

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Anna Beata Kwiatkowska

Umieszczanie
zbiorów częściowo uporządkowanych
w książce o minimalnej liczbie stron

*rozprawa doktorska
napisana na Wydziale Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu*

Promotor rozprawy
prof. dr hab. Maciej M. Sysło

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Uniwersytet Wrocławski

Toruń, kwiecień 2013

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

.....

data

.....

mgr Anna Beata Kwiatkowska

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

.....

data

.....

prof. dr hab. Maciej M. Sysło

Streszczenie

Umieszczenie grafu w książce jest definiowane przez kolejność jego wierzchołków na grzbiecie książki i przyporządkowanie jego krawędzi stronom książki tak, aby na żadnej stronie krawędzie nie przecinały się. *Umieszczenie zbioru częściowo uporządkowanego (posetu) P w książce* polega na umieszczeniu jego digrafu pokrycia (diagramu Hassego), z elementami zbioru P na grzbiecie tworzącymi rozszerzenie liniowe zbioru P . Problemem jest umieszczenie posetu P na możliwie najmniejszej liczbie stron.

Problem liczby stron dla posetów wydaje się być znacznie trudniejszy niż dla grafów. Na dwóch stronach można umieścić graf planarny, który jest podgrafem hamiltonowskiego grafu planarnego, natomiast nie jest znana charakterystyka posetów dających się umieścić na dwóch stronach. Ponadto, każdy graf planarny można umieścić na co najwyżej czterech stronach, natomiast przypuszcza się, że w przypadku posetów planarnych liczba stron nie jest ograniczona. Wyniki w pracy dotyczą tych dwóch problemów.

W Rozdziale 4 zamieszczono algorytm do umieszczania *posetów drzewiastych* na jednej stronie, który tworzy ramy dla algorytmów umieszczania posetów o rozbudowanej strukturze drzewiastej. W Rozdziale 5 rozważa się klasę posetów planarnych, w których każdy blok jest cyklem. Mimo swej prostoty, dwie strony nie wystarczają do ich umieszczenia. Każdy taki poset może być umieszczony na trzech stronach i trzy strony czasem są niezbędne.

Najobszerniejszą część pracy stanowią Rozdziały 6 i 7, poświęcone *posetom N -wolnym*, pojawiającym się w wielu obszarach badań nad posetami. Rozważania w tych Rozdziałach bazują na podejściu teorio-grafowym, w którym digraf pokrycia posetu N -wolnego jest interpretowany jako digraf łukowy. Podano wzór na liczbę stron dla posetów N -wolnych o strukturze drzewiastej, oszacowano liczbę stron dla dowolnego posetu N -wolnego i przedstawiono algorytm umieszczania w książce dowolnych posetów, bazujący na przekształceniu posetu do posetu N -wolnego.

W Rozdziale 7 są rozważane *posety planarne*. Podano lokalne warunki konieczne na to, aby N -wolny poset był planarny, skąd wywnioskowano, że N -wolne posety planarne o strukturze drzewiastej można umieścić na dwóch stronach. Ta część pracy zawiera najważniejszy wynik pracy, że *N -wolny poset planarny, reprezentowany przez swój do góry płaski digraf pokrycia, można umieścić na dwóch stronach*. Jako dowód tego twierdzenia przedstawiono algorytm o złożoności wielomianowej i udowodniono jego poprawność.

Rozważania dotyczące posetów są prowadzone w języku (di)grafów z nimi związanych oraz z wykorzystaniem technik dowodzenia i konstrukcji algorytmicznych pochodzących z teorii grafów.

Niektóre wyniki były prezentowane na kilku konferencjach [39], [41], [42].

MCS 2010: 05C10, 5C62, 05C76, 05C85, 06Axx, 06A06, 06A07, 68Q25

ACM CCS: 6.2.1, 6.2.2

Słowa kluczowe: zbiór częściowo uporządkowany (poset), digraf, zbiór i digraf N -wolny, zbiór i digraf planarny, drzewo, umieszczanie posetów w książce

The Page Number Problem for Partially Ordered Sets

Abstract

In this Thesis we deal with the book embedding problem for partially ordered sets (posets). A *book embedding of a graph G* consists of two assignments: the vertices of G to the spine of a book in some order and the edges of G to the pages of the book so that the edges on the same page do not intersect. In a *book embedding of a poset (P, \leq)* , the covering digraph (the Hasse diagram) of P is embedded with the elements of P on the spine as a linear extension of P . The objective is to minimize the number of pages used.

The page number problem for posets seems to be more challenging and difficult than for graphs. It is known that the page number equals 2 for planar graphs which are subgraphs of Hamiltonian planar graphs, but no characterization of 2-page posets is known. Moreover, each planar graph can be embedded in 4 pages and it is conjectured that the page number for planar posets is unbounded. We focus in the Thesis on these two problems.

In Section 4, an algorithm for 1-page embedding of *tree-posets* is presented which in the next sections is extended to run for several tree-structured posets. In Section 5, one such family of planar posets – *tree-combinations of cycles* – is introduced. Despite the simplicity of such posets, it is shown that in general they need 3 pages.

In Sections 6 and 7, which are the main parts of the Thesis, the page number problem is considered in the family of *N -free posets*. Such posets have been recently investigated in the connection with various problems on graphs, digraphs, and posets. Our approach is based on the interpretation of covering digraphs of N -free posets as *line digraphs*. The page number is determined exactly for tree-structured N -free posets and some bounds are provided for arbitrary N -free posets. Moreover a book embedding algorithm is presented for arbitrary posets which is based on transformation of posets to N -free posets.

In Section 7, our attention is focused on planar posets. Necessary conditions for an N -free poset to be planar are formulated and as a consequence we show that the page number of tree-structured N -free planar posets equals 2. Then we present the main result of the Thesis which states that any N -free planar poset given as its upward plane representation (drawing) can be embedded into 2 pages. The proof of this result is fully constructive – we provide a polynomial time algorithm for such embeddings.

The investigations in this Thesis are carried on in the language and terms of graphs and digraphs related to posets and we use proof and algorithmic techniques from graph theory.

Some of the results were presented at combinatorial meetings [39], [41], [42].

MCS 2010: 05C10, 5C62, 05C76, 05C85, 06Axx, 06A06, 06A07, 68Q25

ACM CCS: 6.2.1, 6.2.2

Key words: partially ordered set (poset), digraph, N -free digraph and poset, planar digraph and poset, tree, page number of graphs, digraphs, and posets

Spis treści

| | |
|--|----|
| 1. Wprowadzenie | 7 |
| 2. Podstawowe pojęcia | 11 |
| 2.1. Grafy i digrafy | 11 |
| 2.1.1. Graf i jego elementy | 11 |
| 2.1.2. Digraf i jego elementy | 12 |
| 2.2. Zbiory uporządkowane | 14 |
| 2.2.1. Zbiory uporządkowane | 14 |
| 2.2.2. Grafy związane ze zbiorami uporządkowanymi | 14 |
| 2.2.3. Łańcuchy, antylańcuchy i rozszerzenia liniowe | 16 |
| 2.2.4. Wybrane rodzaje zbiorów uporządkowanych | 18 |
| 3. Umieszczanie grafów i zbiorów uporządkowanych w książce | 22 |
| 3.1. Umieszczanie grafów w książce | 22 |
| 3.2. Umieszczanie zbiorów uporządkowanych w książce | 24 |
| 3.3. Przegląd wybranych wyników dotyczących liczby stron zbiorów uporządkowanych | 26 |
| 3.4. Złożoność obliczeniowa | 31 |
| 3.4.1. Złożoność obliczeniowa problemu liczby stron grafu | 31 |
| 3.4.2. Złożoność obliczeniowa problemu liczby stron zbioru uporządkowanego | 32 |
| 3.5. Umieszczanie w książce planarnych zbiorów uporządkowanych | 33 |
| 3.5.1. Liczba stron posetów planarnych | 34 |
| 3.5.2. Rysowanie do góry digrafów na płaszczyźnie | 35 |
| 3.5.3. Topologiczne umieszczanie posetów planarnych w książce | 36 |
| 3.6. Zastosowania | 37 |
| 4. Umieszczania drzewiastych zbiorów uporządkowanych w książce | 38 |
| 5. Umieszczanie kombinacji cykli w książce | 41 |
| 6. Umieszczanie w książce N-wolnych zbiorów uporządkowanych | 52 |
| 6.1. Posety N -wolne i ich charakteryzacja | 52 |
| 6.1.1. Posety N -wolne | 52 |
| 6.1.2. Charakteryzacja posetów N -wolnych | 54 |
| 6.2. Liczba stron prostych posetów N -wolnych, gdy digraf źródłowy posetu jest drzewem | 58 |
| 6.3. Oszacowanie liczby stron dla dowolnych posetów N -wolnych | 63 |
| 6.4. Umieszczanie w książce dowolnych posetów | 67 |
| 6.4.1. Podziały łuków | 67 |
| 6.4.2. Uogólnione podziały łuków | 67 |
| 6.4.3. Algorytm umieszczania w książce dowolnych posetów | 68 |
| 7. Umieszczanie w książce N-wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych | 70 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 7.1. | Struktura N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych | 70 |
| 7.2. | Planarność N -wolnych zbiorów uporządkowanych i ich digrafów źródłowych | 76 |
| 7.3. | Umieszczanie w książce do góry płaskich N -wolnych zbiorów uporządkowanych | 80 |
| | 7.3.1. Wcześniejsze rezultaty | 80 |
| | 7.3.2. Umieszczanie na dwóch stronach w książce do góry płaskich N -wolnych zbiorów uporządkowanych | 81 |
| 8. | Podsumowanie | 95 |
| | Bibliografia | 96 |

1. Wprowadzenie

Głównym przedmiotem pracy jest problem liczby stron, rozważany w dziedzinie zbiorów częściowo uporządkowanych. Ten problem został wprowadzony w dziedzinie grafów (patrz [50]) i pierwsze istotne wyniki uzyskali Bernhart i Kainen w pracy [7]. Problem skoków w dziedzinie zbiorów częściowo uporządkowanych pojawił się na konferencji *Algorithms and Order* w Ottawie w 1988 roku, patrz [48] i pierwsze wyniki w tym zakresie zostały uzyskane przez Nowakowskiego i Parkera [49] oraz przez Sysłę [63].

Problem liczby stron polega w ogólności na umieszczeniu grafu w książce o możliwie najmniejszej liczbie stron. Jeśli G jest grafem, to jego umieszczenie w książce jest definiowane przez dwa przyporządkowania. Wierzchołki grafu G zostają w wybranej kolejności (permutacji) umieszczone na grzbiecie książki, a krawędzie są przyporządkowywane stronom książki, każda jednej stronie i w taki sposób, że na żadnej stronie krawędzie nie przecinają się. Jeśli (P, \leq) jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to jego umieszczenie w książce polega na umieszczeniu w książce jego digrafu pokrycia (diagramu Hassego), przy czym elementy zbioru P na grzbiecie książki tworzą rozszerzenie liniowe zbioru (P, \leq) , a zatem łuki tego digrafu są skierowane ku górze. Oznaczamy przez $pn(G)$ liczbę stron grafu G , a przez $pn(P)$ liczbę stron częściowo uporządkowanego zbioru (P, \leq) .

Problem liczby stron w dziedzinie grafów, digrafów i zbiorów uporządkowanych jest rozważany również jako problem geometrii obliczeniowej (patrz np. [20]), na gruncie której uzyskano wiele ciekawych i istotnych rezultatów, odnoszących się do grafów jako obiektów geometrycznych.

Problem liczby stron w dziedzinie zbiorów częściowo uporządkowanych wydaje się być znacznie trudniejszy niż problem liczby stron rozważany dla grafów. W pracy [7] scharakteryzowano grafy G , dla których liczba stron $pn(G)$ jest równa 1 i 2 i chociaż przypuszczano, że liczba stron grafów planarnych nie jest ograniczona, to jednak, jak udowodnił Yannakakis [68], wystarczą cztery strony do umieszczenia w książce jakiegokolwiek grafu planarnego, ale dla niektórych grafów cztery strony są niezbędne.

W dziedzinie zbiorów częściowo uporządkowanych znana jest pełna charakterystyka zbiorów, które można umieścić na jednej stronie – są to porządki drzewiaste. Natomiast brak jest pełnej charakterystyki zbiorów, które wymagają tylko dwóch stron i nie jest znane żadne oszacowanie liczby stron potrzebnych do umieszczenia w książce dowolnego zbioru planarnego. Podano natomiast przykład zbioru, który wymaga czterech stron [44] i nadal przypuszcza się, że liczba stron planarnych zbiorów częściowo uporządkowanych nie jest ograniczona (patrz Punkt 3.5.1).

W pracy zajęto się tymi dwoma szczególnymi przypadkami problemu liczby stron dla zbiorów częściowo uporządkowanych:

- scharakteryzować zbiory, które mogą być umieszczone na dwóch stronach w książce,
- określić liczbę stron planarnych zbiorów uporządkowanych.

Dotychczasowe badania, na przykład dotyczące złożoności obliczeniowej [20] wskazują, że te dwa problemy mogą być trudne do rozwiązania w pełnej ogólności, dlatego zajęto się szczególnymi klasami zbiorów częściowo uporządkowanych.

Znaczna część pracy jest poświęcona zbiorom, które mają drzewiastą strukturę, dlatego w Rozdziale 4 krótko przedstawiono algorytm służący do umieszczania zbiorów drzewiastych na jednej stronie. Algorytm jest rekurencyjny i jego poprawność bazuje na (rekurencyjnej) własności elementów zbioru (Twierdzenie 17), dzięki której każda gałąź drzewa może być niezależnie umieszczona na jednej stronie. W dalszej części pracy (w Rozdziałach 5 i 6) ten algorytm tworzy ramy dla algorytmów umieszczania w książce zbiorów o bardziej rozbudowanej strukturze drzewiastej.

W Rozdziale 5 jest rozważana klasa zbiorów uporządkowanych, które również mają strukturę drzewiastą, ale każda składowa zbioru jest diamentem, a ogólniej – cyklem. Ta klasa zbiorów nie pojawiła się dotychczas w badaniach, ale mimo swej prostoty w budowie i drzewiastej strukturze bloków, będących cyklami, dwie strony nie wystarczają do umieszczenia tych zbiorów uporządkowanych w książce. Zbiór będący kombinacją cykli jest planarny. Udowodniono między innymi, że każda kombinacja diamentów (cykli) może być umieszczona w książce na trzech stronach (Twierdzenie 18), jednocześnie przedstawiono przykład takiej kombinacji, której nie można umieścić na dwóch stronach (Rysunek 5.7 i Lemat 7). Kombinacja diamentów jest więc przykładem rodziny planarnych zbiorów uporządkowanych o drzewiastej strukturze, dla umieszczenia których w książce nie wystarczają dwie strony.

Najrozleglejszą część pracy stanowią rozważania w Rozdziałach 6 i 7, dotyczące N -wolnych zbiorów uporządkowanych. Dla rodziny zbiorów N -wolnych otrzymano wcześniej wiele istotnych i ciekawych wyników, między innymi w przypadku problemów, które polegają na znalezieniu rozszerzenia liniowego o pewnej własności. Jednym z takich problemów jest problem skoków (patrz Punkt 3.3, gdzie zamieszczono dolne oszacowanie liczby stron przez wyrażenie zależne od liczby skoków zbioru, Twierdzenie 11). Rozważania bazują na podejściu teorio-grafowym, w którym digrafy pokrycia N -wolnych zbiorów uporządkowanych są interpretowane jako digrafy łukowe. Zbiór częściowo uporządkowany (P, \leq) jest N -wolny, jeśli jego digraf pokrycia, czyli diagram Hassego, nie zawiera poddigrafu indukowanego, izomorficznego z digrafem N (patrz Rysunek 6.1).

Na początku Rozdziału 6 jest omówiona struktura N -wolnych digrafów łukowych i charakteryzacje takich digrafów (Twierdzenie 20), z których korzysta się w dalszej części pracy. Wśród wielu charakteryzacji digrafów łukowych najbardziej użyteczny okazuje się warunek, który ustanawia, że digraf D jest digrafem łukowym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwa równoliczne

rozkłady zbioru jego wierzchołków takie, że zbiór łuków digrafu D może być rozłożony na sumę zbiorów łuków digrafów dwudzielnych pełnych.

W Podrozdziale 6.2 podano dokładny wzór na liczbę stron dla N -wolnych zbiorów uporządkowanych o strukturze drzewiastej (Twierdzenie 22). Następnie podano oszacowanie liczby stron dla dowolnego zbioru N -wolnego (Twierdzenie 23), uwzględniające strukturę zbiorów N -wolnych oraz liczbę cykli niezależnych w (di)grafie pokrycia. Następnie, podano algorytm służący do umieszczania w książce dowolnych zbiorów uporządkowanych, który w pierwszym kroku sprowadza dowolny zbiór uporządkowany do zbioru N -wolnego, a następnie korzysta z algorytmu dla zbiorów N -wolnych.

Rozważania w Rozdziale 7 skupiają się na planarnych zbiorach uporządkowanych. Podano warunki konieczne o charakterze lokalnym na to, aby N -wolny zbiór uporządkowany był planarny (Twierdzenie 24) – istnienie warunków koniecznych i dostatecznych bowiem jest mało prawdopodobne, gdyż problem pełnej charakteryzacji takich zbiorów jest NP-zupełny. Z tych warunków wywnioskowano, że planarny N -wolny zbiór uporządkowany o strukturze drzewiastej może być umieszczony w książce na dwóch stronach.

Najważniejszym wynikiem pracy jest dowód, że planarny N -wolny zbiór uporządkowany, reprezentowany przez swój do góry płaski digraf pokrycia może być umieszczony w książce na dwóch stronach. Dowód ma postać algorytmu, bazującego na strukturalnej analizie N -wolnych zbiorów uporządkowanych, z której wynika struktura połączeń między poddigrafami dwudzielnymi pełnymi, na które można zdekomponować digraf pokrycia takiego zbioru oraz z płaskiej realizacji tych poddigrafów. Dowód (algorytm) składa się z kilku etapów:

- sprawdzenie warunków koniecznych na to, aby dany zbiór uporządkowany był N -wolny i planarny;
- redukcja składowych wiszących i rozmiarów poddigrafów dwudzielnych pełnych;
- umieszczenie na dwóch stronach w książce digrafu zredukowanego;
- uzupełnienie otrzymanego włożenia digrafu zredukowanego do włożenia oryginalnego (przed redukcją) digrafu pokrycia.

Algorytm znajduje kolejność wierzchołków digrafu pokrycia na grzbiecie książki, będącą rozszerzeniem liniowym zbioru uporządkowanego, dla którego digraf zredukowany jest digrafem pokrycia. Ta kolejność jest znajdowana podczas przejścia płaskiej reprezentacji zredukowanego digrafu pokrycia, w którym wykorzystuje się tę reprezentację digrafu (wierzchołki, łuki i ściany są odwiedzane w kolejności od prawej) oraz to, że digraf jest acykliczny i do góry płaski (wierzchołki są odwiedzane w kolejności topologicznego uporządkowania w digrafie pokrycia). Umieszczenie digrafu pokrycia na dwóch stronach jest następnie uzupełniane, także na tych dwóch stronach, fragmentami oryginalnego digrafu pokrycia, wyredukowanymi na początku całego postępowania.

W algorytmie, łuki digrafu zredukowanego i oryginalnego są przydzielane do jednej ze stron w książce, a następnie dowodzi się, że nie przecinają się na żadnej z nich.

Przedstawione postępowanie ma złożoność wielomianową.

W tej pracy, w rozważaniach dotyczących zbiorów uporządkowanych, istotnie korzysta się z własności (di)grafów powiązanych z tymi zbiorami oraz z technik dowodzenia i konstrukcji algorytmicznych pochodzących z teorii grafów.

Niektóre wyniki zamieszczone w pracy były prezentowane na kilku konferencjach i ich opis znalazł się w materiałach konferencyjnych [39], [41], [42].

Podziękowania

Szczególne podziękowania za pomoc przy tworzeniu tej pracy kieruję do mojego promotora, prof. dra hab. Macieja M. Sysły.

2. Podstawowe pojęcia

W tym rozdziale wprowadzamy najważniejsze pojęcia i oznaczenia stosowane w dalszych rozdziałach pracy. Pojęcia te są związane z grafami i zbiorami uporządkowanymi. Grafy występują w tej pracy w podwójnej roli. Z jednej strony stanowią reprezentacje zbiorów uporządkowanych, a z drugiej – ich własności są wykorzystywane przy rozwiązywaniu problemów, którym jest poświęcona ta praca.

Niektóre szczególne pojęcia i własności grafów oraz zbiorów uporządkowanych są wprowadzane w dalszej części pracy, w miejscach gdzie są wykorzystywane.

2.1. Grafy i digrafy

2.1.1. Graf i jego elementy

Graf symetryczny, w skrócie *graf*, $G = (V, E)$ składa się z niepustego zbioru *wierzchołków* V i zbioru *krawędzi* E , który jest zbiorem podzbiorów dwuelementowych zbioru wierzchołków. Krawędzie, zwane także *połączeniami* grafu, są więc symetryczne. Krawędź $e \in E$ oznaczamy jako $\{u, v\}$, gdzie $u, v \in V$; wierzchołki u i v nazywamy *końcami* krawędzi e . Dla uniknięcia nieporozumień, zbiór wierzchołków V grafu G oznaczamy czasem przez $V(G)$, a zbiór krawędzi E – przez $E(G)$. W tej pracy przyjmujemy, że zbiór wierzchołków grafu jest skończony. Oznaczmy $|V|$ przez n i $|E|$ przez m .

Graf H jest *podgrafem* grafu G , jeśli wszystkie jego wierzchołki i krawędzie należą do grafu G , czyli $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf H grafu G jest *podgrafem rozpinającym*, jeśli $V(H) = V(G)$. Dla $U \subseteq V(G)$ definiujemy *podgraf indukowany przez zbiór* U , oznaczany przez $G[U]$, jako podgraf, w którym $V(G[U]) = U$ i $E(G[U])$ zawiera wszystkie krawędzie grafu G , których oba końce należą do U .

Ciąg wierzchołków $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ grafu G nazywamy *drogą*, jeśli kolejne w nim pary wierzchołków tworzą krawędzie w grafie G . Za długość drogi przyjmuje się liczbę tworzących ją krawędzi, czyli droga π ma długość $k - 1$. Jeśli $k \geq 4$ i $v_1 = v_k$, to droga jest *zamknięta* i nazywa się *cyklem* – ten cykl ma również długość $k - 1$. Graf, który nie zawiera cyklu, nazywamy *acyklicznym*.

Na zbiorze wierzchołków V grafu G można określić binarną relację *spójności* S , którą definiujemy następująco: uSv wtedy i tylko wtedy, gdy w G istnieje droga z u do v . Relacja S jest relacją typu równoważności, dzieli więc zbiór V na klasy równoważności S_1, S_2, \dots, S_l , $l \geq 1$. Podgraf G_i grafu G indukowany (generowany) przez podzbiór wierzchołków S_i nazywamy

składową spójności grafu G . Graf jest *spójny*, jeśli $l = 1$. Większość problemów teorio-grafowych bez utraty ogólności można rozważać w klasie grafów spójnych.

Spójny graf acykliczny nazywamy *drzewem*, a graf acykliczny – nazywamy *lasem*, gdyż jest złożony ze składowych, które są drzewami.

Wierzchołek $v \in V$ nazywamy *wierzchołkiem rozspajającym*, jeśli graf G' , powstały przez usunięcie z grafu G wierzchołka v i krawędzi, które go zawierają – taki graf oznaczamy przez $G - \{v\}$ – ma więcej składowych spójności niż graf G . Maksymalny podgraf spójny H grafu G , który nie zawiera wierzchołków rozspajających, nazywamy *blokiem* grafu G . Blok grafu może być: jednym wierzchołkiem (jeśli składowa spójności grafu ma tylko jeden wierzchołek), dwoma wierzchołkami połączonymi krawędzią, lub podgrafem, w którym każde dwa wierzchołki należą do jakiegoś cyklu (taki graf nazywamy *2-spójnym*). Łatwo zauważyć, że każda krawędź grafu należy do dokładnie jednego jego bloku. Podobnie, każdy wierzchołek, który nie jest wierzchołkiem rozspajającym grafu, należy do dokładnie jednego jego bloku, a wierzchołek, który należy do co najmniej dwóch bloków, jest wierzchołkiem rozspajającym grafu.

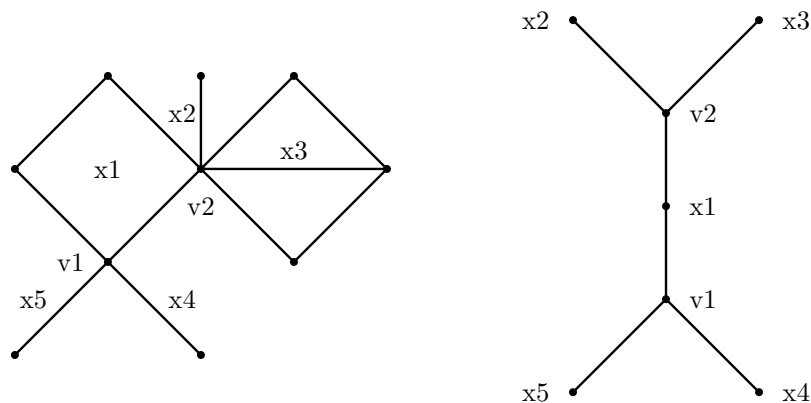
Rozwiązywanie niektórych problemów teorio-grafowych polega na analizie grafu, blok po bloku. W tym celu jest wygodnie posługiwać się dodatkowym grafem, w którym są zapisane wzajemne powiązania między wierzchołkami rozspajającymi i blokami grafu. Dla grafu $G = (V, E)$ utwórzmy *graf bloków i wierzchołków rozspajających* $BC[G]$, w którym zbiór wierzchołków $V(BC[G])$ odpowiada blokom i wierzchołkom rozspajającym grafu G i dwa wierzchołki $u, v \in V(BC[G])$ tworzą krawędź, jeśli u odpowiada wierzchołkowi rozspajającemu, a v odpowiada blokowi i u należy do tego bloku w grafie G lub na odwrót, patrz Rysunek 2.1. Jak widać, graf $BC[G]$ jest dwudzielny z jedną klasą dwudzielności odpowiadającą blokom, a drugą – odpowiadającą wierzchołkom rozspajającym w grafie G . Co więcej, łatwo uzasadnić następujące Twierdzenie:

Twierdzenie 1. [13] *Graf bloków i wierzchołków rozspajających $BC[G]$ spójnego grafu G jest drzewem.*

2.1.2. Digraf i jego elementy

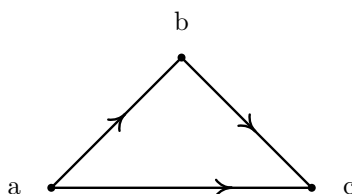
Graf skierowany, a skrócie *digraf*, $D = (V, A)$ składa się z niepustego zbioru *wierzchołków* V i zbioru skierowanych połączeń, zwanych *łukami* A , który jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego zbioru wierzchołków V , czyli $A \subseteq V \times V$. Łuki w digrafie są więc połączeniami skierowanymi. Łuk $a \in A$ oznaczamy jako (u, v) , gdzie $u, v \in V$; wierzchołki u i v nazywamy odpowiednio *początkiem* i *końcem* łuku a . Digraf może zawierać *pętle*, czyli łuki (u, u) , $u \in V$; może zawierać łuki (u, v) i (v, u) , lub tylko jeden z nich. Czasem interpretuje się krawędź $\{u, v\}$ w grafie symetrycznym G jako parę łuków (u, v) i (v, u) w symetrycznym digrafie.

Większość pojęć i oznaczeń zdefiniowanych dla grafów przenosi się automatycznie lub niemal automatycznie na digrafy. Zwróćmy uwagę jedynie na istotne różnice.



Rysunek 2.1. Graf i jego drzewo bloków i wierzchołków rozspajających

Ciąg wierzchołków $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ digrafu D nazywamy *drogą*, jeśli kolejne w nim pary wierzchołków tworzą łuki w digrafie D . Jeśli $k \geq 2$ i $v_1 = v_k$, to droga jest *zamknięta* i nazywa się *cyklem*. Zauważmy, że pętla w digrafie jest cyklem o długości 1. Digraf, który nie zawiera cyklu, nazywamy *acyklicznym* – na Rysunku 2.2 jest pokazany digraf bez cyklu. Digrafy acykliczne odgrywają ważną rolę jako reprezentacje zbiorów uporządkowanych i jako modele sytuacji reprezentowanych przez takie zbiory – piszemy o tym w następnym podrozdziale.



Rysunek 2.2. Digraf acykliczny

W digrafie na Rysunku 2.2 nie każda para wierzchołków jest połączona drogą, np. nie ma drogi z b do a i drogi z c do b , chociaż ten digraf wygląda na "spójny". Nie można zatem automatycznie przenieść definicji spójności z grafów na digrafy, zwłaszcza, że dla digrafów definiuje się kilka rodzajów spójności. Poprzestaniemy tutaj na najważniejszej dla nas definicji spójności digrafów. Dla digrafu $D = (V, A)$, wprowadźmy *graf bazowy* $G[D]$ digrafu D , który ma ten sam zbiór wierzchołków co D , czyli $V(G[D]) = V(D)$, i w którym $\{u, v\}$ jest krawędzią, jeśli (u, v) lub (v, u) jest łukiem w D . Teraz możemy zdefiniować, że digraf D jest *spójny*, jeśli jego graf bazowy $G[D]$ jest spójny. Korzystając z grafu bazowego można zdefiniować w digrafie: wierzchołek rozspajający, składowe spójności, blok, graf bloków i wierzchołków rozspajających.

2.2. Zbiory uporządkowane

Definiujemy tutaj zbiory uporządkowane, ich szczególne rodzaje i elementy oraz reprezentacje grafowe takich zbiorów, intensywnie wykorzystywane w dalszych fragmentach pracy.

2.2.1. Zbiory uporządkowane

Zbiór częściowo uporządkowany (P, \leq) , w skrócie *poset* od nazwy w języku angielskim (ang. *partially ordered set*), składa się z niepustego zbioru P i binarnej relacji \leq na P , zwanej *relacją częściowego porządku*, która jest:

- (i) *zwrotna*, czyli: $p \leq p$ dla każdego elementu $p \in P$;
- (ii) *antysymetryczna*, czyli: jeśli $p \leq q$ i $q \leq p$, to $p = q$;
- (iii) *przechodnia*, czyli: jeśli $p \leq q$ i $q \leq r$, to $p \leq r$.

W dalszej części pracy, jeśli inaczej nie zaznaczymy, para (P, \leq) będzie oznaczać zbiór częściowo uporządkowany i takie zbiory będziemy nazywać uporządkowanymi, bez dodawania, że są tylko częściowo uporządkowane. Przyjmujemy, że P jest zbiorem skończonym.

Z relacją \leq na zbiorze P można związać wiele innych relacji. Na przykład, możemy w naturalny sposób zdefiniować relację ‘ostrego porządku’ $<$, gdzie $p < q$ dla $p, q \in P$, jeśli $p \leq q$ i $p \neq q$ – mówimy wtedy, że element p jest *mniej* od q , a element q jest *większy* od p . Ponadto, dla $p \neq q$ mówimy, że element p jest *porównywalny* z q , jeśli zachodzi jedna z relacji $p < q$ lub $p > q$. W przeciwnym przypadku, elementy p i q ($p \neq q$) *nie są porównywalne*, co oznaczamy przez $p \parallel q$.

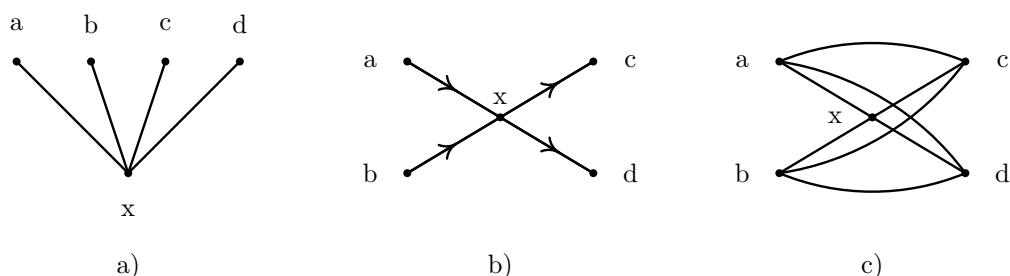
Element $p \in P$ jest *minimalny* w P , jeśli nie istnieje element $q \in P$, który jest mniejszy od p . Podobnie, element $p \in P$ jest *maksymalny* w P , jeśli nie istnieje element $q \in P$, który jest większy od p . Każdy skończony zbiór uporządkowany ma przynajmniej jeden element minimalny i przynajmniej jeden element maksymalny. Element $p \in P$ jest *największy* w P , jeśli p jest większy od każdego innego elementu w P . Podobnie, element $p \in P$ jest *najmniejszy* w P , jeśli jest mniejszy od każdego innego elementu w P . Element największy w zbiorze uporządkowanym oznacza się zwykle przez 1, a najmniejszy przez 0. Zbiór częściowo uporządkowany może nie zawierać ani elementu najmniejszego, ani elementu największego, np. gdy ma więcej niż jeden element minimalny lub gdy ma więcej niż jeden element maksymalny.

2.2.2. Grafy związane ze zbiorami uporządkowanymi

Zbiór częściowo uporządkowany w rozważaniach teorio-mnogościowych jest najczęściej ilustrowany na płaszczyźnie w postaci diagramu Hassego, który faktycznie jest reprezentacją relacji pokrycia, związanej z częściowym porządkiem. W zbiorze (P, \leq) , element q *pokrywa* element p , co oznaczamy przez $p <_c q$, jeśli z relacji $p \leq r < q$ dla $r \in P$ wynika, że $p = r$.

Można zdefiniować symetryczny oraz skierowany graf pokrycia dla danego zbioru uporządkowanego. Symetryczny *graf pokrycia* dla zbioru (P, \leq) oznaczamy przez $cov(P)$. Jego wierzchołki odpowiadają elementom zbioru P

i dwa wierzchołki, odpowiadające elementom $p, q \in P$, tworzą krawędź $\{p, q\}$ w $cov(P)$, jeśli $p <_c q$ lub $q <_c p$. *Digraf pokrycia* dla zbioru (P, \leq) oznaczamy przez $d-cov(P)$. Jego wierzchołki również odpowiadają elementom zbioru P i dwa wierzchołki, odpowiadające elementom $p, q \in P$, tworzą łuk (p, q) w $d-cov(P)$, jeśli $p <_c q$. Można również zdefiniować *graf porównywalności*. Dla posetu (P, \leq) jego graf porównywalności oznaczamy przez $comp(P)$ definiujemy jako graf (P, E) , w którym $\{p, q\} \in E$ jest krawędzią tego grafu, jeśli $p \neq q$ oraz $p \leq q$ lub $q \leq p$. Na Rysunku 2.3 przedstawiono graf i digraf pokrycia oraz graf porównywalności zbioru uporządkowanego, złożonego z pięciu elementów $X = \{a, b, c, d, x\}$ i relacji $a, b \leq x \leq c, d$.



Rysunek 2.3. Graf pokrycia (a) i digraf pokrycia (b) oraz graf porównywalności (c) posetu (X, \leq)

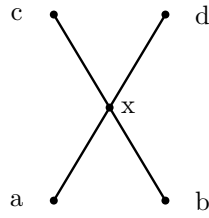
Diagram Hassego zbioru (P, \leq) oznaczamy przez $H(P)$ i definiujemy jako reprezentację grafu pokrycia $cov(P)$ na płaszczyźnie, którą można otrzymać w następujących dwóch krokach:

- elementy zbioru P umieszczamy na płaszczyźnie w taki sposób, że współrzędna y elementu p jest mniejsza od współrzędnej y elementu q , jeśli $p <_c q$;
- krawędź $\{p, q\} \in E(cov(P))$ rysujemy jako odcinek linii prostej i w taki sposób, by nie zawierał on żadnego innego elementu zbioru P (spełnienie tego warunku wymaga czasem zmiany rozmieszczenia na płaszczyźnie elementów zbioru P , dokonanego w pierwszym kroku).

Diagram Hassego zbioru uporządkowanego jest faktycznie pewnym umieszczeniem jego grafu pokrycia na płaszczyźnie, w którym relacja porządkująca wyznacza kierunek krawędzi grafu z dołu do góry, patrz Rysunek 2.4.

