach zajmowano się między innymi w pracach [7, 33, 39, 73]. Dokładne znane wartości zostały podsumowane przez Arste i innych w [1]. Dla innych liczb znane są oszacowania wyznaczone między innymi w pracach Radziszowskiego i innych [65, 68]: $19 \leq R(C_4, C_4, K_4) \leq 22$, $25 \leq R(C_4, K_3, K_4) \leq 32$, $52 \leq R(C_4, K_4, K_4) \leq 72$. Wartość $R(C_4, P_4, K_4) = 14$ została wyznaczona w pracy [6]. Pozostałe wartości liczb $R(C_4, H_1, H_2)$ gdzie H_1 lub H_2 nie zawiera cyklu wyznaczone zostały w [1].

Czterokolorowymi liczbami Ramseya typu $R(C_4, C_4, H_1, H_2)$, gdzie H_1 oraz H_2 były jednym z grafów C_4 , K_3 lub K_4 zajmowano się między innymi w pracach [25, 65, 68, 75]. Jediną znaną dokładną wartością tego typu liczb jest $R(C_4, C_4, C_4, C_4) = 18$. Dolne oszacowanie wyznaczył w 1983r. Exoo [25], a górne zostało wyznaczone w 2007r. przez Sun Yongqi i innych [75]. Liczbami tego typu zajmował się Radziszowski i Xu w pracy [68] oraz razem z Shao w pracy [65] wyznaczając następujące oszacowania: $21 \leq R(C_4, C_4, C_4, K_3) \leq 27$, $31 \leq R(C_4, C_4, C_4, K_4) \leq 50$, $28 \leq R(C_4, C_4, K_3, K_3) \leq 36$, $42 \leq R(C_4, C_4, K_3, K_4) \leq 76$, $87 \leq R(C_4, C_4, K_4, K_4) \leq 179$.

1.4 Wyniki rozprawy

W niniejszej rozprawie zajmować się będziemy grafowymi liczbami Ramseya, których przynajmniej jednym z parametrów jest cykl długości cztery, czyli C_4 .

W rozdziale 3 będziemy się zajmować dwukolorowymi liczbami Ramseya dla cyklu C_4 oraz pełnych grafów dwudzielnych $K_{2,n}$. Głównym wynikiem w tym rozdziale będzie twierdzenie, które w nieskończenie wielu przypadkach daje lepsze od dotychczas znanego górne oszacowanie dla tego typu liczb. Dokładniej, w twierdzeniu 3.2 pokażemy, że:

Jeżeli $n \geq 2$ jest parzyste i $q = \lceil \sqrt{n} \rceil$ nieparzyste oraz $n - (q-1)^2 \leq q/2$, to $R(C_4, K_{2,n}) \leq n + 2q - 1$.

Dodatkowo, za pomocą zaprojektowanego algorytmu komputerowego oraz twierdzenia 3.2 wyznaczymy dokładne wartości liczb:

- $R(C_4, K_{2,14}) = 22$,

- $R(C_4, K_{2,15}) = 24$,
- $R(C_4, K_{2,18}) = 27$ oraz
- $R(C_4, K_{2,38}) = 51$.

Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały opisane w zaakceptowanej do druku pracy [17].

W rozdziale 4 omówimy dwukolorowe liczby Ramseya dla cyklu C_4 oraz koła o n wierzchołkach W_n . Głównym wynikiem w tym rozdziale jest twierdzenie 4.1, które wyznacza górne oszacowanie tego typu liczb.

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 11$

$$R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1.$$

Ponadto, pokażemy, że wyznaczone górne oszacowanie jest równe dokładnej wartości dla nieskończenie wielu n . Dokładniej, w twierdzeniu 4.3, za pomocą modyfikacji grafu Erdősa-Rényiego, pokażemy, że

$$R(C_4, W_{q^2+1}) = q^2 + q + 1 \text{ dla } q \geq 4 \text{ będącego potęgą liczby pierwszej.}$$

Na zakończenie wyznaczymy następujące dokładne wartości liczb $R(C_4, W_n)$ dla $14 \leq n \leq 17$:

- $R(C_4, W_{14}) = 18$,
- $R(C_4, W_{15}) = 19$,
- $R(C_4, W_{16}) = 20$ oraz
- $R(C_4, W_{17}) = 21$.

Wyniki tego rozdziału zostały opisane we wspólnej z Dzido pracy [19].

W rozdziale 5 zajmować się będziemy trój- i czterokolorowymi liczbami Ramseya, których jednym z parametrów jest cykl C_4 , a jako pozostałe parametry przyjmujemy dowolne grafy o maksymalnie czterech wierzchołkach. Za pomocą metod kombinatorycznych oraz algorytmów komputerowych wyznaczymy wartości dla liczb:

- $R(C_4, C_4, B_2) = 16$ (twierdzenie 5.6),
- $R(C_4, B_2, K_3) = 17$ (twierdzenie 5.7),
- $R(C_4, B_2, B_2) = 19$ (twierdzenie 5.8), gdzie B_2 oznacza książkę (patrz rysunek 5.1).

Opiszemy także metodę, za pomocą której wyznaczyliśmy szereg lepszych dolnych oszacowań dla trój- i czterokolorowych liczb Ramseya (twierdzenie 5.10 oraz 5.14):

- $R(C_4, C_4, K_4) \geq 20$,
- $R(C_4, C_3, K_4) \geq 27$,
- $R(C_4, B_2, K_4) \geq 28$,
- $R(C_4, C_4, C_4, C_3) \geq 24$,
- $R(C_4, C_4, C_4, K_4) \geq 34$,
- $R(C_4, C_4, C_3, C_3) \geq 30$,
- $R(C_4, C_4, C_3, K_4) \geq 43$.

Ponadto pokażemy oszacowanie liczby $R(C_4, B_2, K_4) \leq 36$ i zbadamy zależność pomiędzy liczbami z parametrem $K_3 + e$ oraz z parametrem K_3 pokazując, że $R(C_4, B_2, K_3 + e) = R(C_4, B_2, K_3) = 17$ (twierdzenie 5.12) oraz $R(C_4, K_3 + e, K_4) \leq \max\{R(C_4, K_3, K_4), 29\} \leq 32$ (twierdzenie 5.13).

Wyniki opisane w tym rozdziale są częścią wspólną z Dzido pracy [18] oraz wspólną z Bożą i Dzido pracy [6].

Rozdział 2

Definicje i oznaczenia

2.1 Podstawowe pojęcia teorii grafów

Definicja 2.1. *Grafem* G nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie V jest skończonym **zbiorem wierzchołków** oraz $E \subseteq \binom{V}{2}$ jest **zbiorem krawędzi**.

$\binom{V}{2}$ oznacza zbiór wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru V . Zbiór wierzchołków grafu G oznaczać będziemy przez $V(G)$ a zbiór krawędzi przez $E(G)$. Liczność tych zbiorów oznaczać będziemy odpowiednio przez $v(G)$ oraz $e(G)$. **Sąsiedztwem** wierzchołka $v \in V(G)$ w grafie G jest zbiór wierzchołków $N(v) = \{u : \{u, v\} \in E(G)\}$. Elementy tego zbioru nazywamy **sąsiadami** wierzchołka v a jego moc **stopniem** wierzchołka v i oznaczamy $deg(v) = |N(v)|$. **Stopień minimalny** w grafie G oznaczamy $\delta = \min\{deg(v) : v \in V(G)\}$. Analogicznie, **stopień maksymalny** oznaczamy przez $\Delta = \max\{deg(v) : v \in V(G)\}$.

Definicja 2.2. Graf G nazywamy **regularnym stopnia r** , jeżeli wszystkie jego wierzchołki są stopnia r .

Definicja 2.3. Graf G nazywamy **spójnym**, jeżeli dla każdego podziału zbioru wierzchołków V na dwa rozłączne podzbiory V_1 i V_2 istnieje krawędź $\{v_1, v_2\}$ taka, że $v_1 \in V_1$ oraz $v_2 \in V_2$.

Definicja 2.4. Graf G jest **podgrafem** grafu H (oznaczamy $G \subseteq H$) jeżeli $V(G) \subseteq V(H)$ oraz $E(G) \subseteq E(H)$.

Definicja 2.5. **Podgraf indukowany** przez zbiór wierzchołków $U \subseteq V(G)$ oznaczamy $G[U]$ i jest to graf (U, E') , gdzie $E' = E(G) \cap \binom{U}{2}$.

Definicja 2.6. Grafy G_1 oraz G_2 nazywamy *izomorficznymi*, jeżeli istnieje bijekcja $h : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ taka, że $\forall_{u,v \in V(G_1)} \{v, u\} \in E(G_1) \iff \{h(v), h(u)\} \in E(G_2)$.

Powszechnie stosowane są następujące operacje na grafach:

Definicja 2.7. *Dopełnienie grafu* $G = (V, E)$ oznaczamy przez \overline{G} i jest to graf $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Definicja 2.8. Dla grafów G i H , symbolem $G+H$ oznaczamy graf o zbiorze wierzchołków $V(G) \cup V(H)$ oraz zbiorze krawędzi $E(G) \cup E(H) \cup \{\{u, v\} : u \in V(G) \wedge v \in V(H)\}$.

W prezentowanej rozprawie omawiane będą grafowe liczby Ramseya, których parametrami będą grafy z różnych klas. Klasy te definiowane są następująco: *grafem pełnym* K_n nazywamy graf o n wierzchołkach oraz zbiorze krawędzi $E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$, *pełnym grafem dwudzielnym* nazywamy graf $K_{n,m} = \overline{K_n} + \overline{K_m}$, *cyklem* C_n nazywamy spójny, regularny stopnia 2 graf o n wierzchołkach. Po usunięciu dowolnej krawędzi z cyklu C_n otrzymujemy *ścieżkę* P_n . *Kotem* nazywamy graf $W_n = C_{n-1} + K_1$ a *książką* graf $B_n = K_2 + \overline{K_n}$.

Definicja 2.9. *Cyklem Hamiltona* w grafie G nazywamy cykl złożony z $v(G)$ wierzchołków.

Definicja 2.10. Graf G nazywamy *hamiltonowskim*, gdy zawiera cykl Hamiltona.

Twierdzenie 2.11 (Ore [59]). *Niech G będzie grafem o n ($n \geq 3$) wierzchołkach. Jeżeli dla każdej pary niepołączonych krawędzi wierzchołków v, w spełniony jest warunek $\deg(v) + \deg(w) \geq n$, to G jest hamiltonowski.*

Definicja 2.12. *m -kolorowaniem krawędziowym grafu* $G = (V, E)$ nazywamy dowolną funkcję $c : E \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$. Jeżeli $c(e) = i$ to mówimy, że krawędź e jest pokolorowana kolorem i .

Łatwo zauważyć, że dowolny graf $G = (V, E)$ można jednoznacznie utożsamiać z 2-kolorowaniem krawędziowym grafu pełnego $K_n = (V, \binom{V}{2})$. Kolorowaniem odpowiadającym grafowi G jest funkcja $c : \binom{V}{2} \rightarrow \{1, 2\}$, gdzie $c(e) = 1$, jeżeli $e \in E$, oraz $c(e) = 2$, w przeciwnym przypadku.

Podobnie do definicji sąsiedztwa i stopnia definiujemy odpowiednie pojęcia dla m -kolorowania krawędziowego grafu $G = (V, E)$. **Sąsiedztwem w kolorze i** wierzchołka v nazywamy zbiór $N_i(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E \text{ i jest pokolorowana kolorem } i\}$. Elementy tego zbioru nazywamy **sąsiadami w kolorze i** . Z tych samych oznaczeń będziemy korzystać także dla zbioru wierzchołków. Wtedy dla $W \subseteq V$ przez $N_i(W)$ oznaczamy zbiór $(\bigcup_{v \in W} N_i(v)) \setminus W$. **Stopniem w kolorze i** wierzchołka v nazywamy liczbę $deg_i(v) = |N_i(v)|$. **Stopień minimalny w kolorze i** w grafie G oznaczamy $\delta_i = \min\{deg_i(v) : v \in V(G)\}$ oraz **stopień maksymalny w kolorze i** oznaczamy przez $\Delta_i = \max\{deg_i(v) : v \in V(G)\}$.

Definicja 2.13. Dla grafu G oraz m -kolorowania krawędziowego $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ podgraf grafu G **indukowany przez kolor i** oznaczamy G^i i jest to graf, o zbiorze wierzchołków $V(G^i) = V(G)$ oraz zbiorze krawędzi $E(G^i) = \{e \in E(G) : c(e) = i\}$.

Zamiast kolejnych liczb naturalnych do oznaczenia kolorów często będziemy korzystać z nazw barw. W związku z powyższym zastosujemy następującą regułę: kolor 1 będzie nazywany czerwonym, 2 niebieskim, 3 zielonym. W związku z tym będziemy stosować oznaczenia deg_r , N_r , G^r , δ_r , Δ_r dla koloru czerwonego, analogicznie indeks b dla niebieskiego oraz g dla koloru zielonego.

2.2 Liczby Ramseya w języku teorii grafów

Zauważmy, że $(X, \binom{X}{2})$ jest grafem pełnym. Podział $\binom{X}{2} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$, o którym mowa w twierdzeniu 1.1 jest m -kolorowaniem krawędziowym tego grafu oraz definicje 1.2 i 1.3 są równoważne, a z twierdzenia 1.1 wynika istnienie grafowych liczb Ramseya. Dokładniej, że dla dowolnych grafów H_1, H_2, \dots, H_m istnieje liczba naturalna n taka, że dowolne m -kolorowanie grafu pełnego K_n zawiera podgraf izomorficzny z H_i złożony z krawędzi w kolorze i (dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, m\}$).

Definicja 2.14. m -kolorowanie krawędziowe grafu pełnego $G = K_n$ nazywamy **kolorowaniem typu $(H_1, \dots, H_m; n)$** , jeżeli dla żadnego i ($1 \leq i \leq m$) G^i nie zawiera podgrafu izomorficznego z H_i .

Definicja 2.15. **Kolorowaniem krytycznym** dla liczby Ramseya $R(H_1, H_2, \dots, H_m) = n$ nazywamy dowolne kolorowanie typu $(H_1, \dots, H_m; n - 1)$.

Pierwszą obserwacją dotyczącą liczb Ramseya jest ich symetria. Oznacza ona, że dla dowolnej permutacji p liczb $1, \dots, m$ spełnione jest równanie

$$R(H_1, H_2, \dots, H_m) = R(H_{p(1)}, H_{p(2)}, \dots, H_{p(m)}).$$

Kolejną obserwacją jest ich monotoniczność: jeżeli graf H_1 jest podgrafem grafu H_2 to $R(H_1, G_1, \dots, G_m) \leq R(H_2, G_1, \dots, G_m)$ dla dowolnych grafów G_1, \dots, G_m . Wynika to z prostego faktu, że dla dowolnego n , kolorowanie typu $(H_1, G_1, \dots, G_m; n)$ jest także kolorowaniem typu $(H_2, G_1, \dots, G_m; n)$.

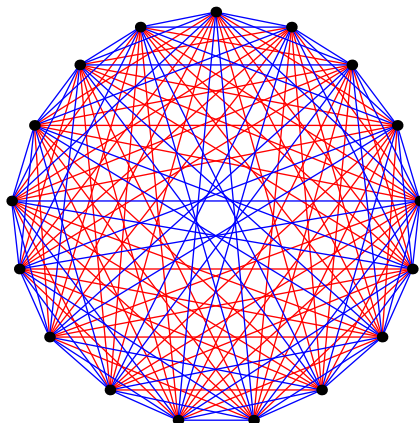
Twierdzenie 2.16 (Górne oszacowanie dwukolorowych klasycznych liczb Ramseya [33]). $R(n, m) \leq R(n-1, m) + R(n, m-1)$. *Dodatkowo, jeżeli obie liczby po prawej stronie są parzyste, to nierówność jest ostra.*

Najczęstsza metoda dowodzenia, że dokładna wartości liczby Ramseya równa się n polega na udowodnieniu dwóch faktów. Na wskazaniu kolorowania krytycznego oraz udowodnieniu, że każde kolorowanie grafu pełnego K_n zawiera podgraf izomorficzny z przynajmniej jednym zabronionym parametrem. Przykładowo, aby udowodnić $R(4, 4) = 18$, wykorzystujemy kolorowanie grafu pełnego $K_{17} = (\{v_0, \dots, v_{16}\}, E)$ zdefiniowane następująco: $c(\{v_i, v_j\}) = 1$, jeżeli $j - i = z^2 \pmod{17}$, oraz $c(\{v_i, v_j\}) = 2$ w przeciwnym przypadku (patrz rysunek 2.1). Łatwo sprawdzić, że kolorowanie to nie zawiera podgrafu K_4 , złożonego z krawędzi o tym samym kolorze. Dowodzi to, że $R(4, 4) \geq 18$. Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać nierówność $R(4, 4) \leq 18$, która wprost wynika z twierdzenia 2.16 i znanej wartości $R(3, 4) = R(4, 3) = 9$.

Przedstawimy teraz twierdzenie, które jest uogólnieniem twierdzenia 2.16 na dowolne grafy oraz dowolną liczbę kolorów.

Twierdzenie 2.17 (Górne oszacowanie). $R(H_1, \dots, H_m) \leq 2 - m + \sum_{i=1}^m r_i$, gdzie $r_i = \min\{R(H_1, \dots, H_{i-1}, H_i[V(H_i) \setminus \{v\}], H_{i+1}, \dots, H_m) : v \in V(H_i)\}$. *Ponadto, jeżeli wyrażenie po prawej stronie jest parzyste oraz istnieje i takie, że r_i jest parzyste to nierówność jest ostra.*

Dowód. (nie wprost) Załóżmy, że $R(H_1, \dots, H_m) > 2 - m + \sum_{i=1}^m r_i$. Istnieje wtedy kolorowanie typu $(H_1, \dots, H_m; 2 - m + \sum_{i=1}^m r_i)$ grafu $G = K_{2-m+\sum_{i=1}^m r_i}$. Weźmy dowolny wierzchołek $v \in V(G)$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieje kolor i taki, że

Rysunek 2.1: Kolorowanie krytyczne dla liczby $R(4, 4)$.

$\deg_i(v) \geq r_i$. Weźmy wierzchołek $u \in V(H_i)$ taki, że osiągnięte jest minimum w definicji r_i . Z definicji tej wynika, że podgraf indukowany $G[N_i(v)]^i$ zawiera podgraf izomorficzny z $H_i[V(H_i) \setminus \{u\}]$. Podgraf ten wraz z wierzchołkiem v , zawiera podgraf H_i , którego wszystkie krawędzie są w kolorze i , co daje sprzeczność.

Ponadto, jeżeli rozważymy m -kolorowanie grafu pełnego rozmiaru $1 - m + \sum_{i=1}^m r_i$, to albo istnieje wierzchołek v i kolor i taki, że $\deg_i(v) \geq r_i$, albo stopień każdego wierzchołka w kolorze i wynosi $r_i - 1$. Nie jest to możliwe, gdy graf ma nieparzystą liczbę wierzchołków i r_i jest parzyste. \square

2.3 Liczby Turana i grafy C_4 -wolne

Definicja 2.18. Graf G jest **H -wolny**, jeżeli nie zawiera podgrafu izomorficznego do H .

Definicja 2.19. **Liczba Turana** $ex(n, H)$ nazywamy maksymalną liczbę krawędzi w grafie o n wierzchołkach, który nie zawiera podgrafu izomorficznego do H . Czyli $ex(n, H) = \max\{e(G) : G \text{ jest } H\text{-wolny oraz } v(G) = n\}$.

Definicja 2.20. **Grafem ekstremalnym** dla liczby $ex(n, H)$ nazywamy dowolny graf G o n wierzchołkach, który jest H -wolny oraz $e(G) = ex(n, H)$.

W przypadku $H = C_4$ w literaturze często spotykane jest oznaczenie $t(n) = ex(n, C_4)$. Dokładne wartości funkcji $t(n)$ dla $n \leq 21$ wyznaczyli w 1989 r. Clapham i inni [16] oraz pięć lat później Yang Yuansheng i Rowlinson [82] dla $22 \leq n \leq 31$. Wszystkie wyznaczone

w tych pracach wartości przedstawia tabela 2.1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t(n)$	0	0	1	3	4	6	7	9	11	13	16	18	21	24	27	30
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$t(n)$	33	36	39	42	46	50	52	56	59	63	67	71	76	80	85	90

Tabela 2.1: Liczby Turana $t(n)$ dla $n \leq 31$.

Twierdzenie 2.21 (Fürdi [27]). *Dla każdego $r = 2^k$*

$$t(r^2 + r + 1) = \frac{1}{2}r(r + 1)^2.$$

Twierdzenie 2.22 (Reiman [70]). *Dla każdego n , $n \geq 4$*

$$t(n) < \frac{1}{4}n(1 + \sqrt{4n - 3}).$$

Liczby Turana są przydatne przy wyznaczaniu liczb Ramseya. Używa się ich do wyznaczania górnego oszacowania. Przykładem takiego zastosowania może być dowód następującej nierówności $R(C_4, C_4) \leq 6$. Faktycznie, klika K_6 zawiera 15 krawędzi, więc w dowolnym 2-kolorowaniu jeden z kolorów musi zawierać przynajmniej 8 krawędzi. Ponieważ $t(6) = 7$ to w kolorze tym musi występować cykl C_4 . Podobnie można pokazać nierówność $R(C_4, C_4, C_4) \leq 11$ korzystając z wartości $t(11) = 18$. Obie udowodnione nierówności wraz z krytycznymi kolorowaniami dają równość dla tych dwóch liczb (patrz [13, 5]).

Interesujące są także klasy grafów niezawierających podgrafów izomorficznych do C_4 . Przykładem takich klas są grafy Erdősa-Rényiego oraz grafy Moora.

Definicja 2.23. *Obwodem grafu G nazywamy długość najkrótszego zawartego w nim cyklu.*

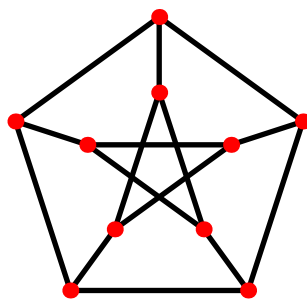
Definicja 2.24. *Średnicą grafu G nazywamy odległość pomiędzy najbardziej oddalonymi wierzchołkami.*

Łatwo jest zauważyć, że liczba wierzchołków w grafie G , regularnym stopnia r i średnicy k musi spełniać następującą nierówność:

$$v(G) \leq 1 + r \sum_{i=0}^{k-1} (r-1)^i \quad (2.1)$$

Definicja 2.25. *Grafem Moora* nazywamy graf regularny stopnia r i średnicy k o liczbie wierzchołków osiągającej równość w nierówności 2.1.

W kontekście prezentowanej rozprawy najbardziej interesującym nas przypadkiem są grafy Moora o obwodzie 5. Nie zawierają one oczywiście cyklu C_4 . Twierdzenie Hoffmana–Singletona [38] mówi, że graf Moora o obwodzie 5 i średnicy 2 musi być regularny stopnia 2, 3, 7 lub 57. Znane są tylko trzy takie grafy, jest to cykl C_5 (regularny stopnia 2), **graf Petersena** (regularny stopnia 3, patrz rysunek 2.2), **graf Hoffmana–Singletona** (stopnia 7). Problemem otwartym jest istnienie grafu Moora regularnego stopnia 57 i obwodzie 5.



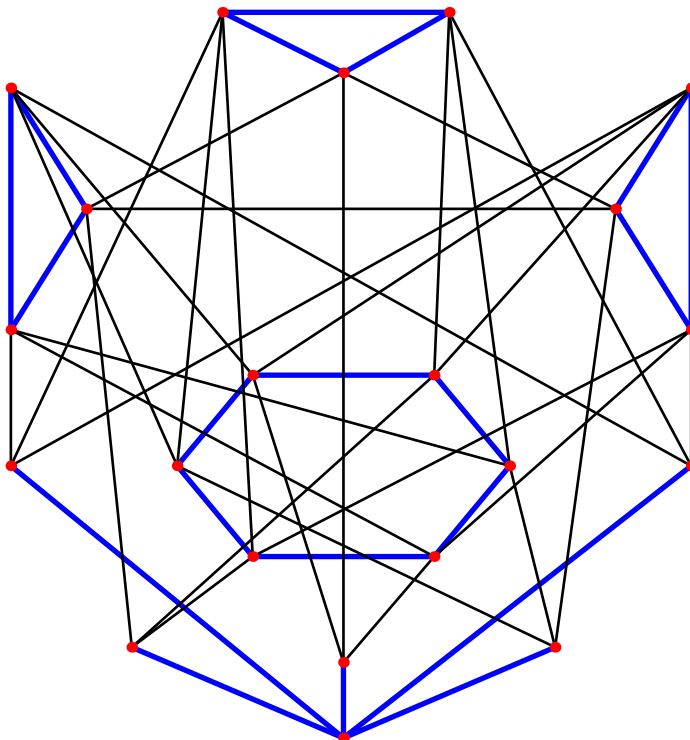
Rysunek 2.2: Graf Petersena.

Drugą interesującą nas klasą grafów C_4 -wolnych są **grafy Erdősa - Rényiego** [20] oznaczane przez $ER(q)$, gdzie q jest potęgą liczby pierwszej. Zostały one opisane przez Erdősa i Rényiego w 1962 r. oraz dokładnie zbadane przez Parsonsa w [60]. Znane są między innymi następujące własności $ER(q)$:

- $ER(q)$ ma $q^2 + q + 1$ wierzchołków, $q + 1$ jest stopnia q oraz q^2 jest stopnia $q + 1$.
- $ER(q)$ nie zawiera grafu C_4 .
- Żadne dwa wierzchołki $ER(q)$ stopnia q nie są połączone krawędzią.

- Żaden wierzchołek stopnia q wraz z dowolnymi dwoma innymi wierzchołkami nie tworzy grafu K_3 .

Przykład takiego grafu ($ER(5)$) przedstawiony jest na rysunku 2.3. Kolorem niebieskim wyróżniliśmy krawędzie trzech rozłącznych trójkątów, cyklu C_6 oraz krawędzie wychodzące z wierzchołka stopnia 5 do niepołączonych ze sobą wierzchołków.



Rysunek 2.3: Graf $ER(5)$.

Rozdział 3

Liczby Ramseya postaci $R(C_4, K_{2,n})$

3.1 Znane wyniki

W tym rozdziale będziemy zajmować się dwukolorowymi liczbami Ramseya dla pełnych grafów dwudzielnych. Tego typu liczby były szeroko badane między innymi w pracach [35, 36, 51, 52, 53, 61]. Harary [35] pokazał, że

$$R(K_{1,n}, K_{1,m}) = n + m - \epsilon,$$

gdzie $\epsilon = 1$, jeżeli n i m są parzyste, oraz $\epsilon = 0$ w pozostałych przypadkach. Lortz i Mengersen [52, 53] wyznaczyli szereg dokładnych wartości liczb Ramseya dla małych pełnych grafów dwudzielnych. Zbadali także asymptotyczne zachowanie liczb $R(K_{2,n}, K_{2,m})$ dla $n \gg m$ [53]. Problem wyznaczenia liczb postaci $R(K_{2,2} = C_4, K_{1,m})$ jest jednym z zadań postawionych przez Erdősa i opisanych przez Chung w pracy [12]. Przypadek ten badany był między innymi przez Parsons [61] oraz przez Chena Guantao i Schelpa [10].

Harborth i Mengersen [36] badali liczby postaci $R(C_4, K_{m,n})$ dla $2 \leq m \leq 3$ oraz $m \leq n$. Wartości dla liczb w przypadku $m = 3$ i $3 \leq n \leq 10$ wyznaczył Lortz [51]. W tym rozdziale będziemy szerzej zajmować się liczbami typu $R(C_4, K_{2,n})$. Harborth i Mengersen [36] udowodnili następujące górne oszacowanie

Twierdzenie 3.1 (Harborth, Mengersen [36]). *Dla $n \geq 2$ niech $q = \lceil \sqrt{n} \rceil$, $s = n - (q-1)^2$ oraz $M = \{2, 5, 37, 3137\}$. Wtedy*

$$R(C_4, K_{2,n}) \leq \begin{cases} n + 2q - 1 & \text{dla } s = 1 \text{ oraz } n \notin M \\ n + 2q & \text{dla } 2 \leq s \leq q - 1 \text{ lub } n \in M \\ n + 2q + 1 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Panadto, jeżeli q jest potęgą liczby pierwszej to

$$R(C_4, K_{2,n}) = \begin{cases} n + 2q - 1 & \text{dla } s = 1 \text{ oraz } n \notin \{2, 5, 37\} \\ n + 2q & \text{dla } s = q - 1 \geq 2 \text{ lub } n \in \{2, 5, 37\} \\ n + 2q + 1 & \text{dla } s = q \end{cases}$$

Dodatkowo, jeżeli $q + 1$ jest potęgą liczby pierwszej oraz $s = 2q - 1$ to $R(C_4, K_{2,n}) = n + 2q + 1$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$R(C_4, K_{2,n})$	4	6	8	9	11	12	14
n	8	9	10	11	12	13	14
$R(C_4, K_{2,n})$	15	16	17	18	20	22	22
n	15	16	17	18	19	20	21
$R(C_4, K_{2,n})$	24	25	26	27	28-29	30	32

Tabela 3.1: $R(C_4, K_{2,n})$ dla $n \leq 21$.

Tabela 3.1 prezentuje wszystkie znane dokładne wartości i oszacowania liczb postaci $R(C_4, K_{2,n})$ dla $n \leq 21$. Wartości dla $n = 1$ oraz $n = 2$ zostały uzyskane przez Chvátala oraz Hararego w [13, 14]. Wartości przedstawione pogrubioną czcionką zostały wyznaczone w prezentowanej rozprawie. Wszystkie pozostałe wyznaczyli Harborth i Mengersen [36], gdzie przedstawiono także następujące ograniczenia:

$$(E1) \quad 22 \leq R(C_4, K_{2,14}) \leq 23,$$

$$(E2) \quad 22 \leq R(C_4, K_{2,15}) \leq 24,$$

$$(E3) \quad 27 \leq R(C_4, K_{2,18}) \leq 28.$$

Głównym wynikiem tej części rozprawy będzie twierdzenie udowodnione w rozdziale 3.2, które dla nieskończenie wielu n daje lepsze niż twierdzenie 3.1 górne oszacowanie dla liczb $R(C_4, K_{2,n})$. Natychmiastowym wnioskiem z tego twierdzenia będzie dokładna wartość liczby $R(C_4, K_{2,18})$ oraz górne oszacowanie $R(C_4, K_{2,38}) \leq 51$. W kolejnych podrozdziałach przedstawimy algorytm, za pomocą którego wyznaczyliśmy dokładne wartości dla $n = 14, 15$. Wyniki opisane w tym rozdziale zostały umieszczone w zaakceptowanej do druku pracy [17].

3.2 Nowe górne oszacowanie dla liczb $R(C_4, K_{2,n})$

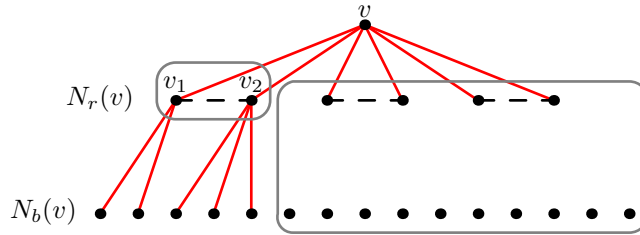
Twierdzenie 3.2 (Dybizbański [17]). *Dla parzystego $n \geq 2$ niech $q = \lceil \sqrt{n} \rceil$ oraz $s = n - (q - 1)^2$. Jeżeli q jest nieparzyste oraz $s \leq q/2$ to $R(C_4, K_{2,n}) \leq n + 2q - 1$.*

W przeprowadzeniu dowodu będą nam potrzebne następujące lematy:

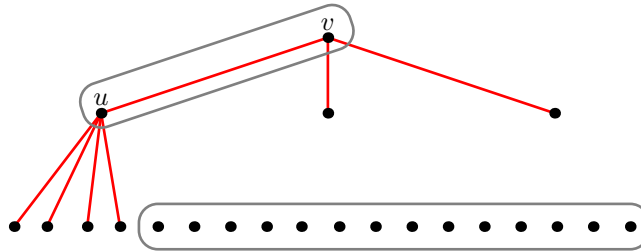
Lemat 3.3 *Jeżeli w 2-kolorowaniu krawędziowym grafu pełnego K_{n+2q-1} istnieje wierzchołek v taki, że $\deg_r(v) > q$, to kolorowanie to zawiera czerwony cykl C_4 lub niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,n}$.*

Dowód. Wierzchołki ze zbioru $N_r(v)$ połączmy w pary (zobacz rysunek 3.1) w następujący sposób: po pierwsze, dwa wierzchołki v_i oraz v_j tworzą parę, gdy są połączone krawędzią w kolorze czerwonym. Możemy założyć, że każdy wierzchołek ze zbioru $N_r(v)$ jest połączony czerwoną krawędzią z tylko jednym innym wierzchołkiem ze zbioru $N_r(v)$. W przeciwnym przypadku, gdy dwa wierzchołki $u, w \in N_r(v)$ mają wspólnego czerwonego sąsiada $x \neq v$, to kolorowanie zawiera czerwony cykl C_4 . Pozostałe wierzchołki ze zbioru $N_r(v)$ łączymy w pary dowolnie. W ten sposób uzyskaliśmy $\lfloor \deg_r(v)/2 \rfloor \geq (q+1)/2$ par. W $N_b(v)$ jest $\deg_b(v) = n+2q-1 - (\deg_r(v)+1) \leq n+q-3$ wierzchołków. Ponownie możemy założyć, że każdy z nich może być połączony czerwoną krawędzią z co najwyżej jednym wierzchołkiem ze zbioru $N_r(v)$. Oznacza to, że istnieje para wierzchołków, bez straty ogólności powiedzmy $\{v_1, v_2\}$, w zbiorze $N_r(v)$, która jest połączona czerwonymi krawędziami z co najwyżej $(n+q-3)/\lfloor \deg_r(v)/2 \rfloor$ wierzchołkami ze zbioru $N_b(v)$. Niech $B \subset N_b(v)$ będzie zbiorem tych wierzchołków. Wtedy $|B| \leq \lfloor (n+q-3)/\lfloor \deg_r(v)/2 \rfloor \rfloor \leq \lfloor 2(n+q-3)/(q+1) \rfloor$. Para $\{v_1, v_2\}$ wraz z wierzchołkami ze zbioru $(N_r(v) \setminus \{v_1, v_2\}) \cup (N_b(v) \setminus B)$ tworzy niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,l}$, gdzie $l = |V| - 3 - |B| \geq n+2q-4 - \lfloor 2(n+q-3)/(q+1) \rfloor \geq n - \lfloor 2s/(q+1) \rfloor$. Ostatnia nierówność wynika z faktu, że $s = (2-q)(q+1) + n+q-3$. Ponieważ $2s < q+1$, uzyskujemy $l \geq n$, więc kolorowanie zawiera niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,n}$. □

Lemat 3.4 *Jeżeli w 2-kolorowaniu krawędziowym grafu pełnego K_{n+2q-1} istnieje wierzchołek v taki, że $\deg_r(v) < q$, to kolorowanie to zawiera czerwony cykl C_4 lub niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,n}$.*



Rysunek 3.1: Przykład dla $\deg_r(v) = 6$ i $|(N_r(v_1) \cup N_r(v_2)) \cap N_b(v)| = 5$.



Rysunek 3.2: Przykład dla $\deg_r(v) = 3$ i $\deg_r(u) = 5$.

Dowód. Jeżeli w kolorowaniu grafu pełnego K_{n+2q-1} istnieje wierzchołek u taki, że $\deg_r(u) > q$, to z lematu 3.3 wynika, że zawiera on czerwony cykl C_4 lub niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,n}$. Możemy więc założyć, że maksymalny czerwony stopień nie przekracza q . Niech v będzie wierzchołkiem takim, że $0 < \deg_r(v) < q$ i $u \in N_r(v)$ (zobacz rysunek 3.2), wtedy wierzchołki $\{u, v\}$ razem z wierzchołkami ze zbioru $N_b(v) \cap N_b(u)$ tworzą niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,l}$ gdzie $l = n + 2q - 1 - (\deg_r(v) + \deg_r(u)) \geq n$. Jeżeli $\deg_r(v) = 0$ to v tworzy niebieski $K_{2,n}$ z dowolnym innym wierzchołkiem u oraz z wierzchołkami ze zbioru $N_b(v) \cap N_b(u)$. \square

Dowód. (Twierdzenia 3.2) Z lematów 3.3 oraz 3.4 wynika, że każde 2-kolorowanie klikki K_{n+2q-1} zawiera czerwony cykl C_4 lub niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,n}$, jeżeli istnieje wierzchołek v taki, że $\deg_r(v) \neq q$. Z drugiej strony K_{n+2q-1} ma nieparzystą liczbę wierzchołków. Niemożliwym jest, aby istniało kolorowanie grafu pełnego o nieparzystej liczbie wierzchołków regularne stopnia nieparzystego. Oznacza to, że każde kolorowanie klikki K_{n+2q-1} zawiera czerwony cykl C_4 lub niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,n}$, więc $R(C_4, K_{2,n}) \leq n + 2q - 1$. \square

Z udowodnionego właśnie twierdzenia wynikają następujące wnioski:

Wniosek 3.5. $R(C_4, K_{2,18}) = 27$.

Dowód. Dla $n = 18$ mamy $q = 5$ oraz $s = 2 \leq q/2$, z twierdzenia 3.2 wynika, że $R(C_4, K_{2,18}) \leq 27$. Nierówność ta wraz z oszacowaniem (E3) wyznacza dokładną wartość $R(C_4, K_{2,18}) = 27$ \square

Wniosek 3.6. $R(C_4, K_{2,38}) = 51$.

Dowód. Dla $n = 38$ mamy $q = 7$ oraz $s = 2 \leq q/2$, z twierdzenia 3.2 wynika, że $R(C_4, K_{2,38}) \leq 51$. Aby wyznaczyć dolne oszacowanie skorzystaliśmy z grafu Hoffmana–Singletona opisanego w pracy [38]. Jest to graf Moora, regularny stopnia 7 o 50 wierzchołkach i obwodzie 5. Zauważmy, że jeżeli pokolorujemy kolorem czerwonym krawędzie klikki K_{50} tak, aby czerwony podgraf był izomorficzny z grafem Hoffmana–Singletona a pozostałym krawędziom nadamy kolor niebieski, to każdy wierzchołek będzie spełniał $deg_r(v) = 7$ oraz $deg_b(v) = 42$. Ponieważ graf ten nie zawiera czerwonego C_4 , to dowolne dwa wierzchołki mogą mieć co najwyżej jednego wspólnego czerwonego sąsiada. Łatwo zauważyć, że dwa dowolne wierzchołki mają co najwyżej 36 wspólnych niebieskich sąsiadów. Oznacza to, że kolorowanie to nie zawiera niebieskiego pełnego grafu dwudzielnego $K_{2,38}$ (to samo kolorowanie jest krytyczne także dla liczby $R(C_4, K_{2,37}) = 51$). \square

3.3 Nowe dokładne wartości dla małych n

3.3.1 Zastosowany algorytm

W tym podrozdziale opiszemy algorytm, który został użyty do szukania kolorowań krytycznych grafu pełnego K_p , niezawierających czerwonego C_4 ani niebieskiego $K_{2,n}$. Dowolne kolorowanie grafu pełnego K_p będzie reprezentowane poprzez macierz sąsiedztwa $A = (a_{i,j})_{p \times p}$, gdzie $a_{i,j} \in \{1, 2\}$ reprezentuje kolor krawędzi $\{i, j\}$. Kolorowanie jest całkowicie opisane przez wartości ponad główną przekątną i reprezentowane jako $\binom{p}{2}$ bitowa liczba

$$rep(G) = b_{1,2}b_{1,3}\dots b_{1,p}b_{2,3}\dots b_{2,p}\dots b_{p-1,p},$$

gdzie $b_{i,j} = 1$, jeżeli krawędź $\{i, j\}$ jest czerwona, oraz $b_{i,j} = 0$ w przeciwnym przypadku. Niech $index(i, j)$ dla $i < j$ oznacza pozycję w $rep(G)$, która odpowiada współrzędnym (i, j) w macierzy A . Np. $index(1, 2) = 1$, $indeks(1, 3) = 2$, itd.