Digraf i graf pokrycia oraz diagram Hassego dla zbioru uporządkowanego (P, \leq) są definiowane na zbiorze wierzchołków, który odpowiada zbiorowi P , dla uproszczenia więc tę wspólną liczbę elementów $n(d-cov(P))$, $n(cov(P))$ i $n(H(P))$ będziemy oznaczali przez $n(P)$. Podobnie, liczba połączeń (łuków, krawędzi) między wierzchołkami w tych grafach jest taka sama i będziemy oznaczali ją przez $m(P)$.

Graf pokrycia zbioru uporządkowanego może być wykorzystany do przeniesienia niektórych pojęć z grafów na zbiory uporządkowane. Na przykład, przyjmujemy, że zbiór uporządkowany (P, \leq) jest *spójny*, jeśli jego graf pokrycia $cov(P)$ jest spójny. W ten sposób otrzymujemy również *składowe spój-*



Rysunek 2.4. Diagram Hassego posetu (X, \leq) z Rysunku 2.3

ności zbioru uporządkowanego. Podobnie jak w teorii grafów, wiele problemów na zbiorach uporządkowanych wystarczy rozważać na zbiorach spójnych, gdyż rozwiązanie dla zbioru, który nie jest spójny, może być złożone z rozwiązań otrzymanych dla poszczególnych jego składowych spójności. W dalszej części pracy przyjmujemy, że rozważane zbiory uporządkowane są spójne.

2.2.3. Łańcuchy, antyłańcuchy i rozszerzenia liniowe

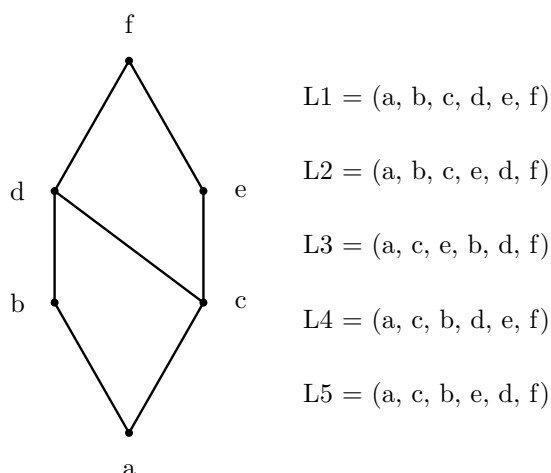
Podobnie jak podgraf dla grafu (w wersji podgrafu indukowanego), definiujemy podzbiór uporządkowany dla zbioru uporządkowanego. Dla zbioru uporządkowanego (P, \leq) i podzbioru $P' \subseteq P$ określamy *podzbiór uporządkowany* (P', \leq) , w którym jeśli $p, q \in P'$ i $p \leq q$ w (P, \leq) , to również $p \leq q$ w (P', \leq) i są to jedyne relacje w (P', \leq) . Podzbiór uporządkowany (P', \leq) zbioru (P, \leq) jest więc jednoznacznie określony przez podzbiór P' zbioru P .

Podzbiór Q zbioru P nazywamy *łańcuchem*, jeśli każde dwa elementy w Q są porównywalne – zatem, taki zbiór uporządkowany (Q, \leq) stanowi liniowy (czyli całkowity) porządek. Za długość łańcucha Q przyjmuje się jego moc, czyli $|Q|^1$. Oznaczmy przez $ht(P)$ *wysokość* zbioru P , czyli długość najdłuższego łańcucha w zbiorze P pomniejszoną o 1. Podzbiór Q zbioru P nazywamy *antyłańcuchem*, jeśli żadne dwa elementy w Q nie są porównywalne. Antyłańcuch Q nazywa się czasem *niezależnym podzbiorem* zbioru P .

Najważniejszą rolę w tej pracy odgrywają liniowe rozszerzenia zbiorów uporządkowanych. *Rozszerzeniem liniowym* zbioru uporządkowanego (P, \leq) nazywamy całkowity porządek $L = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ elementów zbioru P , który zachowuje relację \leq ze zbioru (P, \leq) , czyli, jeśli $p_i \leq p_j$ w (P, \leq) , to $i \leq j$ w L ; patrz Rysunek 2.5. Zbiór wszystkich rozszerzeń liniowych zbioru P oznaczamy przez $\mathcal{L}(P)$.

Rozszerzenia liniowe ustalonego zbioru uporządkowanego tworzą podzbiór zbioru wszystkich permutacji elementów tego zbioru. W szczególnym przypadku, jeśli żadne dwa elementy w zbiorze (P, \leq) nie są porównywalne, to każda permutacja jest rozszerzeniem liniowym tego zbioru. W dziedzinie grafów skierowanych rozszerzenie liniowe występuje pod nazwą *topologiczne*

¹ Zauważmy, że jest różnica między długością łańcucha w posecie, a długością drogi w grafie. W tym drugim przypadku przyjmuje się, że jest to liczba krawędzi w drodze.



Rysunek 2.5. Poset i wszystkie jego liniowe rozszerzenia

uporządkowanie wierzchołków jako całkowity ich porządek, który zachowuje skierowanie łuków od ‘lewej do prawej’. Dla danego digrafu D istnieje topologiczne uporządkowanie jego wierzchołków wtedy i tylko wtedy, gdy D jest acykliczny. W dziedzinie szeregowania zadań, które mają być wykonane na jednej maszynie, rozszerzenie liniowe porządku topologicznego (który odpowiada porządkowi technologicznemu), nazywa się często *harmonogramem* lub *uporządkowaniem zadań*.

Dowolne rozszerzenie liniowe $L = p_1, p_2, \dots, p_n$ zbioru uporządkowanego (P, \leq) można otrzymać stosując następujący algorytm:

Krok 1. Za p_1 przyjmij element minimalny w (P, \leq) .

Kroki 2, ..., n. Dla $i = 2, 3, \dots, n$, za p_i przyjmij element minimalny w zbiorze $P - \{p_1, p_2, \dots, p_{i-1}\}$.

Przy rozwiązywaniu niektórych problemów na zbiorach uporządkowanych pożyteczne jest posługiwanie się specjalnym typem rozszerzeń liniowych. W ostatnich dwóch dekadach dużą popularnością cieszyły się w badaniach zachłanne rozszerzenia liniowe. Takie rozszerzenie liniowe jest otrzymywane zgodnie z zasadą ‘idź tak daleko, jak to tylko możliwe’. Formalnie, *zachłanne rozszerzenie liniowe* $L = p_1, p_2, \dots, p_n$ zbioru uporządkowanego (P, \leq) otrzymujemy stosując następujący algorytm:

Krok 1. Za p_1 przyjmij element minimalny w (P, \leq) .

Kroki 2, ..., n. Dla $i = 2, 3, \dots, n$, za p_i przyjmij element minimalny w zbiorze $P - \{p_1, p_2, \dots, p_{i-1}\}$ i jeśli to możliwe zawsze wybieraj taki element p_i , który spełnia $p_{i-1} < p_i$.

Wśród rozszerzeń liniowych na Rysunku 2.5, rozszerzenia L_1 , L_2 i L_3 są zachłanne.

Każde rozszerzenie liniowe L zbioru (P, \leq) można przedstawić w postaci sumy prostej:

$$L = C_0 + C_1 + \dots + C_k,$$

gdzie C_i ($i = 0, 1, \dots, k$) jest łańcuchem w zbiorze (P, \leq) . Liczbę k oznaczamy przez $s(P, L)$ i nazywamy *liczbą skoków* w rozszerzeniu liniowym L zbioru (P, \leq) . *Liczbę skoków* zbioru (P, \leq) definiujemy jako:

$$s(P) = \min \{s(P, L) : L \in \mathcal{L}(P)\}.$$

Problem skoków dla zbioru uporządkowanego (P, \leq) polega na znalezieniu liczby skoków $s(P)$ i rozszerzenia liniowego tego zbioru o najmniejszej liczbie skoków. Ten problem jest NP-zupełny nawet dla zbiorów uporządkowanych o wysokości 1 [54].

Bardzo podobny do problemu skoków jest problem progów. *Progiem* w rozszerzeniu liniowym $L = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ zbioru uporządkowanego (P, \leq) nazywamy parę p_i, p_{i+1} kolejnych elementów w L , które są porównywalne, czyli $p_i \leq p_{i+1}$ w (P, \leq) . Oznaczmy przez $b(P, L)$ liczbę progów w rozszerzeniu liniowym L zbioru (P, \leq) . *Liczbę progów* zbioru (P, \leq) definiujemy jako:

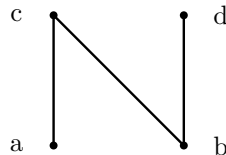
$$b(P) = \min \{b(P, L) : L \in \mathcal{L}(P)\}.$$

Problem progów dla zbioru uporządkowanego (P, \leq) polega na znalezieniu liczby progów $b(P)$ i rozszerzenia liniowego tego zbioru o najmniejszej liczbie progów. Zauważmy, że $b(P, L) = n - 1 - s(P, L)$, gdzie L jest rozszerzeniem liniowym zbioru (P, \leq) , a n jest liczbą elementów w zbiorze P , a zatem problem progów jest równoważny problemowi maksymalizacji liczby skoków w rozszerzeniu liniowym zbioru uporządkowanego. Okazuje się, że problem progów zbioru uporządkowanego jest łatwiejszy niż problem skoków – w pracach [26] i [57] podano niezależnie algorytmy wielomianowe dla problemu progów.

2.2.4. Wybrane rodzaje zbiorów uporządkowanych

W dalszej części pracy pojawia się kilka klas zbiorów uporządkowanych, dobrze znanych w literaturze przedmiotu. Przytoczymy tutaj ich definicje i podstawowe własności.

Dwie klasy zbiorów uporządkowanych są definiowane za pomocą zbioru, który jest znany jako N . Składa się on z czterech elementów, np. $\{a, b, c, d\}$, między którymi zachodzą tylko następujące relacje pokrywania: $a < c$, $b < c$ i $b < d$. Diagram Hassego zbioru N jest przedstawiony na Rysunku 2.6.



Rysunek 2.6. Diagram Hassego posetu N

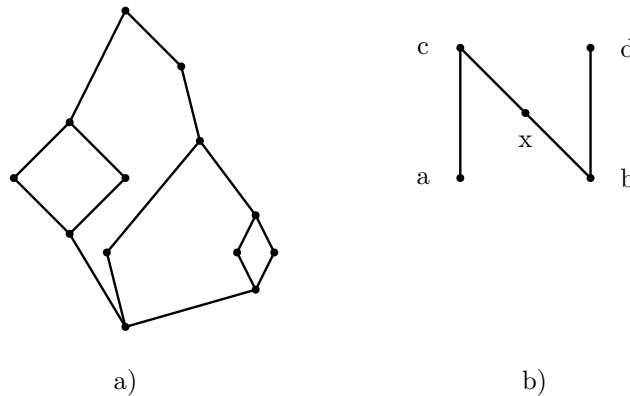
Zbiory szeregowo-równoległe

Zbiór (P, \leq) nazywamy *szeregowo-równoległym*, jeśli nie zawiera podzbioru izomorficznego ze zbiorem N , patrz np. [3]. Nazwa tych zbiorów, rozpowszechniona w zastosowaniach związanych z szeregowaniem zadań, pochodzi od metody ich konstrukcji. Otóż szeregowo-równoległy zbiór uporządkowany może być utworzony z pojedynczych elementów za pomocą dwóch operacji: sumy liniowej (szeregowej) i sumy rozłącznej (równoległej).

Zbiory N -wolne

Zbiór (P, \leq) nazywamy N -wolnym, jeśli jego digraf pokrycia jest N -wolny, czyli nie zawiera poddigrafu indukowanego izomorficznego z digrafem pokrycia zbioru N . Zbiory N -wolne zostały wprowadzone przez Grilleta [24] (patrz również [55]), a jako digrafy N -wolne pojawiły się w teorii szeregowania zadań, jako modele sieci czynności bez tzw. *czynności pozornych*, patrz [60].

Na Rysunku 2.7(a) jest pokazany szeregowo-równoległy zbiór uporządkowany, a zbiór na Rysunku 2.7(b) jest N -wolny, nie jest jednak szeregowo-równoległy, gdyż jego podzbiór $\{a, b, c, d\}$ jest izomorficzny ze zbiorem uporządkowanym N .



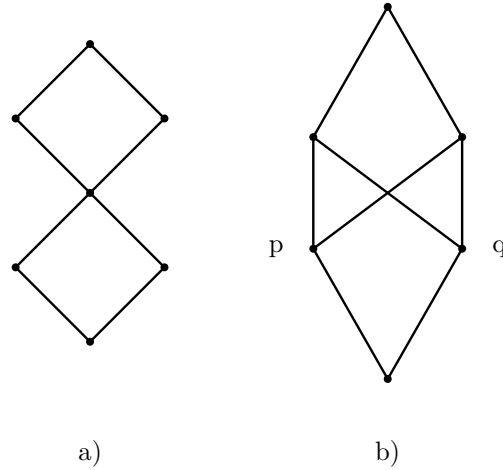
Rysunek 2.7. Diagram Hassego zbioru szeregowo-równoległego (a) i zbioru N -wolnego (b)

Zbiory szeregowo-równoległe występują w niektórych wynikach, cytowanych w dalszej części pracy, a zbiory N -wolne są przedmiotem rozważań w Rozdziale 6, gdzie szczegółowo omawiamy niektóre ich własności, istotne dla problemu liczby stron takich zbiorów uporządkowanych.

Kraty

Kraty stanowią jedną z najważniejszych klas zbiorów uporządkowanych, patrz [9], [23]. Zbiór uporządkowany (P, \leq) jest *kratą*, jeśli dla każdej pary elementów $p, q \in P$ (lub równoważnie, dla każdego podzbioru $Q \subseteq P$) istnieje w P *najmniejsze ograniczenie górne* $\text{lub}(p, q)$ i *największe ograniczenie dolne* $\text{glb}(p, q)$.

Zbiór zobrazowany na Rysunku 2.8(b) nie jest kratą, gdyż nie istnieje $\text{lub}(p, q)$ dla elementów p i q . Ten zbiór odgrywa istotną rolę w charakterzyza-



Rysunek 2.8. Diagramy Hassego zbiorów uporządkowanych: zbioru, który jest kratą (a) i zbioru, który nie jest kratą (b)

cji krat oraz przy ich algorytmicznym rozpoznawaniu. Wprowadźmy jeszcze dodatkowe pojęcie. Zbiór (lub podzbiór) nazywamy *4-cyklem*, jeśli zawiera cztery elementy, między którymi zachodzą tylko następujące relacje: $p_1 < p_3$, $p_1 < p_4$, $p_2 < p_3$, $p_2 < p_4$. Podzbiór będący 4-cyklem ma w zbiorze uporządkowanym P element rozdzielający q , jeśli q spełnia z elementami 4-cyklu następujące relacje: $p_1 < q$, $p_2 < q$, $q < p_3$, $q < p_4$. Następujące Twierdzenie w pełni charakteryzuje zbiory uporządkowane, będące kratami (patrz Podrozdział 2.2 w [2]).

Twierdzenie 2. *Skończony zbiór uporządkowany (P, \leq) , zawierający element najmniejszy i element największy, jest kratą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy 4-cykl zawiera element rozdzielający.*

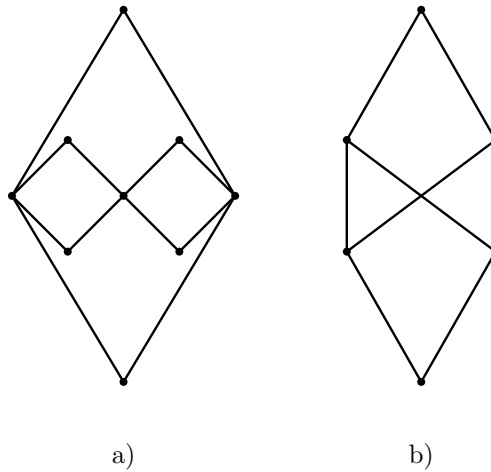
Planarne zbiory uporządkowane

W dalszej części pracy zajmujemy się planarnymi zbiorami uporządkowanymi. Zbiór uporządkowany P jest *planarny*, jeśli ma diagram Hassego, w którego płaskim umieszczeniu żadne dwa odcinki odpowiadające krawędziom diagramu nie mają punktów wspólnych, z wyjątkiem odcinków odpowiadających krawędziom o wspólnych końcach, patrz Rysunek 2.9. Sprawdzenie, czy zbiór uporządkowany jest planarny, jest problemem NP-zupełnym, patrz [20], [28], [37] oraz Punkt 3.5.2.

W miarę prosto można scharakteryzować planarne zbiory uporządkowane, które są kratami.

Twierdzenie 3 (Platt [52]). *Krata jest planarna wtedy i tylko wtedy, gdy jej graf pokrycia uzupełniony o krawędź łączącą element najmniejszy z elementem największym jest grafem planarnym.*

Stąd, dzięki istnieniu efektywnych algorytmów badania planarności grafów, kraty planarne mogą być także łatwo rozpoznawane.



Rysunek 2.9. Diagram Hassego posetu planarnego (a) i nieplanarnego (b)

Bardzo prosty jest warunek na to, aby planarny zbiór uporządkowany był kratą:

Twierdzenie 4. [9] *Skończony, planarny zbiór uporządkowany (P, \leq) jest kratą wtedy i tylko wtedy, gdy P zawiera element najmniejszy 0 i element największy 1 .*

Diagram Hassego (planarnego) zbioru uporządkowanego P jest czasem nazywany *rysunkiem skierowanym do góry* (ang. *upward drawing*) tego zbioru P , patrz Punkt 3.5.2. Dlatego tematyka (planarnych) zbiorów uporządkowanych pojawia się często w kontekście rysowania grafów, patrz np. [12], [14], [16], [20], [28], [30], [31], [32], [38], [47].

3. Umieszczanie grafów i zbiorów uporządkowanych w książce

W tym rozdziale, najpierw w Punkcie 3.1 definiujemy problem umieszczania grafów w książce oraz prezentujemy ważniejsze wyniki otrzymane dla tego problemu w kilku szczególnych przypadkach. Następnie, w Punkcie 3.2 definiujemy umieszczanie zbiorów uporządkowanych w książce i w Punkcie 3.3 przedstawiamy najważniejsze wyniki związane głównie z dwoma przypadkami problemu – umieszczaniem zbiorów uporządkowanych na dwóch stronach i umieszczaniem w książce zbiorów planarnych. W Punkcie 3.4 omawiamy złożoność obliczeniową problemów umieszczania grafów i zbiorów uporządkowanych w książce. Na końcu tego rozdziału zamieszczamy przykłady zastosowań problemów minimalizacji liczby stron dla grafów i zbiorów uporządkowanych.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że *książka* składa się z grzbietu, w interpretacjach graficznych reprezentowanego przez linię prostą, i pewnej liczby stron – pęku półpłaszczyzn ograniczonych przez tę prostą.

3.1. Umieszczanie grafów w książce

Umieszczeniem grafu G w książce nazywamy takie przyporządkowanie, w którym wierzchołki grafu G są umieszczane w różnych miejscach na grzbiecie książki, a krawędzie są umieszczane na stronach książki i żadne dwie krawędzie leżące na tej samej stronie nie przecinają się, patrz Rysunek 3.1. Umieszczanie grafu w książce nazywamy też *wkładaniem grafu do książki*.

Jeden ze sposobów umieszczenia grafu $G = (V, E)$ w książce polega na wykonaniu następujących dwóch kroków:

1. Wybierz permutację π wierzchołków grafu G i w takiej kolejności umieść je w różnych miejscach na grzbiecie książki.
2. Umieść krawędzie grafu G na stronach książki w taki sposób, aby każda krawędź leżała na dokładnie jednej stronie i krawędzie leżące na tej samej stronie nie przecinały się.

Umieszczanie grafu w książce może odbywać się także w procesie, w którym wierzchołki i krawędzie grafu są umieszczane w książce na przemian, jedynie spełniony musi być warunek nieprzecinania się krawędzi umieszczonych na jednej stronie. W tym procesie umieszczania efektem końcowym jest także permutacja wierzchołków na grzbiecie książki. W obu tych podejściach do wkładania grafu do książki celem jest umieszczenie grafu na możliwie najmniejszej liczbie stron. Oznaczmy przez $pn(G, \pi)$ najmniejszą liczbę stron

potrzebnych do umieszczenie grafu G w książce dla ustalonej kolejności π wierzchołków na jej grzbiecie. Liczbę stron $pn(G)$ grafu G definiujemy jako

$$pn(G) = \min\{pn(G, \pi) : \pi \text{ jest permutacją wierzchołków grafu } G\}.$$

Zdefiniować można dwa problemy związane z liczbą stron potrzebnych do umieszczenia grafu w książce. Problemy te mają postać decyzyjną.

Problem liczby stron grafu, wersja I

Dane: graf G , permutacja π jego wierzchołków, liczba naturalna $k \in \mathbb{N}$.

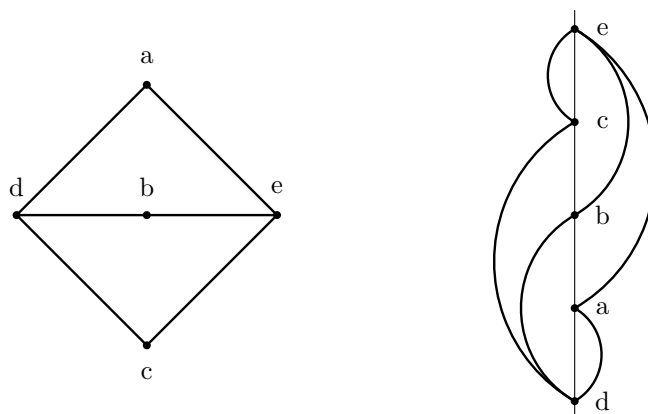
Pytanie: czy $pn(G, \pi) \leq k$?

Problem liczby stron grafu, wersja II

Dane: graf G , liczba naturalna $k \in \mathbb{N}$.

Pytanie: czy $pn(G) \leq k$?

Tych samych nazw tych problemów decyzyjnych używamy również dalej w odniesieniu do odpowiednich problemów optymalizacyjnych, polegających na minimalizacji liczby stron dla ustalonej permutacji wierzchołków (wersja I) i po wszystkich permutacjach (wersja II), odpowiednio.



Rysunek 3.1. Graf i jego umieszczenie na dwóch stronach książki

Umieszczaniem grafów w książce zajmowano się w pracy [50], ale pierwsze istotne rezultaty otrzymali Bernhart i Kainen [7]. Przytaczamy tutaj najważniejsze wyniki, odnoszące się głównie do umieszczania grafów na dwóch stronach i do umieszczania w książce grafów planarnych, gdyż są to przypadki ogólnego problemu, którymi zajmujemy się w zasadniczej części pracy.

Twierdzenie 5. [7] *Zachodzi $pn(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem zewnętrznie planarnym, a $pn(G) \leq 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest podgrafem hamiltonowskiego grafu planarnego.*

Dowód drugiej części Twierdzenia 5 ma bardzo proste i intuicyjne uzasadnienie. Jeśli liczba stron grafu G wynosi 2, to umieścimy graf G na dwóch

stronach – wtedy oczywiście graf G jest planarny. Co więcej, jeśli graf G nie zawiera cyklu Hamiltona, to można uzupełnić G krawędziami tak, by otrzymany nadgraf G' był nadal planarny i zawierał cykl Hamiltona. Wystarczy w tym celu dodać krawędzie między kolejnymi wierzchołkami na grzbiecie książki i połączyć krawędzią pierwszy z ostatnim wierzchołkiem na grzbiecie, jeśli takich krawędzi nie ma w grafie G . Widać, że graf G' zawiera cykl Hamiltona biegnący wzdłuż grzbietu książki. Ze względu na złożoność sprawdzania warunku w drugiej części Twierdzenia 5 (patrz [67]), to kryterium jest rzadko stosowane. Podobny warunek jest formułowany dla digrafów (patrz Lemat 13) i jest wykorzystywany przy umieszczaniu digrafów na dwóch stronach książki, patrz [46], [47] oraz Punkt 6.6.

Bernhart i Kainen przypuszczali w [7], że liczba stron w klasie grafów planarnych jest nieograniczona. Po wielu próbach, ostatecznie Yannakakis [68] udowodnił w 1986 roku, że $pn(G) \leq 4$ dla każdego grafu planarnego G i że tego oszacowania nie można poprawić, tzn. istnieje graf planarny, dla którego liczba stron jest równa 4.

Liczba stron grafu może być zredukowana przez podział jego krawędzi – takie umieszczanie grafów w książce nazywa się *topologicznym*, patrz Punkt 3.5.3. O topologicznym umieszczeniu grafu w książce można powiedzieć, że niektóre jego krawędzie zostały "złamane" na grzbiecie książki – krawędź jest łamana w wierzchołkach, które posłużyły do jej podziału. Podział krawędzi w grafie prowadzi na ogół do zmniejszenia liczby potrzebnych stron. Bernhart i Kainen wykazali:

Twierdzenie 6. [7] *Dla każdego grafu G istnieje graf G' , otrzymany z G przez podział jego krawędzi odpowiednią liczbę razy, dla którego zachodzi*

$$pn(G') \leq 3.$$

Ten wynik został poprawiony dla grafów planarnych:

Twierdzenie 7. [15] *Każdy graf planarny ma topologiczne umieszczenie na dwóch stronach książki, w którym każda jego krawędź jest łamana na grzbiecie książki co najwyżej raz.*

Odpowiednie wyniki dla zbiorów uporządkowanych są zamieszczone w Punkcie 3.5.3.

3.2. Umieszczanie zbiorów uporządkowanych w książce

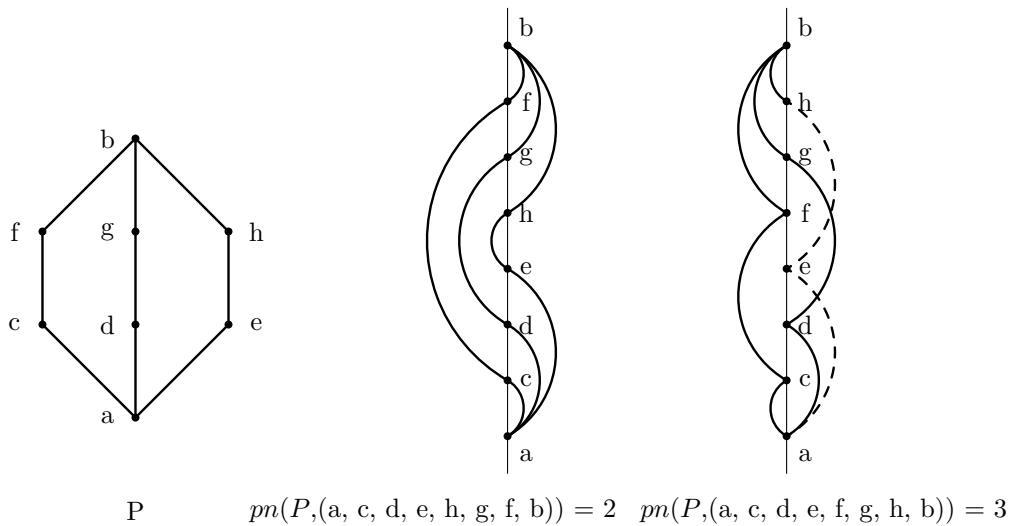
Umieszczenie zbioru uporządkowanego (P, \leq) w książce, czyli włożenie takiego zbioru do książki, definiujemy podobnie jak umieszczenie grafu w książce. Umieszczany jest diagram Hassego $H(P)$ lub równoważnie graf pokrycia $cov(P)$ lub digraf pokrycia $d-cov(P)$ zbioru (P, \leq) , a różnica polega na ograniczeniu permutacji elementów zbioru P umieszczanych na grzbiecie książki do zbioru rozszerzeń liniowych $\mathcal{L}(P)$ zbioru (P, \leq) .

Dalej, mówiąc o umieszczaniu zbioru uporządkowanego w książce, zamiennie piszemy albo o umieszczaniu jego diagramu jako grafu, albo jego grafu lub digrafu pokrycia.

Jeden ze sposobów umieszczenia zbioru uporządkowanego (P, \leq) w książce polega na wykonaniu następujących dwóch kroków:

1. Wybierz rozszerzenie liniowe L zbioru (P, \leq) i w takiej kolejności umieść elementy zbioru P na grzbiecie książki.
2. Umieść krawędzie diagramu $H(P)$ na stronach książki w taki sposób, że każda krawędź leży na dokładnie jednej stronie i krawędzie leżące na tej samej stronie nie przecinają się.

Umieszczenie zbioru uporządkowanego (P, \leq) w książce jednoznacznie określa kierunek krawędzi diagramu $H(P)$, krawędzie zaś mogą być kawałkami krzywych monotonicznych. Na Rysunku 3.2 są pokazane dwa różne umieszczenia tego samego zbioru uporządkowanego w książce, na dwóch i na trzech stronach.



Rysunek 3.2. Diagram posetu P i jego umieszczenie w książce dla dwóch różnych rozszerzeń liniowych

Umieszczanie zbioru uporządkowanego w książce może odbywać się także w procesie, w którym wierzchołki i krawędzie diagramu $H(P)$ są umieszczane w książce na przemian, jedynie spełniony musi być warunek, by kolejność elementów zbioru P na grzbiecie książki tworzyła rozszerzenie liniowe zbioru (P, \leq) i by krawędzie umieszczone na tej samej stronie nie przecinały się. W tym procesie umieszczania, efektem końcowym jest także rozszerzenie liniowe elementów zbioru P na grzbiecie książki.

Większość algorytmów prezentowanych w tej pracy, które służą do umieszczania zbiorów uporządkowanych w książce, ma charakter naprzemiennego procesu umieszczania elementów zbiorów i relacji (krawędzi diagramu).

W obu podejściach do umieszczania zbioru uporządkowanego w książce, podobnie, jak w przypadku grafów, przedmiotem badań jest minimalizacja liczby użytych stron książki. Niech $pn(P, L)$ oznacza najmniejszą liczbę stron potrzebnych do umieszczenia zbioru P w książce przy ustalonej kolejności L elementów zbioru P na grzbiecie książki, gdzie L jest liniowym rozszerzeniem zbioru P . Liczbę stron $pn(P)$ zbioru uporządkowanego (P, \leq) definiujemy jako

$$pn(P) = \min\{pn(P, L) : L \in \mathcal{L}(P)\}.$$

Podobnie jak dla grafów, można zdefiniować dwa problemy decyzyjne, związane z liczbą stron potrzebnych do umieszczenia zbioru uporządkowanego w książce.

Problem liczby stron zbioru uporządkowanego, wersja I

Dane: zbiór uporządkowany (P, \leq) , rozszerzenie liniowe L tego zbioru, liczba naturalna $k \in \mathbb{N}$.

Pytanie: czy $pn(P, L) \leq k$?

Problem liczby stron zbioru uporządkowanego, wersja II

Dane: zbiór uporządkowany (P, \leq) , liczba naturalna $k \in \mathbb{N}$.

Pytanie: czy $pn(P) \leq k$?

Tych samych nazw tych problemów decyzyjnych używamy również dalej w odniesieniu do odpowiednich problemów optymalizacyjnych, polegających na minimalizacji liczby stron dla ustalonego rozszerzenia liniowego (wersja I) i po wszystkich rozszerzeniach liniowych (wersja II), odpowiednio.

Problemem liczby stron w dziedzinie zbiorów uporządkowanych zajmował się jako pierwszy Nowakowski [48], który następnie wraz z Parkerem [49] podał oszacowania liczby stron dla dowolnych i planarnych zbiorów uporządkowanych. Inne oszacowania, związane z zależnością między liczbą stron a liczbą skoków zbioru uporządkowanego, otrzymał w tym samym czasie Sysło [63].

3.3. Przegląd wybranych wyników dotyczących liczby stron zbiorów uporządkowanych

W tym podrozdziale zamieszczamy ważniejsze wyniki związane z umieszczeniem w książce zbiorów uporządkowanych, odnoszące się głównie do dwóch interesujących nas w tej pracy przypadków – zbiorów, które można umieścić na dwóch stronach i planarnych zbiorów uporządkowanych.

Znana jest pełna charakteryzacja posetów o liczbie stron równej 1 ([49], [63]):

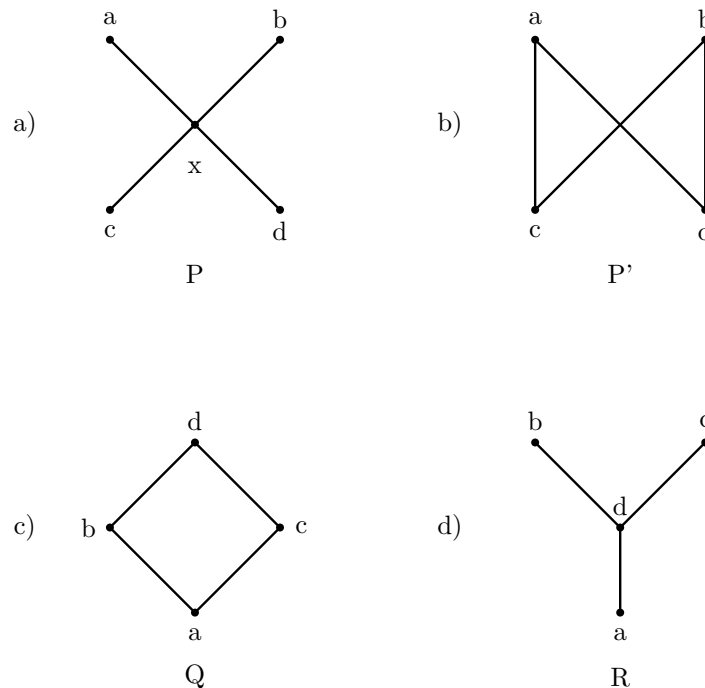
Twierdzenie 8. $pn(P) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy graf $cov(P)$ nie zawiera cykli, czyli gdy $cov(P)$ jest lasem.

Dalej, zbiór uporządkowany P , dla którego $cov(P)$ jest lasem, nazywamy drzewiastym. Bez utraty ogólności będziemy zakładać, że $cov(P)$ jest grafem

spójnym. W Rozdziale 4 opisujemy rekurencyjny algorytm umieszczania na jednej stronie książki dowolnego zbioru uporządkowanego P , którego graf pokrycia $cov(P)$ jest drzewem. Ten algorytm stanowi ramy dla algorytmów przedstawionych w dalszej części pracy, służących do umieszczania w książce zbiorów uporządkowanych o strukturze drzewiastej. Warto zauważyć, że algorytm przedstawiony w Rozdziale 4 polega na rekurencyjnym definiowaniu rozszerzenia liniowego, dla którego pokazujemy, że żadne dwie krawędzie diagramu $H(P)$ nie przecinają się na jednej stronie, a zatem jest to optymalne rozszerzenie liniowe.

Nie jest znana pełna charakteryzacja zbiorów uporządkowanych, które można umieścić na dwóch stronach książki. Jest oczywiste, że takie zbiory muszą być planarne. Znane są jednak zbiory planarne, których nie można umieścić na dwóch stronach, patrz [49] i [44]. W Punkcie 3.5 piszemy szerzej o umieszczaniu w książce planarnych zbiorów uporządkowanych. Jednym z kierunków badań w tej pracy jest identyfikacja rodzin planarnych zbiorów uporządkowanych, które mogą być umieszczone na dwóch stronach.

O trudności problemu liczby stron dla zbiorów uporządkowanych mogą świadczyć następujące dwie obserwacje.



Rysunek 3.3. Złe zachowanie liczby stron zbiorów uporządkowanych. Diagramy Hassego: zbioru uporządkowanego P , $pn(P) = 1$ (a) i jego podzbioru P' , $pn(P') = 2$ (b) oraz dwóch różnych posetów Q (c) i R (d) o izomorficznych grafach porównywalności i różnej liczbie stron: $pn(Q) = 2$, $pn(R) = 1$

Obserwacja 1. Liczba stron zbioru uporządkowanego nie jest monotoniczna, tzn. jeśli P' jest podzbiorem uporządkowanym zbioru uporządkowanego P , to nie musi zachodzić nierówność $pn(P') \leq pn(P)$, patrz Rysunki 3.3(a-b).