Kolejno rozpatrywane przez algorytm kolorowania są reprezentowane przez coraz większe wartości $rep(G)$. W celu zwiększenia szybkości działania procesu przeszukiwania ko-

lorowań algorytm omija wiele kolorowań, o których wiadomo, że zawierają czerwone C_4 lub niebieskie $K_{2,n}$. W każdym kroku, jeżeli algorytm stwierdzi, że aktualnie rozpatrywane kolorowanie G_{act} zawiera czerwone C_4 lub niebieskie $K_{2,n}$, to omija wiele kolorowań, które także zawierają przynajmniej jeden z unikanych grafów. W tym celu szukany jest najbardziej znaczący bit $b_{i,j}$ (o najmniejszej wartości $index(i, j)$) liczby $rep(G_{act})$ spełniający co najmniej jeden z następujących warunków:

- (w1) $b_{i,j} = 1$ oraz krawędź $\{i, j\}$ wraz z trzema krawędziami reprezentowanymi przez bardziej znaczące bity tworzy czerwony cykl C_4 . To znaczy, istnieją trzy krawędzie $\{i_1, j_1\}$, $\{i_2, j_2\}$, $\{i_3, j_3\}$, które tworzą z $\{i, j\}$ czerwony cykl C_4 oraz $index(i_k, j_k) < index(i, j)$ dla $k = 1, 2, 3$,
- (w2) $b_{i,j} = 0$ oraz krawędź $\{i, j\}$ wraz z krawędziami reprezentowanymi przez bardziej znaczące bity tworzy niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,n}$,
- (w3) $b_{i,j} = 1$ oraz krawędź $\{i, j\}$ wraz z krawędziami reprezentowanymi przez bardziej znaczące bity tworzy wierzchołek u o stopniu $deg_r(u) > \overline{\Delta}_r$,
- (w4) $b_{i,j} = 0$ oraz krawędź $\{i, j\}$ wraz z krawędziami reprezentowanymi przez bardziej znaczące bity tworzy wierzchołek u o stopniu $deg_r(u) < \overline{\delta}_r$,

gdzie $\overline{\Delta}_r$ i $\overline{\delta}_r$ są parametrami oznaczającymi odpowiednio górne ograniczenie na maksymalny i dolne na minimalny czerwony stopień wierzchołków w kolorowaniu krytycznym. Jeżeli znajdziemy taki bit $b_{i,j}$, to możemy ominąć wiele kolorowań. Niezależnie jaką wartość będą miały wszystkie mniej znaczące bity, kolorowania będą zawierały czerwony cykl C_4 lub niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,n}$. Wszystkie te kolorowania mogą być ominięte i kolorowanie rozważane w następnym kroku powinno być reprezentowane przez najmniejszą liczbę z przeciwnym bitem $b_{i,j}$ oraz większą od $rep(G_{act})$. Przedstawimy teraz pseudokod omawianego algorytmu.

Algorytm 3.7. Przeszukiwanie kolorowań grafu K_p niezawierających czerwonego cyklu C_4 ani niebieskiego $K_{2,n}$

Wejście: $p, n, \overline{\Delta}_r, \overline{\delta}_r$ – liczby naturalne

$\overline{\Delta}_r$ i $\overline{\delta}_r$ są parametrami oznaczającymi odpowiednio górne ograniczenie na maksymalny i dolne na minimalny czerwony stopień wierzchołków grafu

Wyjście: rep – liczba reprezentująca kolorowanie K_p niezawierające czerwonego cyklu C_4

ani niebieskiego $K_{2,n}$ lub informacja o braku takiego kolorowania.

1. $k \leftarrow \binom{p}{2}$
2. $rep \leftarrow 0$ (k bitowa liczba reprezentująca kolorowanie)
3. **dopóki** $rep < 2^k$ i kolorowanie reprezentowane przez rep zawiera czerwony cykl C_4 lub niebieski $K_{2,n}$ **wykonuj**
4. $x \leftarrow$ indeks najbardziej znaczącego bitu spełniającego jeden z czterech warunków w1-w4
5. $rep \leftarrow$ najmniejsza liczba większa niż rep o przeciwnej wartości bitu o indeksie x
6. **jeżeli** $rep \geq 2^k$ to brak kolorowania
7. **w przeciwnym przypadku** rep reprezentuje kolorowanie niezawierające czerwonego C_4 ani niebieskiego $K_{2,n}$

3.3.2 Wartości liczb Ramseya $R(C_4, K_{2,n})$ dla małych n

Omówimy teraz zastosowanie algorytmu 3.7 do wyznaczenia dokładnych wartości liczb $R(C_4, K_{2,14}) = 22$ oraz $R(C_4, K_{2,15}) = 24$.

W pierwszym z tych przypadków użyliśmy go do sprawdzenia potencjalnych kolorowań krawędziowych klik K_{22} , co doprowadziło do wyznaczenia górnego oszacowania liczby $R(C_4, K_{2,14})$. W celu zmniejszenia przestrzeni poszukiwań ograniczyliśmy do 6 możliwości sposoby pokolorowania krawędzi incydentnych z 6 pierwszymi wierzchołkami (oznaczymy je $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$). W dalszej części potrzebny nam będzie następujący lemat.

Lemat 3.8 *Kolorowanie grafu pełnego K_{22} zawiera czerwony cykl C_4 lub niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,14}$, jeżeli spełniony jest przynajmniej jeden z następujących warunków:*

- (1) *istnieje wierzchołek $v \in V$ spełniający $deg_r(v) > 5$,*
- (2) *istnieje wierzchołek $v \in V$ spełniający $deg_r(v) < 4$,*
- (3) *istnieją wierzchołki $u, v \in V$ spełniające $deg_r(v) = deg_r(u) = 4$ oraz krawędź $\{u, v\}$ jest czerwona.*

Dowód. **(1)** Połączmy w pary wierzchołki ze zbioru $N_r(v)$ w taki sposób jak w dowodzie lematu 3.3 (zobacz rysunek 3.1). $N_b(v)$ ma $22 - \deg_r(v) - 1 \leq 15$ elementów. Możemy założyć, że każdy z nich jest połączony czerwoną krawędzią z co najwyżej jednym wierzchołkiem $N_r(v)$. Uzyskaliśmy przynajmniej 3 pary. Istnieje więc para $\{v_1, v_2\}$, która jest połączona czerwonymi krawędziami z co najwyżej 5 elementami z $N_b(v)$, więc v_1, v_2 oraz wierzchołki ze zbioru $N_b(v_1) \cap N_b(v_2)$ tworzą niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,14}$.

(2) Jako pierwszy rozważmy przypadek, gdy $1 \leq \deg_r(v) \leq 3$. Weźmy wierzchołek $u \in N_r(v)$ (zobacz rysunek 3.2). Z **(1)** wynika, że możemy założyć, że $\deg_r(u) \leq 5$. Wtedy $|N_b(v) \cap N_b(u)| = 22 - \deg_r(u) - \deg_r(v) \geq 22 - 5 - 3 = 14$, więc u, v oraz $N_b(v) \cap N_b(u)$ tworzą niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,14}$. Jeżeli $\deg_r(v) = 0$, to v tworzy $K_{2,14}$ wraz z dowolnym innym wierzchołkiem u oraz wierzchołkami ze zbioru $N_b(v) \cap N_b(u)$.

(3) W tym przypadku $|N_b(u) \cap N_b(v)| \geq 22 - \deg_r(u) - \deg_r(v) = 14$, więc u, v wraz z wierzchołkami ze zbioru $N_b(u) \cap N_b(v)$ tworzy niebieski pełny graf dwudzielny $K_{2,14}$. \square

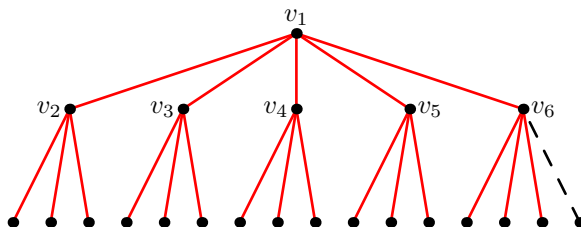
Obserwacja 3.9. Z lematu 3.8 wynika, że jeżeli szukamy kolorowania klik K_{22} , które nie zawiera ani czerwonego C_4 ani niebieskiego $K_{2,14}$, to wystarczy sprawdzić kolorowania spełniające następujące własności:

- każdy wierzchołek v ma stopień $\deg_r(v) \in \{4, 5\}$,
- istnieje wierzchołek v o stopniu $\deg_r(v) = 5$.

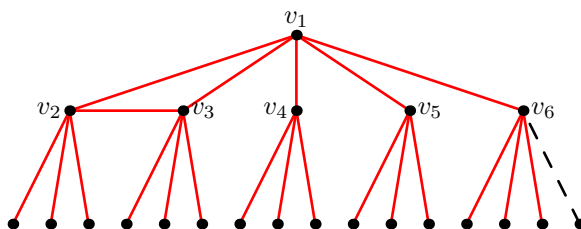
Z tej obserwacji wynika, że jako parametry algorytmu 3.7 możemy przyjąć $\bar{\delta}_r = 4$ oraz $\bar{\Delta}_r = 5$.

Obserwacja 3.10. Niech v_Δ będzie wierzchołkiem takim, że $\deg_r(v_\Delta) = 5$. Jeżeli wierzchołek u ze zbioru $N_r(v_\Delta)$ ma mniej niż trzech czerwonych sąsiadów w zbiorze $N_b(v_\Delta)$, to kolorowanie klik K_{22} zawiera niebieską $K_{2,14}$ utworzoną z v_Δ, u oraz wierzchołkami ze zbioru $N_b(v_\Delta) \setminus N_r(u)$.

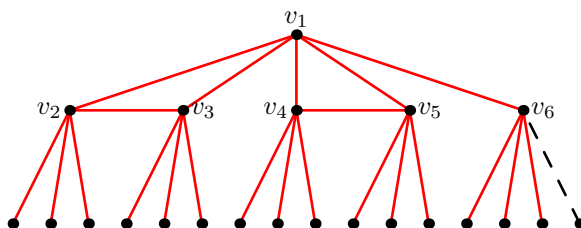
Z obserwacji 3.9 wynika, że bez straty ogólności możemy założyć, że istnieje wierzchołek v_1 posiadający 5 czerwonych sąsiadów. Jego czerwonych sąsiadów oznaczymy v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 . Możemy rozważyć 3 przypadki:



Rysunek 3.3: Przypadek 1a) gdy krawędź oznaczona przerywaną linią jest czerwona oraz 1b) gdy jest niebieska.



Rysunek 3.4: Przypadek 2a) gdy krawędź oznaczona przerywaną linią jest czerwona oraz 2b) gdy jest niebieska.



Rysunek 3.5: Przypadek 3a) gdy krawędź oznaczona przerywaną linią jest czerwona oraz 3b) gdy jest niebieska.

- (1) nie ma czerwonych krawędzi pomiędzy wierzchołkami ze zbioru $N_r(v_1)$ (zobacz rysunek 3.3),
- (2) jest jedna taka krawędź $\{v_2, v_3\}$ (zobacz rysunek 3.4),
- (3) są dwie rozłączne czerwone krawędzie $\{v_2, v_3\}$ oraz $\{v_4, v_5\}$ (zobacz rysunek 3.5).

Każdy wierzchołek ze zbioru $N_r(v_1)$ ma trzech lub czterech czerwonych sąsiadów w $N_b(v_1)$. Ponieważ $N_b(v_1)$ ma 16 elementów mamy tylko dwie możliwości: albo wszystkie pięć wierzchołków ma po trzech czerwonych sąsiadów w $N_b(v_1)$ albo cztery mają po trzech sąsiadów oraz jeden czterech. Bez straty ogólności możemy założyć, że wierzchołkiem posiadającym czterech czerwonych sąsiadów w $N_b(v_1)$ jest v_6 . Z powyższych rozważań wynika, że istnieje

```

X 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1
2 X 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 2 2 2 2 1
2 2 X 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 2 2 2 2 1 2
2 2 2 X 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 X 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 X 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2 1 X 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2
2 2 2 2 1 2 2 2 1 X 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 1 2 2 2 2 1 2 X 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 1 1 1 2 2 2 2 X 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2
2 2 1 2 2 1 2 2 2 2 1 2 X 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
2 2 1 2 1 2 2 2 2 1 2 2 1 X 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 X 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
1 2 2 2 2 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
1 2 2 2 1 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
1 2 2 1 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 X 2 1
1 2 1 2 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 X 2
1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 X

```

Rysunek 3.6: Kolorowania krytyczne dla $R(C_4, K_{2,15})$.

6 możliwości pokolorowania krawędzi incydentnych z wierzchołkami $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Jednocześnie jest to 6 możliwości ustawienia pierwszych 6 wierszy macierzy incydencji. Za pomocą algorytmu 3.7 uruchomionego na komputerze sprawdziliśmy, że wszystkie kolorowania klik K_{22} zawierają czerwoną C_4 lub niebieską $K_{2,14}$. Więc $R(C_4, K_{2,14}) \leq 22$, co wraz z ograniczeniem (E1) daje nam następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.11 (Dybizbański [17]). $R(C_4, K_{2,14}) = 22$.

Tego samego algorytmu użyliśmy do wyznaczenia kolejnej liczby Ramsey’a. Wynik ten prezentujemy za pomocą następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.12 (Dybizbański [17]). $R(C_4, K_{2,15}) = 24$.

Dowód. Użyliśmy algorytm opisany w podrozdziale 3.3.1, który znalazł 2-kolorowanie grafu pełnego K_{23} (rysunek 3.6). Kolorowanie to nie zawiera ani czerwonego cyklu C_4 ani niebieskiego pełnego grafu dwudzielnego $K_{2,15}$, więc $R(C_4, K_{2,15}) > 23$, co wraz z oszacowaniem (E2) wyznacza dokładną wartość liczby $R(C_4, K_{2,15}) = 24$. \square

Najłatwiejszym sposobem weryfikacji poprawności wszystkich przedstawionych w rozprawie kolorowań jest skopiowanie macierzy z wersji pdf rozprawy do pliku tekstowego i sprawdzenie jej za pomocą prostych algorytmów komputerowych.

Rozdział 4

Liczby Ramseya postaci $R(C_4, W_n)$

4.1 Znane wyniki dla kół i cykli

W 1983 r. Burr i Erdős [7] udowodnili, że $R(C_3, W_n) = 2n - 1$ dla $n \geq 6$. Zhou Huai Lu [86] pokazał, że $R(C_m, W_n) = 2n - 1$ dla nieparzystego m oraz $n \geq 5m - 6$. Surahmat i inni postawili hipotezę [76, 77, 78] mówiącą, że $R(C_m, W_n) = 3m - 2$ dla parzystego $n \geq 4$ oraz $m \geq n - 1$, $m \neq 3$. Częściowo została ona udowodniona w pracach [49, 50, 78] a kompletny dowód przedstawili Yaojun Chen i inni [83]. Surahmat postawił także hipotezę $R(C_m, W_n) = 2m - 1$ dla nieparzystego $n \geq 3$ oraz $m > n \geq 5$ [76]. Hipoteza ta została początkowo udowodniona dla $2m \geq 5n - 7$ [78] a w 2009 r. dla $2m \geq 3n - 1$ [85].

W tym rozdziale omówimy dwukolorowe liczby Ramseya dla cyklu C_4 oraz koła o n wierzchołkach. Dokładne wartości liczb typu $R(C_4, W_n)$ dla $4 \leq n \leq 6$ wyznaczone zostały w pracach [14, 15, 41] oraz dla $7 \leq n \leq 13$ przez Kung-Kuen Tse w pracy [47]. Wyniki te przedstawia tabela 4.1.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$R(C_4, W_n)$	10	9	10	9	11	12	13	14	16	17

Tabela 4.1: $R(C_4, W_n)$ dla $4 \leq n \leq 13$.

Surahmat i inni [79] udowodnili następujące górne oszacowanie

$$R(C_4, W_n) \leq n + \lceil (n - 1)/3 \rceil.$$

W tym rozdziale pokażemy lepsze górne oszacowanie liczb postaci $R(C_4, W_n)$ (twierdzenie 4.1): Jeżeli $n \geq 11$, to

$$R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1$$

Zauważmy, że nowe oszacowanie jest lepsze dla wszystkich $n \geq 14$ i daje taki sam wynik dla $n = 11, 12, 13$. Ponadto pokażemy, że wyznaczone górne oszacowanie jest równe dokładnej wartości dla nieskończenie wielu n . Dokładniej, za pomocą modyfikacji grafów Erdősa-Rényiego, pokażemy (twierdzenie 4.3), że dla $q \geq 3$ będącego potęgą liczby pierwszej

$$R(C_4, W_{q^2+1}) = q^2 + q + 1.$$

Na zakończenie wyznaczymy dokładne wartości liczb $R(C_4, W_n)$ dla $14 \leq n \leq 17$. Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały opisane we wspólnej z Dzido pracy [19].

4.2 Nowe górne oszacowanie

W tym rozdziale pokażemy górne oszacowanie liczb postaci $R(C_4, W_n)$. W dowodzie będziemy korzystać z liczb Turana dla cyklu C_4 (zobacz rozdział 2.3), twierdzenia Ore (twierdzenie 2.11) oraz wartości liczb Ramseya dla dwóch cykli (zobacz rozdział 1.3.2). Na potrzeby dowodu skorzystamy z innego niż w pozostałych częściach rozprawy oznaczenia stopnia wierzchołka w grafie. Notacja ta będzie wskazywać graf, o jakim w danym momencie mowa. Za pomocą $\deg_r^G(v)$ oznaczać będziemy czerwony stopień wierzchołka v w grafie G . Analogiczne oznaczenie wykorzystane będzie dla koloru niebieskiego.

Twierdzenie 4.1 (Dybizbański, Dzido [19]). *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 11$*

$$R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1.$$

Dowód. Niech $G = K_{n+\lfloor \sqrt{n-2} \rfloor+1}$. W celu pokazania, że dowolne 2-kolorowanie krawędziowe grafu G zawiera czerwony cykl C_4 lub niebieskie koło W_n , podzielimy dowód na 3 przypadki w zależności od czerwonych stopni wierzchołków w tym kolorowaniu.

Po pierwsze założmy, że istnieje wierzchołek $v \in V(G)$ taki, że $\deg_r^G(v) \leq \sqrt{n-2}$. Wtedy $\deg_b^G(v) \geq n$. Z twierdzenia 1.6 wynika, że $R(C_4, C_{n-1}) = n$, więc podgraf $G[N_b(v)]$ zawiera czerwony cykl C_4 lub niebieski C_{n-1} . W drugim przypadku cykl ten wraz z wierzchołkiem v tworzy niebieskie koło W_n .

Założmy teraz, że $\delta_r(G) \geq \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 2$. Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $n \in \{(p-1)^2 + 2, \dots, p^2 + 1\}$. Wtedy $\lfloor \sqrt{n-2} \rfloor = p-1$. Niech $s = n - (p-1)^2$. Łatwo zauważyć, że $2 \leq s \leq 2p$. W tym przypadku minimalna liczba krawędzi kolorowania G w kolorze czerwonym wynosi co najmniej

$$\begin{aligned} \lceil \frac{1}{2}(n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1)\delta_r(G) \rceil &\geq \frac{1}{4}(n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1)(2p + 2) = \\ &\frac{1}{4}(n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1)(1 + \sqrt{4(p^2 + p + 1) - 3}) \geq \\ &\frac{1}{4}(n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1)(1 + \sqrt{4(p^2 - p + 1 + s) - 3}) \geq \\ &\frac{1}{4}(n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1)(1 + \sqrt{4(n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1) - 3}) > \\ &t(n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1). \end{aligned} \tag{4.1}$$

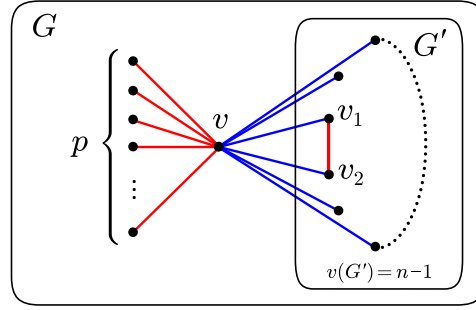
Ostatnia nierówność wynika z twierdzenia 2.22. Wynika z tego, że dowolne 2-kolorowanie grafu G , takie, że $\delta_r(G) \geq \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 2$ zawiera czerwony cykl C_4 .

Ostatnim, pozostałym do rozpatrzenia przypadkiem jest $\delta_r(G) = \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1$. Możemy założyć, że graf nie posiada czerwonego cyklu C_4 , wtedy G^r ma co najwyżej

$$t(n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1) = \left\lceil \frac{(n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1)\delta_r(G)}{2} \right\rceil + A(n)$$

czerwonych krawędzi. Pierwszy składnik sumy po prawej stronie równości jest minimalną liczbą krawędzi jaką musi posiadać graf o $n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1$ wierzchołkach i minimalnym stopniu $\delta_r(G)$. Funkcja $A(n)$ jest maksymalną liczbą krawędzi, jaką można dodać do takiego grafu tak, aby uniknąć cyklu C_4 . Tak jak w poprzednim przypadku, niech p będzie liczbą naturalną taką, że $n \in \{(p-1)^2 + 2, \dots, p^2 + 1\}$. Wtedy $\lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1 = p$. Rozpatrzmy wierzchołek $v \in V(G)$ taki, że $\deg_r^G(v) = \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1 = p$, podgraf $G' = G[N_b(v)]$ oraz dwa niepołączone kolorem niebieskim wierzchołki $v_1, v_2 \in V(G')$ (zobacz rysunek 4.1). Wtedy $v(G') = n-1$ oraz w podgrafie G' mamy $\deg_b^{G'}(v_1) + \deg_b^{G'}(v_2) =$

$2(n-2) - (deg_r^{G'}(v_1) + deg_r^{G'}(v_2))$. Udowodnimy, że $deg_b^{G'}(v_1) + deg_b^{G'}(v_2) \geq n-1$ dla wszystkich par niepołączonych ze sobą wierzchołków $v_1, v_2 \in V(G^{'b})$. W tym przypadku z twierdzenia 2.11 wynika, że podgraf $G^{'b}$ jest hamiltonowski (zawiera C_{n-1}), który wraz z wierzchołkiem v tworzy niebieskie koło W_n w grafie G .



Rysunek 4.1: Kolorowanie grafu G

Niech $D(n)$ będzie funkcją określającą parzystość licznika wyrażenia $\left\lceil \frac{(n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1)\delta_r(G)}{2} \right\rceil$:

$$D(n) = \begin{cases} 0 & p \text{ jest parzyste lub } n \text{ jest nieparzyste} \\ 1 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Sumę czerwonych stopni wierzchołków v_1 i v_2 w grafie G' można oszacować w następujący sposób: $deg_r^{G'}(v_1) + deg_r^{G'}(v_2) \leq 2\delta_r(G) + A(n) + D(n)$. Wtedy w grafie G' , $deg_b^{G'}(v_1) + deg_b^{G'}(v_2) \geq 2(n-2) - (2\delta_r(G) + A(n) + D(n)) = 2n - 2p - A(n) - D(n) - 4$. Aby skorzystać z twierdzenia 2.11, musimy pokazać, że $2n - 2p - A(n) - D(n) - 4 \geq n - 1$ czyli, że

$$A(n) \leq n - 2p - 3 - D(n).$$

Pozostała część dowodu jest podzielona na cztery podprzypadki w zależności od wartości n :

1. $n \geq 41$. W tym przypadku $p \geq 7$. Ponieważ dla każdego n mamy $D(n) \leq 1$, pokażemy, że $A(n) \leq n - 2p - 4$. Korzystając z oszacowania 4.1 otrzymujemy $t(n+p) < \frac{1}{4}(n+p)(2p+2)$, więc

$$A(n) = t(n+p) - \left\lceil \frac{(n+p)p}{2} \right\rceil < \frac{n+p}{2}$$

i tym samym, dla każdego $n \geq 41$, $A(n) \leq n - 2p - 4$.

2. $27 \leq n \leq 40$.

W tym przypadku $\delta_r(G) = p \in \{6, 7\}$. Dowód przebiega analogicznie do punktu 1 z tą różnicą, że nie korzystamy z szacowania 4.1 lecz wyliczamy maksymalną możliwą wartość funkcji $t(n)$ za pomocą twierdzenia 2.22. Tabela 4.2 przedstawia wszystkie wartości potrzebne do wyznaczenia nierówności $A(n) \leq n - 2p - 4$ dla $27 \leq n \leq 40$.

n	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
p	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7
$n - 2p - 4$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	20	21	22
$v(G)$	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	45	46	47
$t(v(G)) \leq$	101	106	111	115	120	125	130	135	140	145	150	160	166	171
$A(n) \leq$	2	4	6	7	9	11	13	15	17	19	21	2	5	6

Tabela 4.2: Wartości potrzebne do wyznaczenia $A(n) \leq n - 2p - 4$ dla $27 \leq n \leq 40$.3. $18 \leq n \leq 26$.

W tym przypadku $\delta_r(G) = p = 5$. Dowód przebiega analogicznie do punktu 2 z tą różnicą, że nie korzystamy z oszacowania funkcji $t(n)$ wynikającego z twierdzenia 2.22 lecz z dokładnych wartości wyznaczonych w pracach [16, 82] i przedstawionych w tabeli 2.1. Tabela 4.3 przedstawia wszystkie wartości potrzebne do wyznaczenia nierówności $A(n) \leq n - 2p - 3 - D(n)$ dla $18 \leq n \leq 26$.

n	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$D(n)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$n - 2p - 3 - D(n)$	4	6	6	8	8	10	10	12	12
$v(G)$	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$t(v(G))$	56	59	63	67	71	76	80	85	90
$A(n)$	-2	-1	0	2	3	6	7	10	12

Tabela 4.3: Wartości potrzebne do wyznaczenia $A(n) \leq n - 2p - 3 - D(n)$ dla $18 \leq n \leq 26$.4. $11 \leq n \leq 17$.

W tym przypadku $\delta_r(G) = p = 4$ więc $D(n) = 0$. Wartości w tabeli 4.4 wyznaczone zostały tak jak w punkcie 3. Dokładne wartości liczb Turana $t(n)$ dla $n \leq 21$ pochodzą z pracy [16] i zostały przedstawione w tabeli 2.1. W pracy [16] wyznaczono także wszystkie grafy ekstremalne, w każdym z tych przypadków. Wartości

n	11	12	13	14	15	16	17
$n - 2p - 3$	0	1	2	3	4	5	6
$v(G)$	15	16	17	18	19	20	21
$t(v(G))$	30	33	36	39	42	46	50
$A(n)$	0	1	2	3	4	6	8

Tabela 4.4: Wartości potrzebne do wyznaczenia $A(n) \leq n - 2p - 3 - D(n)$ dla $11 \leq n \leq 15$.

z tabeli 4.4 kończą dowód dla wszystkich $11 \leq n \leq 15$. Pozostały do rozpatrzenia przypadki, gdy $n = 16$ i $n = 17$.

- W przypadku $n = 16$ liczba Turana $t(v(G)) = t(20) = 46$ oraz istnieje tylko jeden graf C_4 -wolny, który posiada 46 krawędzi i 20 wierzchołków [16]. Jest to graf powstały poprzez usunięcie dowolnego wierzchołka stopnia 4 z grafu $ER(5)$ (zobacz rysunek 2.3). Graf ten posiada maksymalny stopień 5, więc każdy wierzchołek w grafie G' ma niebieski stopień co najmniej 10 i na mocy twierdzenia 2.11 wynika, że graf G' jest hamiltonowski, i cykl ten wraz z wierzchołkiem v tworzy niebieskie koło W_{16} . Możemy więc założyć, że liczba czerwonych krawędzi w kolorowaniu grafu G wynosi co najwyżej 45, wtedy $A(n) = 5 \leq n - 2p - 3$.
- W przypadku $n = 17$ zastosowaliśmy podobne rozważania. $ER(5)$ jest jedynym grafem ekstremalnym dla liczby $t(21) = 50$ [16]. Łatwo sprawdzić (podobnie do przypadku $n = 16$), że graf ten zawiera w dopełnieniu W_{17} . Jeżeli liczba $e(G^r) = 49$ to rozważmy dwa przypadki. Jeżeli istnieje wierzchołek w taki, że $\deg_r^G(w) \geq 7$, to dwa wierzchołki z $N_r(w)$ mają dwóch wspólnych czerwonych sąsiadów, czyli tworzą z nimi cykl C_4 . Jednym z nich jest w a drugi należy do zbioru $B = V(G) \setminus (\{w\} \cup N_r(w))$ a jego istnienie wynika z metody szufladkowej (w $N_r(w)$ jest przynajmniej 7 wierzchołków, każdy z nich jest połączony przynajmniej dwoma krawędziami do wierzchołków ze zbioru B , w którym jest co najwyżej 13 wierzchołków). W drugim przypadku, gdy każdy wierzchołek $w \in G$ jest stopnia $\deg_r^G(w) \leq 6$, to w grafie G' wszystkie wierzchołki są niebieskiego stopnia co najmniej 9, więc na mocy twierdzenia 2.11 graf ten zawiera niebieski cykl C_{16} , który wraz z wierzchołkiem v tworzy niebieskie koło W_{17} . Możemy więc założyć, że liczba czerwonych krawędzi w grafie G wynosi co najwyżej 48, wtedy $A(n) = 6 \leq n - 2p - 3$.

□

Podstawiając $n = q^2 + 1$ w twierdzeniu 4.1 otrzymujemy

Wniosek 4.2. Dla liczby naturalnej $q \geq 4$

$$R(C_4, W_{q^2+1}) \leq q^2 + q + 1.$$

4.3 Nowe dolne oszacowanie

W rozdziale 2.3 przedstawiliśmy klasę grafów Erdősa-Rényiego ($ER(q)$). Są to grafy niezawierające cyklu C_4 . Przez $H(q)$ oznaczmy podgraf $ER(q)$ uzyskany przez usunięcie jednego wierzchołka stopnia q . Z trzeciej własności grafów $ER(q)$ (patrz rozdział 2.3) wynika, że graf $H(q)$ zawiera $2q$ wierzchołków stopnia q oraz $q^2 - q$ wierzchołków stopnia $q+1$. Rozważmy dopełnienie grafu $H(q)$. Łatwo zauważyć, że dla każdego wierzchołka $w \in V(H(q))$, stopień $deg(w)$ w grafie $\overline{H(q)}$ wynosi co najwyżej $q^2 - 1$. Z tego faktu wynika, że dopełnienie $H(q)$ nie zawiera koła W_{q^2+1} , więc istnieje kolorowanie typu $(C_4, W_{q^2+1}; q^2 + q)$. Korzystając z tego faktu i wniosku 4.2 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.3 (Dybizbański, Dzido [19]). *Dla każdego $q \geq 4$ będącego potęgą liczby pierwszej*

$$R(C_4, W_{q^2+1}) = q^2 + q + 1.$$

4.4 Nowe dokładne wartości dla małych n

Dotychczas znane były wartości $R(C_4, W_n)$ dla $n \leq 13$. Wartości dla kolejnych czterech liczb podaje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.4 (Dybizbański, Dzido [19]).

1. $R(C_4, W_{14}) = 18,$

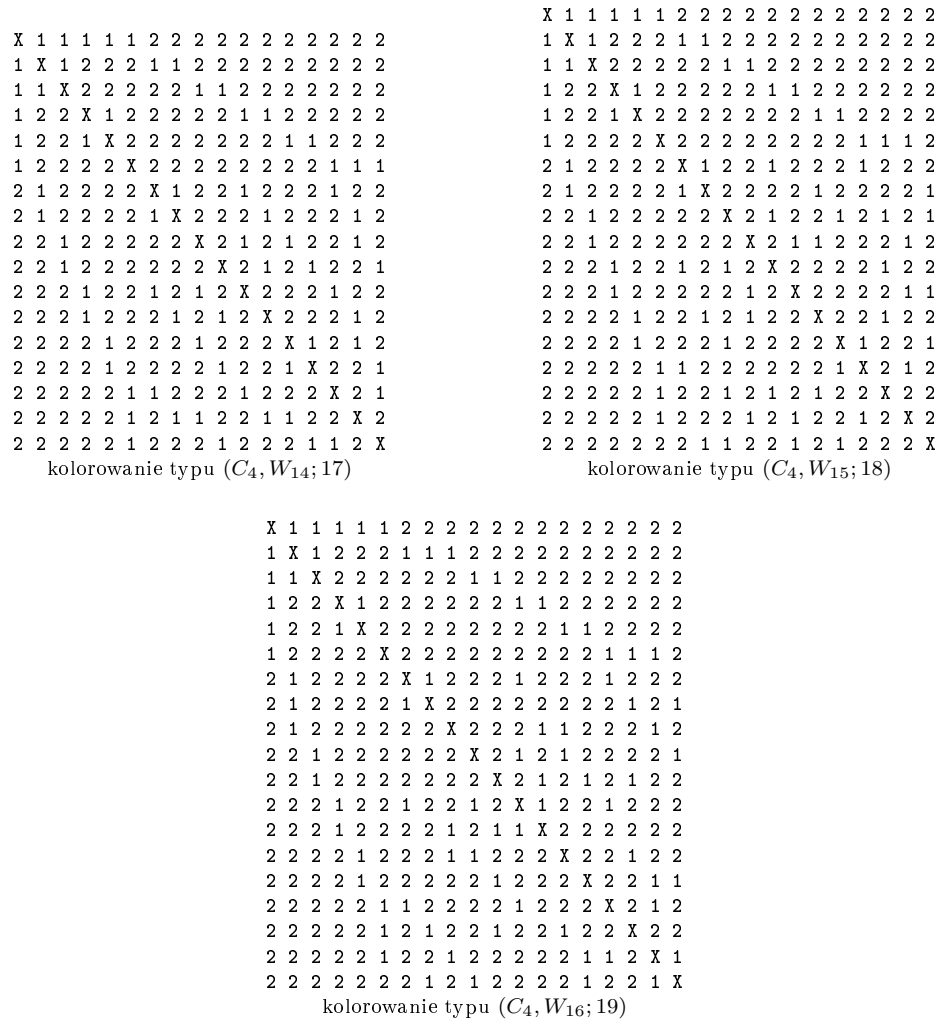
2. $R(C_4, W_{15}) = 19,$

3. $R(C_4, W_{16}) = 20,$

4. $R(C_4, W_{17}) = 21.$

Dowód. Z twierdzenia 4.3 wiemy, że $R(C_4, W_{17}) = 21$. W pozostałych przypadkach użyliśmy twierdzenia 4.1 do wyznaczenia górnych oszacowań. Aby udowodnić dolne oszacowania wskażemy kolorowania krytyczne (zobacz rysunek 4.2). Zostały one uzyskane za pomocą prostych metod heurystycznych użytych w celu poszukiwania kolorowań, których czerwony podgraf jest grafem C_4 -wolnym o zadanym minimalnym stopniu (zapewniającym, że kolorowanie nie zawiera niebieskiego koła W_n).

□



Rysunek 4.2: Kolorowania krytyczne dla $R(C_4, W_n)$, $14 \leq n \leq 16$.

Rozdział 5

Trój- i czterokolorowe liczby Ramseya

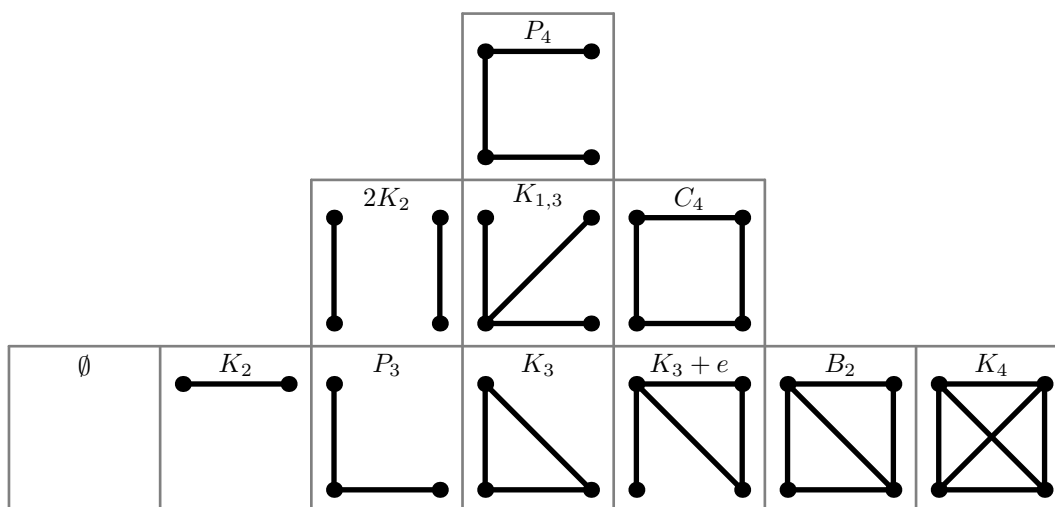
5.1 Znane wyniki

W przypadku wielokolorowych, klasycznych liczb Ramseya wiedza o ich dokładnych wartościach jest jeszcze uboższa niż w przypadku dwukolorowych liczb. We wstępie wspomnieliśmy, że dokładna wartość trójkolorowych klasycznych liczb Ramseya znana jest tylko w jednym przypadku $R(3, 3, 3) = 17$ [33]. W przeciągu ostatnich kilkunastu lat wykonano wiele prac mających na celu wyznaczenia górnego oszacowania liczby $R(3, 3, 4)$. Radziszowski i Piwakowski [62, 63] obniżyli to oszacowanie do 31 i przeprowadzili część obliczeń, które przybliżają nas do wyznaczenia dokładnej wartości. Aktualnie wiadomo, że $30 \leq R(3, 3, 4) \leq 31$ [62, 63]. W przypadku czterokolorowych liczb najwięcej pracy włożono w wyznaczenie oszacowań liczby $51 \leq R(3, 3, 3, 3) \leq 62$ [30]. Trudność wyznaczenia tego typu liczb dobrze odzwierciedla fakt, że dla prawie wszystkich innych klasycznych wielokolorowych liczb Ramseya, najlepsze znane górne oszacowania wynika wprost z twierdzenia 2.17. Tabela 5.1 przedstawia znane dolne oszacowania liczb Ramseya dla grafów pełnych K_3 i K_4 .

W tym rozdziale będziemy zajmować się trój- i czterokolorowymi liczbami Ramseya, których jednym z parametrów jest cykl C_4 a jako pozostałe parametry przyjmujemy dowolne grafy bez izolowanych wierzchołków o maksymalnie czterech wierzchołkach. Na rysunku 5.1, w i -tej kolumnie przedstawione są niezomorficzne grafy o i krawędziach. Zauważmy, że dla grafu \emptyset problem się trywializuje a w przypadku K_2 sprowadza do dwukolorowej liczby Ramseya ($R(K_2, H_1, H_2) = R(H_1, H_2)$). Z tego powodu nie będziemy zajmować się tymi dwoma grafami.