Obserwacja 2. Liczba stron nie jest niezmiennikiem porównywalności (patrz [25]), tzn. dwa zbiory uporządkowane o izomorficznych grafach porównywalności mogą mieć różne liczby stron, patrz Rysunki 3.3(c-d). Niezmiennikami porównywalności są na przykład liczba wszystkich rozszerzeń liniowych i liczba skoków zbioru uporządkowanego.

Podobnie jak grafy planarne, grafy pokrycia planarnych zbiorów uporządkowanych mają również stosunkowo mało krawędzi. Nawakowski i Parker [49] udowodnili następujące twierdzenie:

Twierdzenie 9. [49] Jeśli (P, \leq) jest planarnym zbiorem uporządkowanym, to

$$m(P) \leq 2(n(P) - 1) - ht(P),$$

gdzie $n(P)$ oznacza liczbę wierzchołków w grafie $cov(P)$, $m(P)$ oznacza liczbę krawędzi w grafie $cov(P)$, a $ht(P)$ oznacza wysokość zbioru uporządkowanego (P, \leq) .

Korzystając z tego oszacowania wyprowadzono następujące oszacowanie górne dla liczby stron zbioru uporządkowanego.

Twierdzenie 10. [49] Jeśli $pn(P) > 1$, to

$$pn(P) \leq \frac{m(P)}{n(P) - 1 - ht(P)/2},$$

jeśli $ht(P)$ jest liczbą parzystą;

$$pn(P) \leq \frac{m(P) - 2n(P) + 2 + ht(P)}{n(P) - 1 - (ht(P) - 1)/2} + 2,$$

jeśli $ht(P)$ jest liczbą nieparzystą.

W pracy [49] podano również oszacowania górne dla liczby stron specjalnych zbiorów uporządkowanych, m.in. wykazano konstrukcyjnie, że produkt k łańcuchów może być umieszczony na $2k - 2$ stronach.

Syśło [63] badał relacje między liczbą stron i liczbą skoków zbioru uporządkowanego (P, \leq) i wyprowadził następujące dolne oszacowanie dla liczby stron zbioru uporządkowanego. Zacytujemy dowód tego twierdzenia, jako ilustrację sposobu umieszczania krawędzi na jednej stronie – mogą się tam bowiem znaleźć krawędzie, które nie tworzą cyklu, a więc są krawędziami drzewa.

Twierdzenie 11. [63] Dla zbioru uporządkowanego (P, \leq) spełniona jest następująca nierówność:

$$\left\lceil \frac{m(P) - n(P) + 1}{n(P) - 1 - b(P)} \right\rceil + 1 \leq pn(P),$$

gdzie $b(P)$ jest liczbą progów zbioru uporządkowanego (P, \leq) .

Dowód. Rozważmy umieszczenie zbioru uporządkowanego (P, \leq) w książce z elementami tego zbioru umieszczonymi na grzbiecie książki zgodnie z rozszerzeniem liniowym L , które ma następujące przedstawienie w postaci sumy łańcuchów $L = C_0 + C_1 + \dots + C_k$. Zatem liczba skoków w rozszerzeniu liniowym L zbioru P wynosi $s(P, L) = k$. Krawędź diagramu $H(P)$, która łączy dwa kolejne elementy w łańcuchu rozszerzenia liniowego L , nazywamy *krawędzią grzbietową*. Krawędź grzbietowa może być umieszczona na dowolnej stronie książki, w której umieszczono zbiór P . Zauważmy, że dla dwóch dowolnych łańcuchów C_i i C_j rozszerzenia liniowego L , na żadnej stronie nie leży więcej niż jedna krawędź diagramu $H(P)$, która łączy elementy tych łańcuchów. Gdyby tak było, to niech $e_1 = (u, v)$ i $e_2 = (x, y)$ będą krawędziami diagramu $H(P)$ leżącymi na tej samej stronie i takimi, że u i x należą do łańcucha C_i , a v i y należą do łańcucha C_j . Niech $u < x$. Jeśli $y < v$, to e_1 odpowiada tranzytywnej relacji, a jeśli $v < y$, to krawędzie e_1 i e_2 przecinają się na jednej stronie. Do podobnych sprzeczności dochodzimy, gdy przyjmiemy, że $x < u$. W ogólności, krawędzie umieszczone na jednej stronie wraz z krawędziami grzbietowymi nie mogą tworzyć cyklu. A zatem, jeśli rozszerzenie liniowe L składa się z $k + 1$ łańcuchów, to na jednej stronie można umieścić co najwyżej k krawędzi, które nie są krawędziami grzbietowymi. Liczba krawędzi grzbietowych jest równa $n(P) - 1 - k$, stąd otrzymujemy nierówność

$$\left\lceil \frac{m(P) - (n(P) - 1 - k)}{k} \right\rceil \leq pn(P, L).$$

Oszacowanie z twierdzenia otrzymujemy biorąc za L rozszerzenie liniowe zbioru uporządkowanego (P, \leq) zawierające największą liczbę skoków k . \square

Zauważmy, że wielkość występująca w liczniku po lewej stronie oszacowania w Twierdzeniu 11, jest *liczbą cyklomatyczną* grafu $cov(P)$ (zakładamy, że ten graf jest spójny), która oznacza liczbę niezależnych cykli w tym grafie (nad zbiorem krawędzi z różnicą symetryczną). Stąd wynika ponownie, że na jednej stronie można umieścić zbiór P , którego graf $cov(P)$ nie zawiera cykli, a więc jest drzewem, a ogólniej – lasem (patrz Twierdzenie 8).

Dla zbiorów uporządkowanych, które można umieścić na dwóch stronach mamy oczywisty wniosek:

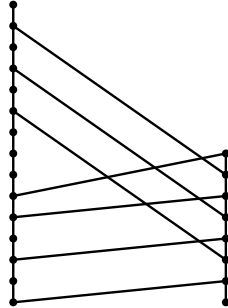
Wniosek 1. *Jeśli $pn(P) = 2$ dla zbioru uporządkowanego (P, \leq) , to spełniona jest następująca nierówność*

$$m(P) \leq 2(n(P) - 1).$$

W pracy [63] podano przykład zbioru uporządkowanego, dla którego oszacowanie w Twierdzeniu 11 może być ostrą nierównością.

Le Tu wykazał w [45], że zbiór uporządkowany z liczbą skoków 1 może być umieszczony na dwóch stronach książki. Natomiast w pracy [63] podano ciekawy przykład rodziny zbiorów uporządkowanych (patrz Rysunek 3.4), które mają liczbę skoków równą 2, ale nie istnieje oszacowanie liczby ich stron. Jak zauważono w [29], zbiory na Rysunku 3.4 są nieplanarne, ale ich

graf pokrycia jest planarny i można te zbiory umieścić bez przecięć na sferze, a zatem nie ma oszacowania górnego na liczbę stron zbiorów sferycznych. W pracy [4] uogólniono te obserwacje na sferyczne kraty.



Rysunek 3.4. Poset z rodziny nieplanarnych zbiorów uporządkowanych, które mają liczbę skoków 2, ale nie mają ograniczenia na liczbę potrzebnych stron do umieszczenia w książce. Posety te można umieścić bez przecięć na sferze.

W pracy [63] obliczono również liczbę stron dla wybranych klas zbiorów, np. dla pełnych zbiorów dwu- i trzydzielnych. Wykorzystano w tym celu oszacowania, które są przedmiotem dwóch następných, bardzo intuicyjnych lematów.

Najpierw zauważmy, że dla każdego zbioru uporządkowanego (P, \leq) na jednej stronie książki można umieścić wszystkie krawędzie incydentne z danym elementem diagramu $H(P)$. Stąd otrzymujemy:

Lemat 1. [63] Dla zbioru uporządkowanego (P, \leq) spełniona jest nierówność:

$$pn(P) \leq c(P),$$

gdzie $c(P)$ jest mocą najmniej licznego pokrycia wierzchołkowego grafu $cov(P)$.

Dla zbioru uporządkowanego (P, \leq) i jego rozszerzenia liniowego L , podzbiór krawędzi $M = \{p_i, q_i\}, i = 1, 2, \dots, k$ diagramu $H(P)$ nazywamy *naprzemiennym skojarzeniem*, jeśli w rozszerzeniu liniowym L mamy $p_1 < p_2 < \dots < p_k < q_1 < q_2 < \dots < q_k$. Oczywisty jest następujący fakt.

Lemat 2. [49], [63] Jeśli w rozszerzeniu liniowym L zbioru uporządkowanego (P, \leq) istnieje naprzemiennie skojarzenie w diagramie $H(P)$ o mocy k , to $k \leq pn(P, L)$.

Niech P_{kl} oznacza pełny dwudzielny (tj. o wysokości 1) zbiór uporządkowany zawierający k elementów minimalnych i l elementów maksymalnych (pełny – oznacza, że $p < q$ dla każdej pary elementów, minimalnego p i maksymalnego q). Podobnie definiujemy pełne trójdzielne zbiory uporządkowane P_{jkl} . Z Lematów 1 i 2 otrzymujemy

Twierdzenie 12. [63] Zachodzi równość $pn(P_{kl}) = \min \{k, l\}$.

Twierdzenie 13. [63] Zachodzi równość $pn(P_{jkl}) = \min \{j + l, k\}$.

Praca doktorska Alzohairi'ego [2] jest najobszerniejszą publikacją na temat umieszczania zbiorów uporządkowanych w książce. Głównym wynikiem w tej pracy jest twierdzenie, że liczba stron szeregowo-równoległego planarnego zbioru uporządkowanego jest równa co najwyżej 2. Podano również odpowiedni algorytm o złożoności $O(n^3)$, gdzie n jest liczbą elementów w zbiorze. W dowodzie w istotny sposób korzysta się z pojęcia uzupełnienia zbioru uporządkowanego do kraty, dowodząc najpierw zasadniczego wyniku dla szeregowo-równoległych krat planarnych. Główny wynik pracy został opublikowany w [3]. W pracy [14] podano ulepszony, liniowy algorytm umieszczania szeregowo-równoległego planarnego zbioru uporządkowanego na dwóch stronach.

Problem liczby stron był także rozważany w pewnych podklasach planarnych zbiorów uporządkowanych. Piszemy o tym szczegółowo w Punkcie 6.6.1.

W pracy [1] podano efektywny algorytm umieszczania dwudzielnych przedziałowych zbiorów uporządkowanych na najmniejszej możliwej liczbie stron oraz zamieszczono oszacowania liczby stron dla dowolnych zbiorów dwudzielnych i dla pełnych zbiorów wielodzielnych. Zbiór uporządkowany (P, \leq) jest *przedziałowy*, jeśli elementom P można przyporządkować na prostej przedziały $\{I_p\}$ takie, że $p \leq q$ wtedy i tylko wtedy, gdy przedział I_q leży całkowicie na prawo od przedziału I_p . Otwarty jest problem liczby stron dla dowolnych zbiorów przedziałowych.

3.4. Złożoność obliczeniowa

W tym punkcie przytaczamy wyniki dotyczące złożoności obliczeniowej problemów związanych z wkładaniem grafów i zbiorów uporządkowanych do książki. Wszystkie te problemy są trudne nawet przy ustalonym rozszerzeniu liniowym, a w przypadku zbiorów uporządkowanych – nawet w klasie zbiorów dwudzielnych.

3.4.1. Złożoność obliczeniowa problemu liczby stron grafu

Rozważmy problem liczby stron grafu w wersji I, czyli dany jest graf G i permutacja jego wierzchołków π . Umieścimy wierzchołki grafu G na okręgu w kolejności π , wtedy krawędzie grafu G są cięciwami tego okręgu i dwie krawędzie grafu, którym odpowiadają przecinające się (poza wierzchołkami na okręgu) cięciwy muszą być umieszczone na różnych stronach przy włożeniu grafu G do książki dla kolejności wierzchołków na grzbiecie określonej przez permutację π . Zdefiniujmy teraz graf przecięć $G^{CH}(G, \pi)$, w którym zbiór wierzchołków odpowiada zbiorowi krawędzi grafu G , czyli $V(G^{CH}(G, \pi)) = E(G)$ i dwa takie wierzchołki są połączone krawędzią w grafie $G^{CH}(G, \pi)$, jeśli odpowiadające im cięciwy przecinają się. Graf $G^{CH}(G, \pi)$ jest więc grafem przecięć cięciw okręgu – nazywamy go *grafem cięciw*, [22]. Podobnie, dla danego grafu cięciw F , z odpowiadającego mu modelu cięciw

można utworzyć graf G z permutacją jego wierzchołków daną na okręgu π taki, że liczba chromatyczna grafu F jest równa liczbie stron grafu G przy permutacji jego wierzchołków π . Niestety, problem kolorowania grafów cięciw jest NP-zupełny [18], [22], a zatem problem liczby stron grafu G w wersji I jest również NP-zupełny.

Dla problemu liczby stron grafu w wersji II, sprawdzenie, czy graf można umieścić na jednej stronie, na podstawie Twierdzenia 5 może być wykonane w czasie liniowym, korzystając z algorytmu badania zewnętrznej planarności grafu [58]. Natomiast zbadanie, czy graf można umieścić na dwóch stronach jest problemem NP-zupełnym, gdyż, jak wykazał Wigderson [67], sprawdzenie, czy dany graf jest podgrafem hamiltonowskiego grafu planarnego (patrz Twierdzenie 5) jest problemem NP-zupełnym.

3.4.2. Złożoność obliczeniowa problemu liczby stron zbioru uporządkowanego

Dla zbiorów uporządkowanych rozumiemy podobnie, jak w poprzednim punkcie i otrzymujemy:

Lemat 3. *Dla zbioru uporządkowanego (P, \leq) i jego rozszerzenia liniowego L , liczba stron $pn(P, L)$ jest równa liczbie chromatycznej grafu cięciw $G^{CH}(cov(P), L)$.*

W dalszej części wykorzystamy fakt, że graf cięciw jest grafem przecinania się przedziałów (ang. *overlap graph*) [22], patrz Rysunek 3.5. Graf G jest *grafem przecinania się przedziałów*, jeśli wierzchołkom grafu można przyporządkować przedziały na prostej w taki sposób, że dwa wierzchołki u i v tworzą krawędź w G wtedy i tylko wtedy, gdy dla odpowiadających im przedziałów I_u i I_v mamy $I_u \cap I_v \neq \emptyset$, ale ani $I_u \subseteq I_v$ ani $I_v \subseteq I_u$.

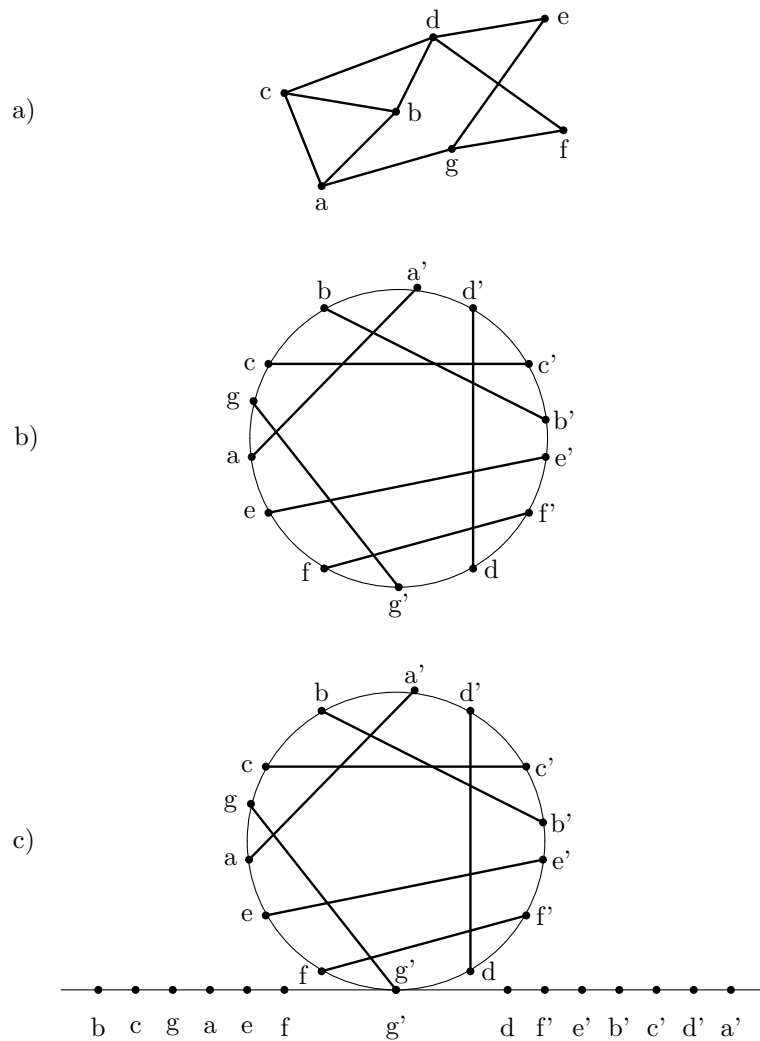
W pracy [2] (Punkt 3.3) wykazano NP-zupełność problemu liczby stron zbioru uporządkowanego.

Twierdzenie 14. *Problem liczby stron zbioru uporządkowanego w wersji I jest NP-zupełny nawet w rodzinie zbiorów dwudzielnych, czyli zbiorów o wysokości 1.*

Dowód. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem cięciw, jest więc także grafem przecinających się przedziałów $\{I_v : v \in V\}$. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że te przedziały są domknięte, a ich końce nie pokrywają się. Zbudujemy dla grafu G dwudzielny zbiór uporządkowany (P, \leq) i jego rozszerzenie liniowe L takie, że graf cięciw $G^{CH}(cov(P), L)$ jest izomorficzny z G . Za zbiór P przyjmujemy zbiór końców przedziałów $\{I_v : v \in V\}$ uporządkowanych $inf(I_v) \leq sup(I_v)$ dla każdego przedziału I_v , $v \in V$. Zaś za rozszerzenie liniowe L zbioru (P, \leq) przyjmujemy porządek, w jakim końce przedziałów występują na osi.

Na przykład dla grafu cięciw z Rysunku 3.5(a), mamy:

$$\begin{aligned} P &= \{a, a', b, b', c, c', d, d', e, e', f, f', g, g'\}, \\ \leq &= \{a \leq a', b \leq b', c \leq c', d \leq d', e \leq e', f \leq f', g \leq g'\}, \\ L &= (b, c, g, a, e, f, g', d, f', e', b', c', d', a'). \end{aligned}$$



Rysunek 3.5. Przykładowy graf cięć (a) i jego reprezentacje: za pomocą cięć na okręgu (b), za pomocą przecinających się przedziałów (c)

Łatwo sprawdzić, że dla tak określonego zbioru P i porządku między jego elementami oraz rozszerzenia liniowego L , graf cięć $G^{CH}(cov(P), L)$ jest izomorficzny z G .

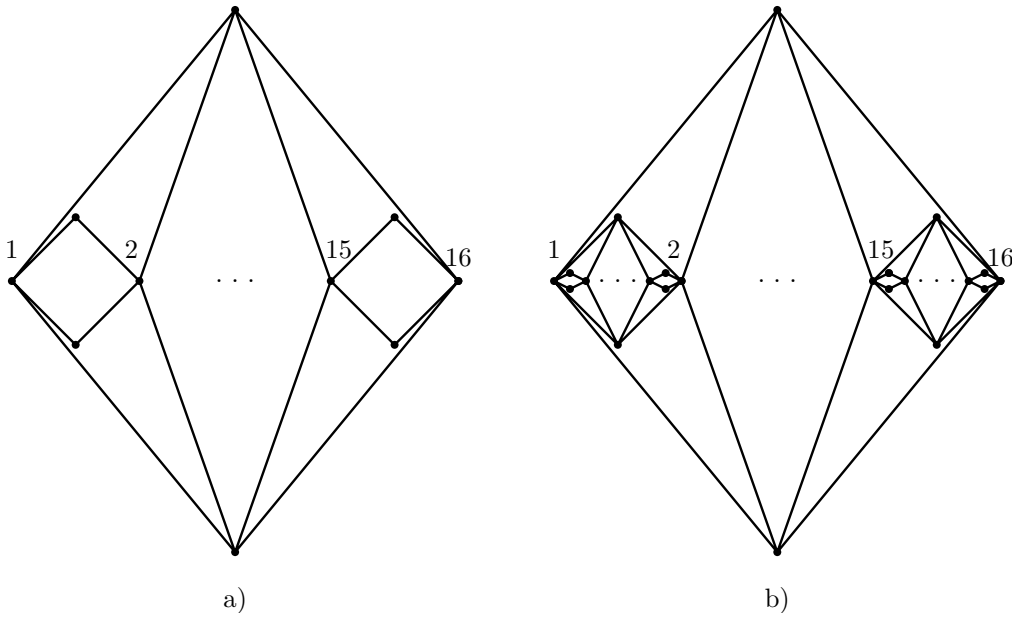
□

3.5. Umieszczanie w książce planarnych zbiorów uporządkowanych

W przeciwieństwie do grafów, które w przypadku, gdy są planarne, można umieszczać w książce na 4 stronach, dla planarnych zbiorów uporządkowanych nie jest znane oszacowanie liczby potrzebnych stron.

3.5.1. Liczba stron posetów planarnych

W roku 1987 Nowakowski sformułował przypuszczenie (patrz [49]), że liczba stron dla planarnych zbiorów uporządkowanych może być nieograniczona. W 1989 roku Jerzy Czyżowicz [11] opisał nieskończoną rodzinę zbiorów planarnych i postawił hipotezę, że liczba stron dla tej rodziny zbiorów jest nieograniczona. Na Rysunku 3.6 a) jest przedstawiony zbiór Q , który jest jednocześnie Q^0 , pierwszym elementem tej rodziny. Zbiór Q^1 jest pokazany na Rysunku 3.6 b), a zbiór Q^i otrzymujemy z Q^{i-1} zastępując w nim 15^i "diamentów" zbiorem Q .



Rysunek 3.6. Posety Czyżowicza $Q = Q^0$ (a) i Q^1 (b)

Le Tu [44] udowodnił, że zbiory Czyżowicza można jednak umieścić na co najwyżej 6 stronach książki, a dokładniej, że $pn(Q) = 4$ i $pn(Q^i) \leq 6$ dla $i > 0$. Zbiór Q^0 jest najmniejszym znanym planarnym zbiorem uporządkowanym, który ma liczbę stron równą 4. Nie jest znany planarny zbiór uporządkowany, którego nie można umieścić na 4 stronach książki.

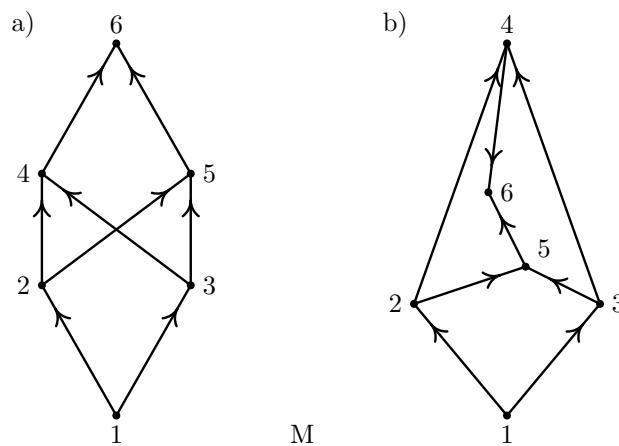
W pracy [2] (Punkt 4.6) ponownie postawiono przypuszczenie o braku ograniczenia na liczbę stron dla planarnych zbiorów uporządkowanych definiując ciąg zbiorów P_n , w którym n -ty zbiór wymaga przynajmniej n stron na włożenie do książki. Zbiór P_2 jest diamentem, a kolejny zbiór w tym ciągu składa się z dwóch kopii zbioru poprzedniego w ciągu połączonych w jednym z ich elementów, dwóch dodatkowych elementów (najmniejszego i największego) oraz pewnych dodatkowych porównywalności.

Problem 1. Czy zbiory uporządkowane, zdefiniowane w pracy [2] (Punkt 4.6) można umieścić w książce o ograniczonej liczbie stron?

3.5.2. Rysowanie do góry digrafów na płaszczyźnie

Umieszczanie planarnych zbiorów uporządkowanych w książce jest blisko związane z *rysowaniem do góry* (ang. *upward*) digrafów acyklicznych. Ten problem jest intensywnie badany w kręgach osób zajmujących się geometrią obliczeniową i rysowaniem grafów (ang. *graph drawing*).

Niech $G = (V, A)$ będzie dowolnym digrafem acyklicznym. Szczególnym przypadkiem takiego digrafu jest digraf pokrycia zbioru uporządkowanego. Digraf G jest *planarny*, jeśli może być umieszczony (narysowany) na płaszczyźnie bez przecinania się łuków poza końcami łuków sąsiednich¹, a takie jego umieszczenie na płaszczyźnie nazywamy *digrafem płaskim*. Umieszczenie digrafu na płaszczyźnie jest *skierowane do góry* (ang. *upward*), jeśli każdy jego łuk jest monotonicznie niemalejący względem współrzędnej y . Digraf jest *do góry planarny*, jeśli ma płaskie przedstawienie, które jednocześnie jest do góry – takie jego przedstawienie nazywamy *do góry płaskim*. Digraf, który jest planarny i może być narysowany do góry nie musi być do góry planarny, patrz digraf M na Rysunku 3.7.



Rysunek 3.7. Dwa umieszczenia na płaszczyźnie digrafu, który ma umieszczenie do góry (a) i jest planarny, ale nie jest do góry planarny (b).

Digraf M na Rysunku 3.7 jest diagramem zbioru uporządkowanego, a zatem do góry planarny digraf nie może zawierać poddigrafu homeomorficznego z digrafem M . Stąd otrzymujemy znany fakt, że zbiór uporządkowany generowany przez do góry planarny digraf z jednym minimum i jednym maksimum jest kratą [9].

Garg i Tamassia [19] (patrz także [20]) udowodnili, że problem badania do góry planarności digrafów jest NP-zupełny. Stąd wynika, że badanie planarności zbiorów uporządkowanych jest również problemem NP-zupełnym. Wynika to z faktu, że digraf D jest do góry planarny, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór uporządkowany P , którego digraf pokrycia D' powstaje z digrafu D przez umieszczenie wierzchołka na każdym łuku przechodnim, jest planarny.

¹ Bez utraty ogólności można przyjąć, że obrazami łuków są odcinki linii prostych.

W podobny sposób, jeśli D jest digrafem pokrycia zbioru uporządkowanego P , umieszczając dodatkowo wierzchołek na każdej przekątnej N -ki, czyli biorąc podział digrafu D (patrz Punkt 6.4.1) otrzymujemy:

Twierdzenie 15. *Problem badania planarności N -wolnych zbiorów uporządkowanych jest NP-zupełny.*

Inny dowód NP-zupełności badania planarności zbiorów uporządkowanych został podany w pracy [28]. Ten problem staje się łatwiejszy, gdy zbiór uporządkowany P jest trójspójny, tzn. gdy jego digraf pokrycia po usunięciu orientacji łuków jest trójspójny. W takim przypadku, jeśli P jest planarny, to digraf $d\text{-cov}(P)$ ma jednoznaczne umieszczenie na płaszczyźnie, czyli jakiegokolwiek umieszczenie digrafu $d\text{-cov}(P)$ ma taki sam zbiór ścian – takie umieszczenia nazywamy *podobnymi*. W takim przypadku, problem badania, czy P jest do góry planarny sprowadza się do badania, czy płaski digraph $d\text{-cov}(P)$ ma podobne umieszczenie na płaszczyźnie, które jest do góry planarne. W pracy [6] podano wielomianowy algorytm, który służy do badania, czy płaski digraf ma podobne umieszczenie do góry, stąd wynika, że badanie do góry planarności trójspójnego zbioru uporządkowanego może być również wykonane w czasie wielomianowym, patrz również [37].

Z dotychczasowych rozważań można wywnioskować, że problem liczby stron w rodzinie planarnych zbiorów uporządkowanych może być trudny w pełnej ogólności, gdyż jest mało prawdopodobne, że istnieje pełna charakteryzacja (jako warunek wtedy i tylko wtedy) planarnych zbiorów uporządkowanych, której odpowiadałby wielomianowy algorytm sprawdzania planarności. W szczególności, może nie istnieć efektywna charakteryzacja planarnych zbiorów uporządkowanych, wymagających dwóch stron przy wkładaniu do książki. Uzasadnia to podejścia, w których klasa planarnych zbiorów uporządkowanych jest ograniczana do podklasy zbiorów szeregowo-równoległych w [5] i N -wolnych, jak w Rozdziałach 6 i 7 tej pracy.

3.5.3. Topologiczne umieszczanie posetów planarnych w książce

Wielu autorów, zajmujących się umieszczaniem grafów i zbiorów uporządkowanych w książce rozważa również *topologiczne umieszczanie*, w którym krawędzie (łuki) mogą być "łamane" na grzbiecie książki – pierwszy rezultat dla takiego umieszczania przedstawili Bernhart i Kainen w [7], patrz Twierdzenie 6. Jednym z takich rezultatów dla zbiorów uporządkowanych jest Twierdzenie 19.

W pracy [21] udowodniono odpowiednik Twierdzenia 7 dla digrafów:

Twierdzenie 16. [21] *Każdy digraf do góry planarny ma topologiczne umieszczenie w książce na dwóch stronach, w którym każdy jego łuk jest łamany na grzbiecie książki co najwyżej raz.*

Dowód tego twierdzenia podany w pracy [21] jest jednocześnie wielomianowym algorytmem, będącym realizacją konkluzji tego twierdzenia.

3.6. Zastosowania

Problem liczby stron grafu pojawia się w wielu sytuacjach praktycznych, takich jak: sortowanie permutacji za pomocą równoległych stosów, projektowanie odpornych na uszkodzenia układów VLSI, zwarte kodowanie macierzy, czy rysowanie (umieszczanie) grafów [16].

Na początku lat 70. XX wieku zainteresowano się następującym problemem [17], [66]: dana jest permutacja π liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ i należy ją posortować w naturalny porządek mając do dyspozycji pewną liczbę stosów. Można wykonywać dwie następujące operacje: pobrać element z początku kolejki, którą tworzy permutacja π i położyć go na jeden ze stosów, lub przenieść jeden z elementów z góry stosu na koniec kolejki z wynikiem. Określmy teraz graf $H(\pi)$, który ma zbiór wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$ i para $\{j, k\}$ tworzy w nim krawędź, jeśli istnieje i takie, że $i < j < k$ i $\pi_j^{-1} < \pi_k^{-1} < \pi_i^{-1}$. Okazuje się [17], że wśród grafów spójnych, klasa grafów konstruowanych w taki sposób jest dokładnie klasą grafów cięciw okręgu. Ponadto, permutację π można posortować w naturalny porządek za pomocą k równoległych stosów wtedy i tylko wtedy, gdy graf $H(\pi)$ można pomalować k kolorami, a to, jak wiemy z Punktu 3.4.2, jest równoważne umieszczeniu odpowiedniego zbioru uporządkowanego na k stronach.

Zainteresowanie problemem umieszczania grafów w książce wyrosło również na polu projektowania układów VLSI, a dokładniej przy projektowaniu rozmieszczenia wielopoziomowego układu płytek drukowanych w macierzy procesorów odpornej na uszkodzenia [56], [10].

Innym zastosowaniem jest planowanie obliczeń numerycznych z użyciem jednego procesora [49]. Wierzchołek w diagramie Hassego może odpowiadać etapowi obliczeń, a łuk prowadzący z niego do wyżej położonego wierzchołka, może wskazywać na dane potrzebne do wykonania tych obliczeń. Wtedy każda strona książki reprezentuje stos przechowujący częściowe wyniki, a łuki wyznaczają kolejność, w jakiej są one na tym stosie umieszczane i usuwane z niego.

4. Umieszczania drzewiastych zbiorów uporządkowanych w książce

Jedną z pierwszych obserwacji, poczynionych przy rozważaniu umieszczenia zbiorów uporządkowanych w książce był fakt, że zbiór, którego graf pokrycia jest drzewem, można umieścić na jednej stronie. Podano wiele formalnych uzasadnień tego faktu, patrz Twierdzenie 8. Z tych dowodów nie wynika bezpośrednio algorytm umieszczania zbiorów drzewiastych na jednej stronie, chociaż taki algorytm jest dość oczywisty.

Z drugiej strony, dość powszechnie stosowanym podejściem przy rozwiązywaniu wielu problemów na grafach, zwłaszcza tych najtrudniejszych, jest ograniczenie uwagi do drzew, a następnie do grafów, które przejawiają w pewnym sensie strukturę drzewiastą. Takie podejście jest stosowane również w następujących rozdziałach tej pracy.

Z tych powodów, w tym rozdziale przedstawiamy prosty algorytm umieszczenia drzewiastych zbiorów uporządkowanych na jednej stronie książki. W algorytmie wykorzystuje się własność umieszczenia drzewiastego zbioru na jednej stronie, opisaną w Twierdzeniu 17. Dowód tej własności jest indukcyjny, stąd algorytm ma charakter rekurencyjny.

Niech (P, \leq) będzie zbiorem uporządkowanym, którego diagram $H(P)$ jest drzewem. Oznaczmy przez $N_{in}(v)$ i przez $N_{out}(v)$ dla $v \in P$ odpowiednio podzbiory elementów zbioru P , które są pokryte przez element v i które pokrywają element v . Dla ustalonego włożenia zbioru uporządkowanego (P, \leq) do książki z elementami zbioru P umieszczonymi na grzbiecie książki zgodnie z rozszerzeniem liniowym L , element w jest *dostępny na wybranej stronie*, jeśli na tej stronie nie została umieszczona krawędź $\{u, v\}$ diagramu $H(P)$, dla której $u < w$ i $w < v$ w rozszerzeniu liniowym L .

Twierdzenie 17. *Niech (P, \leq) będzie zbiorem uporządkowanym, którego diagram $H(P)$ jest drzewem. Dla dowolnego elementu $w \in P$ istnieje umieszczenie zbioru (P, \leq) na jednej stronie, w którym element w jest dostępny.*

Dowód. Dowód jest indukcyjny ze względu na liczbę elementów zbioru P , którym w grafie $cov(P)$ odpowiadają wierzchołki o stopniu większym niż jeden. Jeśli graf $cov(P)$ zawiera jeden taki wierzchołek, powiedzmy w , to pozostałe elementy zbioru P należą do zbiorów $N_{in}(w)$ i $N_{out}(w)$. W takim przypadku elementy zbioru $N_{in}(w)$ umieszczamy na grzbiecie książki poniżej elementu w , a elementy zbioru $N_{out}(w)$ powyżej elementu w . Przy takim umieszczeniu zbioru (P, \leq) w książce element w pozostaje dostępny.

Założmy teraz, że graf $cov(P)$ dla zbioru (P, \leq) zawiera więcej niż jeden wierzchołek o stopniu większym od 1, niech w będzie takim wierzchołkiem.

Oznaczmy przez $\{G_i\}$ podgrafy grafu otrzymanego z $cov(P)$ przez usunięcie wierzchołka w – te podgrafy nie mają wspólnych elementów. Wśród nich są podgrafy zawierające wierzchołki odpowiadające elementom zbioru $N_{in}(w)$ i podgrafy odpowiadające elementom zbioru $N_{out}(w)$. Z założenia indukcyjnego wynika, że podgrafy $\{G_i\}$ można umieścić na jednej stronie w taki sposób, by wszystkie elementy ze zbiorów $N_{in}(w)$ i $N_{out}(w)$ były dostępne. Umieszczenie $cov(P)$ na jednej stronie otrzymujemy teraz umieszczając: element w w dowolnym miejscu na grzbiecie książki, wszystkie podgrafy $\{G_i\}$ zawierające wierzchołki odpowiadające elementom w zbiorze $N_{in}(w)$ poniżej elementu w , wszystkie podgrafy $\{G_i\}$ zawierające wierzchołki odpowiadające elementom w zbiorze $N_{out}(w)$ powyżej elementu w i dokładając na tej samej stronie krawędzie łączące element w z elementami w zbiorach $N_{in}(w)$ i $N_{out}(w)$. Ponieważ podgrafy $\{G_i\}$ są rozłączne i ich wierzchołki odpowiadające elementom w zbiorach $N_{in}(w)$ i $N_{out}(w)$ są dostępne, żadne dwie krawędzie grafu $cov(P)$ nie przecinają się na jednej stronie.