Rok wyznaczenia	Liczba	Dolne oszacowanie
1955	$R(3, 3, 3)$	17 _[33]
1966	$R(3, 3, 4)$	30 _[43]
1988	$R(3, 4, 4)$	55 _[46]
1982	$R(4, 4, 4)$	128 _[37]
1973	$R(3, 3, 3, 3)$	51 _[11]
2011	$R(3, 3, 3, 4)$	97 _(za [64])
2002	$R(3, 3, 4, 4)$	171 _(za [64])
1968	$R(3, 4, 4, 4)$	381 _[31]
2004	$R(4, 4, 4, 4)$	634 _[81]

Tabela 5.1: Dolne oszacowania trój- i czterokolorowych klasycznych liczb Ramseya dla K_3 i K_4 .



Rysunek 5.1: Nieizomorficzne grafy bez izolowanych wierzchołków o maksymalnie 4 wierzchołkach.

Liczbami Ramseya dla trzech małych grafów zajmowano się między innymi w pracach [7, 33, 39, 73]. Wyniki te zostały podsumowane przez Arste i innych w [1]. W tabelach przedstawionych w [1] pozostawiono wiele luk w miejscach przeznaczonych dla nieznanymi wartości. Znane są dla nich tylko oszacowania wyznaczone między innymi w pracach Radziszowskiego i innych [65, 68]. W tym rozdziale za pomocą metod kombinatorycznych oraz algorytmów komputerowych wyznaczymy wartości dla liczb $R(C_4, C_4, B_2) = 16$,

$R(C_4, B_2, K_3) = 17$ oraz $R(C_4, B_2, B_2) = 19$. Opiszemy także metodę, za pomocą której wyznaczyliśmy szereg dolnych oszacowań dla trój- i czterokolorowych liczb Ramseya:

- $R(C_4, B_2, B_2) \geq 19$,
- $R(C_4, C_4, K_4) \geq 20$,
- $R(C_4, K_3, K_4) \geq 27$,
- $R(C_4, C_4, C_4, K_3) \geq 24$,
- $R(C_4, C_4, C_4, K_4) \geq 34$,
- $R(C_4, C_4, K_3, K_3) \geq 30$,
- $R(C_4, C_4, K_3, K_4) \geq 43$.

Ponadto wyznaczymy oszacowanie liczby $28 \leq R(C_4, B_2, K_4) \leq 36$ oraz pokażemy, że $R(C_4, B_2, K_3 + e) = R(C_4, B_2, K_3) = 17$ i $R(C_4, K_3 + e, K_4) \leq \max\{R(C_4, K_3, K_4), 29\} \leq 32$. Wyniki opisane w tym podrozdziale są częścią pracy wspólnej z Dzido [18] oraz wspólnej z Boza i Dzido pracy [6].

Podsumowanie wszystkich znanych wyników przedstawia tabela 5.2. Wartości wytłuszczone zostały wyznaczone w tej rozprawie a wartości oznaczone przez * wynikają z monotoniczności liczb Ramseya. Przykładowo $R(C_4, K_4, K_4) \geq R(P_4, K_4, K_4) = 52$ [7].

$2K_2$	6 _[45]									
P_3	6 _[45]	6 _[1]								
P_4	6 _[45]	7 _[1]	7 _[1]							
$K_{1,3}$	7 _[45]	7 _[1]	8 _[1]	8 _[1]						
C_4	7 _[45]	8 _[1]	9 _[1]	9 _[1]	11 _[5]					
K_3	8 _[45]	8 _[1]	9 _[1]	11 _[1]	12 _[73]	17 _[26]				
$K_3 + e$	8 _[45]	8 _[1]	9 _[1]	11 _[1]	12 _[1]	17 _[1]	17 _[1]			
B_2	9 _[45]	9 _[1]	11 _[1]	11 _[1]	16	17	17	19		
K_4	11 _[45]	13 _[1]	14 _[6]	16 _[45]	20-22 _[80]	27-32 _[80]	27*-32	28-36	52*-72 _[80]	
H_1/H_2	$2K_2$	P_3	P_4	$K_{1,3}$	C_4	K_3	$K_3 + e$	B_2	K_4	

Tabela 5.2: Dokładne wartości i oszacowania liczb Ramseya $R(C_4, H_1, H_2)$.

5.2 Zastosowane algorytmy

5.2.1 Izomorfizm kolorowań

W tym podrozdziale opiszemy algorytmy, których użyliśmy do wyznaczania oszacowań trójkolorowych liczb Ramsey'a. Przy wyznaczaniu dwukolorowych liczb, w celu sprawdzenia izomorfizmu kolorowań (grafów), często stosowana jest aplikacja nauty napisana przez Brendana McKay [58].

Do sprawdzania izomorfizmu 3-kolorowań krawędziowych zaprojektowaliśmy algorytm, który podobnie jak algorytm przedstawiony w rozdziale 3 korzysta z funkcji r . Trzem kolorom: czerwonemu, niebieskiemu i zielonemu przypisujemy odpowiednio cyfry 0, 1, 2. Kolorowanie grafu pełnego o n wierzchołkach jest reprezentowane przez macierz $A = [a_{ij}]$, gdzie wartość a_{ij} jest kolorem krawędzi $\{i, j\}$. Kolorowanie jest całkowicie opisane przez wartości ponad główną przekątną i reprezentowane jako $\binom{n}{2}$ cyfrowa liczba w systemie trójkowym

$$r(A) = a_{1,2}a_{1,3}\dots a_{1,n}a_{2,3}\dots a_{2,n}\dots a_{n-1,n}.$$

Izomorfizm kolorowań jest relacją równoważności i dzieli zbiór kolorowań na klasy abstrakcji. Dla każdej klasy wybieramy reprezentanta o największej wartości funkcji r . W celu sprawdzenia izomorfizmu dwóch kolorowań, dla każdego z nich wyznaczaliśmy reprezentanta klasy abstrakcji, do której należy, i sprawdzaliśmy, czy reprezentanci są sobie równi. Algorytm wyznaczania reprezentanta dla danego kolorowania działał następująco:

Algorytm 5.1. Reprezentant

Wejście: kolorowanie grafu pełnego G ($V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$) reprezentowane przez macierz $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$.

Wyjście: reprezentant klasy abstrakcji izomorfizmu kolorowań, do której należy kolorowanie grafu G (oznaczamy $rep(A)$).

W celu wyznaczenia $rep(A)$ konstruujemy permutację p wierzchołków grafu G taką, że wyznaczona przez nią macierz kolorowania $A' = [a'_{i,j}]_{n \times n}$ ma maksymalną wartość funkcji r . Permutację p budujemy kolejno dla wierzchołków v_i , dla $i = 1 \dots n$. Aby wyznaczyć zbiór wierzchołków, które potencjalnie mogą być wartością $p(v_1)$ wybieramy wierzchołki o największej wartości wyrażenia $deg_r(v) + n \cdot deg_b(v) + n^2 \cdot deg_g(v)$. Warunek ten musi

być spełniony, aby najbardziej znaczące cyfry $a_{1,2}a_{1,3}\dots a_{1,n}$ wartości funkcji r miały największą wartość. Następnie, rozważając permutację zaczynającą się od $p(v_1), \dots, p(v_{k-1})$, dla wszystkich wierzchołków $v_j \in V(G) \setminus \{p(v_1), \dots, p(v_{k-1})\}$ wyznaczamy $k - 1$ cyfrową liczbę (w systemie trójkowym) $w(v_j) = w_1\dots w_{k-1}$, gdzie cyfra w_i jest równa kolorowi krawędzi $\{v_j, p(v_i)\}$. Jako $p(v_k)$ bierzemy tylko wierzchołki z maksymalną wartością funkcji w . Pozostałych wierzchołków nie trzeba rozpatrywać. Przypuśćmy bowiem, że są dwa wierzchołki $x, y \in V(G) \setminus \{p(v_1), \dots, p(v_{k-1})\}$ takie, że $w(x) < w(y)$ i że x został wybrany na $p(v_k)$. Wtedy, w każdej permutacji, która zaczyna się od $p(v_1), \dots, p(v_{k-1}), p(v_k) = x$ można zamienić x i y miejscami i otrzymać permutację o większej wartości funkcji r . Macierz kolorowania, uzyskana po wyznaczeniu wszystkich elementów permutacji o największej wartości funkcji r , jest reprezentantem klasy abstrakcji kolorowania, do którego należy kolorowanie reprezentowane przez A .

W celu wyznaczania dokładnych wartości lub poprawy górnych oszacowań liczb Ramseya stosowaliśmy techniki wzorowane na algorytmach znanych dla dwukolorowych liczb Ramseya. Były one wykorzystywane między innymi przez Radziszowskiego i innych w [2, 66].

5.2.2 Algorytm rozszerzający

Pierwszy z zastosowanych algorytmów (algorytm 5.2) mając wszystkie nieizomorficzne 3-kolorowania typu $(H_1, H_2, H_3; n-1)$ (kolorowania krawędziowe grafu pełnego K_{n-1} , które nie zawierają podgrafu H_i złożonego z krawędzi w kolorze i , dla $i = 1, 2, 3$) wyznacza zbiór wszystkich nieizomorficznych 3-kolorowań typu $(H_1, H_2, H_3; n)$. Mając do dyspozycji taki algorytm możemy wyznaczyć dokładne wartości liczb Ramseya. W celu wyznaczenia $R(H_1, H_2, H_3)$ rozpoczynamy od jedynego 3-kolorowania typu $(H_1, H_2, H_3; 1)$ i iterujemy powyższą procedurę, dopóki otrzymany zbiór kolorowań typu $(H_1, H_2, H_3; n)$ nie jest pusty. Po zakończeniu działania liczba n jest najmniejszą liczbą taką, że nie istnieje kolorowanie typu $(H_1, H_2, H_3; n)$, więc jest wartością szukanej liczby Ramseya. Problemem przy takim postępowaniu jest fakt, że uzyskiwane w kolejnych krokach zbiory mogą być bardzo duże, ich przechowywanie wymaga dużych zasobów pamięci a do ich wyznaczenia konieczne jest użycie wielu operacji sprawdzenia izomorfizmu, co jest czasochłonne.

Algorytm 5.2. Rozszerzający

Wejście: zbiór wszystkich kolorowań typu $(H_1, H_2, H_3; n - 1)$.

Wyjście: zbiór wszystkich kolorowań typu $(H_1, H_2, H_3; n)$.

Dla każdego kolorowania grafu pełnego $G = K_{n-1}$ typu $(H_1, H_2, H_3; n - 1)$ tworzymy zbiór kolorowań grafu pełnego $H = K_n$ typu $(H_1, H_2, H_3; n)$. Niech $V(G) = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ oraz $V(H) = V(G) \cup \{v\}$. W kolorowaniu grafu H krawędziom $\{u_i, u_j\}$ nadajemy taki sam kolor jak w kolorowaniu grafu G . Algorytm przegląda kolorowania pozostałych krawędzi $\{v, u_i\}$ dla $1 \leq i \leq n - 1$, które reprezentowane są jako liczby $W = w_1 \dots w_{n-1}$ zapisane w systemie trójkowym. Rozpoczynamy od $W = 0$ i przeglądamy kolorowania według rosnących wartości W . Aby przyspieszyć przeglądanie, postępujemy podobnie do algorytmu opisanego w rozdziale 3. Po stwierdzeniu, że kolorowanie nie jest typu $(H_1, H_2, H_3; n)$, wyznaczamy najmniejszy indeks i (najbardziej znaczącą cyfrę liczby W) taki, że krawędzie odpowiadające cyfrom w_1, \dots, w_i wraz z wcześniej pokolorowanymi krawędziami grafu G tworzą czerwony graf H_1 , niebieski H_2 lub zielony H_3 . Kolejnym rozpatrywanym kolorowaniem jest kolorowanie reprezentowane przez najmniejszą liczbę W większą od bieżącej o innej wartości i -tej cyfry.

5.2.3 Algorytm łączący

Dla grafu H i wierzchołka $v \in V(H)$, niech $H - v$ oznacza graf powstały z grafu H poprzez usunięcie wierzchołka v i krawędzi z nim incydentnych. Drugi zastosowany przez nas algorytm mając dane zbiory wszystkich kolorowań typu $(H_1, H_2 - u_2, H_3, n)$ oraz $(H_1, H_2, H_3 - u_3, m)$ wyznacza zbiór wszystkich kolorowań typu $(H_1, H_2, H_3, n + m + 1)$ takich, że jeden z wierzchołków ma stopnie $deg_b(v) = n$ oraz $deg_g(v) = m$.

Algorytm 5.3. Łączący

Wejście: zbiory kolorowań typu $(H_1, H_2 - u_2, H_3; n)$ oraz $(H_1, H_2, H_3 - u_3; m)$.

Wyjście: zbiór wszystkich kolorowań typu $(H_1, H_2, H_3; n + m + 1)$, które zawierają wierzchołek v taki, że $deg_b(v) = n$ oraz $deg_g(v) = m$.

Dla każdego $G_1 \in (H_1, H_2 - u_2, H_3; n)$ oraz $G_2 \in (H_1, H_2, H_3 - u_3; m)$ tworzymy 3-kolorowanie krawędziowe grafu pełnego $G = K_{n+m+1}$ typu $(H_1, H_2, H_3; n + m + 1)$. Niech $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \{v\}$. Wszystkie krawędzie pomiędzy wierzchołkami $V(G_1)$ kolorujemy tak samo jak w kolorowaniu G_1 , a wszystkie pomiędzy $V(G_2)$ tak jak w kolorowaniu

G_2 . Krawędzie $\{v, u\}$ kolorujemy na niebiesko, gdy $u \in V(G_1)$ lub na zielono, gdy $u \in V(G_2)$. Pozostały do pokolorowania krawędzie $\{u, w\}$ takie, że $u \in V(G_1)$ oraz $w \in V(G_2)$, które wyznaczają podmacierz $A_{m,n}$ macierzy kolorowania grafu G . Niech W będzie liczbą zapisaną w systemie trójkowym, złożoną z cyfr $a_{1,1}a_{1,2}\dots a_{1,n}a_{2,1}\dots a_{2,n}\dots a_{m,1}\dots a_{m,n}$. Podobnie jak w algorytmie 5.2 przeglądamy po kolei wszystkie kolorowania szukając takich, które dają kolorowania grafu G typu $(H_1, H_2, H_3; n + m + 1)$.

5.2.4 Symulowane wyżarzanie

W celu wyznaczania dolnych oszacowań trój- i czterokolorowych liczb Ramseya, zastosowaliśmy algorytm bazujący na symulowanym wyżarzaniu. Jest to heurystyczna metoda optymalizacji kombinatorycznej inspirowana zabiegiem wyżarzania. Wyżarzanie jest zabiegiem polegającym na podgrzaniu materiału do wysokiej temperatury a następnie stopniowemu ochładzaniu w celu przybliżenia materiału do stanu równowagi.

Algorytm 5.4. Symulowane wyżarzanie dla liczb Ramseya $R(H_1, \dots, H_m)$

Wejście: Parametry H_1, \dots, H_m oraz n

Wyjście: Jeżeli się zatrzymuje, zwraca kolorowanie typu $(H_1, \dots, H_m; n)$

Dla dowolnego 3-kolorowania c grafu pełnego K_n zdefiniujemy funkcję $f(c)$ (nazywaną funkcją celu) będącą sumą po kolorach $i = 1, 2, 3$ liczby podgrafów izomorficznych do H_i , złożonych z krawędzi w kolorze i . Celem algorytmu jest znalezienie kolorowania niezawierającego takich podgrafów więc o wartości funkcji f równej 0. Algorytm rozpoczyna od losowego kolorowania. W kolejnych iteracjach modyfikuje bieżące kolorowanie c_1 poprzez zamianę koloru jednej (losowo wybranej) krawędzi grafu G i otrzymuje kolorowanie c_2 . W kolejnej iteracji rozpatrywane było kolorowanie c_2 z prawdopodobieństwem $p(f(c_1), f(c_2), T)$ lub c_1 w przeciwnym przypadku.

$$p(f(c_1), f(c_2), T) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } f(c_1) > f(c_2) \\ e^{-(f(c_2)-f(c_1))/T} & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Tak zdefiniowane prawdopodobieństwo zmiany bieżącego kolorowania nazywane jest kryterium Boltzmanowskim. Prawdopodobieństwo to zależy od parametru T opisującego temperaturę układu, początkowo ma on wysoką wartość a w kolejnych iteracjach jest zmniejszany według scenariusza $T^{(k+1)} = \frac{T^{(k)}}{1+\beta T^{(k)}}$ dla małej wartości β . Jeżeli przez n^2 iteracji nie zostało zmienione bieżące kolorowanie zwiększaliśmy temperaturę układu do początkowej

wartości. Algorytm działał w pętli, dopóki nie zostało znalezione kolorowanie o wartości funkcji celu równej 0. W przypadku nie znalezienia kolorowania, algorytm kończył działanie po przekroczeniu ustalonego, dużego limitu czasowego.

5.3 Wyniki

5.3.1 Nowe dokładne wartości trójkolorowych liczb Ramseya

Lemat 5.5 $K_{5,5}$ jest jedynym regularnym stopnia 5 grafem o 10 wierzchołkach B_2 -wolnym.

Dowód. Oczywiście jest fakt, że $K_{5,5}$ jest regularny stopnia 5. Jako graf dwudzielny nie zawiera trójkąta więc tym bardziej jest B_2 -wolny. Udowodnimy teraz, że jest to jedyny taki graf. Łatwo jest zauważyć, że jest to jedyny graf dwudzielny o takiej własności (inne mają za mało krawędzi). Aby zakończyć dowód, pokażemy że żaden graf posiadający cykl o nieparzystej długości nie spełnia założeń lematu. Jeżeli najkrótszym nieparzystym cyklem jest C_3 to, aby graf był regularny stopnia 5, każdy z wierzchołków trójkąta musi być połączony z trzema innymi wierzchołkami. Ponieważ jest ich tylko 7, to przynajmniej dwa wierzchołki trójkąta muszą mieć jeszcze jednego wspólnego sąsiada i razem z nim tworzą B_2 . W przypadku, gdy najkrótszym nieparzystym cyklem jest C_5 , C_7 lub C_9 , to zauważmy, że na cyklu nie może być żadnej cięciwy, gdyż utworzyłby się krótszy cykl nieparzystej długości. Gdy najkrótszym cyklem nieparzystej długości jest C_5 , to aby uniknąć cyklu C_3 każdy z wierzchołków poza cyklem C_5 może być połączony z co najwyżej dwoma z cyklu. Takich krawędzi jest co najwyżej 10, więc wierzchołki z cyklu nie mogą być wszystkie stopnia 5. Gdy najkrótszym cyklem jest C_7 , to aby graf był regularny stopnia 5, każdy z wierzchołków musi być połączony z wszystkimi trzema poza cyklem co tworzy B_2 . W przypadku najkrótszego cyklu C_9 nie jest możliwe, aby wierzchołki na cyklu były stopnia 5. \square

Twierdzenie 5.6 (Dybizbański, Dzido [18]).

$$R(C_4, C_4, B_2) = 16.$$

Dowód. Dolne oszacowanie wynika z istnienia kolorowania typu $(C_4, C_4, B_2; 15)$. Jego macierz przedstawiona jest na rysunku 5.2. Oznaczmy wierzchołki 1, 2, 3 przez x, y, z , wierzchołki 4, 5, 6 przez x', y', z' , wierzchołki 7, 8, 9 przez x'', y'', z'' , wierzchołki 10, 11, 12 przez

a, b, c a wierzchołki 13, 14, 15 przez a', b', c' . Grafy indukowane przez krawędzie koloru czerwonego (numer 1) i niebieskiego (numer 2) są izomorficzne z grafem ekstremalnym dla liczby Turana $t(15) = 30$ przedstawionym w pracy [16], więc nie zawierają grafu C_4 . Zielone krawędzie (numer 3) tworzą 6 trójkątów $xyz, x'y'z', x''y''z'', xx'x'', yy'y'', zz'z''$ oraz pełny graf dwudzielny o partycjach $\{a, b, c\}$ oraz $\{a', b', c'\}$. Ponadto, graf $K_{3,3}$ jest połączony z trójkątami w taki sposób, że a jest połączony z $\{x, y', z''\}$, b z $\{x', y'', z\}$ a c z $\{x'', y, z'\}$. Podobnie a' jest połączony z $\{x, y'', z'\}$, b' z $\{x', y, z''\}$ a c' z $\{x'', y', z\}$. Zielone krawędzie nie zawierają podgrafu izomorficznego z B_2 .

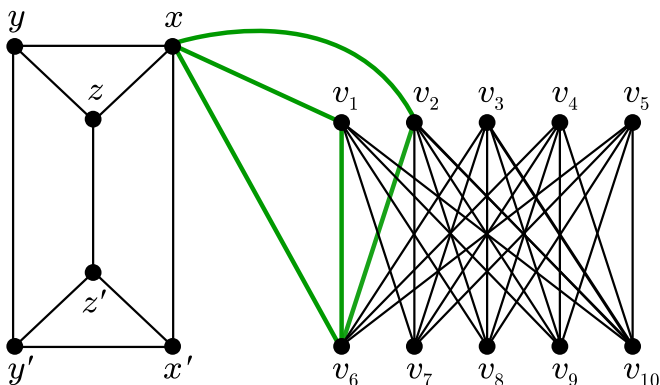
X 3 3	3 1 2	3 1 2	3 1 2	3 1 2
3 X 3	2 3 1	2 3 1	2 3 1	2 3 1
3 3 X	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3
3 2 1	X 3 3	3 1 2	2 2 3	1 3 1
1 3 2	3 X 3	2 3 1	3 2 2	1 1 3
2 1 3	3 3 X	1 2 3	2 3 2	3 1 1
3 2 1	3 2 1	X 3 3	1 3 2	2 1 3
1 3 2	1 3 2	3 X 3	2 1 3	3 2 1
2 1 3	2 1 3	3 3 X	3 2 1	1 3 2
3 2 1	2 3 2	1 2 3	X 1 1	3 3 3
1 3 2	2 2 3	3 1 2	1 X 1	3 3 3
2 1 3	3 2 2	2 3 1	1 1 X	3 3 3
3 2 1	1 1 3	2 3 1	3 3 3	X 2 2
1 3 2	3 1 1	1 2 3	3 3 3	2 X 2
2 1 3	1 3 1	3 1 2	3 3 3	2 2 X

Rysunek 5.2: Kolorowanie typu $(C_4, C_4, B_2; 15)$.

Do zakończenia dowodu musimy jeszcze pokazać górne oszacowanie $R(C_4, C_4, B_2) \leq 16$. Załóżmy, dla dowodu nie wprost, że istnieje kolorowanie grafu pełnego K_{16} niezawierające czerwonego ani niebieskiego cyklu C_4 oraz bez zielonego grafu B_2 . Liczbę krawędzi czerwonych i niebieskich można oszacować przez liczbę Turana $t(16) = 33$, a więc zielonych krawędzi musi być co najmniej $e(G^g) = e(K_{16}) - e(G^r) - e(G^b) \geq 120 - 2 \cdot 33 = 54$. W dalszej części dowodu pokażemy, że nie jest możliwe, aby zielony podgraf miał tyle krawędzi.

Ponieważ $R(C_4, C_4, P_3) = 8$ [1], to każdy wierzchołek może być połączony zielonymi krawędziami z co najwyżej 7 innymi. Ponieważ $R(C_4, C_4, K_3) = 12$ [1], to aby uniknąć czerwonego i niebieskiego cyklu C_4 , kolorowanie to musi zawierać 2 rozłączne zielone trójkąty x, y, z i x', y', z' (patrz rysunek 5.3). Rozważmy pierwszy z nich. Aby uniknąć zielonego grafu B_2 , żadne 2 wierzchołki tego trójkąta nie mogą mieć wspólnego zielonego sąsiada

wśród pozostałych 13 wierzchołków grafu. Oznacza to, że suma ich zielonych stopni wynosi co najwyżej $13 + 3 \cdot 2 = 19$. Rozpatrzmy drugi trójkąt x', y', z' i zielone krawędzie wychodzące z niego do pozostałych 10 wierzchołków grafu $\{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$. Z podobnej argumentacji jak przy pierwszym trójkącie wynika, że może ich być co najwyżej 10, a suma zielonych stopni wierzchołków tworzących drugi trójkąt wynosi co najwyżej $10 + 3 \cdot 3 = 19$. Jeżeli wszystkie wierzchołki $\{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ są zielonego stopnia 7, to suma zielonych stopni wszystkich wierzchołków $e(G^g) \leq 19 + 19 + 7 \cdot 10 = 108$, czyli graf składa się z co najwyżej 54 zielonych krawędzi. Liczbę tę uzyskujemy, jeżeli trójkąty x, y, z oraz x', y', z' są połączone krawędziami na przykład $\{x, x'\}$, $\{y, y'\}$, $\{z, z'\}$. Ponadto, każdy z wierzchołków $\{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ musi być zielonego stopnia 7, z czego dwie krawędzie łączą go z trójkątami x, y, z i x', y', z' . Z lematu 5.5 wiemy, że jedynym grafem regularnym stopnia 5 na 10 wierzchołkach, który nie zawiera B_2 jest graf $K_{5,5}$. Załóżmy więc, że wierzchołki $\{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ tworzą $K_{5,5}$ i rozważmy krawędzie idące z trójkąta x, y, z do wierzchołków z $\{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$. Jest ich dokładnie 10, z zasady szufladkowej wynika, że przynajmniej jeden z wierzchołków trójkąta (np. x) jest incydentny z przynajmniej czterema z $\{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$. Jeżeli x jest połączony z obiema partycjami grafu dwudzielnego, to tworzy zielony graf B_2 (zobacz rysunek 5.3). W przeciwnym przypadku, jeżeli x jest połączony z tylko jedną partycją, to wraz z drugą tworzy zbiór niezależny wielkości 6. Krawędzie tego zbioru niezależnego musiałyby być pokolorowane na czerwono i niebiesko. Ponieważ $R(C_4, C_4) = 6$ [13], nie jest możliwe pokolorowanie krawędzi K_6 na czerwono i niebiesko tak, aby nie zawierały jednokolorowego cyklu C_4 . \square



Rysunek 5.3: Graf G^g w kolorowaniu grafu pełnego K_{16}

Twierdzenie 5.7 (Boza, Dybizbański, Dzido [6]).

$$R(C_4, B_2, K_3) = 17.$$

Dowód. W trakcie wykonywania prac wstępnych zastosowaliśmy algorytm 5.2, który wyznaczył zbiory kolorowań typu $(C_4, P_3, K_3; n)$ dla $n \leq 7$ oraz $(C_4, B_2, K_2; n)$ dla $n \leq 6$.

Exoo i Reynolds [26] wyznaczyli wartość liczby Ramseya $R(C_4, K_3, K_3) = 17$. Ponieważ $K_3 \subseteq B_2$, to z monotoniczności liczb Ramseya wynika dolne oszacowanie $R(C_4, B_2, K_3) \geq 17$.

Teraz udowodnimy górne oszacowanie. Po pierwsze zauważmy, że jeżeli w 3-kolorowaniu grafu pełnego K_{17} istnieje wierzchołek o stopniu $\deg_b(u) \geq 8$, to zawiera ono czerwony cykl C_4 , niebieska książkę B_2 lub zielony graf pełny K_3 . Wynika to z faktu, że $R(C_4, P_3, K_3) = 8$ [1], więc w kolorowaniu indukowanym przez wierzchołki $N_b(u)$ istnieje czerwony cykl C_4 , niebieska ścieżka P_3 lub zielony graf pełny K_3 . W drugim przypadku niebieska ścieżka P_3 wraz z wierzchołkiem u tworzy niebieską książkę B_2 .

Z podobnej argumentacji oraz wartości $R(C_4, B_2, K_2) = R(C_4, B_2) = 7$ [1] wynika, że dla każdego wierzchołka u zielony stopień $\deg_g(u) \leq 6$. Dodatkowo z liczby Turana $t(17) = 36$ (zobacz tabela 2.1) wynika, że jeżeli dla każdego wierzchołka v czerwony stopień $\deg_r(v) > 4$, to kolorowanie to zawiera czerwony cykl C_4 . Pozostały więc do rozpatrzenia trzy możliwości:

- istnieje wierzchołek v taki, że $\deg_r(v) = 3$, $\deg_b(v) = 7$, $\deg_g(v) = 6$

dla każdego grafu $G_1 \in (C_4, P_3, K_3; 7)$ oraz $G_2 \in (C_4, B_2, K_2; 6)$ użyliśmy algorytmu 5.3 i uzyskaliśmy 8 kolorowań typu $(C_4, B_2, K_3; 14)$ z wierzchołkiem v takim, że $\deg_b(v) = 7$ oraz $\deg_g(v) = 6$. Następnie użyliśmy algorytmu 5.2 i tworzyliśmy jednowierzchołkowe rozszerzenia tych ośmiu kolorowań otrzymując podzbiory wszystkich kolorowań typu $(C_4, B_2, K_3; n)$ dla $n \in \{15, 16, 17\}$. Liczność tych zbiorów wynosiła odpowiednio: 6, 43, 0.

- istnieje wierzchołek v taki, że $\deg_r(v) = 4$, $\deg_b(v) = 7$, $\deg_g(v) = 5$

podobnie, dla wszystkich $G_1 \in (C_4, P_3, K_3; 7)$ oraz $G_2 \in (C_4, B_2, K_2; 5)$ znaleźliśmy 26355 kolorowań typu $(C_4, B_2, K_3; 13)$ z wierzchołkiem v takim, że $\deg_b(v) = 7$ oraz $\deg_g(v) = 5$. Następnie wyznaczyliśmy zbiory kolorowań typu $(C_4, B_2, K_3; n)$ dla

$n \in \{14, 15, 16, 17\}$. Liczność tych zbiorów wynosi odpowiednio: 470854, 515882, 3444, 0.

- istnieje wierzchołek v taki, że $deg_r(v) = 4$, $deg_b(v) = 6$, $deg_g(v) = 6$

ponownie, dla każdego $G_1 \in (C_4, P_3, K_3; 6)$ i $G_2 \in (C_4, B_2, K_2; 6)$ znaleźliśmy 132266 kolorowań typu $(C_4, B_2, K_3; 13)$ zawierających wierzchołek v taki, że $deg_b(v) = 6$ oraz $deg_g(v) = 6$. Następnie wyznaczyliśmy zbiory $(C_4, B_2, K_3; n)$ dla $n \in \{14, 15, 16, 17\}$, których licznosc wynosiła odpowiednio: 4077662, 8109281, 56653, 0.

Podsumowując, oznacza to, że zbiór $(C_4, B_2, K_3; 17) = \emptyset$ oraz $R(C_4, B_2, K_3) = 17$ \square

Twierdzenie 5.8 (Boza, Dybizbański, Dzido [6]).

$$R(C_4, B_2, B_2) = 19.$$

Dowód. Dolne oszacowanie $R(C_4, B_2, B_2) \geq 19$ uzyskaliśmy stosując algorytm 5.4, który wyznaczył kolorowanie typu $R(C_4, B_2, B_2; 18)$ (zobacz rysunek 5.4).

X	3	2	2	3	3	1	3	3	1	2	3	1	2	2	2	2	1
3	X	3	2	1	2	2	1	1	3	1	2	3	3	2	2	3	3
2	3	X	3	1	3	2	2	2	2	3	2	3	1	3	1	1	2
2	2	3	X	3	1	2	2	2	3	1	3	2	3	1	1	3	2
3	1	1	3	X	3	2	2	2	1	3	2	3	3	2	1	2	2
3	2	3	1	3	X	3	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
1	2	2	2	2	3	X	1	3	3	2	1	3	2	3	1	2	3
3	1	2	2	2	2	1	X	1	3	2	1	3	2	3	2	3	3
3	1	2	2	2	2	3	1	X	2	3	3	3	3	1	2	3	1
1	3	2	3	1	1	3	3	2	X	3	3	2	2	2	3	2	1
2	1	3	1	3	1	2	2	3	3	X	2	2	1	2	3	3	3
3	2	2	3	2	1	1	1	3	3	2	X	2	2	3	2	1	3
1	3	3	2	3	2	3	3	3	2	2	X	1	1	3	2	2	2
2	3	1	3	3	2	2	2	3	2	1	2	1	X	3	3	1	2
2	2	3	1	2	2	3	3	1	2	2	3	1	3	X	3	3	2
2	2	1	1	1	3	1	2	2	3	3	2	3	3	3	X	2	2
2	3	1	3	2	3	2	3	3	2	3	1	2	1	3	2	X	1
1	3	2	2	2	3	3	3	1	1	3	3	2	2	2	2	1	X

Rysunek 5.4: Kolorowanie typu $(C_4, B_2, B_2; 18)$.

Aby wyznaczyć górne oszacowanie, korzystaliśmy z podobnej argumentacji jak w dowodzie twierdzenia 5.7. Ponieważ $R(C_4, P_3, B_2) = R(C_4, B_2, P_3) = 9$ [1], to dla każdego wierzchołka u w kolorowaniu typu $(C_4, B_2, K_3; 19)$ stopnie $deg_b(u) \leq 8$ oraz $deg_g(u) \leq 8$.

Z liczby Turana $t(19) = 42$ [16] wynika, że w kolorowaniu grafu pełnego K_{19} bez czerwonego cyklu C_4 istnieje wierzchołek v taki, że $\deg_r(v) \leq 4$. Pozostały nam do rozpatrzenia cztery możliwości:

- istnieje wierzchołek v taki, że $\deg_r(v) = 4$, $\deg_b(v) = 7$, $\deg_g(v) = 7$
dla każdego grafu $G_1 \in (C_4, P_3, B_2; 7)$ oraz $G_2 \in (C_4, B_2, P_3; 7)$ użyliśmy algorytmu 5.3 i uzyskaliśmy 621308 kolorowań typu $(C_4, B_2, B_2; 15)$ z wierzchołkiem v takim, że $\deg_b(v) = 7$ oraz $\deg_g(v) = 7$. Następnie użyliśmy algorytmu 5.2 tworząc jednowierzchołkowe rozszerzenia tych kolorowań i otrzymaliśmy podzbiory kolorowań typu $(C_4, B_2, K_3; n)$ dla $n \in \{16, 17, 18, 19\}$. Liczność tych zbiorów wynosiła odpowiednio: 731002, 18285, 7, 0.
- istnieje wierzchołek v taki, że $\deg_r(v) = 4$, $\deg_b(v) = 8$, $\deg_g(v) = 6$ (sytuacja, w której $\deg_b(v) = 6$, $\deg_g(v) = 8$ jest symetryczna)
podobnie, dla każdego $G_1 \in (C_4, P_3, B_2; 8)$ i $G_2 \in (C_4, B_2, P_3; 6)$ uzyskaliśmy 10488 kolorowań typu $(C_4, B_2, B_2; 15)$ zawierających wierzchołek v taki, że $\deg_b(v) = 6$ oraz $\deg_g(v) = 6$. Następnie wyznaczyliśmy podzbiory zbioru kolorowań typu $(C_4, B_2, B_2; n)$ dla $n \in \{16, 17, 18\}$. Liczność tych zbiorów wynosiła odpowiednio: 28733, 1807, 0.
- istnieje wierzchołek v taki, że $\deg_r(v) = 3$, $\deg_b(v) = 8$, $\deg_g(v) = 7$ (sytuacja $\deg_b(v) = 7$, $\deg_g(v) = 8$ jest symetryczna)
w tym przypadku algorytm 5.3 zastosowany dla grafów $G_1 \in (C_4, P_3, B_2; 8)$ oraz $G_2 \in (C_4, B_2, P_3; 7)$ zwrócił pusty zbiór kolorowań.
- istnieje wierzchołek v taki, że $\deg_r(v) = 2$, $\deg_b(v) = 8$, $\deg_g(v) = 8$
w tym przypadku algorytm 5.3 zastosowany dla grafów $G_1 \in (C_4, P_3, B_2; 8)$ oraz $G_2 \in (C_4, B_2, P_3; 8)$ zwrócił pusty zbiór kolorowań.

Podsumowując, $(C_4, B_2, B_2; 19) = \emptyset$ oraz $R(C_4, B_2, B_2) = 19$. □

5.3.2 Nowe oszacowania trójkolorowych liczb Ramsey'a

Twierdzenie 5.9 (Boza, Dybizbański, Dzido [6]).

$$R(C_4, B_2, K_4) \leq 36.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że istnieje 3-kolorowanie klikki K_{36} typu $(C_4, B_2, K_4; 36)$. Ponieważ $R(C_4, P_3, K_4) = 13$ [1], to każdy wierzchołek $v \in V(K_{36})$ musi być stopnia $\deg_b(v) \leq 12$. Gdyby pewien wierzchołek u był stopnia $\deg_b(u) \geq 13$, to w grafie indukowanym przez wierzchołki $N_b(u)$ byłaby niebieska ścieżka P_3 , która wraz z wierzchołkiem u tworzyłaby niebieską książkę B_2 . Podobnie, korzystając z wyznaczonej w tej rozprawie wartości $R(C_4, B_2, K_3) = 17$, wiemy, że dla każdego wierzchołka u , jego zielony stopień $\deg_g(v) \leq 16$. Czerwony stopień wszystkich wierzchołków musi więc spełniać $\deg_r(v) = 35 - \deg_b(v) - \deg_g(v) \geq 7$, więc krawędzi pokolorowanych na czerwono jest co najmniej $e(G^r) \geq 126$. Z twierdzenia 2.22 wynika, że $t(36) \leq 115$, więc kolorowanie zawiera czerwony cykl C_4 . □

Twierdzenie 5.10 (Dybizbański, Dzido [18]).

$$R(C_4, C_4, K_4) \geq 20,$$

$$R(C_4, K_3, K_4) \geq 27,$$

$$R(C_4, B_2, K_4) \geq 28.$$

Dowód. We wszystkich przypadkach zastosowaliśmy algorytm 5.4, który wyznaczył kolorowanie typu $(C_4, C_4, K_4; 19)$ (zobacz rysunek 5.5), kolorowanie typu $(K_3, C_4, K_4; 26)$ (zobacz rysunek 5.6) oraz kolorowanie typu $(C_4, B_2, K_4; 27)$ (zobacz rysunek 5.7). □

5.3.3 Trójkolorowe liczby Ramsey'a z cyklem C_4 oraz grafem $K_3 + e$

Lemat 5.11 *Jeżeli graf G o n wierzchołkach zawiera trzy niepołączone ze sobą wierzchołki v_1, v_2, v_3 , których suma stopni spełnia $\deg(v_1) + \deg(v_2) + \deg(v_3) > n$, to graf ten zawiera cykl C_4 .*

Dowód. Z zasady sumy wynika, że $|N(v_1) \cup N(v_2) \cup N(v_3)| = |N(v_1)| + |N(v_2)| + |N(v_3)| - |N(v_1) \cap N(v_2)| - |N(v_1) \cap N(v_3)| - |N(v_2) \cap N(v_3)| + |N(v_1) \cap N(v_2) \cap N(v_3)|$. Ponieważ wierzchołki v_1, v_2, v_3 nie są ze sobą połączone, to $|N(v_1) \cup N(v_2) \cup N(v_3)| \leq n - 3$ oraz

X	1	2	3	3	2	3	3	1	3	2	3	3	1	3	3	2	3	3
1	X	3	3	2	2	3	3	2	3	1	3	1	3	3	1	3	3	2
2	3	X	2	3	3	1	3	3	3	2	3	3	1	2	1	1	1	3
3	3	2	X	2	3	2	1	3	3	3	1	3	1	3	2	3	3	1
3	2	3	2	X	1	2	3	1	3	3	1	3	3	3	1	3	3	2
2	2	3	3	1	X	3	2	1	3	1	2	3	3	3	2	1	3	3
3	3	1	2	2	3	X	3	3	3	3	2	3	2	3	1	2	3	1
3	3	3	1	3	2	3	X	3	1	3	1	2	3	2	2	3	1	3
1	2	3	3	1	1	3	3	X	3	2	3	2	2	3	3	3	3	1
3	3	3	3	3	3	3	1	3	X	3	2	2	3	1	3	1	2	2
2	1	2	3	3	1	3	3	2	3	X	3	3	2	3	3	1	3	3
3	3	3	1	1	2	2	1	3	2	3	X	3	2	3	1	3	3	3
3	1	3	3	3	3	3	2	2	2	3	3	X	3	1	3	3	1	1
1	3	1	1	3	3	2	3	2	3	2	2	3	X	3	3	1	3	3
3	3	2	3	3	3	3	2	3	1	3	3	1	3	X	3	1	2	1
3	1	1	2	1	2	1	2	3	3	3	1	3	3	3	X	3	3	3
2	3	1	3	3	1	2	3	3	1	1	3	3	1	1	3	X	2	3
3	3	1	3	3	3	3	1	3	2	3	3	1	3	2	3	2	X	2
3	2	3	1	2	3	1	3	1	2	3	3	1	3	1	3	3	2	X

Rysunek 5.5: Kolorowanie typu $(C_4, C_4, K_4; 19)$.