Zauważmy, że w kroku indukcyjnym, za element w może być wybrany dowolny element zbioru P . □

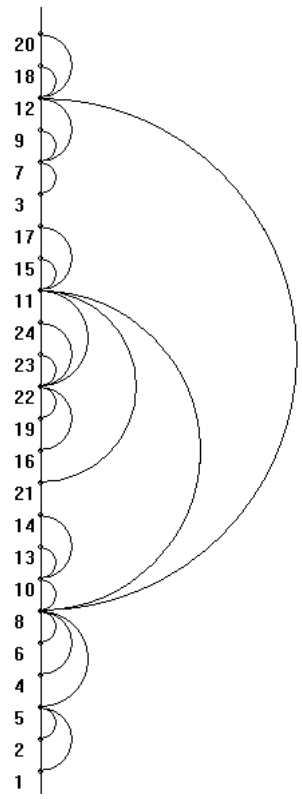
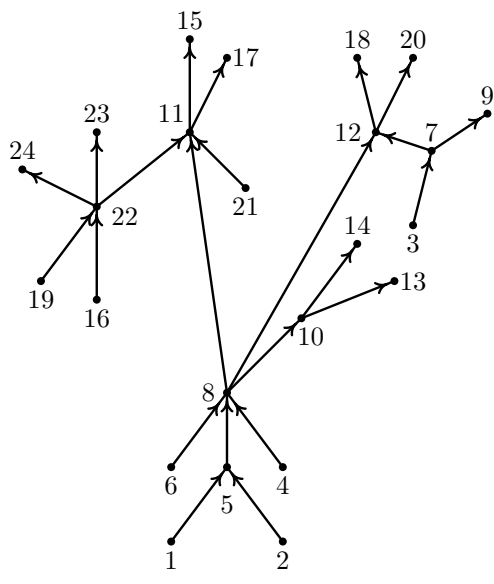
Poniższy algorytm jest rekurencyjną realizacją indukcyjnego rozumowania z dowodu powyższego Twierdzenia. Za element w , od którego rozpoczyna się tworzenie rozszerzenia liniowego L , można wybrać dowolny element zbioru P .

```

procedure Numeracja_Drzewo( $\{N_{in}(v)\}, \{N_{out}(v)\}; \text{var } L$ );
  procedure dfs( $v$ :integer);
    begin
       $label_v := \text{true};$ 
      for  $u \in N_{in}(v)$  do
        if not  $label_u$  then dfs( $u$ );
      m:=m+1;
       $L_v := m;$ 
      for  $u \in N_{out}(v)$  do
        if not  $label_u$  then dfs( $u$ )
      end {dfs};
    begin
      for  $u \in P$  do  $label_u := \text{false};$ 
      m:=0;
      dfs( $w$ )
    end;
  end;

```

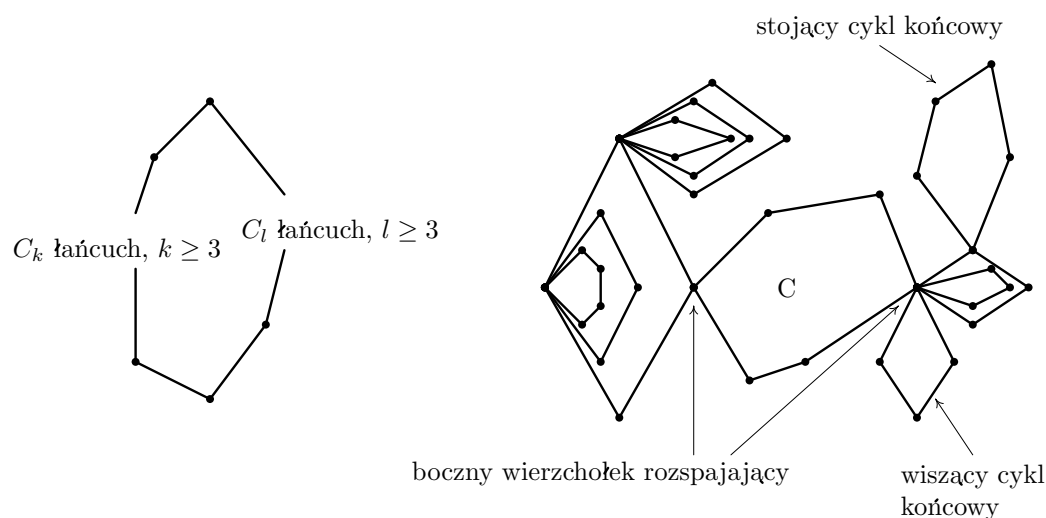
Na Rysunku 4.1 jest pokazany przykład drzewiastego zbioru uporządkowanego i jego umieszczenie na jednej stronie, wygenerowane przez program będący komputerową realizacją przedstawionego w dowodzie algorytmu.



Rysunek 4.1. Drzewiasty zbiór uporządkowany i jego umieszczenie na jednej stronie

5. Umieszczanie kombinacji cykli w książce

W tym Rozdziale rozważamy rodzinę planarnych zbiorów uporządkowanych, których graf pokrycia jest kombinacją krawędziowo rozłącznych cykli. Zbiór uporządkowany P jest *cyklem*, jeśli składa się z dwóch maksymalnych, ze względu na zawieranie, łańcuchów o długości¹ równej co najmniej 3, które mają dokładnie dwa wspólne elementy: element minimalny i element maksymalny. Cykl zbudowany z łańcuchów C_k i C_l nazywamy (k,l) -*diamentem*, a $(3,3)$ -diament, nazywamy po prostu *diamentem*.



Rysunek 5.1. (k,l) -diament (a) i kombinacja cykli (b)

Element cyklu, który nie jest ani elementem maksymalnym ani minimalnym, nazywamy *elementem bocznym*. Każdy cykl zawiera co najmniej dwa elementy boczne, w każdym łańcuchu C_k i C_l przynajmniej jeden.

Zbiór uporządkowany P jest *kombinacją cykli*, jeśli każdy blok jego grafu pokrycia $cov(P)$ jest cyklem, odpowiadającym cyklowi w P , patrz Rysunek 5.1. Jeśli każdy cykl w kombinacji cykli P jest diamentem, to P nazywamy *kombinacją diamentów*.

Zauważmy, że w przyjętym sensie cykl można uważać za topologiczne rozszerzenie diamentu przez umieszczenie nowych elementów w łańcuchach tworzących cykl. Jednak kombinacja cykli może nie być topologicznym rozszerzeniem kombinacji diamentów, gdyż cykle w kombinacji cykli mogą być dołączane w więcej niż jednym elemencie bocznym cyklu.

¹ Przypomnijmy, że *długością łańcucha* jest liczba jego elementów.

Bez utraty ogólności przyjmujemy, jak w całej pracy, że zbiory uporządkowane, grafy i digrafy występujące w tym Rozdziale są spójne.

Graf pokrycia $cov(P)$ kombinacji cykli P jest zbiorem bloków, z których każdy jest cyklem. Wiadomo, że graf bloków grafu spójnego jest drzewem [13], oznaczmy to drzewo przez $T(P)$ – wierzchołki w tym drzewie, dla odróżnienia od wierzchołków w innych grafach, nazywamy *węzłami*.

W kombinacji cykli P , cykl jest *cyklem końcowym*, jeśli odpowiadający mu węzeł w grafie bloków $T(P)$ grafu $cov(P)$ jest węzłem wiszącym (kończącym). Cykl końcowy w P ma dokładnie jeden wspólny element, odpowiadający wierzchołkowi rozspajającemu w $cov(P)$, z pozostałą kombinacją cykli P . Wierzchołek ten może być wspólny dla wielu cykli końcowych – mówimy wtedy o *peku* cykli końcowych.

Zbiór uporządkowany będący kombinacją cykli ma więc, w sensie określonym powyżej, budowę drzewiastą. Ta własność jest dalej wykorzystywana w dowodach indukcyjnych oraz w innych rozważaniach dotyczących takich zbiorów.

Każdy cykl Q w kombinacji cykli P , składającej się z co najmniej dwóch cykli, zawiera co najmniej jeden element q , który jest wierzchołkiem rozspajającym w $cov(P)$ – q nazywamy *elementem rozspajającym cyklu Q* lub *wierzchołkiem rozspajającym cyklu Q* . Wierzchołek rozspajający q w cyklu Q może być jego elementem minimalnym, maksymalnym lub bocznym. Jeśli wierzchołek rozspajający q cyklu Q jest jego elementem minimalnym, to Q nazywamy *cyklem stojącym*, a jeśli q jest jego elementem maksymalnym, to Q nazywamy *cyklem wiszącym*, patrz Rysunek 5.1.

Zauważmy, że element rozspajający w kombinacji cykli P , który jest na przykład elementem bocznym w jednym cyklu, może być elementem minimalnym lub maksymalnym w innym cyklu. Patrząc jednak z pozycji ustalonego cyklu, elementy rozspajające i cykle w takim zbiorze P mają jednoznacznie określony status. Zatem, przy ustalonym cyklu w kombinacji cykli P , węzły w drzewie bloków $T(P)$ grafu $cov(P)$ mogą być jednoznacznie oznaczone w następujący sposób:

1. b, m, n – węzły odpowiadające odpowiednio bocznym, maksymalnym, minimalnym wierzchołkom rozspajającym w ustalonym cyklu;
2. B, M, N – węzły odpowiadające cyklom dołączonym do innego cyklu odpowiednio bocznym, maksymalnym, minimalnym swoim elementem.

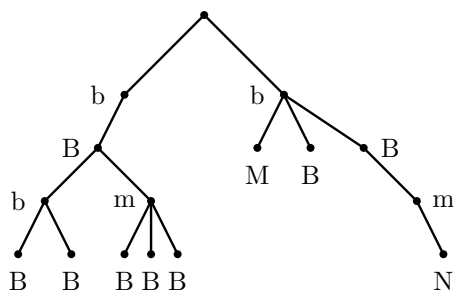
Na Rysunku 5.2 jest pokazane oznaczone w ten sposób drzewo bloków grafu $cov(P)$ dla kombinacji cykli P przedstawionej na Rysunku 5.1. Korzeń tego drzewa odpowiada cyklowi oznaczonemu przez C .

Drzewo $T(P)$ ma następujące własności, wynikające z ogólnych własności drzewa bloków:

1. Węzły na co drugim poziomie odpowiadają elementom rozspajającym w P , a na co drugim – blokom, czyli cyklom w P . Węzeł w korzeniu drzewa oraz węzły wiszące odpowiadają cyklom w P .
2. Następnikami węzła odpowiadającego cyklowi są węzły odpowiadające elementom rozspajającym w tym cyklu, oznaczone zgodnie z ich statusem

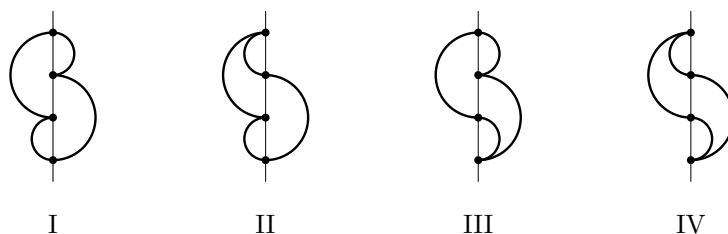
w tym cyklu: b – element boczny, m – element maksymalny, n – element minimalny.

3. Następnikami węzła odpowiadającego elementowi rozspajającemu w P są węzły odpowiadające cyklom w P , doczepionym w tym elemencie swoim elementem bocznym (cykl oznaczony jako B), maksymalnym (cykl oznaczony jako M) lub minimalnym (cykl oznaczony jako N).



Rysunek 5.2. Drzewo bloków odpowiadające kombinacji cykli z Rysunku 5.1 z cyklem C umieszczonym w korzeniu.

Z Twierdzenia 8 wynika, że dla umieszczenia w książce cyklu, w szczególności diamentu, potrzeba przynajmniej dwóch stron. Wszystkie, z dokładnością do symetrii (odbicia) względem grzbietu książki, możliwe umieszczenia diamentu na dwóch stronach są pokazane na Rysunku 5.3.



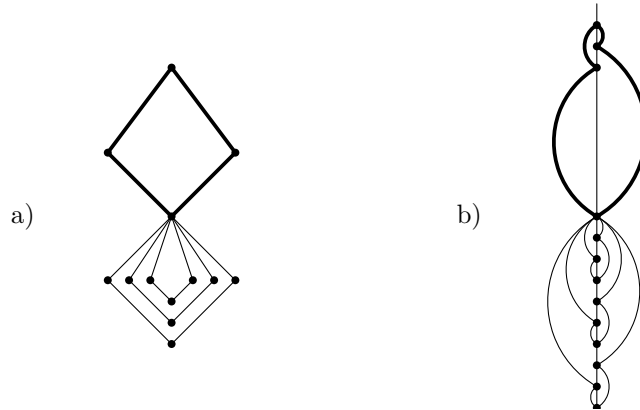
Rysunek 5.3. Wszystkie umieszczenia diamentu na dwóch stronach książki z dokładnością do symetrii (odbicia) względem grzbietu książki.

Można łatwo zaobserwować, że:

Lemat 4. Niech P będzie kombinacją diamentów (w ogólności cykli) umieszczoną w książce (na dwóch lub większej liczbie stron). Jakikolwiek stojący lub wiszący diament (cykl) końcowy dołączony do P może być umieszczony na dowolnych dwóch stronach.

Dowód. Wynika to z faktu, że dla każdego umieszczenia zbioru P w książce, na wszystkich stronach jest wolna przestrzeń powyżej i poniżej każdego

elementu (zobacz Rysunek 5.3). Można więc umieścić w tej przestrzeni, na dowolnych dwóch stronach, stojący cykl końcowy (powyżej elementu) lub wiszący cykl końcowy (poniżej elementu). Faktycznie, można w ten sposób umieścić dowolną liczbę (pek) stojących cykli końcowych i dowolną liczbę (pek) wiszących cykli końcowych, zobacz Rysunek 5.4. \square



Rysunek 5.4. Przykład wiszącego pęku diamentów (a) i ich umieszczenia na dwóch stronach w książce (b)

Dołączenie do kombinacji cykli P umieszczonej w książce diamentu (cyklu), który ma z P wspólny swój boczny element, już nie jest takie proste. W poprzednim Rozdziale określiliśmy, kiedy element w umieszczony na grzbiecie książki jest dostępny na jednej wybranej stronie. Wprowadzimy teraz podobne pojęcie dla dwóch stron. Element w jest dostępny na dwóch wybranych stronach, jeśli na grzbiecie książki istnieje punkt r powyżej elementu w i punkt s poniżej elementu w (punkty r i s nie muszą być bezpośrednio nad i pod elementem w) takie, że można poprowadzić krawędzie, nie przecinające innych krawędzi, z w do r na obu wybranych stronach i z w do s na przynajmniej jednej z tych stron, lub na odwrót, z w do s na obu wybranych stronach i z w do r na przynajmniej jednej z tych stron.

Lemat 5. Niech P będzie kombinacją diamentów (w ogólności cykli) umieszczoną w książce na dwóch stronach. Niech P' oznacza zbiór uporządkowany, otrzymany z P przez dołączenie do P diamentu D , który ma z P wspólny swój boczny element v . Umieszczenie zbioru P na dwóch stronach można rozszerzyć do umieszczenia zbioru P' na tych samych dwóch stronach, jeśli element v jest dostępny na tych dwóch stronach.

Dowód. Dowód wynika z obserwacji, że aby umieszczenie zbioru P' na dwóch stronach książki można było otrzymać z umieszczenia zbioru P na dwóch stronach, na obu stronach powinno być możliwe poprowadzenie krawędzi z elementu v do punktu powyżej v i z tego punktu powyżej powinien być dostępny punkt poniżej elementu v , lub na odwrót, gdyż v jest elementem bocznym w doczepianym diamencie, a umieszczenie każdego takiego diamentu wymaga miejsca na dwóch stronach powyżej lub poniżej elementu v oraz

przestrzeni na przynajmniej jednej stronie, dla krawędzi biegnących z tej przestrzeni odpowiednio poniżej lub powyżej elementu v . \square

Cykl jako graf można umieścić na jednej stronie. Podobnie liczba stron grafu, który jest kombinacją cykli, jest równa 1, gdyż jest to graf zewnętrznie planarny, patrz Twierdzenie 5. Liczba stron cyklu (w szczególności diamentu) traktowanego jako zbiór uporządkowany jest równa 2, można więc przypuszczać [63], że zbiór uporządkowany, który jest kombinacją cykli ma również liczbę stron równą 2. Przypuszczenie to nie jest jednak prawdziwe. Poniżej wykażemy najpierw, że każda kombinacja diamentów, a w ogólności każda kombinacja cykli, może być umieszczona na trzech stronach. Następnie podamy przykład kombinacji diamentów, dla której liczba stron jest równa 3.

Twierdzenie 18. *Zbiór uporządkowany, który jest kombinacją diamentów, może być umieszczony w książce na trzech stronach.*

Dowód. Niech P będzie kombinacją diamentów. Umieszczenie zbioru P na trzech stronach konstruujemy używając włożeń diamentów jedynie typu I, patrz Rysunek 5.3. Takie umieszczenie zbioru P tworzymy w trakcie przechodzenia drzewa bloków $T(P)$ grafu $cov(P)$ metodą wszerz począwszy od węzła odpowiadającego wybranemu diamentowi w zbiorze P . Faktycznie, drzewo bloków $T(P)$ grafu $cov(P)$ zakorzenione w wybranym diamencie zbioru P traktujemy, jakby było konstruowane podczas wykonywania poniższego algorytmu.

Niech Q oznacza kolejkę tych węzłów drzewa $T(P)$, które zostały przeglądnięte, ale jeszcze nie zostały zbadane i odpowiadają diamentom w grafie $cov(P)$. Badanie takiego węzła będzie polegać na przejrzeniu wszystkich zawieszonych pod nim węzłów – odpowiadają one wierzchołkom rozspajającym w grafie $cov(P)$ – i rozszerzeniu tworzonego włożenia o diamenty zaczepione w tych wierzchołkach rozspajających oraz dołączeniu do kolejki Q węzłów odpowiadających tym diamentom. Węzły w drzewie $T(P)$, które odpowiadają wierzchołkom rozspajającym w grafie $cov(P)$, nie są włączane do kolejki Q .

Algorytm służący do umieszczenia kombinacji diamentów P na trzech stronach ma następującą postać (pamiętamy, że wszystkie diamenty zbioru P są umieszczane zgodnie z układem krawędzi typu I, patrz Rysunek 5.3).

Krok początkowy

Niech C_0 będzie dowolnym diamentem w zbiorze P , a $T(P)$ będzie drzewem bloków grafu $cov(P)$ zakorzenionym w węźle odpowiadającym diamentowi C_0 . Umieszczamy diament C_0 na dwóch stronach. Jeśli zbiór P składa się tylko z diamentu C_0 , to algorytm kończy działanie. W przeciwnym razie, kolejkę Q tworzy na początku węzeł drzewa $T(P)$ odpowiadający diamentowi C_0 .

Krok iteracyjny

Dopóki kolejka Q nie jest pusta, to niech v będzie kolejnym czołowym węzłem w kolejce Q i niech C oznacza diament w zbiorze P odpowiadający węzłowi v . Usuwamy v z Q , i jeśli v nie jest węzłem wiszącym w drzewie $T(P)$, to przeglądamy kolejne jego następniki odpowiadające wierzchołkom rozspajającym w grafie $cov(P)$. Niech w oznacza aktualnie rozważany węzeł

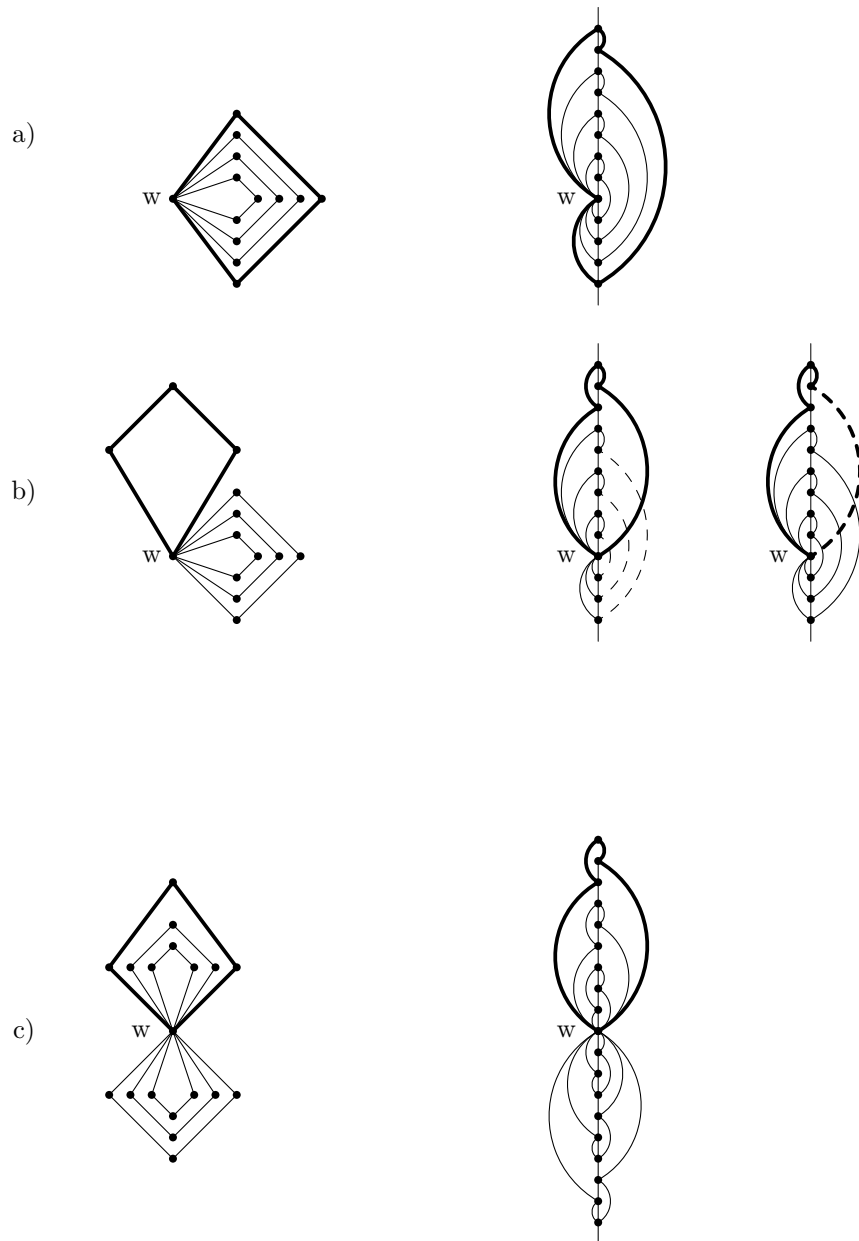
drzewa $T(P)$ będący następnikiem węzła v . Węzłowi w odpowiada wierzchołek rozspajający w grafie $cov(P)$ – oznaczamy go w taki sam sposób jako w – w którym do diamentu C jest doczepiony inny diament zbioru P , który nie został jeszcze umieszczony w książce, lub wiele diamentów doczepionych w tym wierzchołku. Postępujemy w zależności od statusu węzła w w drzewie $T(P)$ – może to być węzeł boczny (oznaczony przez b), maksymalny (oznaczony przez m) lub minimalny (oznaczony przez n). Każdy napotkany diament, który jest wstawiany do drzewa $T(P)$, jest jednocześnie wstawiany do kolejki Q .

1. Załóżmy, że w jest elementem bocznym (oznaczenie b w drzewie) w C . W diamencie zaczepionym w w , który nie został jeszcze umieszczony w książce, wierzchołek w może odpowiadać elementowi bocznemu, minimalnemu lub maksymalnemu. dalej postępujemy w zależności od typu tego wierzchołka.
 - a) Wszystkie diamenty, zaczepione w wierzchołku w , które nie zostały jeszcze umieszczone w książce, w których element zbioru P odpowiadający wierzchołkowi w jest boczny, umieszczamy w książce zgodnie ze sposobem przedstawionym na Rysunku 5.5(a) – wystarczają wtedy 2 strony książki. Jednocześnie każdemu takiemu diamentowi odpowiada w drzewie $T(P)$ węzeł oznaczony jako B , podłączony pod węzeł w .
 - b) Wszystkie diamenty wiszące, zaczepione w wierzchołku w , które nie zostały jeszcze umieszczone w książce, można zgodnie z Lematem 4 umieścić na dwóch stronach. Każdemu takiemu diamentowi odpowiada w drzewie $T(P)$ węzeł oznaczony jako M , podłączony pod węzeł w .
 - c) Wszystkie diamenty stojące, zaczepione w wierzchołku w , które nie zostały jeszcze umieszczone w książce, można również zgodnie z Lematem 4 umieścić na dwóch stronach. Każdemu takiemu diamentowi odpowiada w drzewie $T(P)$ węzeł oznaczony jako N , podłączony pod węzeł w .
2. Załóżmy, że w jest elementem maksymalnym (m) lub minimalnym (n) w C . W diamencie zaczepionym w w , który nie zostały jeszcze umieszczone w książce, wierzchołek w może odpowiadać elementowi bocznemu, minimalnemu lub maksymalnemu. Dalej postępujemy w zależności od typu tego wierzchołka.
 - a) Wszystkie diamenty, zaczepione w wierzchołku w , które nie zostały jeszcze umieszczone w książce, w których element zbioru P odpowiadający wierzchołkowi w jest boczny, wkładamy do książki zgodnie ze sposobem przedstawionym na Rysunku 5.5(b) – używamy stron 1 i 3, jeśli wszystkie krawędzie diamentu C są umieszczone na stronach 1 i 2 lub używamy stron 1 i 2, jeśli diament C jest umieszczony na stronach 1 i 3. Jednocześnie każdemu takiemu diamentowi odpowiada w drzewie $T(P)$ węzeł oznaczony jako B , podłączony pod węzeł w .
 - b) Wszystkie diamenty wiszące, zaczepione w wierzchołku w , które nie zostały jeszcze umieszczone w książce, można zgodnie z Lematem 4 umieścić na dwóch stronach, patrz Rysunek 5.5(c). Każdemu takie-

mu diamentowi odpowiada w drzewie $T(P)$ węzeł oznaczony jako M , podłączony pod węzeł w .

- c) Wszystkie diamenty stojące, zaczepione w wierzchołku w , które nie zostały jeszcze umieszczone w książce, można zgodnie z Lematem 4 umieścić na dwóch stronach, patrz Rysunek 5.5(c). Każdemu takiemu diamentowi odpowiada w drzewie $T(P)$ węzeł oznaczony jako N , podłączony pod węzeł w .

□



Rysunek 5.5. Umieszczenie kombinacji diamentów na 3 stronach. Pogrubionymi liniami jest oznaczony diament C z dowodu Twierdzenia 18.

Łatwo można zmodyfikować algorytm opisany w dowodzie Twierdzenia 18 tak, aby mógł być użyty do umieszczenia na 3 stronach kombinacji dowolnych cykli, niekoniecznie diamentów. Możemy więc sformułować Wniosek:

Wniosek 2. *Zbiór uporządkowany, który jest kombinacją cykli może być umieszczony w książce na trzech stronach.*

Z dowodu Twierdzenia 18 wynika, że diamenty, które zawierają element boczny będący elementem minimalnym lub maksymalnym innego diamentu (jest to przypadek 2a) w dowodzie) powodują, iż zastosowany w dowodzie algorytm używa trzeciej strony. Mamy stąd następujący Wniosek:

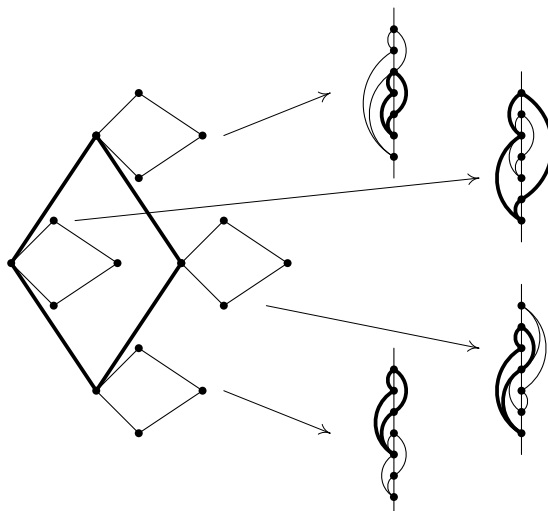
Wniosek 3. *Jeśli w kombinacji cykli P , w żadnym cyklu jego element boczny nie jest elementem minimalnym lub maksymalnym innego cyklu, to zbiór uporządkowany P może być umieszczony w książce na dwóch stronach.*

Dowód. Wynika to wprost z dowodu Twierdzenia 18, jeśli ominiemy część 2a), która dotyczy wkładania diamentów dołączonych tak, jak to opisano w sformułowaniu tego Wniosku. W pozostałych krokach są wykorzystywane tylko dwie te same strony. \square

O innej kombinacji diamentów (cykli), którą można również umieścić w książce na dwóch stronach jest mowa w następnym Lemacie.

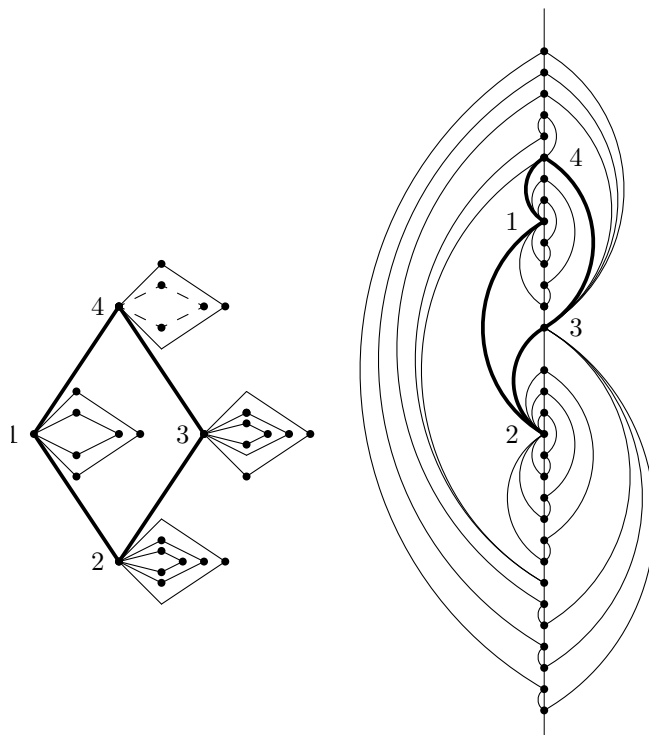
Lemat 6. *Jeśli w kombinacji diamentów (cykli), każdy diament każdy swój element boczny dzieli z co najwyżej jednym innym diamentem (cyklem), to taką kombinację diamentów (cykli) można umieścić na dwóch stronach książki.*

Dowód. Umieszczenie na dwóch stronach kombinacji diamentów spełniającej warunki tego Lematu jest zilustrowane na Rysunku 5.6. \square



Rysunek 5.6. Sposoby umieszczania w książce kombinacji diamentów spełniającej założenia Lematu 6.

Wykażemy teraz, że przedstawiona na Rysunku 5.7 kombinacja diamentów nie może być umieszczona na dwóch stronach książki, a zatem Twierdzenie 18 nie można poprawić w ogólnym przypadku kombinacji diamentów.



Rysunek 5.7. Kombinacja diamentów, która wymaga trzech stron książki.

Lemat 7. *Kombinacja diamentów, przedstawiona na Rysunku 5.7, nie może być umieszczona w książce na dwóch stronach.*

Dowód. Posługując się możliwymi umieszczeniami diamentu na dwóch stronach (patrz Rysunek 5.3), łatwo można sprawdzić następujące własności umieszczeń wielu diamentów na dwóch stronach.

- jeśli pęk co najmniej dwóch diamentów, mających wspólny element boczny v , ma być umieszczony na dwóch stronach, to diamenty z pęku muszą być umieszczone w sposób zagłębiający się jeden w drugim;
- przy umieszczeniu pęku diamentów o wspólnym elemencie bocznym na dwóch stronach, krawędzie tych diamentów potrzebują przestrzeni na obu stronach powyżej i poniżej elementu v ;
- dla jakiegokolwiek umieszczenia diamentu na dwóch stronach, istnieją dokładnie trzy jego elementy, do których można docześcić pęki złożone z co najmniej dwóch diamentów, mających wspólny element boczny – na Rysunku 5.7 oznaczyliśmy je jako 1, 2 i 3. W dwóch przypadkach (1 i 2), przestrzeń potrzebna do umieszczenia pęków diamentów znajduje się bezpośrednio nad i pod elementami diamentu, a w jednym (3) – powyżej i poniżej całego diamentu.

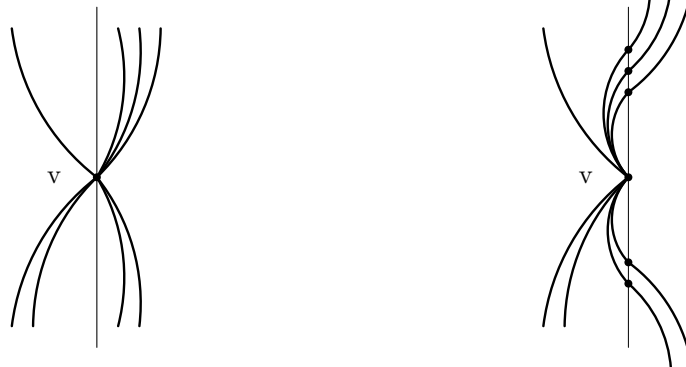
Wykorzystajmy więc te trzy elementy diamentu 1, 2 i 3, by doczepić do nich pęki co najmniej dwóch diamentów ich bocznymi elementami. Umieszczenie takiej kombinacji diamentów jest przedstawione na Rysunku 5.7. W wierzchołku 4 diamentu doczepiamy teraz do tej kombinacji diamentów kolejny diament, również jego elementem bocznym – zgodnie z Lematem 5, na dwóch stronach jest przestrzeń, aby rozszerzyć o ten diament umieszczenie dotychczasowej kombinacji diamentów, patrz Rysunek 5.7. Z tego samego Lematu wynika, że nie ma już jednak przestrzeni na tych dwóch stronach, aby w wierzchołku 4 można było doczepić kolejny diament jego wierzchołkiem bocznym. Zatem zbioru uporządkowanego przedstawionego na Rysunku 5.7 nie można umieścić na dwóch stronach. \square

Na zakończenie tego Rozdziału podajemy dla zbiorów uporządkowanych, będących kombinacją cykli, odpowiednik Twierdzenia 7, które zawiera podobny wynik dla grafów.

Twierdzenie 19. *Dla kombinacji cykli P , istnieje zbiór uporządkowany P' , otrzymany z P przez podział niektórych jego krawędzi w $cov(P)$, tyle razy, ile jest to konieczne taki, że $pn(P') \leq 2$.*

Dowód. Postępujemy indukcyjnie ze względu na liczbę cykli w kombinacji cykli P . Jeśli zbiór uporządkowany P składa się z jednego cyklu, to konkluzja jest oczywista. Załóżmy, że to Twierdzenie zachodzi dla kombinacji cykli P , która po odpowiedniej liczbie podziałów krawędzi w $cov(P)$, jeśli to niezbędne, została umieszczona na dwóch stronach. Niech v będzie elementem w P , w którym chcemy dołączyć dodatkowy cykl końcowy C , patrz Rysunek 5.8. Jeśli C jest cyklem stojącym lub wiszącym, to na mocy Lematu 4, umieszczamy go w wolnej przestrzeni powyżej lub poniżej elementu v na dwóch stronach. Jeśli zaś v jest elementem bocznym w C , to wykonujemy podział krawędzi grafu pokrycia $cov(P)$ tak, jak pokazano na Rysunku 5.8, aby otrzymać wolną przestrzeń na obydwu stronach powyżej i poniżej wierzchołka v , potrzebną do umieszczenia cyklu C na tych samych dwóch stronach. \square

W pracy [21] wykazano, że każdy do góry planarny digraf płaski może być umieszczony w książce na dwóch stronach w taki sposób, że każdy jego łuk jest dzielony co najwyżej jeden raz, lub innymi słowy, każdy łuk przecina grzbiet książki co najwyżej raz.