$|N(v_1) \cap N(v_2)| + |N(v_1) \cap N(v_3)| + |N(v_2) \cap N(v_3)| \geq \deg(v_1) + \deg(v_2) + \deg(v_3) - |N(v_1) \cup N(v_2) \cup N(v_3)| > n - n + 3 = 3$. Czyli istnieją dwa wierzchołki v_i, v_j dla $i, j \in \{1, 2, 3\}$, które spełniają $|N(v_i) \cap N(v_j)| \geq 2$, a więc tworzą cykl C_4 \square

Twierdzenie 5.12 (Boza, Dybizbański, Dzido [6]).

$$R(C_4, B_2, K_3 + e) = R(C_4, B_2, K_3) = 17.$$

Dowód. Z twierdzenia 5.7 oraz monotoniczności liczb Ramsey'a uzyskujemy dolne oszacowanie $17 = R(C_4, B_2, K_3) \leq R(C_4, B_2, K_3 + e)$. Oszacowanie górne udowodnimy nie wprost. Załóżmy, że istnieje kolorowanie grafu pełnego $G = K_{17}$ typu $(C_4, B_2, K_3 + e; 17)$. Rozważmy takie kolorowanie. Ponieważ $R(C_4, B_2, K_3) = 17$, to aby uniknąć czerwonego cyklu C_4 oraz niebieskiej książki B_2 , w kolorowaniu G jest zielony trójkąt. Oznaczmy jego wierzchołki przez $\{v_1, v_2, v_3\}$. Ponieważ unikamy grafu $K_3 + e$ w kolorze zielonym, to żaden z wierzchołków trójkąta nie może mieć innej incydentnej z nim zielonej krawędzi (czyli ich zielony stopień wynosi 2). Ponieważ $R(C_4, P_3, K_3 + e) = 8$ [1], to dla każdego $1 \leq i \leq 3$ niebieski stopień $\deg_b(v_i) \leq 7$. Wynika z tego, że dla $1 \leq i \leq 3$, $\deg_r(v_i) = 16 - \deg_b(v_i) - \deg_g(v_i) \geq 7$. Suma czerwonych stopni tych wierzchołków wynosi $21 > n$, więc z lematu 5.11 wynika, że czerwony podgraf zawiera cykl C_4 . \square

```

X 3 2 3 2 2 3 3 3 2 3 2 3 3 1 2 2 3 1 2 1 3 3 1
3 X 2 3 3 3 2 3 3 2 3 2 3 2 1 2 2 3 3 3 1 2 2 1 1
2 2 X 2 1 3 3 2 1 1 3 3 3 3 1 3 3 3 1 2 1 1 3 2 2
3 3 2 X 3 1 2 1 2 2 3 3 2 2 3 3 2 3 1 3 3 3 1 3
2 3 1 3 X 3 3 2 2 3 1 3 3 3 2 1 2 3 1 3 2 3 2 3 3 3
2 3 3 1 3 X 3 1 3 1 3 2 1 3 3 2 2 1 3 2 3 3 2 2 2 1
3 2 3 2 3 X 3 3 1 2 3 3 1 2 3 1 3 1 2 2 2 3 3 2 2
3 3 2 1 2 1 3 X 1 3 2 2 3 3 3 2 3 3 2 2 1 3 3 2 3 3
3 3 1 2 2 3 3 1 X 3 2 2 3 3 3 2 3 3 2 2 1 1 3 2 2 3
3 2 1 2 3 1 1 3 3 X 2 3 3 1 2 3 3 3 3 2 3 2 3 3 2 2
2 3 3 3 1 3 2 2 2 X 3 3 2 1 3 2 3 1 3 1 3 2 3 3 3
3 2 3 3 3 2 3 2 2 3 3 X 2 1 1 1 3 2 3 3 2 2 3 1 3 2
2 3 3 2 3 1 3 3 3 3 2 X 3 1 2 2 1 3 2 3 3 2 2 2 3
3 2 3 2 3 3 1 3 3 1 2 1 3 X 1 3 3 3 2 2 3 2 3 3 2 2
3 1 3 3 2 3 2 3 3 2 1 1 1 1 X 2 3 2 2 3 1 3 3 2 1 3
3 2 1 3 1 2 3 2 2 3 3 1 2 3 2 X 3 3 3 3 2 2 3 1 3 2
1 2 3 3 2 2 1 3 3 3 2 3 2 3 3 3 X 2 2 3 3 2 1 1 3 2
2 3 3 2 3 1 3 3 3 3 2 1 3 2 3 2 X 1 2 3 3 2 1 2 3
2 3 3 3 1 3 1 2 2 3 1 3 3 2 2 3 2 1 X 3 2 3 2 3 3 3
3 3 1 1 3 2 2 2 2 3 3 2 2 3 3 3 2 3 X 3 3 1 3 1 3
1 3 2 3 2 3 2 1 1 3 1 2 3 3 1 2 3 3 2 3 X 3 3 2 3 3
2 1 1 3 3 3 2 3 1 2 3 2 3 2 3 2 2 3 3 3 3 X 2 2 3 1
1 2 1 3 2 2 3 3 3 3 2 3 2 3 3 3 1 2 2 1 3 2 X 3 3 2
3 2 3 3 3 2 3 2 2 3 3 1 2 3 2 1 1 1 3 3 2 2 3 X 3 2
3 1 2 1 3 2 2 3 2 2 3 3 2 2 1 3 3 2 3 1 3 3 3 X 3
1 1 2 3 3 1 2 3 3 2 3 2 3 2 3 2 2 3 3 3 3 1 2 2 3 X

```

Rysunek 5.6: Kolorowanie typu $(C_4, K_3, K_4; 26)$.

Twierdzenie 5.13 (Boza, Dybizbański, Dzido [6]).

$$R(C_4, K_3 + e, K_4) \leq \max\{R(C_4, K_3, K_4), 29\} \leq 32.$$

Dowód. Xiaodong Xu i inni udowodnili, że $R(C_4, K_3, K_4) \leq 32$ [80]. Z twierdzenia 5.10 wiemy, że $R(C_4, K_3, K_4) \geq 27$, więc $R(C_4, K_3 + e, K_4) \geq 27$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Po pierwsze założmy, że $R(C_4, K_3, K_4) \leq 28$. Musimy pokazać, że $R(C_4, K_3 + e, K_4) \leq 29$. Rozważmy dowolne 3-kolorowanie grafu pełnego K_{29} . Ponieważ $R(C_4, K_3, K_4) \leq 28$, to aby uniknąć czerwonego cyklu C_4 oraz zielonego grafu pełnego K_4 , kolorowanie to musi zawierać niebieski trójkąt. Oznaczmy jego wierzchołki przez v_1, v_2 oraz v_3 . Jeżeli dowolny z tych wierzchołków jest połączony niebieską krawędzią z dowolnym w zbiorze $V(G) \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ to powstaje graf $K_3 + e$. Wiemy więc, że dla każdego $i \in \{1, 2, 3\}$ niebieski stopień $deg_b(v_i) = 2$, dodatkowo z liczby Ramseya $R(C_4, K_3 + e, K_3) = 17$ [1]

```

X 2 1 2 1 1 1 1 2 2 2 2 1 0 1 2 0 0 2 1 2 2 0 2 1 1 2
2 X 2 2 1 1 2 2 1 1 1 0 1 2 2 2 2 0 0 2 2 0 1 1 1 2 2
1 2 X 1 1 2 2 2 2 1 1 0 2 1 0 2 0 2 2 2 2 1 1 0 2 0 0
2 2 1 X 2 2 2 2 1 0 2 2 1 0 1 1 2 2 2 2 1 0 2 1 1 1 0
1 1 1 2 X 0 2 2 0 2 2 1 2 2 2 1 1 1 1 0 1 0 2 1 2 0 2
1 1 2 2 0 X 2 2 2 2 2 1 0 1 2 2 1 1 1 2 1 2 2 2 0 2 1
1 2 2 2 2 2 X 0 1 1 0 2 1 2 0 1 1 0 2 0 1 2 1 1 2 2 2
1 2 2 2 2 2 0 X 1 1 1 2 0 2 2 1 1 1 2 0 0 2 1 1 2 2 2
2 1 2 1 0 2 1 1 X 2 2 1 2 0 2 0 2 1 2 0 2 1 2 0 2 2 1
2 1 1 0 2 2 1 1 2 X 0 1 2 2 1 2 2 2 1 2 1 0 0 2 2 1 2
2 1 1 2 2 2 0 1 2 0 X 1 2 2 0 2 2 2 1 1 1 2 0 2 2 1 1
2 0 0 2 1 1 2 2 1 1 1 X 1 2 2 2 2 2 0 2 2 1 1 0 1 2 2
1 1 2 1 2 0 1 0 2 2 2 1 X 1 2 2 0 1 1 2 0 2 2 2 0 2 1
0 2 1 0 2 1 2 2 0 2 2 2 1 X 1 1 2 2 2 2 1 2 2 1 0 1 0
1 2 0 1 2 2 0 2 2 1 0 2 2 1 X 2 1 1 2 2 2 1 1 2 0 0 1
2 2 2 1 1 2 1 1 0 2 2 2 2 1 2 X 2 0 2 1 0 1 2 0 2 2 1
0 2 0 2 1 1 1 1 2 2 2 2 0 2 1 2 X 0 2 1 2 1 2 2 1 1 2
0 0 2 2 1 1 0 1 1 2 2 2 1 2 1 0 0 X 2 1 2 0 2 2 1 1 2
2 0 2 2 1 1 2 2 2 1 1 0 1 2 2 2 2 X 2 0 1 1 2 1 2 2
1 2 2 2 0 2 0 0 0 2 1 2 2 2 2 1 1 1 2 X 1 2 1 1 2 2 2
2 2 2 1 1 1 1 0 2 1 1 2 0 1 2 0 2 2 0 1 X 2 0 2 1 2 0
2 0 1 0 0 2 2 2 1 0 2 1 2 2 1 1 1 0 1 2 2 X 2 1 2 0 2
0 1 1 2 2 2 1 1 2 0 0 1 2 2 1 2 2 2 1 1 0 2 X 2 2 1 2
2 1 0 1 1 2 1 1 0 2 2 0 2 1 2 0 2 2 2 1 2 1 2 X 2 2 1
1 1 2 1 2 0 2 2 2 2 2 1 0 0 0 2 1 1 1 2 1 2 2 2 X 2 1
1 2 0 1 0 2 2 2 2 1 1 2 2 1 0 2 1 1 2 2 2 0 1 2 2 X 1
2 2 0 0 2 1 2 2 1 2 1 2 1 0 1 1 2 2 2 2 0 2 2 1 1 1 X

```

Rysunek 5.7: Kolorowanie typu $(C_4, B_2, K_4; 27)$.

wiemy, że $\deg_g(v_i) \leq 16$, a więc $\deg_r(v_i) \geq 28 - 2 - 16 = 10$. Ponieważ suma czerwonych stopni wierzchołków v_1, v_2 i v_3 wynosi co najmniej $30 > n$, to z lematu 5.11 wynika, że graf ten zawiera czerwony cykl C_4 .

W drugim przypadku, gdy $R(C_4, K_3, K_4) \geq 29$, musimy pokazać, że $R(C_4, K_3 + e, K_4) \leq R(C_4, K_3, K_4)$ (nierówność ta wraz z monotonicznością liczb Ramsey'a daje równość). Podobnie jak w pierwszym przypadku dowolne kolorowanie typu $(C_4, K_3 + e, K_4; R(C_4, K_3, K_4))$ musi zawierać niebieski trójkąt (v_1, v_2, v_3) i jego wierzchołki spełniają $\deg_b(v_i) = 2$ oraz $\deg_g(v_i) \leq 16$, a więc $\deg_r(v_i) \geq R(C_4, K_3, K_4) - 19$. Ponieważ suma czerwonych stopni wierzchołków v_1, v_2 i v_3 wynosi co najmniej $3 \cdot (R(C_4, K_3, K_4) - 19) > R(C_4, K_3, K_4)$, to z lematu 5.11 wynika, że graf ten zawiera czerwony cykl C_4 .

□

5.3.4 Czterokolorowe liczby Ramseya

W przypadku czterokolorowych liczb Ramseya pracowaliśmy nad dolnymi oszacowaniami liczb typu $R(C_4, C_4, H_1, H_2)$, gdzie H_1 oraz H_2 były jednym z grafów C_4 , K_3 lub K_4 . Jedyłą znaną dokładną wartością tego typu liczb jest $R(C_4, C_4, C_4, C_4) = 18$. Dolne oszacowanie wyznaczył w 1983r. Exoo [25], a górne zostało wyznaczone w 2007r. przez Sun Yongqi i innych [75]. Liczbami tego typu zajmował się Radziszowski i Xu w pracy [68] oraz razem z Shao w pracy [65]. Wszystkie znane dotychczas oszacowania dla liczb tego typu oraz podsumowanie wyników tego podrozdziału przedstawia tabela 5.3.

Liczba	Dotychczas znane oszacowanie	Nowe dolne oszacowanie
$R(C_4, C_4, C_4, C_4)$	18 [25, 75]	
$R(C_4, C_4, C_4, K_3)$	21-27 [68]	24
$R(C_4, C_4, C_4, K_4)$	31-50 [65]	34
$R(C_4, C_4, K_3, K_3)$	28-36 [68]	30
$R(C_4, C_4, K_3, K_4)$	42-76 [65]	43
$R(C_4, C_4, K_4, K_4)$	87-179 [65]	

Tabela 5.3: Oszacowania czterokolorowych liczb Ramseya postaci $R(C_4, C_4, H_1, H_2)$ dla $H_1, H_2 \in \{C_4, K_3, K_4\}$.

Twierdzenie 5.14 (Dybizbański, Dzido [18]).

$$R(C_4, C_4, C_4, K_3) \geq 24,$$

$$R(C_4, C_4, C_4, K_4) \geq 34,$$

$$R(C_4, C_4, K_3, K_3) \geq 30,$$

$$R(C_4, C_4, K_3, K_4) \geq 43.$$

Dowód. We wszystkich przypadkach zastosowaliśmy algorytm 5.4, który wyznaczył

- kolorowanie typu $(C_4, C_4, C_4, K_3; 23)$ (zobacz rysunek 5.8 lub rysunek 5.9),
- kolorowanie typu $(C_4, C_4, C_4, K_4; 33)$ (zobacz rysunek 5.10),
- kolorowanie typu $(C_4, C_4, K_3, K_3; 29)$ (zobacz rysunek 5.11) oraz

- kolorowanie typu $(C_4, C_4, K_3, K_4; 42)$ (zobacz rysunek 5.12).

□

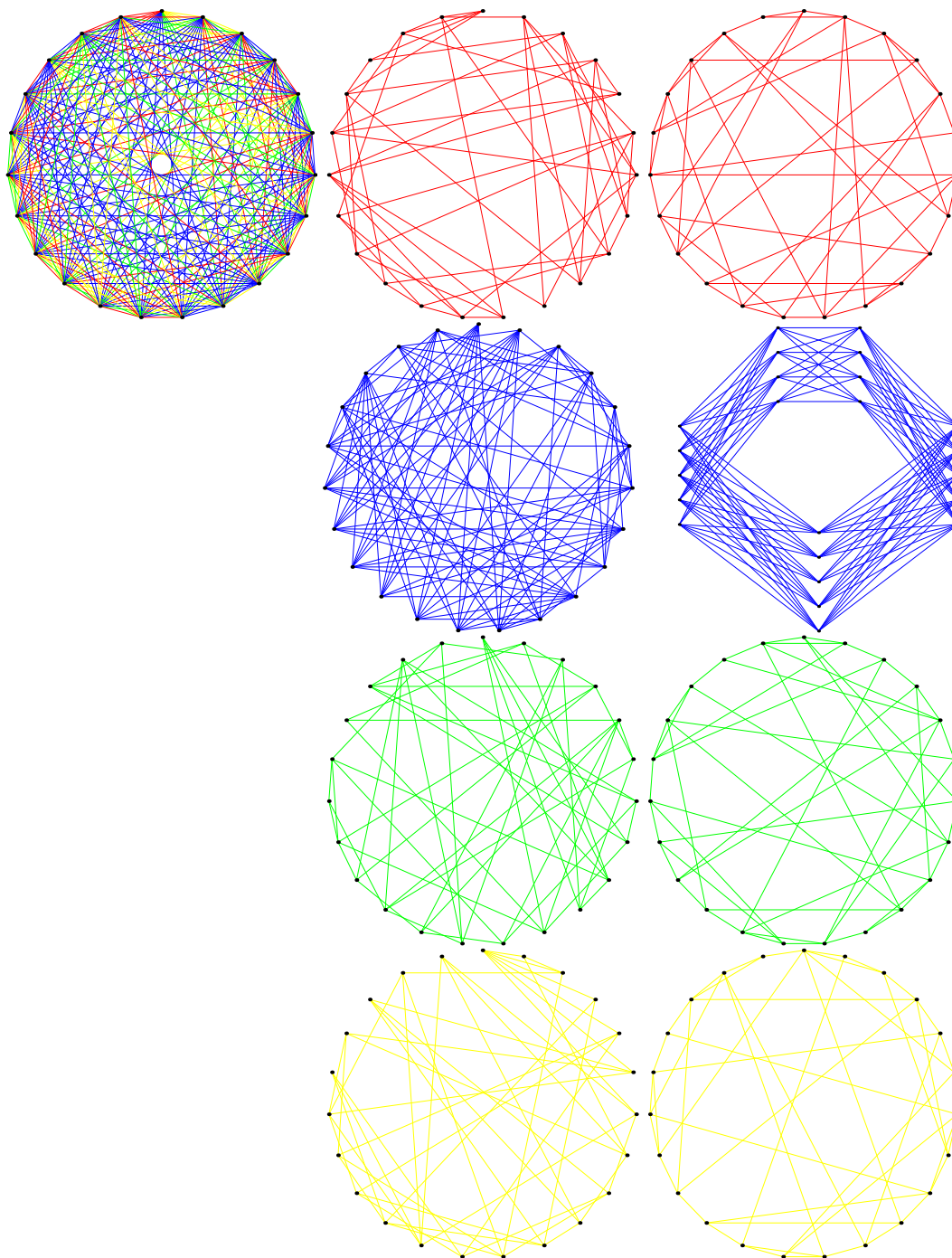
Rysunek 5.9 przedstawia graficzną prezentację grafu o macierzy incydencji przedstawionej na rysunku 5.8. W drugiej kolumnie przedstawione są grafy indukowane przez odpowiednie kolory a w trzeciej ich izomorficzne kopie z wyróżnieniem wybranych zbiorów niezależnych (w przypadku koloru niebieskiego) oraz cykli Hamiltona (w przypadku pozostałych kolorów).

```

X 4 4 4 4 4 4 3 3 3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1
4 X 4 3 2 1 1 4 3 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 2 1
4 4 X 2 2 2 1 1 1 3 2 4 3 3 2 2 2 2 1 2 1 4 3
4 3 2 X 1 3 2 1 2 1 4 2 2 2 4 3 3 1 2 1 3 2 2
4 2 2 1 X 3 2 2 2 2 3 3 4 3 3 4 4 1 1 3 2 1 2
4 1 2 3 3 X 2 1 2 3 1 2 2 2 3 1 1 4 2 4 4 2 2
4 1 1 2 2 2 X 3 4 1 2 3 1 4 2 2 2 2 1 2 3 3 4
3 4 1 1 2 1 3 X 1 4 3 2 2 2 2 2 2 2 2 4 3 2 4
3 3 1 2 2 2 4 1 X 3 2 4 4 1 1 2 2 2 3 2 4 3 1
3 1 3 1 2 3 1 4 3 X 4 2 2 2 2 2 2 2 1 4 2 4
3 1 2 4 3 1 2 3 2 4 X 2 2 2 4 4 3 1 2 3 4 2 2
2 2 4 2 3 2 3 2 4 2 2 X 1 3 4 1 4 1 3 2 2 4 1
2 2 3 2 4 2 1 2 4 2 2 1 X 1 3 4 1 1 4 2 2 3 3
2 2 3 2 3 2 4 2 1 2 2 3 1 X 1 3 1 4 4 2 2 4 4
2 2 2 4 3 3 2 2 1 2 4 4 3 1 X 1 4 3 4 1 2 3 2
2 2 2 3 4 1 2 2 2 2 4 1 4 3 1 X 3 4 1 1 2 3 2
2 2 2 3 4 1 2 2 2 2 3 4 1 1 4 3 X 3 3 4 2 1 2
2 2 2 1 1 4 2 2 2 2 1 1 1 4 3 4 3 X 3 4 2 4 2
2 2 1 2 1 2 1 2 3 2 2 3 4 4 4 1 3 3 X 2 2 1 3
1 3 2 1 3 4 2 4 2 1 3 2 2 2 1 1 4 4 2 X 1 2 2
1 3 1 3 2 4 3 3 4 4 4 2 2 2 2 2 2 2 1 X 2 3
1 2 4 2 1 2 3 2 3 2 2 4 3 4 3 3 1 4 1 2 2 X 1
1 1 3 2 2 2 4 4 1 4 2 1 3 4 2 2 2 2 3 2 3 1 X

```

Rysunek 5.8: Kolorowanie typu $(C_4, K_3, C_4, C_4; 23)$.