Rysunek 5.8. Lokalny podział zbioru krawędzi dla umieszczenia kombinacji cykli na dwóch stronach.

6. Umieszczanie w książce N -wolnych zbiorów uporządkowanych

W Rozdziałach 6 i 7 zajmujemy się problemem liczby stron, ograniczonym do rodziny N -wolnych zbiorów uporządkowanych. Najpierw badamy liczbę stron dla dowolnych N -wolnych zbiorów uporządkowanych (Rozdział 6), a następnie ograniczamy uwagę do N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych (Rozdział 7).

W tym Rozdziale przedstawiamy ogólne własności takich zbiorów (Podrozdział 6.1), wykorzystywane przy rozwiązywaniu problemu liczby stron. Następnie podajemy dokładny wzór na liczbę stron prostych N -wolnych zbiorów uporządkowanych o strukturze drzewiastej (Podrozdział 6.2) i uogólniamy ten rezultat w postaci oszacowania (Podrozdział 6.3) i algorytmu (Podrozdział 6.4) umieszczania w książce dowolnych zbiorów uporządkowanych na możliwie najmniejszej liczbie stron.

Rodzinę N -wolnych zbiorów uporządkowanych można uważać za rozszerzenie rodziny zbiorów szeregowo-równoległych, dla których problem liczby stron był intensywnie badany. W szczególności, w pracy [3] podano wielomianowy algorytm, służący do umieszczania na dwóch stronach szeregowo-równoległych planarnych zbiorów uporządkowanych, patrz również [14], gdzie podano bardziej efektywny algorytm dla tego problemu.

Przyjęte w Rozdziałach 6 i 7 podejście nie było dotychczas stosowane do problemu liczby stron zbiorów uporządkowanych. Prowadzone rozważania bazują na grafowej interpretacji N -wolnych zbiorów uporządkowanych jako zbiorów, dla których digraf pokrycia jest digrafem łukowym innego digrafu (patrz Podrozdział 6.1). Taka interpretacja digrafów pokrycia jako digrafów łukowych przyniosła wiele ciekawych i nietrywialnych rezultatów w odniesieniu do problemu liczby skoków, m.in. wzór na liczbę skoków dla zbiorów N -wolnych [61] i efektywny algorytm rozwiązywania problemu skoków dla dowolnych zbiorów uporządkowanych [62] oraz algorytm przybliżony z oszacowaniem jakości rozwiązania dla uporządkowanych zbiorów przedziałowych [64].

6.1. Posety N -wolne i ich charakteryzacja

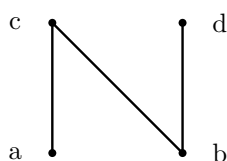
6.1.1. Posety N -wolne

Przypomnijmy, że uporządkowany zbiór N składa się z czterech elementów, np. $\{a, b, c, d\}$, między którymi zachodzą jedynie następujące relacje

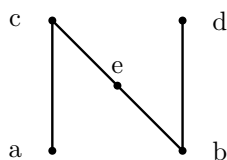
pokrycia: $a <_c c$, $b <_c c$ i $b <_c d$. Diagram Hassego $H(N)$ zbioru N jest przedstawiony na Rysunku 6.1.

Zbiór uporządkowany (P, \leq) jest N -wolnym, jeśli jego digraf pokrycia $d\text{-cov}(P)$ jest N -wolny, czyli jeśli digraf $d\text{-cov}(P)$ nie zawiera indukowanego poddigrafu izomorficznego z digrafem pokrycia $d\text{-cov}(N)$ zbioru N .

Uporządkowane zbiory N -wolne stanowią istotną nadklasę uporządkowanych zbiorów szeregowo-równoległych. Zbiór uporządkowany (P, \leq) jest *szeregowo-równoległy*, jeśli nie zawiera podzbioru izomorficznego ze zbiorem N lub inaczej, jeśli digraf, będący przechodnim domknięciem digrafu pokrycia $d\text{-cov}(P)$ zbioru (P, \leq) jest N -wolny. Na Rysunku 6.2 jest przedstawiony zbiór uporządkowany, który jest N -wolny, ale nie jest szeregowo-równoległy, gdyż zawiera zbiór $N = (\{a, b, c, d\}, \leq)$ jako podzbiór.



Rysunek 6.1. Diagram Hassego zbioru uporządkowanego N



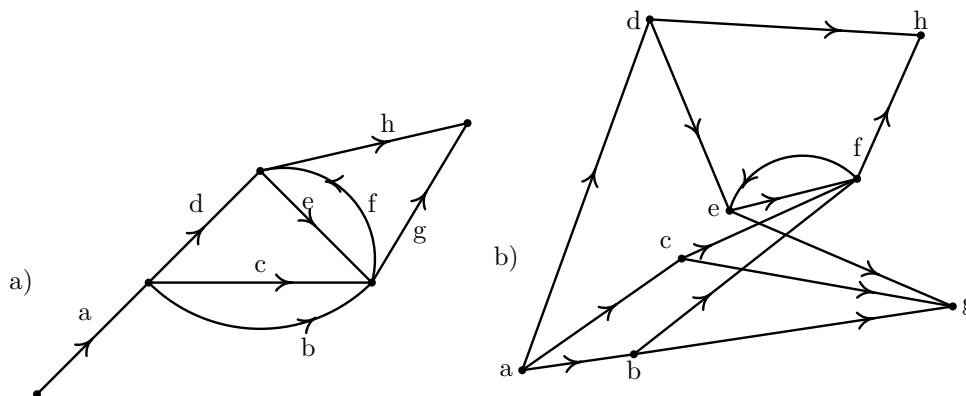
Rysunek 6.2. Diagram Hassego N -wolnego zbioru uporządkowanego, który nie jest szeregowo-równoległy

Uporządkowane zbiory N -wolne po raz pierwszy zdefiniował Grillet [24], jako zbiory uporządkowane mające własność *C.A.C.* to znaczy takie, w których każdy maksymalny łańcuch przecina każdy maksymalny antyłańcuch. Następnie zbiory te były rozważane w pracy [43], patrz również [53].

Zbiór uporządkowany N odgrywa ważną rolę w wielu problemach algorytmicznych [55], patrz również [61]. Zbiory N -wolne znajdują również wiele zastosowań w teorii i praktyce szeregowania zadań, patrz np. [60]

N -wolny digraf pokrycia może być zdefiniowany jako digraf łukowy innego digrafu. Digraf łukowy jest na ogół definiowany dla dowolnego multidigrafu, czyli dla grafu skierowanego, który może zawierać tzw. łuki wielokrotne (równoległe). *Digraf łukowy* $L(E)$ dla multidigrafu E został wprowadzony przez Harary'go i Normana w pracy [27] i jest definiowany w następujący sposób. Każdemu łukowi a w E przyporządkowujemy wierzchołek $l(a)$ w $L(E)$ a zbiór łuków w $L(E)$ tworzą pary wierzchołków $(l(a_1), l(a_2))$ dla każdej pary łuków

a_1 i a_2 w E , które mają postać $a_1 = (u, v)$ i $a_2 = (v, w)$, czyli łuki te tworzą w E drogę $(a_1, a_2) = (u, v, w)$ długości 2. Zauważmy, że tak zdefiniowany digraf łukowy nie zawiera wielokrotnych łuków. Digraf D jest *digrafem łukowym*, jeśli istnieje multidigraf E , taki że $D = L(E)$ – w tym przypadku multidigraf E nazywamy *digrafem źródłowym* digrafu D . Na Rysunku 6.3 jest przedstawiony multidigraf i jego digraf łukowy.



Rysunek 6.3. Multidigraf E (a) i jego digraf łukowy $L(E)$ (b)

6.1.2. Charakteryzacja posetów N -wolnych

Znanych jest wiele charakteryzacji zbiorów N -wolnych. Najważniejsze z nich, do których odwołujemy się w tej pracy, są zebrane w następującym Twierdzeniu. Warunki 3 – 5 odnoszą się do zbiorów N -wolnych poprzez odpowiadające im digrafy pokrycia.

Twierdzenie 20. Niech $D = (P, A)$ oznacza digraf pokrycia uporządkowanego zbioru P . Następujące sformułowania są równoważne dla zbioru P :

1. P jest N -wolny.
2. P ma własność C. A. C.
3. D jest digrafem łukowym.
4. Istnieją dwa rozkłady $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ zbioru P na podzbiory (rozkłady te mogą być niewłaściwe w tym sensie, że niektóre zbiory P_i i Q_i mogą być puste), takie że zbiór łuków A digrafu D można przedstawić w postaci sumy

$$A = \bigcup_{i \in I} P_i \times Q_i$$

gdzie \times oznacza iloczyn kartezjański zbiorów.

5. Dla każdych dwóch elementów $p, q \in P$,

$$N^+(p) \cap N^+(q) \neq \emptyset \implies N^+(p) = N^+(q),$$

gdzie $N^+(p)$ oznacza zbiór wszystkich elementów zbioru P , które pokrywają p w P . Równoważnie mamy:

$$(p, r) \in A \wedge (q, r) \in A \wedge (p, s) \in A \implies (q, s) \in A.$$

Dowód. Dowody równoważności powyższych warunków znajdują się w różnych pracach i w różnych kontekstach. Dowód równoważności 1 i 2 jest chyba najstarszy, został podany przez Grilleta w [24]. Jak wspomnieliśmy, digraf łukowy został wprowadzony w pracy [27], w której scharakteryzowano go równoważnością 3 i 4, patrz również [59]. Równoważność 3 i 5 wykazał Heu-chenne w pracy [34], patrz również [65] i [60].

□

Charakteryzacje i własności digrafów łukowych zostały zebrane w pracy [33].

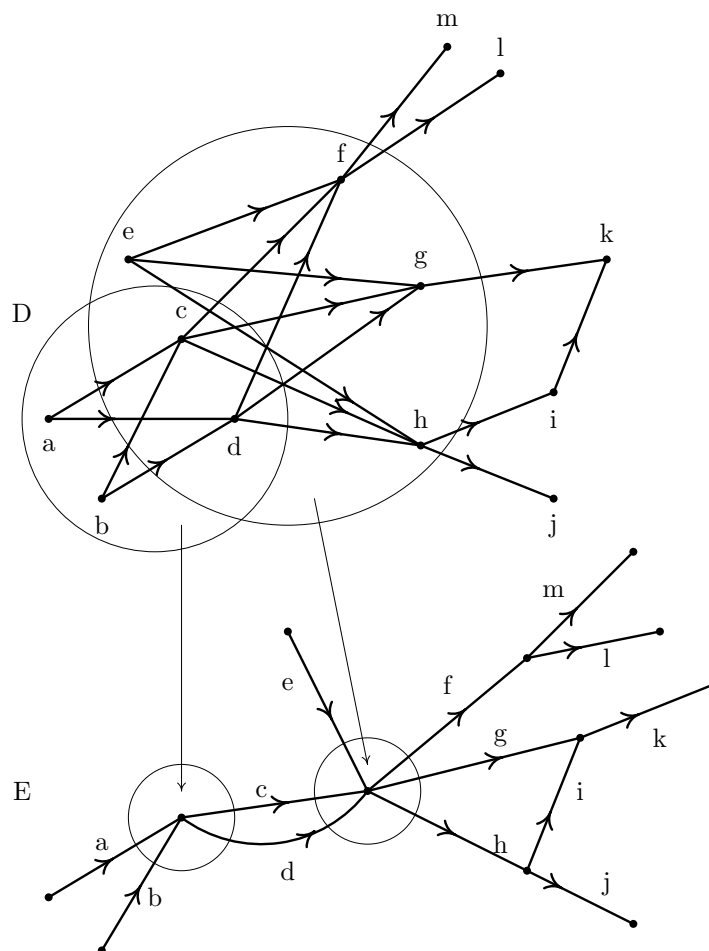
Na podstawie równoważności 1 z 3, rozważania dotyczące N -wolnych zbiorów uporządkowanych mogą być równoważnie prowadzone na ich N -wolnych digrafach pokrycia, co też czynimy w wielu dalszych miejscach pracy.

Rozkłady, o których jest mowa w punkcie 4, nie są jednoznaczne dla ustalonego digrafu D . Jeśli D zawiera więcej niż jeden wierzchołek, do którego nie wchodzi żaden łuk, to dla każdego takiego wierzchołka v można utworzyć jedną parę (P_i, Q_i) , gdzie $P_i = \emptyset$ i $Q_i = \{v\}$. Jeśli nałożymy warunek, że co najwyżej jeden ze zbiorów w $\{P_i\}$ oraz co najwyżej jeden ze zbiorów $\{Q_i\}$ jest pusty, to ten rozkład staje się jednoznaczny.

W pracy [59] przedstawiono liniowy algorytm, służący do sprawdzania, czy dany digraf jest digrafem łukowym, bazujący na charakteryzacji 4. Jeśli odpowiedź jest pozytywna, to wynikiem tego algorytmu jest również digraf źródłowy badanego digrafu. Stąd wynika, że zbiory N -wolne mogą być rozpoznawane w czasie liniowym względem liczby elementów i liczby porównywalności badanego zbioru.

Przyjrzyjmy się bliżej strukturze uporządkowanych zbiorów N -wolnych, opisaną warunkiem 4 w Twierdzeniu 20 (dalej ten warunek oznaczamy czasem przez Twierdzenie 20.4). Załóżmy, że N -wolny zbiór P jest reprezentowany przez digraf pokrycia $D = (P, A)$. Istnieją zatem dwa podziały $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ zbioru P , takie że $A = \bigcup_{i \in I} P_i \times Q_i$. Jeśli oba zbiory P_i i Q_i są niepuste, to $P_i \times Q_i$ jest zbiorem łuków w pełnym dwudzielnym poddigrafie digrafu D . Zatem zbiór łuków A digrafu D może być rozłożony na zbiory łuków w pełnych dwudzielnym poddigrafach $B_i = (P_i \cup Q_i, P_i \times Q_i)$ ($i \in I$) digrafu D – zbiór P_i nazywamy *dolnym zbiorem* w B_i a Q_i nazywamy *górnym zbiorem* poddigrafu B_i . Dla dwóch takich różnych poddigrafów B_i i B_j ($i \neq j$), na podstawie warunku z Twierdzenia 20.4, ich zbiory dolne są rozłączne, jak również ich zbiory górne są rozłączne. Jednakże dolne i górne zbiory różnych poddigrafów B_i i B_j ($i \neq j$) mogą zawierać wspólne elementy. Niektóre relacje między poddigrafami $\{B_i\}_I$ zilustrowano na Rysunku 6.4.

Własności poddigrafów B_i w N -wolnym digrafie D wykorzystamy w dowodzie następującego Twierdzenia, które zachodzi dla dowolnych digrafów. Przypomnijmy niektóre określenia odnoszące się do digrafów. *Pętłą* w digrafie nazywamy łuk postaci (v, v) , gdzie v jest wierzchołkiem digrafu. Pętla jest cyklem długości 1. Digraf jest *acykliczny*, jeśli nie zawiera skierowanych cykli, w tym także pętli. Łuk (u, v) w digrafie D nazywamy *przechodnim*, jeśli digraf D zawiera drogę z u do v o długości co najmniej 2. Łuki digrafu



Rysunek 6.4. Ilustracja warunku 4 w Twierdzeniu 20

(faktycznie multidigrafu), nazywamy *wielokrotnymi* lub *równoległymi*, jeśli mają identyczne wierzchołki początkowe i identyczne wierzchołki końcowe.

Twierdzenie 21. Niech $D = (P, A)$ będzie digrafem łukowym a E niech oznacza jego digraf źródłowy, czyli $D = L(E)$. Digrafy D i E mają następujące własności:

1. Digraf D nie zawiera pętli wtedy i tylko wtedy, gdy jego digraf źródłowy E nie zawiera pętli.
2. Digraf D jest acykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy E jest acykliczny.
3. Jeśli digraf E jest acykliczny, to digraf D nie zawiera łuków przechodnich. Jeśli digraf D zawiera łuk przechodni, to digraf E zawiera cykl (w szczególności pętlę) C i wierzchołek v w tym cyklu oraz dwa łuki e i f ,

które nie należą do cyklu C , z których jeden wchodzi do wierzchołka v , a drugi wychodzi z wierzchołka v .

4. Niech $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ będą dwoma rozkładami zbioru P spełniającymi warunek z Twierdzenia 20.4. Wtedy, jeśli E nie zawiera wielokrotnych (równoległych) łuków, to

$$|Q_i \cap P_j| \leq 1, \quad i, j \in I, \quad i \neq j.$$

Jeśli istnieją $i, j \in I$, $i \neq j$ takie, że $|Q_i \cap P_j| > 1$ oraz $|P_i| \geq 1$ i $|Q_j| \geq 1$, to digraf E zawiera wielokrotne łuki.

Dowód. 1. Jeśli digraf E zawiera pętlę $a = (v, v)$, to z konstrukcji digrafu łukowego wynika, że wierzchołek w digrafie D odpowiadający łukowi a jest połączony sam ze sobą, bo koniec łuku a jest również początkiem łuku a . Podobnie wnioskujemy w drugą stronę – jeśli digraf D ma pętlę w wierzchołku w , to stąd wynika, że łuk w digrafie E , któremu odpowiada wierzchołek w w digrafie D , zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku, a zatem jest pętlą.

2. Ta własność wynika z wzajemnej odpowiedniości między drogami w digrafie D , traktowanymi jako ciągi wierzchołków, a drogami w digrafie E traktowanymi jako ciągi łuków. Uwaga: drodze w E złożonej z jednego łuku odpowiada trywialna droga w D złożona z jednego wierzchołka.

3. Przypuśćmy, że digraf D zawiera łuk przechodni (u, v) , a zatem w D istnieje również droga $(u = u_0, u_1, \dots, u_l = v)$, gdzie $l > 1$. Stąd wynika, że łuki w E odpowiadające wierzchołkom $u = u_0$ i u_{l-1} w D tworzą wraz z łukiem odpowiadającym wierzchołkowi u_l drogi długości 2, a zatem ciąg łuków w E odpowiadający ciągowi wierzchołków (u_1, \dots, u_{l-1}) w D tworzy cykl w E (dla $l = 2$ ten cykl jest pętlą). A zatem, jeśli digraf E nie zawiera cyklu, to digraf D nie zawiera przechodniego łuku. W drugiej części tego warunku opisano lokalną strukturę w digrafie E , która powoduje, że digraf D zawiera przechodni łuk. Jest nim łuk między wierzchołkami, które odpowiadają łukom e i f w digrafie E , a drogę między tymi wierzchołkami długości co najmniej dwa tworzą wierzchołki w D odpowiadające łukom cyklu C w E .

4. Jeśli $|Q_i \cap P_j| \leq 1$ dla $i \neq j$ w D , to w E z wierzchołka i wychodzi co najwyżej jeden łuk do wierzchołka j , a zatem E nie zawiera równoległych łuków. Jeśli natomiast $u, w \in |Q_i \cap P_j|$ i $u \neq v$ oraz $|P_i| \geq 1$ i $|Q_j| \geq 1$, to w digrafie D istnieją drogi (x, u) i (x, v) dla $x \in P_i$ oraz drogi (u, y) i (v, y) dla $y \in Q_j$, a zatem łuki w digrafie E odpowiadające wierzchołkom u i v w D są równoległe w E . Warunki $|P_i| \geq 1$ i $|Q_j| \geq 1$ są niezbędne, gdyż w przeciwnym razie łuki u i w mogłyby wchodzić do tego samego wierzchołka nie mając wspólnego wierzchołka początkowego, lub wychodzić z tego samego wierzchołka nie mając wspólnego wierzchołka końcowego. □

W dalszych rozważaniach będziemy wykorzystywać następującą własność N -wolnym zbiorów uporządkowanych.

Wniosek 4. *Jeśli P jest N -wolnym zbiorem uporządkowanym, to digraf źródłowy jego digrafu pokrycia jest acykliczny.*

A zatem, acykliczność digrafu źródłowego digrafu pokrycia zbioru P zapewnia brak cykli, w szczególności pętli, i łuków przechodnich w samym digrafie pokrycia zbioru P .

W niektórych dalszych rozważaniach zakładamy, że digraf źródłowy E digrafu pokrycia D N -wolnego zbioru uporządkowanego P nie zawiera równoległych (wielokrotnych) łuków, czyli spełniona jest nierówność:

$$|Q_i \cap P_j| \leq 1, \quad \forall i, j \in I, \quad i \neq j, \quad (6.1)$$

gdzie $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ są dwoma rozkładami zbioru P spełniającymi warunek z Twierdzenia 20.4. Taki N -wolny zbiór uporządkowany P będziemy nazywać *prostym N -wolnym zbiorem uporządkowanym*.

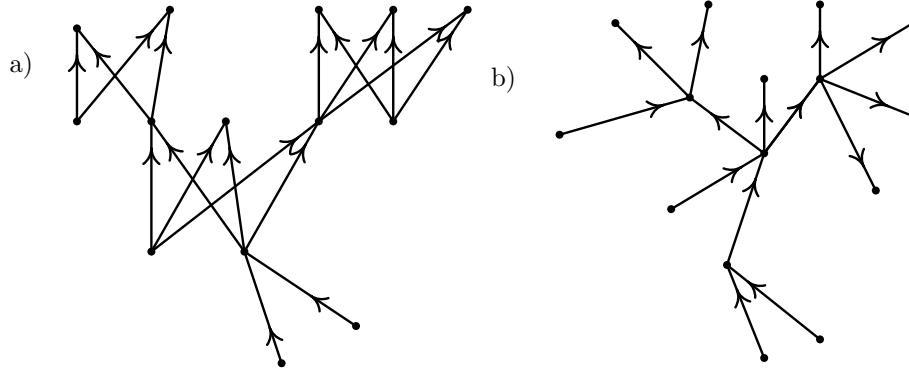
6.2. Liczba stron prostych posetów N -wolnych, gdy digraf źródłowy posetu jest drzewem

W Rozdziale 3.3 przytoczyliśmy wyniki dotyczące liczby stron pełnych dwudzielnych zbiorów uporządkowanych. Przypomnijmy, że zgodnie z Twierdzeniem 12, jeśli $P_{k,l}$ jest pełnym dwudzielnym zbiorem uporządkowanym z k elementami minimalnymi i l elementami maksymalnymi, to $pn(P_{k,l}) = \min\{k, l\}$. Wynika to z istnienia naprzemiennego skojarzenia o mocy $\min\{k, l\}$ w dowolnym rozszerzeniu liniowym zbioru $P_{k,l}$, patrz Lemat 2. Dla uproszczenia możemy przyjąć, że w tym przypadku optymalne włożenie zbioru $P_{k,l}$ do książki jest wyznaczone przez pokrycie wierzchołkowe digrafu pokrycia $cov(P_{k,l})$, czyli polega na umieszczeniu na kolejnych stronach łuków $\{p, N^+(p)\}$ dla kolejnych elementów minimalnych $p \in P_{k,l}$, jeśli $\min\{k, l\} = k$ lub łuków $\{N^-(q), q\}$ dla kolejnych elementów maksymalnych $q \in P_{k,l}$, jeśli $\min\{k, l\} = l$. Takie umieszczenie zbioru $P_{k,l}$ w książce nazywamy *kanonicznym*. Ma ono następującą własność, która wynika z symetryczności struktury zbioru $P_{k,l}$.

Lemat 8. *Dla zbioru $P_{k,l}$ i dowolnych jego elementów minimalnego p i maksymalnego q istnieje kanoniczne umieszczenie $P_{k,l}$ w książce, w którym p poprzedza na grzbiecie wszystkie pozostałe elementy minimalne w $P_{k,l}$, a q następuje na grzbiecie książki po wszystkich innych elementach maksymalnych w $P_{k,l}$.*

Twierdzenie 12, dotyczące optymalnego umieszczania w książce pełnych dwudzielnych zbiorów uporządkowanych uogólnimy teraz na proste N -wolne zbiory uporządkowane, które są kombinacją pełnych dwudzielnych zbiorów uporządkowanych o drzewiastej strukturze. Skorzystamy przy tym ze sposobu umieszczania drzew na jednej stronie (Rozdział 4). Na Rysunku 6.5 jest przedstawiony przykład takiego zbioru uporządkowanego oraz jego digraf źródłowy.

Określmy najpierw ściśle, co to znaczy, że kombinacja pełnych dwudzielnych zbiorów uporządkowanych, czyli N -wolny zbiór uporządkowany, ma drzewiastą strukturę. Generalnie, w wielu kontekstach, struktura drzewiasta grafów umożliwia formułowanie faktów i wykonywanie obliczeń w sposób



Rysunek 6.5. Prosta N -wolna drzewiasta kombinacja pełnych dwudzielnych zbiorów uporządkowanych (a) i jej digraf źródłowy (b)

rekurencyjny (jak na drzewach – patrz Rozdział 4). W przypadku N -wolnych zbiorów uporządkowanych będzie ponadto możliwe, aby dla danego poddigrafu B_i kolejność jego wierzchołków $P_i \cup Q_i$ na grzbiecie książki oraz przyporządkowanie łuków do stron nie było zmieniane przez umieszczenie w książce innego poddigrafu B_j , $i \neq j$.

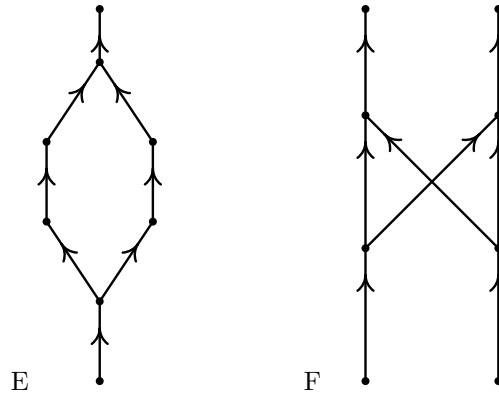
Niech P będzie prostym N -wolnym zbiorem uporządkowanym, a $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ będą dwoma rozkładami zbioru P . Niech $T = (V, E)$ oznacza digraf źródłowy digrafu pokrycia $d\text{-cov}(P)$. Bez utraty ogólności założymy, że digraf T jest spójny. Zbiór uporządkowany P ma strukturę drzewiastą, jeśli dla każdego elementu $p \in P$, który nie jest ani elementem minimalnym ani elementem maksymalnym, digraf $d\text{-cov}(P) - \{v_p\}$, powstały przez usunięcie wierzchołka v_p z digrafu $d\text{-cov}(P)$, nie jest spójny, gdzie v_p jest wierzchołkiem odpowiadającym elementowi p .

Równoważnie, P ma strukturę drzewiastą, jeśli dla każdego łuku $e \in E$, digraf $T - \{e\}$, powstały przez usunięcie łuku e z digrafu T (usuwamy tylko łuk, a jego końcowe wierzchołki pozostają), nie jest spójny. Jeśli zbiór uporządkowany P ma strukturę drzewiastą, to o jego digrafie źródłowym będziemy mówić, że jest drzewem. Zauważmy, że założenie, iż N -wolny zbiór uporządkowany jest prosty, jest tutaj istotne, gdyż inaczej usunięcie jakiegokolwiek łuku równoległego nie powodowałoby rozspojenia digrafu T . Przyjmujemy tutaj, że dwa łuki równoległe tworzą cykl.

Na Rysunku 6.6 są przedstawione dwa digrafy źródłowe E i F , które nie mają struktury drzewiastej. Pierwszy z tych przykładów jest dość oczywisty, natomiast drugi z nich ilustruje fakt, że w definicji struktury drzewiastej nie można zastąpić usuwania łuku z digrafu źródłowego przez usuwanie wierzchołka stopnia większego niż 1 – usunięcie jakiegokolwiek wierzchołka stopnia większego niż 1 z digrafu F rozspaja ten digraf, natomiast usunięcie jakiegokolwiek łuku z poddigrafu pełnego K_{22} tego digrafu nie rozspaja go.

Z definicji zbioru P o strukturze drzewiastej wynika następujący oczywisty fakt, który dalej będzie wykorzystany w algorytmie.

Lemat 9. Jeśli prosty N -wolny zbiór uporządkowany P ma strukturę drzewiastą, to każdy jego podzbiór, odpowiadający składowej spójności digrafu



Rysunek 6.6. Digrafy źródłowe, które nie mają struktury drzewiastej

$d\text{-cov}(P - \{p\})$ dla dowolnego elementu $p \in P$, jest prostym N -wolnym zbiorem uporządkowanym o strukturze drzewiastej.

Z definicji zbioru P o strukturze drzewiastej wynika również, że dla każdego elementu $p \in P$, który nie jest ani minimalnym ani maksymalnym elementem P , digraf $d\text{-cov}(P) - \{p\}$ składa się z co najmniej dwóch składowych (zakładamy, że digraf $d\text{-cov}(P)$ jest spójny).

Teraz możemy sformułować odpowiednie Twierdzenie i podać jego konstruktywny dowód, będący jednocześnie algorytmem umieszczania prostych N -wolnych zbiorów uporządkowanych o strukturze drzewiastej na najmniejszej liczbie stron w książce.

Twierdzenie 22. Niech P będzie prostym N -wolnym zbiorem uporządkowanym i niech $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ będą dwoma rozkładami zbioru P . Jeśli digraf źródłowy digrafu pokrycia zbioru P jest drzewem, to mamy:

$$pn(P) = \max_{i \in I} \min\{|P_i|, |Q_i|\}.$$

Dowód. Dla uporządkowanego zbioru P , który spełnia założenia Twierdzenia, przedstawimy sposób jego umieszczenia w książce na podanej liczbie stron. W tym celu wykażemy, że drzewiasta struktura i charakter połączeń między pełnymi dwudzielnymi poddigrafami B_i w digrafie pokrycia $d\text{-cov}(P)$ N -wolnego zbioru uporządkowanego P umożliwia takie umieszczenie zbioru P w książce, w którym te poddigrafy dwudzielne są wkładane do książki w pewnym sensie niezależnie, tzn. liczba stron użytych do umieszczenia jednego takiego pełnego dwudzielnego poddigrafu w książce nie ma wpływu na liczbę stron potrzebnych do umieszczenia innego takiego poddigrafu. Korzystamy przy tym z następujących własności poddigrafów B_i w digrafie pokrycia $d\text{-cov}(P)$ N -wolnego zbioru uporządkowanego P o strukturze drzewiastej:

1. Ponieważ $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ są rozkładami zbioru P , więc dwa różne poddigrafy B_i oraz B_j nie mają wspólnych elementów ani w zbiorach dolnych, ani w zbiorach górnych, czyli $P_i \cap P_j = \emptyset$ oraz $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ dla $i \neq j$.

2. Ponieważ P jest prostym N -wolnym zbiorem uporządkowanym, więc $|Q_i \cap P_j| \leq 1$ dla $i \neq j$, ale może istnieć wiele poddigrafów B_j , które mają niepusty przekrój z poddigrafem B_i . Na podstawie 1, żadne dwa poddigrafy B_{j_1} i B_{j_2} , które mają niepusty przekrój z B_i , nie mają wspólnego elementu.
3. Łańcuchem nazywamy ciąg poddigrafów $\mathcal{B}_k = B_1, B_2, \dots, B_k$ dla $k \geq 1$ taki, że $Q_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ dla $i = 1, 2, \dots, k-1$.
 - a) Dla każdego łańcucha \mathcal{B}_k , $k \geq 2$, zachodzi $Q_k \cap P_1 = \emptyset$, gdyż digraf pokrycia $d\text{-cov}(P)$ jest acykliczny.
 - b) Dla każdych dwóch łańcuchów \mathcal{B}_k i \mathcal{B}'_l , $k \geq 2$ lub $l \geq 2$, w których $B_1 = B'_1$ zachodzi $B_k \neq B'_l$, gdyż ma strukturę drzewiastą.

Własności 1 i 2 opisują charakter powiązań (w pewnym sensie sąsiedztwo) między dwoma pełnymi poddigrafami dwudzielnymi, a własność 3 dotyczy postaci ciągów takich poddigrafów i możliwych powiązań między takimi ciągami.

Dwudzielne poddigrafy B_i digrafu $d\text{-cov}(P)$ będziemy wkładali w sposób kanoniczny (jak opisano na początku tego Punktu), przy tym kolejność elementów ze zbioru P_i oraz elementów ze zbioru Q_i na grzbiecie książki będzie definiowana w zależności od struktury drzewa, będącego digrafem źródłowym digrafu $d\text{-cov}(P)$.

Algorytm umieszczania w książce prostego N -wolnego zbioru uporządkowanego P o strukturze drzewiastej bazuje na rekurencyjnym umieszczaniu jego digrafu źródłowego, będącego drzewem, przy tym jednocześnie jest wyznaczane optymalne rozszerzenie liniowe L zbioru P . Prostym N -wolnym zbiorem uporządkowanym P o strukturze drzewiastej jest dany jako digraf źródłowy T digrafu $d\text{-cov}(P)$, reprezentowany przez zbiory bezpośrednich poprzedników i zbiory bezpośrednich następników poszczególnych wierzchołków, czyli przez zbiory elementów pokrywanych $\{N^-(t) : t \in V(T)\}$ i zbiory elementów pokrywających $\{N^+(t) : t \in V(T)\}$. Każdy wierzchołek w T z incydentnymi z nim łukami odpowiada pełnemu poddigrafowi dwudzielnemu w $d\text{-cov}(P)$, a dokładniej, dla ustalonego $t \in V(T)$, zbiory $N^-(t)$ i $N^+(t)$ tworzą dolny i górny zbiór pełnego poddigrafu dwudzielnego, generowanego w P przez wierzchołek t drzewa T .

Wkładanie zbioru P rozpoczynamy od dowolnego wierzchołka w w drzewie T i rekurencyjnie przeszukujemy drzewo T zaczynając w wierzchołku w . Podczas tego przeszukiwania są numerowane łuki drzewa T , a więc odpowiadające im elementy zbioru P . Poruszamy się metodą zgłębiania (procedura `dfs` w programie poniżej). Niech $B_t = (P_t \cup Q_t, P_t \times Q_t)$ oznacza pełny dwudzielny poddigraf digrafu $d\text{-cov}(P)$, odpowiadający przeglądaniu wierzchołkowi t w drzewie T . Kolejność przeglądania wierzchołków sąsiednich z t w drzewie T jest następująca:

1. Najpierw są przeglądane wierzchołki s w zbiorze $\{N^-(t)\}$ i łuk (s, t) jest numerowany po przejrzeniu całego poddrzewa drzewa T zaczepionego w s , a zatem, elementy zbioru P związane z tym poddrzewem są umieszczane w budowanym rozszerzeniu liniowym przed (s, t) ; to oznacza, że

element (s, t) jest najdalej położonym w L elementem maksymalnym w poddigrafie B_s ;

2. Następnie są przeglądane wierzchołki s w zbiorze $\{N^+(t)\}$ i łuk (t, s) jest numerowany zanim zostanie przejrzone poddrzewo drzewa T zaczepionego w s , a zatem, elementy zbioru P związane z tym poddrzewem są umieszczane w budowanym rozszerzeniu liniowym po (t, s) ; to oznacza, że element (t, s) jest najwcześniej położonym w L elementem minimalnym w poddigrafie B_s ;

Poprawność prezentowanego algorytmu wynika z założenia, że powiązania poddigrafów pełnych w digrafie pokrycia $d\text{-cov}(P)$ mają drzewiastą strukturę, mogą więc być wkładane do książki niezależnie jeden od drugiego. Ponadto, na podstawie Lematu 8, każdy taki poddigraf pełny może być kanonicznie umieszczony na najmniejszej liczbie stron z wyróżnionymi elementami minimalnym i maksymalnym, leżącymi odpowiednio poniżej i powyżej wszystkich pozostałych elementów tego poddigrafu – tym elementom odpowiadają łuki (s, t) i (t, s) opisane odpowiednio w punktach 1 i 2 powyżej. \square

Algorytm naszkicowany w dowodzie ma bardzo prostą postać w pseudokodzie języku programowania, głównie dzięki zastosowaniu rekurencji.

```
procedure Numeracja_Prosty_N-Wolny_Drzewiasty(var a);
```

```
  Dane:  $N^-(t)$  i  $N^+(t)$  dla  $t \in V(T)$ 
```

```
  Wynik: Uporządkowanie łuków drzewa  $T$ , a więc elementów
  zbioru  $P$ , dla którego  $T$  jest digrafem źródłowym jego
  digrafu pokrycia. Dane i wyniki są umieszczone w tablicy
   $a[1..n, 1..n]$ , gdzie  $n$  jest liczbą wierzchołków w drzewie  $T$ .
  Jako dane,  $a[i, j] = -1$ , jeśli  $(i, j)$  jest łukiem w  $T$ , a jako
  wynik  $a[i, j]$  jest numerem łuku  $(i, j)$  w uporządkowaniu
  liniowym elementów zbioru  $P$ , dla którego zbiór  $P$  ma
  umieszczenie na najmniejszej liczbie stron.
```

```
  var nrk, w: integer;
```

```
  procedure dfs(vp, t: integer);
```

```
    var s: integer;
```

```
  begin
```

```
    for s:=1 to n do
```

```
      if  $a[s, t] < 0$  then begin
```

```
        dfs(t, s);
```

```
        nrk:=nrk+1;
```

```
         $a[s, t] := nrk$ 
```

```
      end;
```

```
    for s:=1 to n do
```

```
      if  $(a[t, s] < 0)$  and  $(s \neq vp)$  then begin
```

```
        nrk:=nrk+1;
```

```
         $a[t, s] := nrk$ ;
```

```
        dfs(t, s)
```

```
      end;
```

```
  end;
```

```

begin
  nrk:=0;
  read(w);
  dfs(-1,w)
  {Przeгляд drzewa  $T$  od dowolnego wierzchołka  $w$  }
end;

```

Na Rysunku 6.7 jest zamieszczony przykład prostego N -wolnego zbioru uporządkowanego, jego digraf źródłowy oraz umieszczenie wygenerowane przez program będący realizacją przedstawionego powyżej algorytmu.

Założenie, że Twierdzenie 22 dotyczy prostych N -wolnych zbiorów uporządkowanych, jest istotne. Jeśli dopuścimy, że w N -wolnym zbiorze uporządkowanym P o strukturze drzewiastej mamy $|Q_i \cap P_j| > 1$ dla pewnych i oraz j , $i \neq j$, to wzór na liczbę stron $pn(P)$ podany w tym Twierdzeniu może nie być prawdziwy. Na przykład, jeśli relacje pokrycia w zbiorze P można przedstawić jako sumę dwóch dwudzielnych pełnych digrafów $B_1 = K_{1,k}$ i $B_2 = K_{k,1}$ oraz $|Q_1 \cap P_2| = k$, dla $k \geq 2$, to na podstawie Twierdzenia 22 mamy $pn(P) = 1$, a faktycznie $pn(P) = 2$ na podstawie Twierdzenia 13. Zauważmy że zbiór P jest planarny.

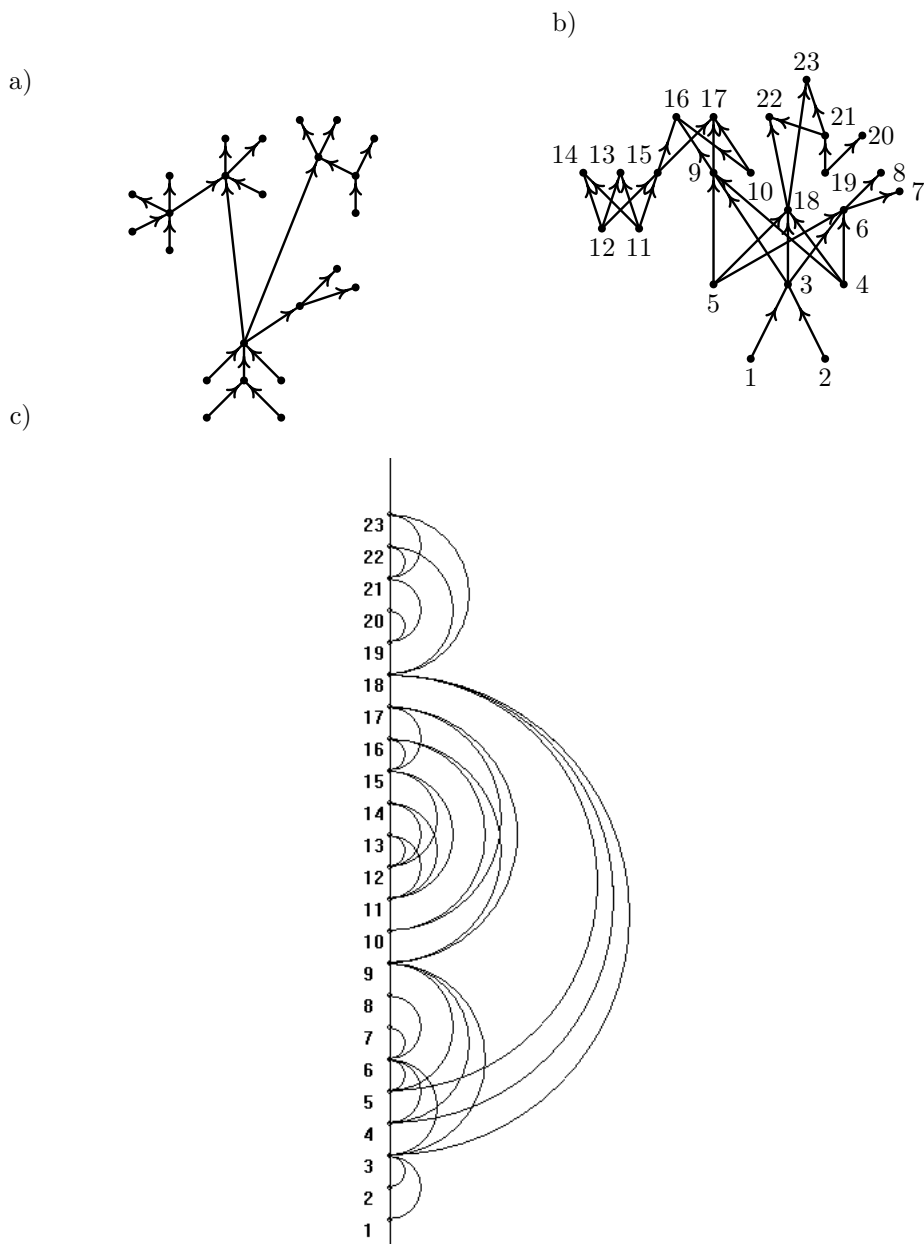
Szczególnym przypadkiem N -wolnego zbioru uporządkowanego jest k -dzielny pełny zbiór uporządkowany (P, \leq) . Załóżmy, że w kolejnych klasach dzielności tego zbioru znajduje się l_1, l_2, \dots, l_{k+1} elementów. Zbiór łuków jego digrafu pokrycia rozkłada się na dwudzielne pełne zbiory uporządkowane $B_i = (P_i, Q_i)$, gdzie $|P_i| = l_i$, $|Q_i| = l_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ oraz $|Q_i \cap P_{i+1}| = l_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \dots, k-1$. Struktura przecięć zbiorów B_i tworzy więc ciąg (drogę), a więc przypomina drzewo, jednak jego digraf źródłowy zawiera wielokrotne łuki. Dla $k > 3$ znane są jedynie oszacowania z góry liczby stron dla k -dzielnych pełnych zbiorów uporządkowanych, patrz [1].

Te kontrprzykłady dla Twierdzenia 22 w rodzinie wszystkich N -wolnych zbiorów uporządkowanych stanowią uzasadnienie ograniczenia niektórych naszych rozważań tylko do prostych N -wolnych zbiorów uporządkowanych.

Zauważmy, że dowolny N -wolny zbiór uporządkowany można przetransformować do prostego zbioru N -wolnego zastępując każdy element $x \in Q_i \cap P_j$, jeśli $|Q_i \cap P_j| > 1$, przez dwa elementy x' i x'' pozostające w relacji pokrycia $x' < x''$ i zastępując element x w Q_i przez x' oraz element x w P_j przez x'' . Ta transformacja wprowadza cykle w digrafie źródłowym w miejsce łuków równoległych i równości w Twierdzeniu 22 nie daje się zachować. W następnym Podrozdziale podajemy oszacowanie liczby stron dla dowolnych N -wolnych zbiorów uporządkowanych.

6.3. Oszacowanie liczby stron dla dowolnych posetów N -wolnych

W tym Podrozdziale podajemy oszacowanie liczby stron dla dowolnych N -wolnych zbiorów uporządkowanych. Oszacowanie w tym przypadku wynika z faktu, że każdy N -wolny zbiór uporządkowany zawiera prosty N -wolny



Rysunek 6.7. Prosty N -wolny drzewiasty zbiór uporządkowany (b), jego digraf źródłowy (a) i umieszczenie tego zbioru na minimalnej liczbie stron równej 3 (c)

podzbiór uporządkowany, który ma strukturę drzewiastą, możemy zatem skorzystać z wyników Podrozdziału 6.2.

Jeśli N -wolny zbiór uporządkowany P nie ma drzewiastej struktury, to zgodnie z definicją takiej struktury, digraf źródłowy $T = (V, E)$ digrafu pokrycia $d\text{-cov}(P)$ zawiera łuk $e \in E$ taki, że digraf $T - e$, powstały przez usunięcie łuku e z digrafu T , pozostaje spójny. (Cały czas zakładamy, że digraf T jest spójny.) Jeśli zaś N -wolny zbiór uporządkowany ma strukturę drzewiastą, ale nie jest prosty, to w drzewie T występują łuki równoległe (wie-

lokrotne), czyli łączące te same wierzchołki – dwa łuki równoległe traktujemy jako cykl. Stąd wynika, że aby N -wolny zbiór uporządkowany P zredukować do prostego N -wolnego zbioru uporządkowanego P' o strukturze drzewiastej, należy usunąć z jego digrafu źródłowego T łuki, które rozspajają wszystkie cykle w T . Liczba takich łuków jest znana jako *liczba cyklomatyczna* i wynosi $m(T) - n(T) + 1$, gdzie $m(T)$ jest liczbą łuków w T a $n(T)$ jest liczbą wierzchołków w T . Stąd otrzymujemy następujące Twierdzenie i oszacowanie liczby stron dla dowolnego N -wolnego zbioru uporządkowanego.

Twierdzenie 23. *Niech P będzie N -wolnym zbiorem uporządkowanym i niech $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ będą dwoma rozkładami zbioru P . Niech $T = (V, E)$ oznacza digraf źródłowy digrafu pokrycia $d\text{-cov}(P)$ zbioru P . Wtedy spełniona jest nierówność:*

$$pn(P) \leq \max_{i \in I} \min\{|P_i|, |Q_i|\} + m(T) - n(T) + 1$$

lub równoważnie:

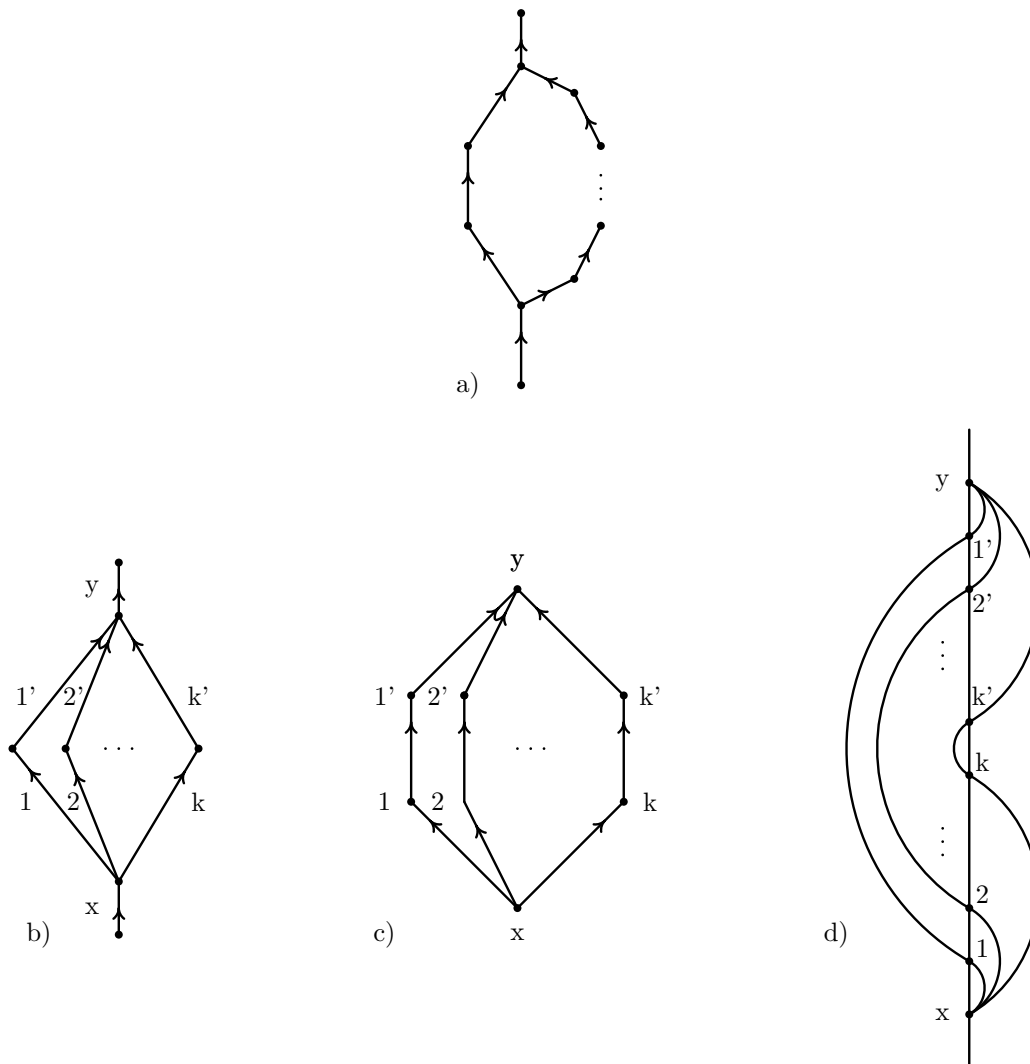
$$pn(P) \leq \max_{i \in I} \min\{|P_i|, |Q_i|\} + |P| - |I| + 1.$$

Dowód. Przedstawimy sposób umieszczenia zbioru uporządkowanego P , spełniającego założenia Twierdzenia, w książce o liczbie stron nie większej niż wartość wyrażenia po prawej stronie nierówności. Jeśli T nie jest drzewem, to usuwamy z niego $m(T) - n(T) + 1$ łuków – oznaczmy ten zbiór łuków przez F – tak, aby digraf $T' = (V, E - F)$ był drzewem. Usunięcie łuków ze zbioru F odpowiada usunięciu wierzchołków odpowiadających tym łukom z digrafu pokrycia $d\text{-cov}(P)$ zbioru P – oznaczmy ten zbiór wierzchołków przez W , a otrzymany digraf – przez D . Teraz umieszczamy w książce digraf D , czyli digraf pokrycia $d\text{-cov}(P)$ z usuniętymi wierzchołkami ze zbioru W . Ponieważ digraf źródłowy T' digrafu D jest drzewem, więc na podstawie Twierdzenia 22 do jego umieszczenia w książce potrzeba $\max_{i \in I} \min\{|P_i|, |Q_i|\}$ stron, a faktycznie co najwyżej tyle stron, gdyż niektóre zbiory P_i i Q_i mogły zostać zredukowane, jeśli ich elementy znalazły się w zbiorze W . Dla umieszczenia w książce łuków usuniętych wraz z wierzchołkami ze zbioru W potrzeba nie więcej niż $|W|$ stron – na każdej z tych stron umieszczamy wszystkie łuki incydentne z danym wierzchołkiem ze zbioru W . To kończy dowód pierwszej nierówności w Twierdzeniu. By uzasadnić drugą nierówność wystarczy zauważyć, że łukom w digrafie T odpowiadają elementy zbioru P , a wierzchołkom w digrafie T odpowiadają dwudzielne digrafy pełne w digrafie pokrycia $d\text{-cov}(P)$ zbioru P . \square

W ogólnym przypadku powyższego oszacowania nie można poprawić. Na Rysunku 6.8(a) jest pokazany digraf źródłowy zbioru uporządkowanego, dla którego oszacowanie w Twierdzeniu 23 wynosi 2 i tyle wynosi liczba stron tego zbioru, gdyż jego diagram zawiera cykl, a zatem liczba stron jest większa niż jeden. Z drugiej strony, oszacowanie w powyższym Twierdzeniu może być dowolnie złe, gdy umieszczenie łuków wraz z wierzchołkami ze zbioru W

nie wymaga aż tylu nowych stron. Odpowiedni przykład digrafu źródłowego jest pokazany na Rysunku 6.8(b). W tym przypadku wartość wyrażenia po prawej stronie nierówności wynosi $1 + 2(k + 1) - (k + 4) + 1 = k$, ale zbiór może być umieszczony na dwóch stronach, co pokazano na Rysunku 6.8(d), gdyż wszystkie łuki incydentne z wierzchołkami ze zbioru W mogą być umieszczone na dwóch tych samych stronach.

Ten ostatni przykład sugeruje, że w opisanym w dowodzie ostatniego Twierdzenia algorytmie umieszczania w książce dowolnego zbioru N -wolnego, liczbę potrzebnych stron można zmniejszyć wybierając do zbioru F w pierwszej kolejności te łuki, których jeden z końców ma stopień 2 w digrafie T .



Rysunek 6.8. Digrafy źródłowe N -wolnych zbiorów uporządkowanych, dla których oszacowanie w Twierdzeniu 23 jest napięte (a) i może być dowolnie złe (b). Zbiór uporządkowany, dla którego digraf (b) jest źródłowy, jest pokazany na Rysunku (c), a jego umieszczenie na dwóch stronach jest przedstawione na Rysunku (d).

6.4. Umieszczanie w książce dowolnych posetów

Problem umieszczania dowolnych zbiorów uporządkowanych w książce może być sprowadzony do problemu umieszczania zbiorów N -wolnych i skorzystania z dotychczasowych wyników dla zbiorów N -wolnych. W tym celu należy najpierw przetransformować dany zbiór uporządkowany P do zbioru N -wolnego z zachowaniem relacji na oryginalnych elementach zbioru P . Takie transformacje są znane – podane zostały na przykład w pracy [60], w powiązaniu z problemem minimalizacji liczby czynności pozornych w sieciach typu PERT. Ideą tych transformacji jest zlikwidowanie wszystkich poddigrafów tworzących N -ki. W cytowanej pracy zastosowano dwie operacje i przedstawiono dwa bazujące na nich algorytmy. Pierwsza operacja polega na podziale łuków, które są przekątnymi N -ek, a druga – jest uogólnieniem tej pierwszej w tym sensie, że wprowadzane są pojedyncze wierzchołki dla pewnych podzbiorów N -ek. W obu przypadkach korzysta się z warunku 5 w Twierdzeniu 20.

6.4.1. Podziały łuków

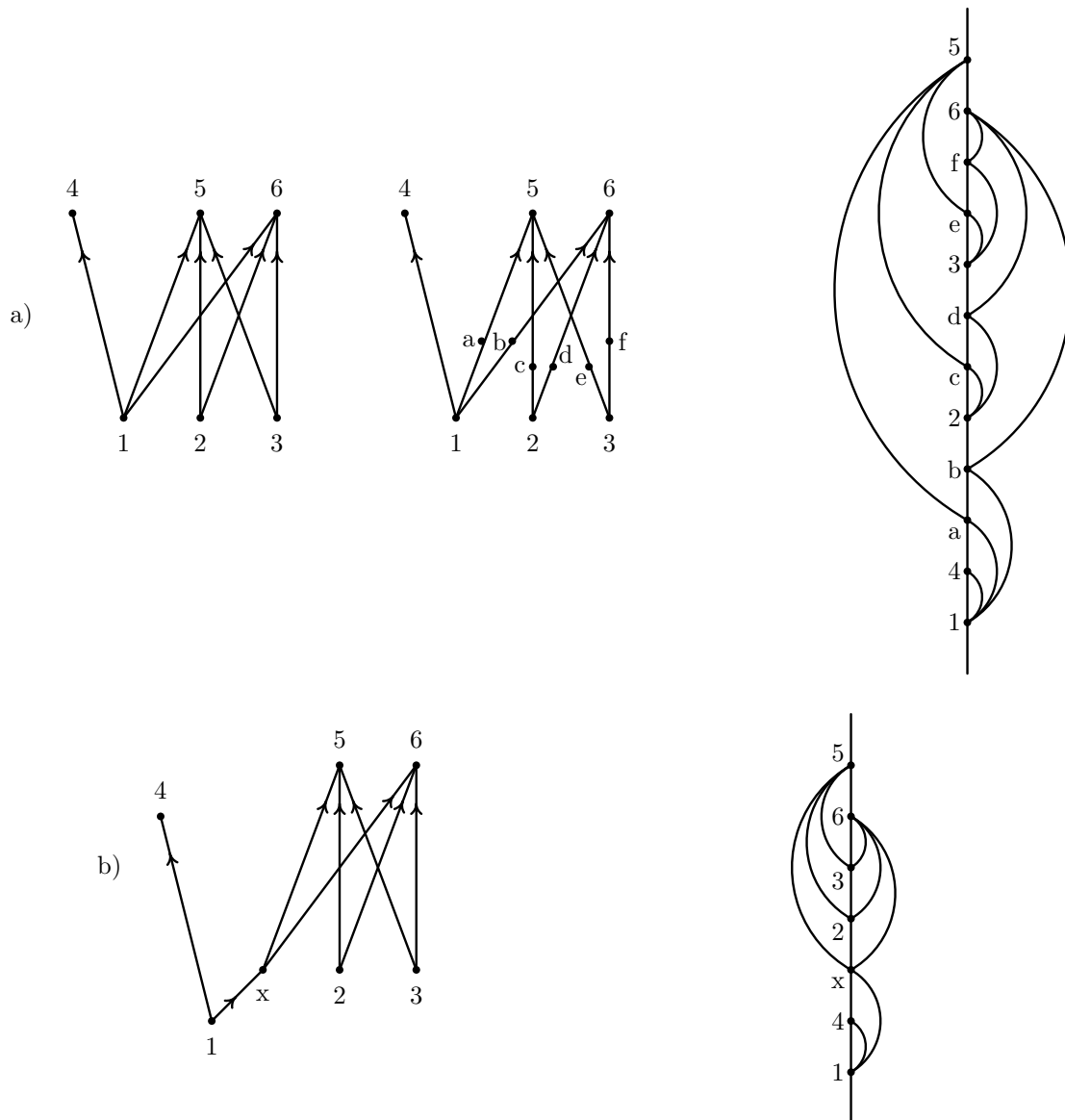
Jeśli digraf $D = (P, A)$, będący digrafem pokrycia uporządkowanego zbioru P nie jest N -wolny, to nie spełnia warunku 5 w Twierdzeniu 20 dla pewnych elementów $p, q \in P$. Aby przetransformować digraf D do digrafu N -wolnego, dzieli się pojedynczymi wierzchołkami wszystkie łuki (r, s) wychodzące z takich p i q , czyli $r = p$ lub $r = q$, z wyjątkiem tych, dla których r ma tylko jeden następnik, lub s ma tylko jeden poprzednik, czyli $|N^+(r)| = 1$ lub $|N^-(s)| = 1$. Digraf z podzielonymi łukami nazywamy *podziałem digrafu*.

Zauważmy, że operacji podziału łuku w digrafie odpowiada przy wkładaniu digrafu do książki "złamanie" tego łuku na grzbiecie książki, czyli ten łuk może przeciąć grzbiet książki w punkcie, który nie jest elementem zbioru P przechodząc między dwoma stronami książki. Jest to więc topologiczne umieszczanie digrafów i grafów w książce, patrz Punkt 3.5.3.

Na Rysunku 6.9(a) jest pokazany digraf, jego podział i umieszczenie podziału na dwóch stronach w książce.

6.4.2. Uogólnione podziały łuków

W przykładzie na Rysunku 6.9(a) zostały podzielone niemal wszystkie łuki. Starając się zmniejszyć liczbę dzielonych łuków, w pracy [60] zaproponowano *uogólniony podział łuków* polegający na dołączeniu nowego wierzchołka między podzbiórami wierzchołków. Na Rysunku 6.9(b) jest pokazany uogólniony podział digrafu, którego podział jest przedstawiony na Rysunku 6.9(a) – zamiast dzielenia niemal wszystkich łuków wystarczy wprowadzić tylko jeden nowy wierzchołek. Pokazane jest również umieszczenie uogólnionego podziału na dwóch stronach w książce. W tym przypadku mamy do czynienia z uogólnionym "złamaniem" łuków – łuki $(1, 5)$ i $(1, 6)$ zostały złamane w jednym wierzchołku x .



Rysunek 6.9. Podział digrafu i jego umieszczenie w książce (a). Uogólniony podział tego samego digrafu i jego umieszczenie w książce (b).

6.4.3. Algorytm umieszczania w książce dowolnych posetów

Przedstawione w tym Podrozdziale algorytmy sprowadzania dowolnych zbiorów uporządkowanych do N -wolnych zbiorów uporządkowanych prowadzą do algorytmu umieszczania w książce dowolnych zbiorów uporządkowanych, przy czym te umieszczenia w ogólnym przypadku mogą być topologiczne, to znaczy niektóre porównywalności są zachowane za pośrednictwem elementów, o które zbiór jest powiększany w procesie sprowadzania do zbioru N -wolnego. Algorytm ma następującą postać:

Dane: Digraf $D = (P, A)$ – digraf pokrycia uporządkowanego zbioru P .

Wynik: Umieszczenie (w ogólności, uogólnione topologiczne) digrafu D

w książce na możliwie małej liczbie stron.

Algorytm:

jeśli D jest N -wolny

to $D_N \leftarrow D$

w przeciwnym razie

$D_N \leftarrow$ podział lub uogólniony podział digrafu D ;

jeśli D_N ma strukturę drzewiastą

to znajdź optymalne umieszczenie D_N w książce

w przeciwnym razie

zastosuj do D_N algorytm z dowodu nierówności w Twierdzeniu 23

Tylko w przypadku, gdy digraf D odpowiada prostemu zbiorowi N -wolnemu o strukturze drzewiastej, algorytm generuje optymalne włożenie D do książki. W pozostałych przypadkach włożenie do książki może być topologiczne lub uogólnione topologiczne i liczba zajmowanych stron książki może nie być minimalna. W ogólnym przypadku trudno jest podać oszacowanie liczby zajmowanych stron, gdyż nie jest znane oszacowanie liczby dodatkowych elementów, dodawanych by uzyskać zbiór N -wolny. Wyniki innych prac (np. [21]) sugerują, że topologiczne włożenie do książki na ogół wymaga mniejszej liczby stron niż włożenie bez podziału łuków.

7. Umieszczanie w książce N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych

W tym Rozdziale zajmujemy się umieszczaniem w książce N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych i dowodzimy Twierdzenia 27, które jest głównym wynikiem pracy, że jeśli taki zbiór jest dany w postaci digrafu porównywalności jako płaski rysunek skierowany do góry, to taki zbiór można umieścić w książce na dwóch stronach. Dowód tego Twierdzenia ma postać algorytmu umieszczania, którego złożoność jest wielomianowa.

Założenie o postaci, w jakiej jest dany N -wolny planarny zbiór uporządkowany, jest rezultatem Twierdzenia 15, z którego wynika, że istnienie pełnej charakteryzacji (czyli w postaci warunku "wtedy i tylko wtedy") N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych, która byłaby łatwa do sprawdzenia, czyli za pomocą algorytmu wielomianowego, jest mało prawdopodobne. A zatem jest mało prawdopodobne istnienie algorytmu sprawdzania, czy zbiór uporządkowany (P, \leq) jest do góry planarny, i tworzenia jego płaskiego rysunku skierowanego do góry.

W Podrozdziale 7.1, zamieszczamy opis struktury digrafów porównywalności N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych, a w Podrozdziale 7.2 badamy związek między planarnością digrafów porównywalności N -wolnych zbiorów uporządkowanych a planarnością ich digrafów źródłowych. Podrozdział 7.3 zawiera główny wynik pracy.

Tam, gdzie piszemy, że zbiór uporządkowany P jest dany w postaci swojego digrafu porównywalności D jako płaski rysunek skierowany do góry to zakładamy, że wierzchołki digrafu D są przyporządkowane różnym punktom płaszczyzny, łuki są fragmentami krzywych prostych, monotonicznych względem osi pionowej, i żadne dwa łuki nie przecinają się poza ewentualnie wspólnymi końcami. Umieszczenie digrafu na płaszczyźnie reprezentuje klasę umieszczeń, które definiują ten sam zbiór ścian (czyli spójnych obszarów płaszczyzny), lub równoważnie – cykle, które ograniczają ściany, z zewnętrzną ścianą włącznie.

7.1. Struktura N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych

Niech (P, \leq) będzie N -wolnym zbiorem uporządkowanym i niech $D = (P, A)$ oznacza digraf pokrycia d -cov(P) zbioru P . Zgodnie z Twierdzeniem 20, istnieją dwa rozkłady $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ zbioru P na podzbiory takie, że zbiór łuków A digrafu D można przedstawić w postaci sumy

$$A = \bigcup_{i \in I} E(B_i)$$

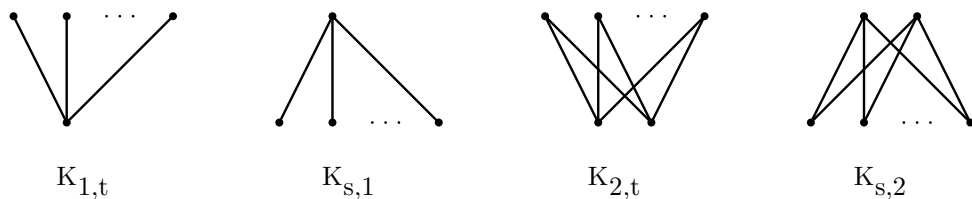
gdzie $B_i = (P_i \cup Q_i, P_i \times Q_i)$ ($i \in I$) jest poddigrafem dwudzielnym pełnym digrafu D ; rozkłady te mogą być *niewłaściwe* w tym sensie, że niektóre zbiory P_i i Q_i mogą być puste. Będziemy zakładać, że rozkłady $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ zbioru P są *elementarne*, tzn. że jeśli w parze (P_i, Q_i) jeden ze zbiorów jest pusty, to drugi zbiór zawiera dokładnie jeden element. Jeśli ten warunek nie jest spełniony, to należy odpowiednio zmodyfikować dany rozkład, "rozdrabniając" takie pary.

Jeśli N -wolny zbiór uporządkowany (P, \leq) jest planarny, to zgodnie z Twierdzeniem Kuratowskiego digraf D nie może zawierać pełnego dwudzielnego poddigrafu $B_i = (P_i \cup Q_i, P_i \times Q_i)$, w którym oba zbiory P_i i Q_i zawierają co najmniej trzy elementy każdy. Stąd otrzymujemy następujący lemat:

Lemat 10. *Jeśli $D = (P, A)$ jest digrafem pokrycia N -wolnego planarnego zbioru uporządkowanego (P, \leq) , to zbiór łuków A jest sumą łukowo rozłącznych zbiorów łuków poddigrafów dwudzielnym pełnym $B_i = (P_i \cup Q_i, P_i \times Q_i)$, dla których jest spełniony jeden z warunków: $s = 1$ i $t \geq 1$ lub $s \geq 1$ i $t = 1$ lub $s = 2$ i $t \geq 2$ lub $s \geq 2$ i $t = 2$, gdzie $s = |P_i|$ $t = |Q_i|$.*

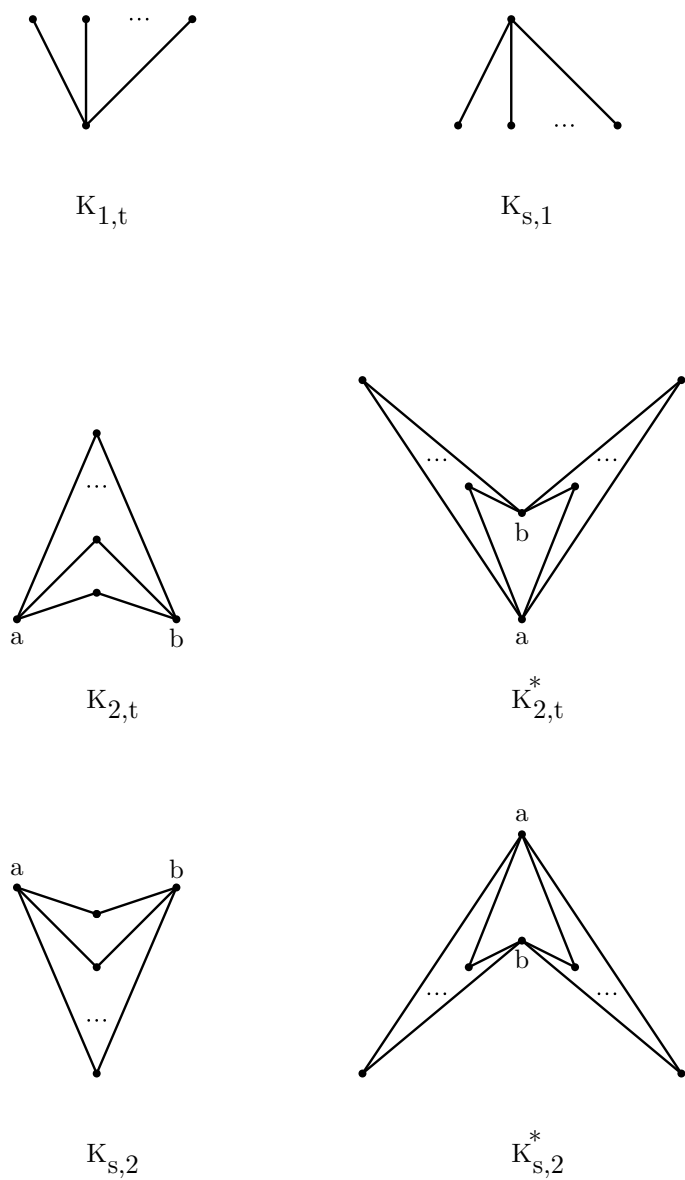
Dwudzielne digrafy pełne, występujące w powyższym lemacie, oznaczamy odpowiednio: $K_{1,t}$, $K_{s,1}$, $K_{2,t}$, $K_{s,2}$, patrz Rysunek 7.1. Przyjmijmy dla dwudzielnego digrafu (posetu) pełnego B , że $P(B)$ oznacza "dolny" zbiór wierzchołków w B , a $Q(B)$ oznacza "górnny" zbiór wierzchołków w B . Oznaczmy ponadto $P(K_{2,t}) = \{a, b\}$, a także $Q(K_{s,2}) = \{a, b\}$.

Biorąc pod uwagę, że $D = (P, A)$ jest digrafem pokrycia N -wolnego planarnego zbioru uporządkowanego P , te digrafy pełne mają ograniczoną liczbę przedstawień na płaszczyźnie.



Rysunek 7.1. Dwudzielne digrafy pełne B_i , dopuszczalne w digrafach pokrycia N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych

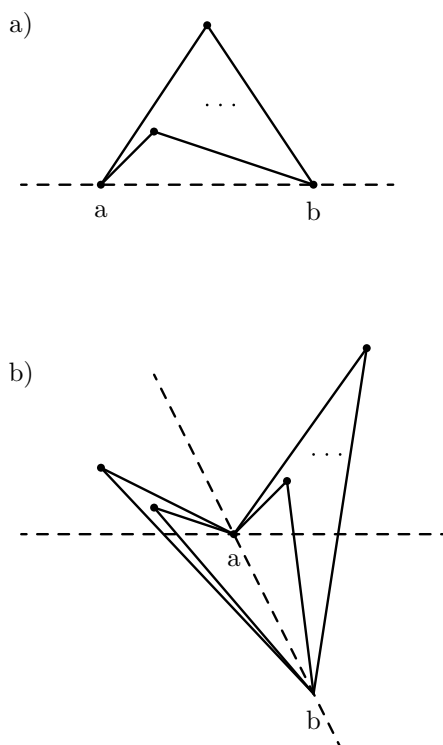
Lemat 11. *Jeśli $D = (P, A)$ jest digrafem pokrycia N -wolnego planarnego zbioru uporządkowanego (P, \leq) , to możliwe umieszczenia na płaszczyźnie jego poddigrafów dwudzielnym pełnym $K_{1,t}$, $K_{s,1}$, $K_{2,t}$, $K_{s,2}$ są takie, jak na Rysunku 7.2, z dokładnością do liczby wierzchołków w klasach dwudzielnosci, które mogą zawierać więcej niż dwa wierzchołki.*



Rysunek 7.2. Możliwe umieszczenia na płaszczyźnie poddigrafów dwudzielnych pełnych w N -wolnym planarnym digrafie pokrycia

Dowód. Umieszczenie digrafów $K_{1,t}$ i $K_{s,1}$ na płaszczyźnie nie wymaga uzasadnienia. W przypadku digrafów $K_{2,t}$ i $K_{s,2}$ rozumowanie jest podobne, rozważmy więc jeden z tych digrafów, np. $K_{2,t}$. Wierzchołki a i b albo leżą na prostej poziomej, albo np. a leży powyżej b , patrz Rysunek 7.3. W pierwszym przypadku, każdy wierzchołek ze zbioru $Q(K_{2,t})$ leży powyżej tej prostej i, aby łuki nie przecinały się, boki trójkątów utworzonych przez wierzchołki ze zbioru $Q(K_{2,t})$ i łuki łączące te wierzchołki z wierzchołkami a i b powinny tworzyć ciąg zagłębiający się. W drugim przypadku, wierzchołki ze zbioru $Q(K_{2,t})$ leżą powyżej prostej poziomej przechodzącej przez wierzchołek a oraz na lewo albo na prawo od prostej przechodzącej przez wierzchołki

a i b . Podzbiory wierzchołków na lewo i na prawo od tej prostej generują zagłębiające się boki trójkątów z łukami idącymi od wierzchołków a i b . \square



Rysunek 7.3. Możliwe umieszczenia na płaszczyźnie digrafu $K_{2,t}$

Dalej oznaczamy przez B jeden z digrafów pełnych $K_{1,t}$, $K_{s,1}$, $K_{2,t}$, $K_{s,2}$.