Rysunek 5.9: Kolorowanie typu $(C_4, K_3, C_4, C_4; 23)$.

Rozdział 6

Podsumowanie i kierunki dalszych badań

Najbardziej oczekiwany jest postęp w klasycznych liczbach Ramseya. W przypadku dwóch małych grafów pełnych, na przestrzeni ostatnich lat, postęp jest niewielki i głównie dotyczy dolnych oszacowań, które wciąż znacznie odbiegają od ich górnych odpowiedników. Ciekawe są badania dotyczące oszacowania różnicy $R(3, n+1) - R(3, n)$. Aktualnie wiadomo, że wynosi ona co najmniej 3, ale wydaje się, że jest większa dla dostatecznie dużych n . Największą nadzieję na wyznaczenie kolejnej liczby Ramseya można mieć w przypadku trój kolorowej liczby $R(3, 3, 4)$, o której wiadomo, że wynosi 30 lub 31. Duży nacisk położony jest także na polepszenie dolnego oszacowania liczby $R(3, 3, 3, 3)$. Dzisiaj znane jest 4-kolorowanie grafu pełnego na 50 wierzchołkach, które nie zawiera jednobarwnego trójkąta. W kolorowaniu tym różnice pomiędzy maksymalnym i minimalnym stopniem wierzchołków w odpowiednich kolorach są duże. Jest to nietypowe dla krytycznych kolorowań i daje nadzieję na poprawę tego oszacowania.

W prezentowanej rozprawie zajmowaliśmy się liczbami Ramseya, których jednym z parametrów był cykl C_4 . W przypadkach liczb $R(C_4, K_{2,n})$ i $R(C_4, W_n)$ nie należy spodziewać się znacznej poprawy górnego oszacowania ponieważ zarówno twierdzenie Harbortha i Mengersen (twierdzenie 3.1) jak i zaprezentowane w tej rozprawie twierdzenie 4.1 dają równość dla pewnej nieskończonej podklasy grafów. Myślę jednak, że w obu przypadkach możliwe będzie wyznaczenie dokładnych wartości liczb dla kolejnych małych parametrów. W przypadku trój kolorowych liczb Ramseya z cyklem C_4 , myślę że najtrudniejszym przypadkiem jest liczba $R(C_4, K_4, K_4)$ oraz że w najbliższym czasie możliwe będzie wyznaczenie

liczby $R(C_4, C_4, K_4)$, której dolne oszacowanie zostało wyznaczonej w tej rozprawie.

Inne, szerzej badane w ostatnich latach liczby to między innymi: dwukolorowe liczby dla grafów pełnych bez jednej krawędzi, liczby dla trzech ścieżek (lub trzech cykli) tej samej długości, trójkolorowe liczby Ramseya dla dłuższych cykli i ścieżek oraz liczby, których parametrami są grafy złożone z kilku rozłącznych kopii tego samego grafu.

Bibliografia

- [1] Arste J., Klamroth K., Mengersen I., Three color Ramsey numbers for small graphs, *Utilitas Mathematica*, **49** (1996) 85–96.
- [2] A. Babak, S. P. Radziszowski, Kung-Kuen Tse, Computation of the Ramsey Number $R(B_3, K_5)$, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*, **41** (2004) 71–76.
- [3] J. Beck, Achievement games and the probabilistic method, *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty, Bolyai Society Mathematical Studies*, **1** (1993) 51–78.
- [4] L. W. Beineke, A. J. Schwenk, On a bipartite form of the Ramsey problem, *Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference, Congressus Numer.* **XV** (1975) 17–22.
- [5] A. Bialostocki, J. Schönheim, On Some Turán and Ramsey Numbers for C_4 , *Graph Theory and Combinatorics*, ed. B. Bollobás, Academic Press, Londres (1984) 29–33.
- [6] L. Boza, J. Dybizbański, T. Dzido, Three color Ramsey numbers for graphs with at most 4 vertices, *Electronic Journal of Combinatorics*, **19**(4) (2012) #P47.
- [7] S. A. Burr, P. Erdős, Generalizations of a Ramsey-Theoretic Result of Chvátal, *Journal of Graph Theory*, **7** (1983) 39–51.
- [8] Y. Caro, Li Yusheng, C. C. Rousseau, Zhang Yuming, Asymptotic Bounds for Some Bipartite Graph - Complete Graph Ramsey Numbers, *Discrete Mathematics*, **220** (2000) 51–56.
- [9] G. Chartrand, S. Schuster, On the existence of specified cycles in complementary graphs, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **77** (1971) 995–998.

-
- [10] G. T. Chen, R. H. Schelp, Graphs with Linearly Bounded Ramsey Numbers, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **57** (1993) 138–149.
- [11] F. R. K. Chung, On the Ramsey Numbers $N(3, 3, \dots, 3; 2)$, *Discrete Mathematics*, **5** (1973) 317–321.
- [12] F. R. K. Chung, Open problems of Paul Erdős in Graph Theory, *Journal of Graph Theory*, **25** (1997) 3–36.
- [13] V. Chvátal, F. Harary, Generalized Ramsey Theory for Graphs, II. Small Diagonal Numbers, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **32** (1972) 389–394.
- [14] V. Chvátal, F. Harary, Generalized Ramsey Theory for Graphs, III. Small Off-Diagonal Numbers, *Pacific Journal of Mathematics*, **41** (1972) 335–345.
- [15] M. Clancy, Some Small Ramsey Numbers, *Journal of Graph Theory*, **1** (1977) 89–91.
- [16] C. Clapham, A. Flockhart, J. Sheehan, Graphs Without Four-Cycles, *Journal of Graph Theory*, **13** (1989) 29–47.
- [17] J. Dybizbański, On some Ramsey numbers of C_4 versus $K_{2,n}$, przyjęta do druku w *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*.
- [18] J. Dybizbański, T. Dzido, On Some Ramsey Numbers for Quadrilaterals, *Electronic Journal of Combinatorics*, **18** (2011) #P154.
- [19] J. Dybizbański, T. Dzido, On some Ramsey numbers for quadrilaterals versus wheels, przyjęta do druku w *Graphs and Combinatorics*.
- [20] P. Erdős, A. Rényi, V. T. Sós, On a Problem of Graph Theory, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **1** (1966) 215–235.
- [21] P. Erdős, G. Szekeres, A Combinatorial Problem in Geometry, *Compositio Mathematica*, **2** (1935) 463—470.
- [22] P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau, R. H. Schelp, On Cycle-Complete Graph Ramsey Numbers, *Journal of Graph Theory*, **2** (1978) 53–64.

-
- [23] P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau, R. H. Schelp, The size Ramsey number, *Periodica Mathematica Hungarica*, **9** (1978) 145–161.
- [24] G. Exoo, A Lower Bound for $R(5, 5)$, *Journal of Graph Theory*, **13** (1989) 97–98.
- [25] G. Exoo, Constructing Ramsey Graphs with a Computer, *Congressus Numerantium*, **59** (1987) 31–36.
- [26] G. Exoo, D. F. Reynolds, Ramsey Numbers Based on C_5 -Decompositions, *Discrete Mathematics*, **71** (1988) 119–127.
- [27] Z. Füredi, Graphs without quadrilaterals, *J. Combinat. Theory Ser B.*, **34** (1983) 187–190.
- [28] R. J. Faudree, R. H. Schelp, All Ramsey Numbers for Cycles in Graphs, *Discrete Mathematics*, **8** (1974) 313–329.
- [29] R. J. Faudree, S. L. Lawrence, T. D. Parsons, R. H. Schelp, Path-Cycle Ramsey Numbers, *Discrete Mathematics*, **10** (1974) 269–277.
- [30] S. Fettes, R. L. Kramer, S. P. Radziszowski, An Upper Bound of 62 on the Classical Ramsey Number $R(3, 3, 3, 3)$, *Ars Combinatoria*, **72** (2004) 41–63.
- [31] G. Giraud, Minoration de certains nombres de Ramsey binaires par les nombres de Schur généralisés, *C. R. Acad. Sc. Paris, Séries A-B*, **266** (1968) A481–A483.
- [32] J. E. Graver, J. Yackel, Some Graph Theoretic Results Associated with Ramsey's Theorem, *Journal of Combinatorial Theory*, **4** (1968) 125–175.
- [33] R. E. Greenwood, A. M. Gleason, Combinatorial Relations and Chromatic Graphs, *Canadian Journal of Mathematics*, **7** (1955) 1–7.
- [34] C. Grinstead, S. Roberts, On the Ramsey Numbers $R(3, 8)$ and $R(3, 9)$, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **33** (1982) 27–51.
- [35] F. Harary, Recent results in generalized Ramsey theory for graphs, *Graph Theory and Applications*, Springer (1972) 125–138.

-
- [36] M. Harborth, I. Mengersen, Some Ramsey Number for Complete Bipartite Graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, **13** (1996) 119–128.
- [37] R. Hill, R. W. Irving, On Group Partitions Associated with Lower Bounds for Symmetric Ramsey Numbers, *European Journal of Combinatorics*, **3** (1982) 35–50.
- [38] A. J. Hoffman, R. R. Singleton, On Moore Graphs of Diameter Two and Three, *IBM J. Res. Develop.*, **4** (1960) 497–504.
- [39] M. S. Jacobson, On the Ramsey Number for Stars and a Complete Graph, *Ars Combinatoria*, **17** (1984) 167–172.
- [40] C. J. Jayawardene, C. C. Rousseau, An Upper Bound for the Ramsey Number of a Quadrilateral versus a Complete Graph on Seven Vertices, *Congressus Numerantium*, **130** (1998) 175–188.
- [41] C. J. Jayawardene, C. C. Rousseau, The Ramsey Numbers for a Quadrilateral vs. All Graphs on Six Vertices, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **35** (2000) 71–87. Errata JCMCC 51 (2004) 221.
- [42] G. Kéry, On a Theorem of Ramsey (po węgiersku), *Matematikai Lapok*, **15** (1964) 204–224.
- [43] J. G. Kalbfleisch, Chromatic Graphs and Ramsey’s Theorem, rozprawa doktorska, University of Waterloo, (1966).
- [44] J. G. Kalbfleisch, Construction of Special Edge-Chromatic Graphs, *Canadian Mathematical Bulletin*, **8** (1965) 575–584.
- [45] K. Klamroth, I. Mengersen, The Ramsey Number of $r(K_{1,3}, C_4, K_4)$, *Utilitas Mathematica*, **52** (1997) 65–81.
- [46] D. L. Kreher, L. Wei, S. P. Radziszowski, Lower Bounds for Multi-Colored Ramsey Numbers From Group Orbits, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **4** (1988) 87–95.
- [47] Kung-Kuen Tse, On the Ramsey number of the quadrilaterals versus the book and the wheel, *Australasian Journal of Combinatorics*, **27** (2003) 163–167.

-
- [48] A. Kurek, A. Ruciński, Two variants of the size Ramsey number, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **25** (2005) 141–149.
- [49] Lianmin Zhang, Yaojun Chen, T. C. Edwin Cheng, The Ramsey Numbers for Cycles versus Wheels of Even Order, *European Journal of Combinatorics*, **31** (2010) 254–259.
- [50] Lingsheng Shi, Ramsey Numbers of Long Cycles versus Books or Wheels, *European Journal of Combinatorics*, **31** (2010) 828–838.
- [51] R. Lortz, A Note on the Ramsey Number of $K_{2,2}$ versus $K_{3,n}$, *Discrete Mathematics*, **306** (2006) 2976–2982.
- [52] R. Lortz, I. Mengersen, Further Ramsey Numbers for Small Complete Bipartite Graphs, *Ars Combinatoria*, **79** (2006) 195–203.
- [53] R. Lortz, I. Mengersen, Off-Diagonal and Asymptotic Results on the Ramsey Number $r(K_{2,m}, K_{2,n})$, *Journal of Graph Theory*, **43** (2003) 252–268.
- [54] J. Mackey, Combinatorial Remedies, rozprawa doktorska, Department of Mathematics, University of Hawaii (1994).
- [55] B. D. McKay, S. P. Radziszowski, $R(4, 5) = 25$, *Journal of Graph Theory*, **19** (1995) 309–322.
- [56] B. D. McKay, S. P. Radziszowski, Subgraph Counting Identities and Ramsey Numbers, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **69** (1997) 193–209.
- [57] B. D. McKay, Zhang Ke Min, The Value of the Ramsey Number $R(3, 8)$, *Journal of Graph Theory*, **16** (1992) 99–105.
- [58] B. D. McKay, Practical Graph Isomorphism, *Congressus Numerantium*, **30** (1981) 45–87.
- [59] Ore Ø., Note on Hamilton circuits, *American Mathematical Monthly*, **67** (1) (1960) 55.
- [60] T. D. Parsons, Graphs from projective planes, *Aequationes Math.*, **14** (1976) 167–189.

- [61] T. D. Parsons, Ramsey Graphs and Block Designs I, *Transactions of the American Mathematical Society*, **209** (1975) 33–44.
- [62] K. Piwakowski, S.P. Radziszowski, $30 \leq R(3, 3, 4) \leq 31$, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **27** (1998) 135–141.
- [63] K. Piwakowski, S. P. Radziszowski, Towards the Exact Value of the Ramsey Number $R(3, 3, 4)$, *Congressus Numerantium*, **148** (2001) 161–167.
- [64] S. P. Radziszowski, Small Ramsey numbers, *The Electronic Journal of Combinatorics*, Dynamic Survey **1** (2011) #13, <http://www.combinatorics.org/issue/view/Surveys>.
- [65] S. P. Radziszowski, Z. Shao, X. Xu, Bounds on some Ramsey numbers involving quadrilateral, *Ars Combinatoria*, **90** (2009) 337–344.
- [66] S. P. Radziszowski, J. Stinehour, Kung-Kuen Tse, Computation of the Ramsey Number $R(W_5, K_5)$, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, **47** (2006) 53–57.
- [67] S. P. Radziszowski, Kung-Kuen Tse, A Computational Approach for the Ramsey Numbers $R(C_4, K_n)$, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **42** (2002) 195–207.
- [68] S. P. Radziszowski, X. Xu, $28 \leq R(C_4, C_4, C_3, C_3) \leq 36$, *Utilitas Mathematica*, **79** (2009) 353–357.
- [69] F. P. Ramsey, On a Problem of Formal Logic, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **30** (1930) 264–286.
- [70] I. Reiman, Uber ein Problem von K. Zarankiewicz, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **9** (1958) 269–279.
- [71] V. Rosta, On a Ramsey Type Problem of J. A. Bondy and P. Erdős, I & II, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **15** (1973) 94–120.
- [72] C. C. Rousseau, C. J. Jayawardene, The Ramsey Number for a Quadrilateral vs. a Complete Graph on Six Vertices, *Congressus Numerantium*, **123** (1997) 97–108.

- [73] C. U. Schulte, Ramsey-Zahlen für Bäume und Kreise, rozprawa doktorska, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, (1992).
- [74] J. H. Spencer, Asymptotic Lower Bounds for Ramsey Functions, *Discrete Mathematics*, **20** (1977) 69–76.
- [75] Sun Yongqi, Yang Yuansheng, Lin Xiaohui, Zheng Wenping, The Value of the Ramsey Number $R_4(C_4)$, *Utilitas Mathematica*, **73** (2007) 33–44.
- [76] Surahmat, Cycle-Wheel Ramsey Numbers. Some results, open problems and conjectures, *Math Track*, ISSN 1817-3462, **2** (2006) 56–64.
- [77] Surahmat, E. T. Baskoro, I. Tomescu, The Ramsey Numbers of Large Cycles versus Odd Wheels, *Graphs and Combinatorics*, **24** (2008) 53–58.
- [78] Surahmat, E. T. Baskoro, I. Tomescu, The Ramsey Numbers of Large Cycles versus Wheels, *Discrete Mathematics*, **306** (2006) 3334–3337.
- [79] Surahmat, E. T. Baskoro, S. Uttunggadewa, H. J. Broersma, An upper bound for the Ramsey number of a cycle of length four versus wheels, *LNCS 3330*, Springer, Berlin (2005) 181–184.
- [80] Xiaodong Xu, Zehui Shao, S. P. Radziszowski, Bounds on Some Ramsey Numbers Involving Quadrilateral, *Ars Combinatoria*, **90** (2009) 337–344.
- [81] Xu Xiaodong, Xie Zheng, G. Exoo, S. P. Radziszowski, Constructive Lower Bounds on Classical Multicolor Ramsey Numbers, *Electronic Journal of Combinatorics*, **11** (2004) #R35, <http://www.combinatorics.org>.
- [82] Yang Yuansheng, P. Rowlinson, The Third Ramsey Numbers for Graphs with at Most Four Edges, *Discrete Mathematics*, **125** (1994) 399–406.
- [83] Yaojun Chen, T. C. Edwin Cheng, C. T. Ng, A Theorem on Cycle-Wheel Ramsey Number, *Discrete Mathematics*, **312** 5 (2012) 1059–1061.
- [84] Yaojun Chen, T. C. Edwin Cheng, Yunqing Zhang, The Ramsey Numbers $R(C_m, K_7)$ and $R(C_7, K_8)$, *European Journal of Combinatorics*, **29** (2008) 1337–1352.

- [85] Yaojun Chen, T. C. Edwin Cheng, Zhengke Miao, C. T. Ng, The Ramsey Numbers for Cycles versus Wheels of Odd Order, *Applied Mathematics Letters*, **22** (2009) 1875–1876.
- [86] Zhou Huai Lu, The Ramsey Number of an Odd Cycle with Respect to a Wheel (po chińsku), *Journal of Mathematics*, Shuxue Zazhi (Wuhan), **15** (1995) 119–120.