Lemat 12. Niech P będzie N -wolnym planarnym zbiorem uporządkowanym. Jeśli $B = K_{2,t}$ jest jednym z poddigrafów dwudzielnych pełnych w digrafie pokrycia $d\text{-cov}(P)$ zbioru P , to jest spełniony co najwyżej jeden z następujących wykluczających się warunków:

- istnieje $x \in P$, $x \notin B$, taki że $x < a$ i $x < b$,
- istnieje $y \in P$, $y \notin B$, taki że $c < y$ i $d < y$, gdzie $c, d \in Q(B)$ oraz $c \neq d$.

Jeśli $B = K_{s,2}$ jest jednym z poddigrafów dwudzielnych pełnych w digrafie pokrycia $d\text{-cov}(P)$ zbioru P , to jest spełniony co najwyżej jeden z następujących wykluczających się warunków:

- istnieje $y \in P$, $y \notin B$, taki że $a < y$ i $b < y$,
- istnieje $x \in P$, $x \notin B$, taki że $x < c$ i $x < d$, gdzie $c, d \in P(B)$ oraz $c \neq d$.

Dowód. Rozważmy przypadek gdy $B = K_{2,t}$. W przypadku drugiego typu poddigrafów rozumowanie jest podobne. Odwołajmy się do Rysunków 7.2 i 7.3. W przypadku z Rysunku 7.3(a), może istnieć poza B element x , który jest jednocześnie mniejszy od a i b , natomiast nie może istnieć element y , który jest większy od dwóch różnych elementów w zbiorze $Q(B)$. Zaś w przypadku z Rysunku 7.3(b), może istnieć element y , który jest większy od dwóch różnych elementów w zbiorze $Q(B)$, ale wtedy żaden element poza B nie jest jednocześnie mniejszy od a i b . \square

Uogólnieniem Lematów 11 i 12 jest następane Twierdzenie, które określa możliwe powiązania między pełnymi dwudzielnymi poddigrafami w digrafie pokrycia N -wolnego planarnego zbioru uporządkowanego. Przypomnijmy, że dla dowolnego N -wolnego zbioru uporządkowanego (P, \leq) , rozkłady $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ zbioru P spełniają warunki: dla dwóch poddigrafów pełnych B_k oraz B_l , $k \neq l$, mamy $P(B_k) \cap P(B_l) = \emptyset$ oraz $Q(B_k) \cap Q(B_l) = \emptyset$, a dopuszczalne jest jedynie, by $P(B_k) \cap Q(B_l) \neq \emptyset$ albo $P(B_l) \cap Q(B_k) \neq \emptyset$.

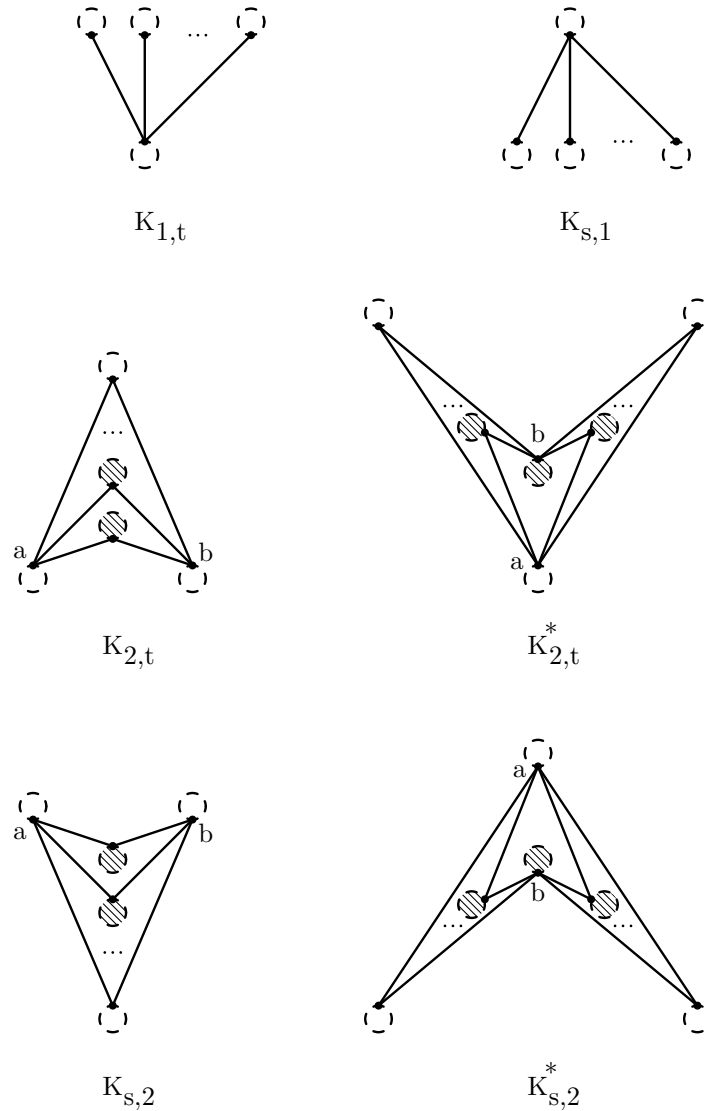
Twierdzenie 24. *Jeśli $D = (P, A)$ jest digrafem pokrycia N -wolnego planarnego zbioru uporządkowanego (P, \leq) , to możliwe umieszczenia na płaszczyźnie jego poddigrafów dwudzielnych pełnych $K_{1,t}$, $K_{s,1}$, $K_{2,t}$, $K_{s,2}$ i ich wzajemne powiązania są takie, jak na Rysunku 7.4, gdzie zaciemniony owal oznacza, że wierzchołek, w którym jest zaczepiony ten owal, musi być wierzchołkiem rozspajającym digrafu, a wierzchołki, w których są doczepione owale otwarte, mogą, ale nie muszą być wierzchołkami rozspajającymi.*

Dowód. Na Rysunku 7.4 przedstawiono konfiguracje możliwych umieszczeń na płaszczyźnie poddigrafów dwudzielnych pełnych uzupełnione owalami. Dopuszczalne miejsce i sposób doczepienia owalu (poddigrafu dwudzielnego pełnego) wynika z dopuszczalności powiązań między poddigrafami pełnymi w digrafie pokrycia N -wolnego planarnego zbioru uporządkowanego P .

W każdym wierzchołku może być doczepiony poddigraf dwudzielny pełny wierzchołkiem z przeciwległego zbioru w dwudzielnej partycji i tylko jeden taki poddigraf. Doczepiony poddigraf dwudzielny pełny może zawierać inny wierzchołek w tym samym swoim zbiorze w dwudzielnej partycji, wspólny z tym samym lub z innym poddigrafem dwudzielnym pełnym – owal otwarty oznacza tak dołączony poddigraf dwudzielny pełny. Wierzchołek, w którym jest on doczepiony, nie musi być rozspajający.

Pewne wierzchołki w płaskich umieszczeniach poddigrafów dwudzielnych pełnych znajdują się w obszarach "zamkniętych", z których nie ma dostępu do wierzchołków w innych poddigrafach dwudzielnych pełnych, należących do tego samego typu zbioru w dwudzielnej partycji (tj. dolnego lub górnego) – wynika to z Lematu 12. W tej sytuacji, poddigraf dwudzielny pełny może być doczepiony tylko w tym wierzchołku, zatem jest to wierzchołek rozspajający digrafu. Takie wierzchołki oznaczono owalem wypełnionym. \square

W tym Rozdziale, N -wolny planarny zbiór uporządkowany (P, \leq) nie musi być prosty, a więc dwa poddigrafy dwudzielne pełne B_i mogą zawierać więcej niż jeden wierzchołek wspólny, jednak na podstawie Twierdzenia 24,

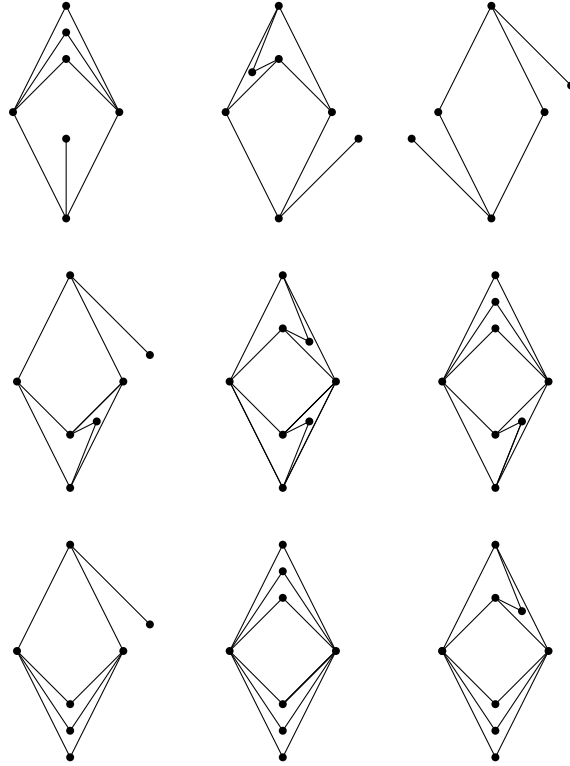


Rysunek 7.4. Możliwe płaskie konfiguracje poddigrafów dwudzielnych pełnych w digrafach pokrycia N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych

ograniczona jest liczba wierzchołków w poddigrafach B_i , które mogą nie być rozspajające. Oznaczmy przez $B_i : B_j$, $i \neq j$, $i, j \in I$ parę różnych poddigrafów dwudzielnych pełnych, które mają przynajmniej jeden wierzchołek wspólny, czyli $|Q_i \cap P_j| \geq 1$. Mamy następujący Wniosek.

Wniosek 5. *Jeśli para $B_i : B_j$, $i \neq j$, $i, j \in I$ ma więcej niż dwa wierzchołki wspólne to $B_i = K_{1,t}$, $t \geq 3$ i $B_j = K_{s,1}$, $s \geq 3$, a w pozostałych przypadkach taka para może mieć jeden lub dwa wierzchołki wspólne.*

Zauważmy, że jedyny wierzchołek wspólny w parze $B_i : B_j$, $i \neq j$, $i, j \in I$ nie musi być wierzchołkiem rozspajającym w digrafie $D(P)$. Na rysunku 7.5 zaprezentowano możliwe połączenia dwóch poddigrafów dwudzielnych pełnych, które mają dwa wierzchołki wspólne.



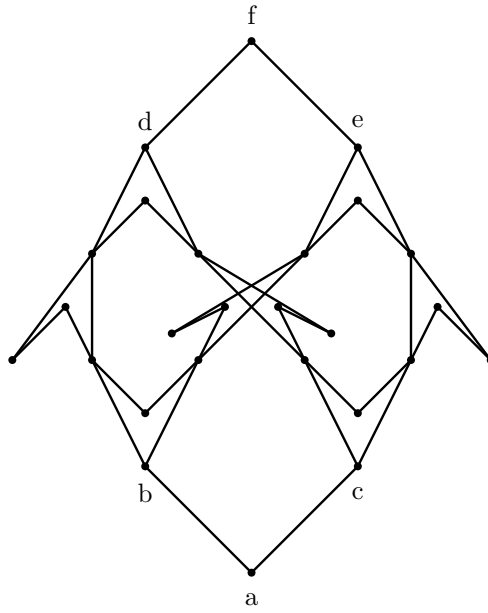
Rysunek 7.5. Połączenia dwóch poddigrafów dwudzielnych pełnych, które mają dwa wierzchołki wspólne, w digrafach pokrycia N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych. W kolejnych wierszach umieszczono: w pierwszym – $K_{1,t} : K_{2,t}$, $K_{1,t} : K_{s,2}$, $K_{1,t} : K_{s,1}$, w drugim – $K_{2,t}^* : K_{s,1}$, $K_{2,t}^* : K_{s,2}^*$, $K_{2,t}^* : K_{2,t}$, w trzecim – $K_{s,2} : K_{s,1}$, $K_{s,2} : K_{2,t}$, $K_{s,2} : K_{s,2}^*$.

Z kolei, na Rysunku 7.6 jest przedstawiony digraf będący digrafem pokrycia N -wolnego zbioru uporządkowanego, w którym poddigrafi dwudzielne pełne spełniają warunki Lematu 10 oraz Twierdzenia 24, ale ten digraf nie jest do góry planarny, czyli zbiór uporządkowany nie jest planarny. Zawiera on bowiem podzbiór, którego diagram jest izomorficzny z digrafem pokazanym na Rysunku 3.7(a).

7.2. Planarność N -wolnych zbiorów uporządkowanych i ich digrafów źródłowych

W tym Podrozdziale zajmujemy się planarnością digrafów pokrycia N -wolnych zbiorów uporządkowanych i ich digrafów źródłowych. Rozważania nie mają bezpośredniego związku z liczbą stron planarnych zbiorów uporządkowanych, dotyczą jedynie ich planarności.

Poszukując warunków na to, aby N -wolny zbiór uporządkowany (P, \leq) był planarny, można postawić pytanie, jakie warunki powinien spełniać digraf źródłowy digrafu pokrycia zbioru P , aby digraf pokrycia był planarny,

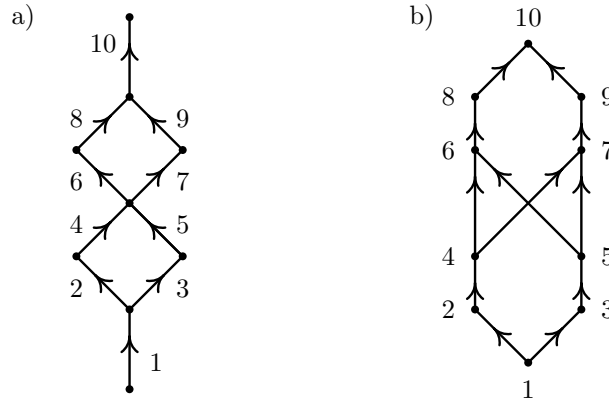


Rysunek 7.6. Przykładowe powiązania między poddigrafami dwudzielnymi pełnymi w N -wolnym zbiorze uporządkowanym, który nie jest planarny

a dokładniej – do góry planarny. To podejście, podobnie jak szukanie pełnej charakteryzacji N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych, ma również małe szanse powodzenia, gdyż zależność między N -wolnymi zbiorami uporządkowanymi i digrafami źródłowymi ich digrafów pokrycia jest bijekcją z dokładnością do utożsamiania wierzchołków bez poprzedników i wierzchołków bez następników w digrafach źródłowych.

Na Rysunku 7.7 jest pokazany digraf do góry płaski (a), którego digraf łukowy (b) nie jest do góry planarny. Stąd wynika w ogólności, że jeśli jakkolwiek digraf F zawiera wierzchołek v taki, że $\text{indeg}(v) \geq 2$, $\text{outdeg}(v) \geq 2$ oraz przynajmniej dwa wierzchołki w $N^+(v)$ mają wspólny następnik i przynajmniej dwa wierzchołki w $N^-(v)$ mają wspólny poprzednik, to digraf łukowy $L(F)$ nie jest do góry planarny.

Z drugiej strony, bez dodatkowych warunków nie jest prawdą, że jeśli digraf łukowy $L(F)$ jest do góry planarny, to jego digraf źródłowy F jest także do góry planarny. Na Rysunku 7.8(a) jest pokazany nieplanarny digraf F (zawiera poddigraf $K_{3,3}$), którego digraf łukowy $D = L(F)$ jest do góry planarny (b) – wierzchołki w digrafie D oznaczono parami końców łuków w digrafie F , którym odpowiadają. Jednak ten sam digraf łukowy D ma inny digraf źródłowy F' , który jest do góry planarny (c). Aby wyjaśnić, jak to jest możliwe, wystarczy odwołać się do zależności między digrafem, a jego digrafem źródłowym – istnieje wzajemna odpowiedniość między wierzchołkami w digrafie źródłowym, a parami zbiorów (P_i, Q_i) w rozkładach $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ zbioru wierzchołków digrafu N -wolnego. W przykładzie na Rysunku 7.8, digraf źródłowy F odpowiada digrafowi N -wolnemu D , w którym mamy $P_1 = \emptyset$ i $Q_1 = \{12, 13, 14\}$, $P_6 = \{26, 36, 46\}$ i $Q_6 = \emptyset$, $P_8 = \{58, 78\}$ i



Rysunek 7.7. Do góry płaski digraf źródłowy (a) i jego digraf łukowy (b), który nie jest do góry planarny

$Q_8 = \emptyset$. Natomiast digraf źródłowy F' odpowiada digrafowi N -wolnemu D' , izomorficznemu z D , w którym, jeśli w parze (P_i, Q_i) jeden ze zbiorów jest pusty, to drugi zbiór zawiera tylko jeden element. Zatem, rozkłady $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ w digrafie D' są elementarne.

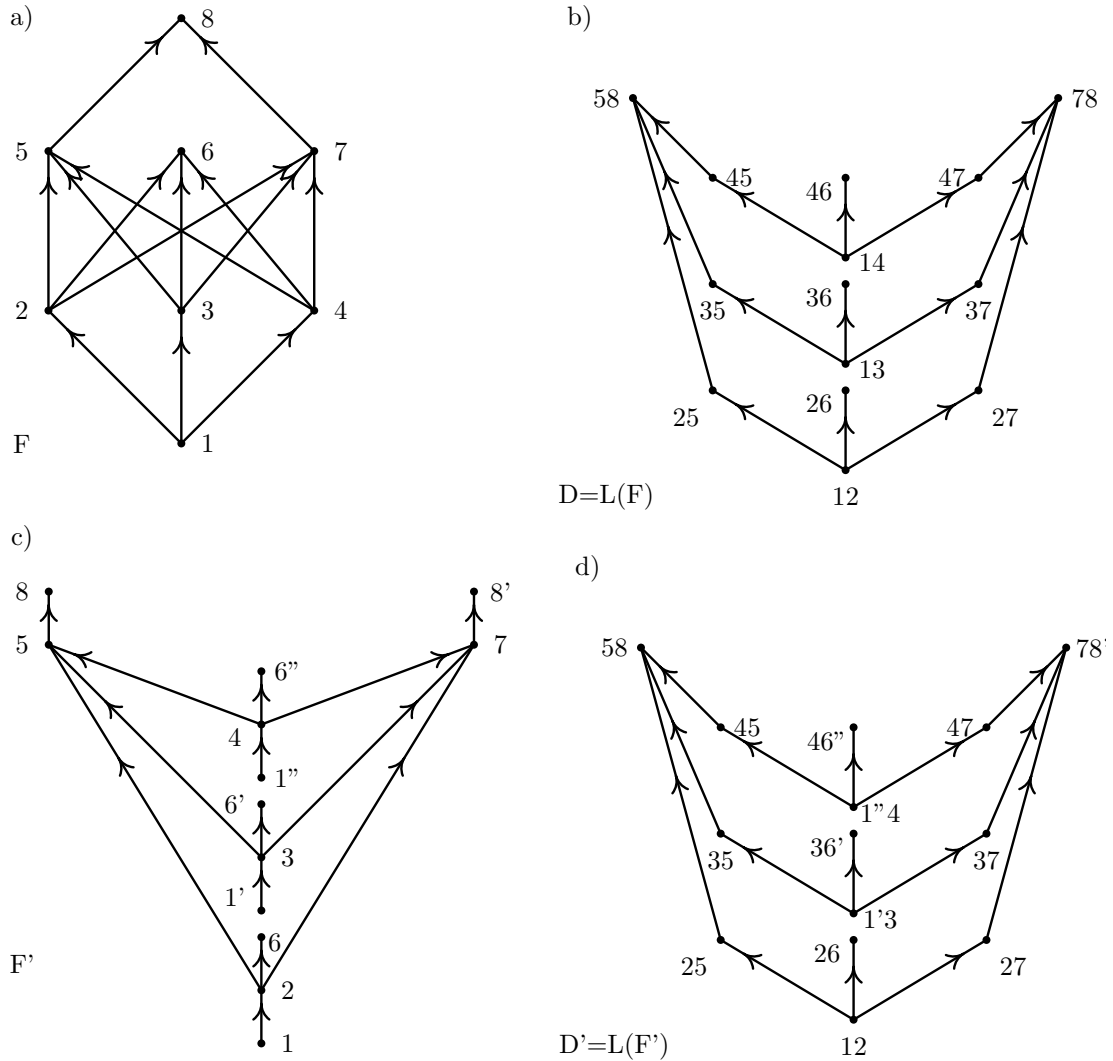
Wykażemy teraz następujące Twierdzenie.

Twierdzenie 25. *Jeśli łukowy (czyli N -wolny) digraf D jest do góry płaski, to istnieje jego digraf źródłowy F , czyli $D = L(F)$, który jest również do góry płaski.*

Dowód. Niech D będzie digrafem łukowym, czyli D jest digrafem N -wolnym, a więc istnieje jego digraf źródłowy F , czyli $D = L(F)$. Na podstawie charakteryzacji digrafów N -wolnych (Twierdzenie 20), istnieją dwa rozkłady $\{P_i\}_I$ i $\{Q_i\}_I$ zbioru wierzchołków $V(D)$ digrafu D takie, że zbiór łuków $E(D)$ digrafu D można przedstawić jako sumę łukowo rozłącznych poddigrafów dwudzielnych pełnych $B_i = (P_i \cup Q_i, P_i \times Q_i)$. Można założyć, że te rozkłady są elementarne. Na podstawie definicji digrafu łukowego, istnieje bijekcja między zbiorem poddigrafów $\{B_i\}_I$ oraz zbiorem wierzchołków $V(F) = \{v_i\}_I$.

Założmy, że digraf D jest do góry płaski. Bez utraty ogólności można założyć, że digraf D nie zawiera wierzchołków rozspajających. Jeśli D zawiera takie wierzchołki, to możemy przeprowadzić redukcję digrafu D do digrafu, który nie zawiera wierzchołków rozspajających posługując się na przykład drzewem bloków (taka procedura jest dokładnie opisana w Punkcie 6.6.2) i do usuniętych składowych zastosować poniższe postępowanie, a następnie otrzymane płaskie umieszczenia składowych połączyć łukami z umieszczeniem zredukowanego digrafu.

Na podstawie płaskiego umieszczenia digrafu D konstruujemy płaskie umieszczenie digrafu F , będącego digrafem źródłowym digrafu D , czyli $D = L(F)$. W tym celu, każdemu wierzchołkowi v_i ($i \in I$) digrafu F przyporządkowujemy miejsce na płaszczyźnie w zależności od typu odpowiadającego mu poddigrafu B_i ($i \in I$) w digrafie D :



Rysunek 7.8. Nieplanarny digraf F (a), którego digraf łukowy $D = L(F)$ jest do góry płaski (b) i inny jego digraf źródłowy F' , który jest do góry płaski (c) oraz jego digraf łukowy $D' = L(F')$ (d), również do góry płaski

- Jeśli $B_i = (P_i, q_i)$ i $P_i \neq \emptyset$, to umieść v_i w miejscu elementu q_i .
- Jeśli $B_i = (p_i, Q_i)$ i $Q_i \neq \emptyset$, to umieść v_i w miejscu elementu p_i .
- Jeśli $B_i = (P_i, Q_i)$ oraz $|P_i| \geq 2$ i $|Q_i| \geq 2$, to umieść v_i w dowolnym miejscu obszaru zajmowanego na płaszczyźnie przez B_i .

W tym przyporządkowaniu wierzchołków v_i digrafu F poddigrafom B_i digrafu D na tym etapie nie uwzględniliśmy poddigrafów, w których jeden ze zbiorów jest pusty, a więc w postaci $B_i = (\emptyset, q_i)$ lub $B_i = (p_i, \emptyset)$. Takim poddigrafom odpowiadają w digrafie F wierzchołki stopnia 1, a zatem, ze względu na zachowanie płaskości digrafu F , ich umieszczenie na płaszczyźnie może być dowolne pod warunkiem, że nie psują płaskości umieszczenia.

Po umieszczeniu na płaszczyźnie wierzchołków, do digrafu F dodajemy łuki (jako odcinki linii prostych) (v_i, v_j) , jeśli $Q_i \cap P_j \neq \emptyset$, gdzie v_i odpowiada poddigrafowi $B_i = (P_i, Q_i)$ a v_j odpowiada poddigrafowi $B_j = (P_j, Q_j)$ i w

tych poddigrafach oba zbiory w parach są niepuste. Ponieważ digraf D jest płaski, łuki w digrafach B_i i B_j nie przecinają się. Rozważmy dwa łuki w digrafie F , $a = (v_i, v_j)$ i $a' = (v_k, v_l)$. Z rozmieszczenia na płaszczyźnie wierzchołków, będących końcami łuków a i a' i relacji między płaskimi umieszczeniami różnych poddigrafów B_i wynika, że te łuki również nie przecinają się.

Pozostało uwzględnienie w digrafie F wierzchołków i łuków odpowiadających poddigrafom $B_i = (\emptyset, q_i)$ i $B_i = (p_i, \emptyset)$. Dla każdego $B_i = (\emptyset, q_i)$, poddigrafu dołączamy łuk (v_i, v_j) , gdzie v_j jest wierzchołkiem w F , odpowiadającym poddigrafowi $B_i = (p_i, \emptyset)$ takiemu, że $q_i \in P_j$, zaś wierzchołek v_i jest tak umieszczony na płaszczyźnie, by ten dołączony łuk nie przecinał innych łuków. To zawsze jest możliwe, bo wierzchołek v_i jest stopnia 1. Podobnie dołączam łuki dla poddigrafów $B_i = (p_i, \emptyset)$.

A zatem zdefiniowane umieszczenie digrafu F na płaszczyźnie jest płaskie. \square

Wniosek 6. *Digrafy źródłowe planarnych N -wolnych zbiorów uporządkowanych wystarczy rozważać w klasie digrafów planarnych.*

7.3. Umieszczanie w książce do góry płaskich N -wolnych zbiorów uporządkowanych

W tym Podrozdziale przedstawiamy zasadniczy wynik pracy – algorytm, który umieszcza na dwóch stronach w książce dowolny planarny N -wolny zbiór uporządkowany (P, \leq) , dany w postaci do góry płaskiego umieszczenia jego digrafu pokrycia. Dalej, pisząc digraf płaski mamy na myśli jego skierowany do góry rysunek.

7.3.1. Wcześniejsze rezultaty

Problem liczby stron w klasie N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych był rozważany w pracach [5] i [47], w obu przypadkach rozważane w tych pracach rodziny zbiorów N -wolnych nie pokrywają się z klasą wszystkich N -wolnych zbiorów uporządkowanych zdefiniowanych w tej pracy, powszechnie przyjmowanych w teorii grafów i teorii zbiorów uporządkowanych za digrafy N -wolne.

Przypomnijmy za Punktem 2.2.4, że 4-cyklem jest (pod)zbiór uporządkowany złożony z czterech elementów, np. a, b, c, d , i następujących relacji między tymi elementami: $a < c$, $a < d$, $b < c$, $b < d$. Taki zbiór jest *4-cyklem pokrycia*, jeśli podane porównywalności między czterema elementami są relacjami pokrycia. Jest to więc pełny dwudzielny zbiór uporządkowany o dwóch elementach w każdej z klas dwudzielności.

Alzohairi [5] udowodnił następujące Twierdzenie.

Twierdzenie 26. [5] *Liczba stron N -wolnego planarnego zbioru uporządkowanego, który nie zawiera 4-cyklu pokrycia, jest nie większa niż dwa.*

Dowód tego Twierdzenia polega na rozszerzeniu zbioru P , spełniającego założenia Twierdzenia, do N -wolnej kraty planarnej Q takiej, że diagram

zbioru P jest poddiagramem kraty Q . Następnie korzysta się z faktu, że N -wolna krata planarna może być umieszczona na dwóch stronach książki.

Zauważmy, że digrafy $K_{s,2}$ ($s \geq 2$) i $K_{2,t}$ ($t \geq 2$) zawierają 4-cykl pokrycia, a zatem Twierdzenia 26 nie można zastosować do N -wolnych planarnych zbiorów uporządkowanych, których digrafy pokrycia zawierają poddigrafy $K_{s,2}$ ($s \geq 2$) lub $K_{2,t}$ ($t \geq 2$).

Z kolei w pracy [47] rozważa się N -wolne zbiory uporządkowane definiowane w odniesieniu do ich płaskich reprezentacji. Płaski zbiór uporządkowany jest N -wolny [47], jeśli nie zawiera płaskiego N lub/i lustrzanego odbicia płaskiego N . A zatem w tym sensie, digrafy $K_{s,2}^*$ i $K_{2,t}^*$ umieszczone na płaszczyźnie tak, jak pokazano na Rysunku 7.4, nie są N -wolne. Z drugiej strony, w pracy [47] podano przykład digrafu, który nie zawiera płaskiego N , ale nie jest N -wolny w sensie przyjętym w tej pracy. A zatem wynik z pracy [47] dotyczy klasy zbiorów uporządkowanych, która nie pokrywa się z rodziną wszystkich zbiorów N -wolnych, zdefiniowaną w tej pracy.

Podobnie, jak w przypadku umieszczania grafów w książce na dwóch stronach (patrz Twierdzenia 5), z umieszczaniem digrafu na dwóch stronach można związać naddigraf \bar{D} digrafu pokrycia D , który zawiera drogę Hamiltona. Jeśli bowiem liczba stron digrafu D wynosi 2, to umieścimy digraf D na dwóch stronach – wtedy oczywiście digraf D jest płaski (planarny). Jeśli digraf D nie zawiera drogi Hamiltona, to można uzupełnić D łukami tak, by otrzymany naddigraf \bar{D} był nadal płaski i zawierał drogę Hamiltona. Wystarczy w tym celu dodać łuki między kolejnymi wierzchołkami na grzbiecie książki, jeśli takich łuków nie ma w digrafie D . Otrzymany naddigraf \bar{D} zawiera drogę Hamiltona biegnącą wzdłuż grzbietu książki. Takie podejście zostało wprowadzone w pracy [46] i wykorzystane w pracy [47]. Dla naszych celów przyjmijmy, że digraf D jest do góry płaskim digrafem acyklicznym. Wtedy zachodzi:

Lemat 13. *Jeśli do góry płaski digraf acykliczny D można umieścić w książce na dwóch stronach, to istnieje naddigraf \bar{D} digrafu D otrzymany przez dodanie takich łuków, że \bar{D} jest do góry płaskim digrafem acyklicznym i zawiera drogę Hamiltona.*

Ilustracje tego Lematu znajdują się na Rysunkach 7.10(c) i 7.11(a) oraz na Rysunku 7.12(c). Liniami przerywanymi zaznaczono łuki dodane do oryginalnego digrafu pokrycia.

7.3.2. Umieszczanie na dwóch stronach w książce do góry płaskich N -wolnych zbiorów uporządkowanych

Zacznijmy od Wniosku.

Wniosek 7. *Jeśli w digrafie pokrycia D N -wolnego planarnego zbioru uporządkowanego (P, \leq) każdy wierzchołek należący do dwóch dwudzielnych poddigrafów pełnych jest wierzchołkiem rozspajającym, to*

$$pn(P) \leq 2$$

i odpowiednie umieszczenie zbioru P na dwóch stronach w książce może być znalezione w czasie liniowym w zależności od liczby elementów i liczby relacji pokrycia w zbiorze P , czyli liczby wierzchołków i liczby łuków w digrafie D .

Dowód. Na podstawie Twierdzenia 24 i przy założeniach tego Wniosku wynika, że N -wolny digraf D ma strukturę drzewiastą, można więc zastosować do digrafu D Twierdzenie 22. Ponieważ dla N -wolnego planarnego zbioru P , każdy dwudzielny poddigraf pełny w digrafie pokrycia D ma w jednej z klas dwudzielności co najwyżej dwa wierzchołki, stąd otrzymujemy tezę tego Wniosku. \square

W dalszej części tego Punktu przyjmujemy:

Założenie. Digraf pokrycia $D = (P, A)$ planarnego zbioru uporządkowanego (P, \leq) jest dany jako digraf do góry płaski.

Jak w całej pracy zakładamy, że digraf D jest spójny.

Przed zasadniczym algorytmem sprawdzamy, czy digraf D jest N -wolny, W tym celu można zastosować algorytm podany w pracy [59]. Jeśli digraf D nie jest N -wolny, to kończymy obliczenia. Jeśli digraf D jest N -wolny, to w wyniku działania tego algorytmu otrzymujemy rodzinę poddigrafów dwudzielnych pełnych $\mathcal{B} = \{B_i\}_I = \{(P_i, Q_i)\}_I$, będącą rozkładem zbioru łuków digrafu D . Ten rozkład może być przekształcony na elementarny rozkład przez rozbięcie poddigrafów (\emptyset, Q_i) oraz (P_i, \emptyset) tak, aby zbiory Q_i i P_i były jednoelementowe.

Jeśli digraf D jest N -wolny, to z Lematu 10 wynika, że spełniony jest warunek:

$$|P_i| \leq 2 \vee |Q_i| \leq 2, \quad \forall i \in I.$$

Natomiast status wierzchołków rozspajających w digrafie D jest określony na podstawie Twierdzenia 24. Dla $B_i = (P_i, Q_i) \in \mathcal{B}$ mamy:

- Jeśli $B_i = K_{s,1}$ ($s \geq 2$) lub $B_i = K_{1,t}$ ($t \geq 2$), to każdy wierzchołek w zbiorze $P_i \cup Q_i$ może być rozspajający, ale żaden nie musi być rozspajający.
- Jeśli w B_i mamy $|Q_i| = 2$, to P_i zawiera co najwyżej dwa wierzchołki, które nie są rozspajające.
 - Jeśli P_i zawiera dwa wierzchołki, które nie są rozspajające, to co najwyżej jeden z dwóch wierzchołków w Q_i może nie być rozspajający.
 - Jeśli P_i zawiera co najwyżej jeden wierzchołek, który nie jest rozspajający, to oba wierzchołki w Q_i mogą nie być rozspajające.
- Jeśli w B_i mamy $|P_i| = 2$, to Q_i zawiera co najwyżej dwa wierzchołki, które nie są rozspajające.
 - Jeśli Q_i zawiera dwa wierzchołki, które nie są rozspajające, to co najwyżej jeden z dwóch wierzchołków w P_i może nie być rozspajający.
 - Jeśli Q_i zawiera co najwyżej jeden wierzchołek, który nie jest rozspajający, to oba wierzchołki w P_i mogą nie być rozspajające.

Szkic algorytmu

Zanim dokładnie opiszemy algorytm umieszczania do góry płaskiego N -wolnego digrafu D na dwóch stronach książki, krótko przedstawimy ideę tego algorytmu. Składa się on z trzech kroków.

Krok 1. Na początku digraf D poddajemy redukcji tworząc digraf zredukowany D_r . Pierwsza redukcja polega na usunięciu poddigrafów doczepionych w wierzchołkach rozspajających tak, aby pozostały digraf nie zawierał wierzchołków rozspajających. Druga zaś redukcja sprowadza poddigrafy $K_{s,2}$ i $K_{2,t}^*$ do $K_{1,2}$ oraz poddigrafy $K_{2,t}$ i $K_{s,2}^*$ do $K_{2,1}$.

Krok 2. W tym kroku umieszczamy zredukowany digrafu D_r na dwóch stronach książki – jest to zasadniczy krok algorytmu

Krok 3. W ostatnim kroku, do umieszczenia zredukowanego digrafu D_r w książce na dwóch stronach są dokładane na tych samych dwóch stronach zredukowane w Kroku 1 fragmenty oryginalnego digrafu D .

Dalej szczegółowo omawiamy realizację tych trzech kroków.

Krok 1: Redukcja digrafu D

Definiujemy dwie redukcje oryginalnego digrafu D , wykonywane jedna po drugiej.

Redukcja 1.

Dopóki digraf D zawiera wierzchołki rozspajające, usuń z D poddigraf, który zawiera jeden wierzchołek rozspajający. Ta redukcja odpowiada redukcji drzewa bloków grafu pokrycia zbioru P , w której są odrywane z tego drzewa węzły wiszące. Zauważmy, że wierzchołek rozspajający w D należy do dokładnie dwóch poddigrafów dwudzielnych pełnych, wynika to z możliwych powiązań między sobą poddigrafów dwudzielnych pełnych. Jeśli w digrafie D pozostaje tylko jeden wierzchołek rozspajający i dwa poddigrafy, które go zawierają, to usuwamy jeden z tych poddigrafów.

Dalej zakładamy, że digraf D nie zawiera wierzchołków rozspajających, a zatem nie zawiera fragmentów, oznaczonych na Rysunku 7.4 wypełnionymi owalami.

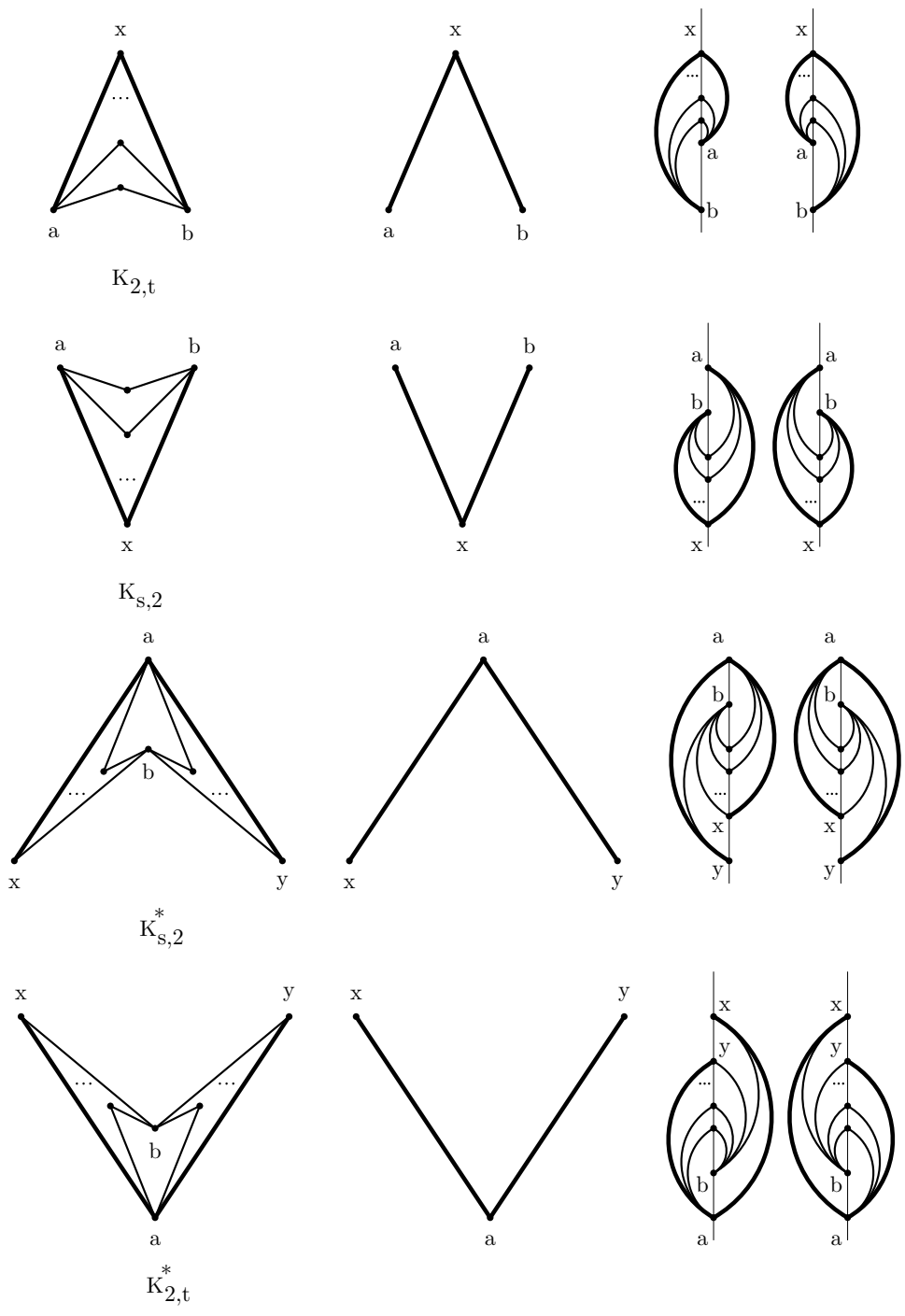
Redukcja 2.

Zredukuj digraf D tak, jak pokazano to na Rysunku 7.9 w pierwszych dwóch kolumnach. Ideą tej redukcji jest sprowadzenie płaskich poddigrafów dwudzielnych pełnych $K_{s,2}$ i $K_{2,t}^*$ oraz $K_{2,t}$ i $K_{s,2}^*$ ($s \geq 2$, $t \geq 2$) do postaci $K_{1,2}$ lub $K_{2,1}$, odpowiednio – te digrafy są oznaczone na Rysunku pogrubionymi liniami.

Przykładowy efekt redukcji N -wolnego digrafu do góry płaskiego jest pokazany na Rysunkach 7.10(a) i (b) oraz 7.12(a) i (b). Zastosowano jedynie Redukcję 2, gdyż dane digrafy nie zawierają wierzchołków rozspajających.

Oznaczmy przez D_r digraf otrzymany w wyniku zastosowania obu redukcji do digrafu D . Ten digraf spełnia następujący lemat.

Lemat 14. *Zredukowany digraf D_r , otrzymany z N -wolnego digrafu D jest również N -wolny. Ponadto, stopień wejściowy każdego wierzchołka nie przewyższa 2, z wyjątkiem wierzchołków v spełniających $K_{s,1} = (P_i, \{v\})$ dla*



Rysunek 7.9. Redukcje poddigrafów dwuzielnych pełnych w N -wolnym płaskim digrafie pokrycia. W pierwszej kolumnie znajdują się płaskie poddigrafy dwuzielne pełne, w drugiej – ich zredukowana postać, a w trzeciej i czwartej – umieszczenie w książce na dwóch stronach poddigrafów zredukowanych (pogrubione linie) i uzupełnienie poddigrafami, które zostały wyredukowane

$s \geq 3$, i stopień wyjściowy każdego wierzchołka nie przewyższa 2, z wyjątkiem wierzchołków v spełniających $K_{1,t} = (\{v\}, Q_i)$ dla $t \geq 3$.

Dowód. Redukcje 1 i 2 usuwają wierzchołki z digrafu D i wszystkie łuki

incydentne z usuwanymi wierzchołkami. Żadne inne łuki nie są usuwane z digrafu D , a zatem pozostają spełnione warunki na to, aby otrzymany digraf zredukowany D_r był też N -wolny (Twierdzenie 20).

Prześledźmy teraz, jaki efekt ma zastosowanie Redukcji 2 do różnych typów poddigrafów dwudzielnych pełnych, patrz również Rysunek 7.9. Niech $B_i = (P_i, Q_i)$ i przyjmijmy $|P_i| = s$ i $|Q_i| = t$. Zauważmy, że poddigraf B_i w pełni określa stopień wyjściowy wierzchołków należących do zbioru P_i oraz stopień wejściowy wierzchołków należących do zbioru Q_i . Wynika to stąd, że rodzina poddigrafów $(B_i)_I$ stanowi rozkład zbioru łuków digrafu D , a rodziny podzbiorów $(P_i)_I$ i $(Q_i)_I$ stanowią rozkłady wierzchołków digrafu D . Rozpatrzmy możliwe postacie poddigrafów B_i .

- Jeśli $s = 1$ lub $t = 1$, to poddigrafy B_i nie ulegają redukcji i mamy do czynienia z wyjątkami w tym Lemacie.
- Jeśli $B_i = K_{2,t}$, to po Redukcji 2 mamy $outdeg(a) = outdeg(b) = 1$, gdzie $P_i = \{a, b\}$, i nadal $indeg(x) = 2$ dla wierzchołka x , który po redukcji pozostaje w Q_i .
- Jeśli $B_i = K_{s,2}$, to po Redukcji 2 mamy $indeg(a) = indeg(b) = 1$, gdzie $Q_i = \{a, b\}$ i nadal $outdeg(x) = 2$ dla wierzchołka x , który po redukcji pozostaje w P_i .
- Jeśli $B_i = K_{s,2}^*$, to po Redukcji 2 mamy $outdeg(x) = outdeg(y) = 1$ dla dwóch wierzchołków x i y , które pozostają w P_i , oraz $indeg(a) = 2$ dla jedyne go wierzchołka, który po redukcji pozostaje w Q_i .
- Jeśli $B_i = K_{2,t}^*$, to po Redukcji 2 mamy $outdeg(a) = 2$ dla jedyne go wierzchołka, który po redukcji pozostaje w P_i , oraz $indeg(x) = indeg(y) = 1$ dla dwóch wierzchołków x i y , które pozostają w Q_i .

A zatem we wszystkich przypadkach, poza dwoma wyjątkami określonymi w sformułowaniu Lematu, następuje redukcja stopni wejściowych i wyjściowych wierzchołków do 1 lub do 2 w zredukowanych poddigrafach B_i . \square

Dalej zakładamy, że dany do góry płaski digraf D został zredukowany do digrafu D_r w wyniku zastosowania najpierw Redukcji 1, a później Redukcji 2. Zauważmy, że w wyniku zastosowania Redukcji 2 mogły pojawić się wierzchołki rozspajające, ale tych wierzchołków już nie usuwamy. Mamy więc, patrz Rysunki 7.10(b) i 7.12(b):

Wniosek 8. *W zredukowanym digrafie D_r , płaskie poddigrafy dwudzielne pełne mają postać $K_{s,1}$ ($s \geq 1$) lub $K_{1,t}$ ($t \geq 1$).*

Redukcja 2 znacznie upraszcza umieszczanie N -wolnego do góry płaskiego digrafu D na dwóch stronach książki, jeśli tylko istnieje numeracja wierzchołków w digrafie zredukowanym D_r , spełniająca warunek z następującego lematu.

Lemat 15. *Jeśli zredukowany digraf D_r N -wolnego digrafu płaskiego D może być umieszczony na dwóch stronach w taki sposób, że w każdym digrafie zredukowanym (druga kolumna na Rysunku 7.9) końce jednego z łuków są kolejnymi elementami na grzbiecie książki, to umieszczenie digrafu zredukowanego*

D_r na dwóch stronach może być rozszerzone do umieszczenia oryginalnego digrafu D na dwóch stronach.

Dowód. Sposoby uzupełnienia digrafu zredukowanego D_r , umieszczonego na dwóch stronach, z usuniętymi w Redukcji 2 wierzchołkami i łukami, są zilustrowane w kolumnach 3 i 4 na Rysunku 7.9. Łatwo się przekonać, że w żadnym przypadku przywracanie usuniętych łuków nie wprowadza przecięć z łukami w digrafie D_r . Korzystamy przy tym z wniosków z Lematu 14, że w digrafie D_r wierzchołki digrafów zredukowanych mają stopnie wejściowe i wyjściowe równe 1 lub 2. \square

W algorytmie, przedstawionym poniżej, generowana jest numeracja wierzchołków spełniająca warunki z Lematu 15 – patrz uzasadnienie w Podpunkcie Krok 3.1.

Krok 2: Umieszczanie zredukowanego digrafu D_r na dwóch stronach w książce

Ten zasadniczy krok algorytmu jest wykonywany na do góry płaskiej reprezentacji digrafu zredukowanego D_r . Dla danego digrafu D_r w takiej reprezentacji, jest określona jednoznacznie kolejność łuków wokół wierzchołków, co jednoznacznie określa również ściany do góry płaskiego digrafu D_r oraz ich kolejność wokół wierzchołków. Na tej podstawie, odwołując się do położenia ścian, można jednoznacznie określić wierzchołki i łuki leżące najbardziej na prawo.

W Algorytmie przyjęto dwie naturalne dla rozważanego problemu zasady postępowania:

1. Digraf D_r jest przeglądany i umieszczany w książce od prawej do lewej strony. Ta zasada może być realizowana dzięki płaskiej reprezentacji digrafu D_r .
2. Wierzchołkom są nadawane numery podczas przeszukiwania zredukowanego digrafu D_r metodą w głąb z zachowaniem kolejności przeglądania łuków i wierzchołków od prawej do lewej, wynikającej z płaskiej reprezentacji digrafu D_r .

W Algorytmie łuki są przydzielane do strony 1 (lewej) lub 2 (prawej). Łuk (v, w) jest rysowany między numerami przydzielonymi przez algorytm wierzchołkom v i w .

W opisie Algorytmu poniżej, określenie *wierzchołek minimalny* odnosi się do wierzchołka minimalnego (czyli bez poprzedników) wśród wierzchołków, którym algorytm nie nadał jeszcze numerów. A zatem, jednoznacznie można określić minimalny wierzchołek w , znajdujący się najbardziej na prawo w ścianie, do której należy wierzchołek v , gdyż ściany, do których należy wierzchołek v , oraz ich kolejność wokół wierzchołka v , są również jednoznacznie określone.

Algorytm

$i = 1$;

niech v będzie wierzchołkiem minimalnym w ścianie zewnętrznej,

leżącym najbardziej na prawo;
 nadaj wierzchołkowi v numer 1;
 Numeruj(v);

Rekurencyjna procedura Numeruj ma następującą postać:

procedure Numeruj(v);
jeśli v jest maksymalny w D_r **to**
 jeśli zostały ponumerowane wszystkie wierzchołki **to** koniec algorytmu
 w przeciwnym razie
 (1) przejdź do minimalnego wierzchołka w , który znajduje się
 najbardziej na prawo w ścianie, do której należy v ;
 zwiększ $i = i + 1$;
 nadaj wierzchołkowi w numer i ;
 (2) **jeśli** w wierzchołku w kończy się łuk (u, w) , który nie został
 umieszczony w książce **to** umieść (u, w) na stronie 2;
 wywołaj Numeruj(w)
w przeciwnym razie:
 (3) **jeśli** v jest dolnym wierzchołkiem w digrafie $K_{1,2}$ zredukowanym
 z $K_{s,2}$ lub $K_{2,t}^*$ **to**
 niech w oznacza prawy wierzchołek w tym $K_{1,2}$;
 zwiększ $i = i + 1$;
 nadaj wierzchołkowi w numer i ;
 umieść łuk (v, w) na stronie 1
 wywołaj Numeruj(w)
w przeciwnym razie
dla kolejnego od prawej łuku (v, u) o początku w wierzchołku v
wykonaj
 (4) **jeśli** wszystkie pozostałe łuki wchodzące do u zostały już
 umieszczone w książce **to**
 zwiększ $i = i + 1$;
 nadaj wierzchołkowi u numer i ;
 umieść łuk (v, u) na stronie 2
 wywołaj Numeruj(u)
w przeciwnym razie
 (5) umieść łuk (v, u) na stronie 1 (wierzchołkowi u zostanie nadany
 numer później);
 przejdź do minimalnego wierzchołka w , który znajduje się
 najbardziej na prawo w ścianie, do której należy v ;
 zwiększ $i = i + 1$;
 nadaj wierzchołkowi w numer i ;
 (2) **jeśli** w wierzchołku w kończy się łuk (u, w) , który nie został
 umieszczony w książce **to** umieść (u, w) na stronie 2;
 wywołaj Numeruj(w)

Objaśnijmy przebieg algorytmu i jego najważniejsze kroki. Algorytm rozpoczyna działanie od minimalnego wierzchołka v leżącego najbardziej na pra-

wo w ścianie zewnętrznej, numeruje kolejno osiągnane wierzchołki i umieszcza na stronach 1 i 2 łuki incydentne z numerowanymi wierzchołkami. Przypisanie łuków do stron odbywa się zgodnie z zasadą: ostatni od prawej łuk wchodzący do danego wierzchołka jest umieszczany na stronie 2, a wcześniejsze łuki (w sensie kolejności od prawej do lewej) są umieszczane na stronie 1. Wyjątkiem od tej zasady jest krok (3) algorytmu, w którym jest numerowany dolny wierzchołek digrafu $K_{1,2}$ zredukowanego z digrafów $K_{s,2}$ lub $K_{2,t}^*$. W tym przypadku stopnie wejściowe wierzchołków górnych w $K_{1,2}$ są równe 1 i zgodnie z ogólną zasadą łuki poniżej nich incydentne z nimi, jako ostatnie łuki wchodzące do swoich wierzchołków końcowych, powinny być przydzielone do strony 2. Jednak dla zapewnienia możliwości zastosowania Lematu 15, oba łuki nie mogą być na tej samej stronie i pierwszy z nich jest przydzielany do strony 1, a jego numerami są kolejne liczby.

Kroki algorytmu (1) i (5) odpowiadają sytuacji, gdy należy przejść do wierzchołka minimalnego, gdyż v nie ma następnika albo do najbardziej na prawo następnika wierzchołka v wchodzi jeszcze inny łuk. Następuje wtedy przejście Algorytmu do wierzchołka minimalnego w , zawartego w ścianie najbardziej na prawo, do której należy wierzchołek v . Jednocześnie, jeśli w wierzchołku w kończy się łuk (ostatni dochodzący do w), to zgodnie z przyjętą zasadą, zostaje umieszczony na stronie 2 (Kroki (2) w Algorytmie). Krok algorytmu (4) odpowiada sytuacji, gdy można kontynuować przeszukiwanie w głąb.

Łatwo zauważyć następującą własność kolejności wierzchołków, generowanej przez Algorytm.

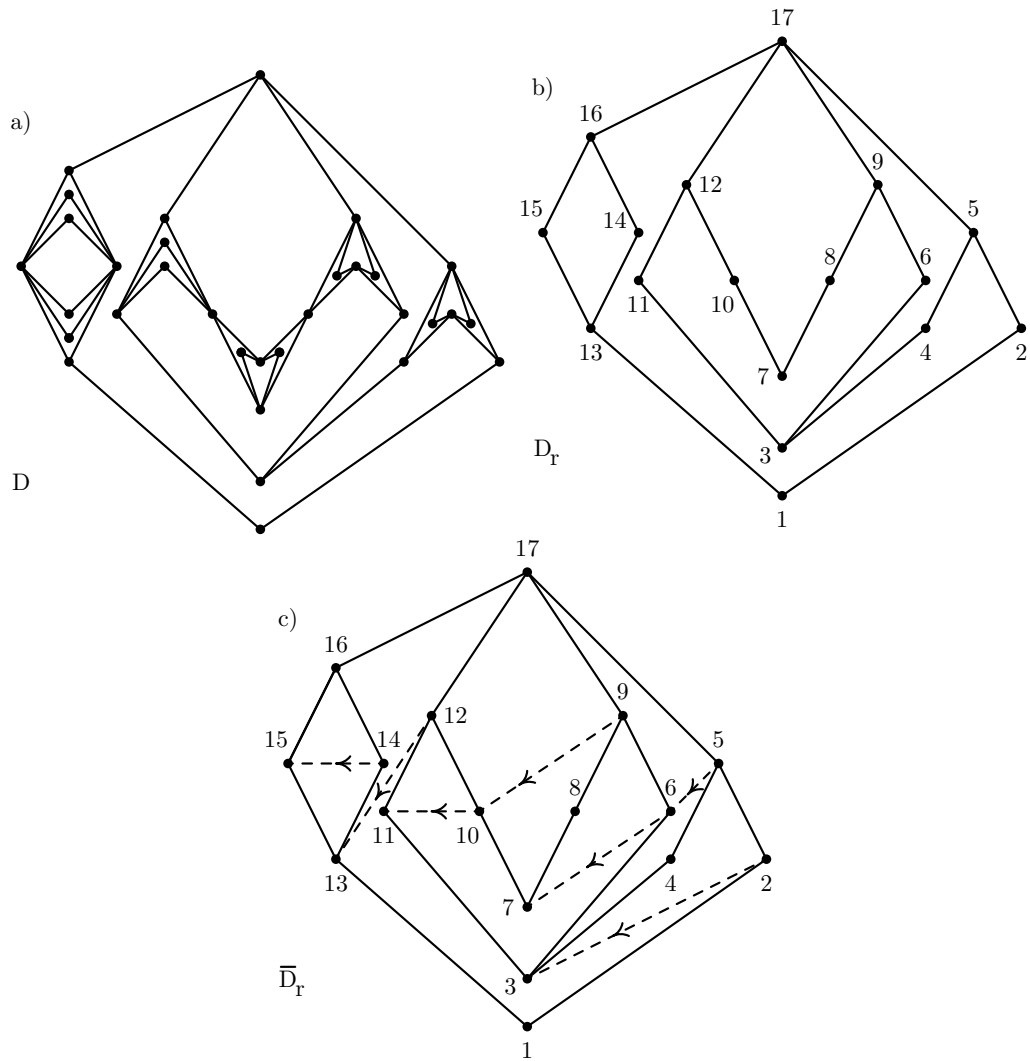
Lemat 16. *Kolejność wierzchołków digrafu D_r , generowana przez Algorytm, odpowiada zachłannemu rozszerzeniu liniowemu zbioru uporządkowanego (P, \leq) , którego digrafem pokrycie jest zredukowany digraf D_r . Rozszerzenie to zawiera wszystkie elementy zbioru P .*

Dowód. Jeśli znajdujemy się w wierzchołku v , to przenosimy się do jego następnika u tylko wtedy, gdy zostały wyczerpane łuki wchodzące do u . Z kolei, jeśli nie możemy przejść do następnika wierzchołka v , to przenosimy się do wierzchołka minimalnego w digrafie, który pozostał do przejścia przez Algorytm.

Aby uzasadnić, że generowana kolejność wierzchołków zawiera wszystkie wierzchołki digrafu D_r , wystarczy zauważyć, że każdy wierzchołek jest albo minimalny w D_r , albo jest następnikiem wierzchołka minimalnego. A ponieważ digraf D_r jest przeglądany od prawej do lewej, żaden wierzchołek nie zostanie pominięty. \square

Oznaczmy przez \bar{D}_r naddigraf otrzymany z digrafu D_r przez dołączenie łuków między dwoma kolejnymi wierzchołkami generowanego rozszerzenia liniowego, jeśli te wierzchołki nie są połączone łukiem w digrafie D_r . Te łuki odpowiadają skokom w generowanym rozszerzeniu liniowym – na Rysunkach są oznaczone linią przerywaną ze strzałkami. Naddigraf \bar{D}_r zawiera więc drogę Hamiltona, odpowiadającą generowanemu rozszerzeniu liniowemu.

Rysunki 7.10(c) i 7.11(a) ilustrują działanie Algorytmu na zredukowanym digrafie D_r digrafu D z Rysunku 7.10(a).

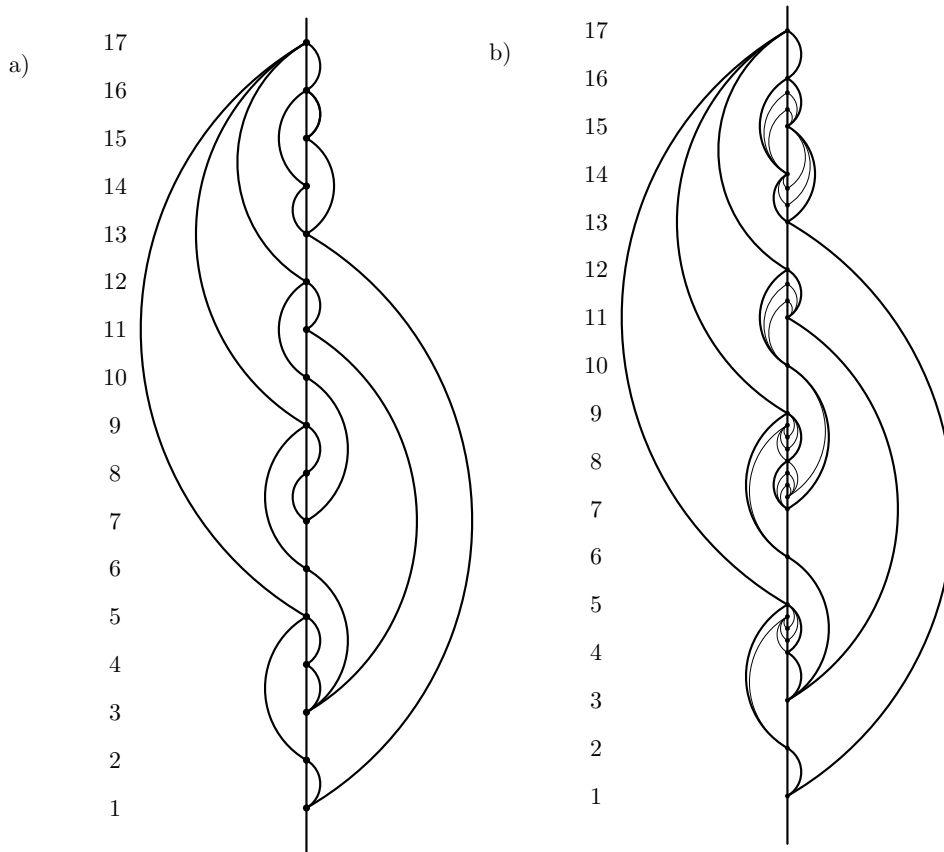


Rysunek 7.10. Przykład działania algorytmu. Dany płaski digraf pokrycia D N -wzoru uporządkowanego (a), jego zredukowana postać D_r (b), oraz naddigraf \bar{D}_r (c) – wynik działania Algorytmu

W dwóch kolejnych lematach wykazujemy, że Algorytm rzeczywiście umieszcza na dwóch stronach bez przecięć digraf zredukowany D_r .

Lemat 17. *Łuki umieszczone na stronie 2 przez Algorytm tworzą las rozpinający w digrafie D_r i nie przecinają się na stronie 2.*

Dowód. Zgodnie z przebiegiem Algorytmu (Kroki (2) i (4)), na stronie 2 są umieszczane ostatnie łuki wchodzące do poszczególnych wierzchołków, z wyjątkiem sytuacji z Kroku (3), gdy jedyny łuk wchodzący do wierzchołka w jest umieszczany na stronie 1. Zatem w digrafie utworzonym z tych łuków stopień wejściowy każdego wierzchołka, z wyjątkiem wierzchołków minimalnych, jest równy 1. Ponieważ jest to digraf acykliczny, łuki umieszczone na stronie 2 tworzą poddigraf digrafu G_r będący lasem (dopuszczamy, że drzewo w tym lesie może zawierać tylko jeden wierzchołek) – oznaczmy ten las przez T .



Rysunek 7.11. Dla digrafu D z Rysunku 7.10(a), umieszczenie na dwóch stronach zredukowanego digrafu D_r (a) i umieszczenie na dwóch stronach oryginalnego digrafu D (b)

Przechodzenie kolejnej składowej lasu T w Algorytmie jest wersją algorytmu umieszczania na jednej stronie digrafu pokrycia będącego drzewem, opisanego w Rozdziale 4. Tutaj ten algorytm uwzględnia dodatkowo uporządkowanie łuków wokół wierzchołków, wynikające z płaskiego przedstawienia digrafu D_r , zgodnie z którym łuki są umieszczane w książce od prawej do lewej. Z płaskiej reprezentacji lasu T , jako poddigrafu płaskiego digrafu D_r wynika, że składowe lasu albo leżą w obszarach zawierających się, albo rozłącznych. Stąd wynika, że numery nadane przez Algorytm wierzchołkom w poszczególnych składowych lasu T należą do przedziałów, które są albo rozłączne, albo zawierają się w sobie. \square

Lemat 18. *Łuki umieszczone przez Algorytm na stronie 1 nie przecinają się.*

Dowód. Na stronie 1 są umieszczane łuki, które podczas działania Algorytmu nie są ostatnimi łukami wchodzącymi do poszczególnych wierzchołków, albo są to łuki umieszczane na stronie 1 w Kroku (3) Algorytmu. W tym drugim przypadku wierzchołki takiego łuku są numerowane kolejnymi liczbami, a więc taki łuk nie przecina żadnych innych łuków. Pozostaje do rozpatrzenia tylko ten pierwszy przypadek.

Jeśli stopień wejściowy jakiegoś wierzchołka v jest większy lub równy 2, to łuki umieszczone na stronie 1, które wchodzi do tego wierzchołka, tworzą pęk łuków ze wspólnym wierzchołkiem końcowym v – takie łuki ewidentnie nie przecinają się między sobą na stronie 1.

Niech więc $k = (u, v)$ i $l = (x, y)$ będą dwoma łukami umieszczonymi na stronie 1, które nie mają wspólnego wierzchołka. Zgodnie z Algorytmem, wierzchołki v i y zostały ponumerowane w momencie umieszczania na stronie 2 ostatnich łuków wchodzące do tych wierzchołków. Przypuśćmy, że numer wierzchołka u jest mniejszy od numeru wierzchołka x . Oznacza to, że wierzchołek u został wcześniej osiągnięty niż wierzchołek x . Jeśli numer wierzchołka x jest większy niż numer wierzchołka v , to łuki k i l nie przecinają się.

Niech więc numer wierzchołka x będzie mniejszy niż numer wierzchołka v . To oznacza, że wierzchołek x został osiągnięty, zanim nie został umieszczony w książce ostatni łuk wchodzący do wierzchołka v , który jest umieszczany na stronie 2.

Z tego, że umieszczany digraf jest płaski wynika, wszystkie następniki wierzchołka x otrzymują swój numer przed umieszczeniem łuku (u, v) na stronie 1, a więc wierzchołek y otrzymuje numer mniejszy od numeru wierzchołka v , czyli łuki $k = (u, v)$ i $l = (x, y)$ nie przecinają się. □

Krok 3: Uzupelnienie umieszczenia zredukowanego digrafu usuniętymi elementami

Po umieszczeniu zredukowanego digrafu D_r w książce na dwóch stronach, usunięte fragmenty oryginalnego digrafu D są z powrotem dokładane do digrafu D_r w następujący sposób.

Krok 3.1: Przywrócenie elementów digrafu D usuniętych przez Redukcję 2.

Umieść wierzchołki i łuki usunięte w trakcie Redukcji 2 z poddigrafów pełnych $K_{s,2}$ i $K_{s,2}^*$ ($s \geq 2$) oraz $K_{2,t}$ i $K_{2,t}^*$ ($t \geq 2$) tak, jak to zilustrowano w trzeciej i w czwartej kolumnie na Rysunku 7.9. Jest to możliwe na podsacie Lematu 15, gdyż w każdym wierzchołku o stopniu wejściowym większym niż 1 kończy się łuk, którego końcom zostały przydzielane kolejne numery. Podobnie w digrafach $K_{1,2}$ końce jednego z łuków zostają numerowane kolejnymi liczbami (Krok (3) Algorytmu).

W tym kroku może nastąpić zmiana płaskiej reprezentacji digrafu D , polegająca na tym, że w przypadku poddigrafów dwudzielnych pełnych $K_{s,2}^*$ ($s \geq 2$) i $K_{2,t}^*$ ($t \geq 2$), wszystkie poddigrafy zawarte wewnątrz zewnętrznego $K_{2,2}$ są umieszczane w jednym z "ogonów", prawym lub lewym – patrz trzecia kolumna na Rysunku 7.9 oraz Rysunek 7.11(b). Ta modyfikacja nie psuje płaskości digrafu D , chociaż w książce jest umieszczany nieco inna płaska reprezentacja digrafu D .

Na Rysunku 7.11(b) zilustrowano uzupełnienie umieszczenia digrafu zredukowanego D_r , pokazanego na Rysunku 7.11(a) do umieszczenia oryginal-

nego digrafu D z Rysunku 7.10(a).

Krok 3.2: Przywrócenie elementów digrafu D usuniętych przez Redukcję 1.

Poddigrafy usuwane w Redukcji 1 dołączaj w kolejności odwrotnej do kolejności usuwania.

Stosując opisany algorytm (Redukcja 2 i Krok 2), dołączaj kolejne poddigrafy usunięte podczas Redukcji 1, umieszczając je na dwóch stronach tak, aby wierzchołki rozspajające, którymi są doczepione do odbudowywanego oryginalnego digrafu, były najwyższymi lub najniższymi wierzchołkami na grzbiecie książki, w zależności od tego, czy doczepiany digraf jest wiszący czy stojący w oryginalnym digrafie D .

W przypadku niektórych poddigrafów, Algorytm w Kroku 2 musi ulec niewielkiej zmianie, gdyż ten Algorytm rozpoczyna umieszczanie digrafu od najbardziej prawego wierzchołka minimalnego, a może się tak zdarzyć, że poddigraf jest połączony w oryginalnym digrafie w wierzchołku rozspajającym, który nie jest najbardziej prawym wierzchołkiem minimalnym (lub maksymalnym) w doczepianym poddigrafie.

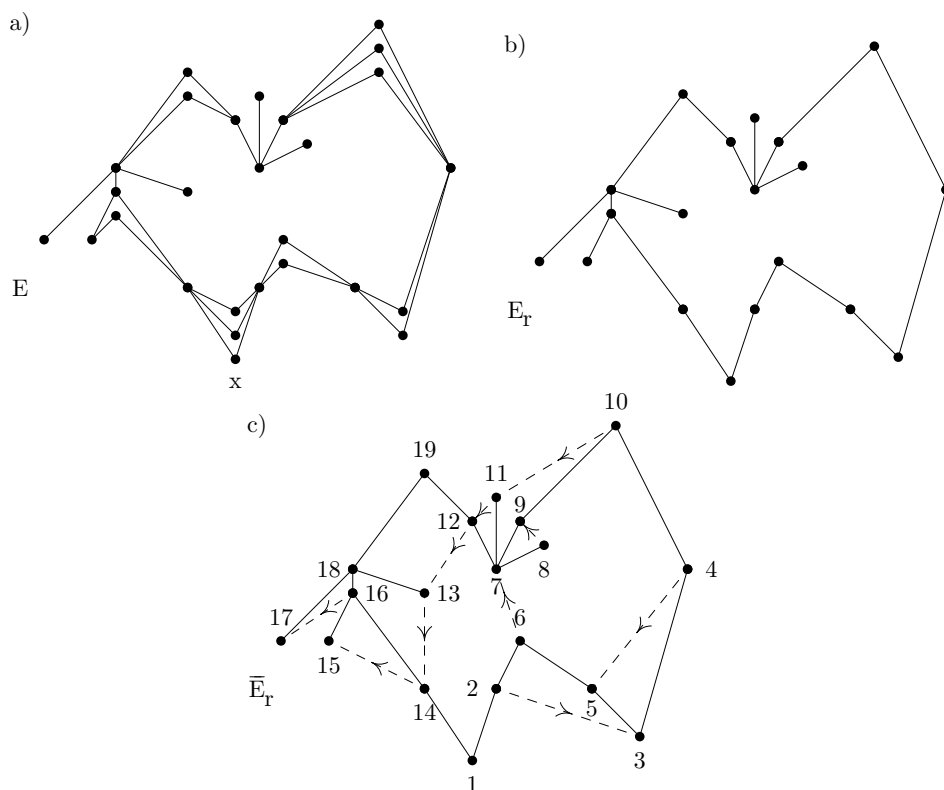
Przykład takiego doczepianego poddigrafu jest pokazany na Rysunku 7.12(a) – zakładamy, że digraf E z Rysunku jest doczepiony do digrafu D w wierzchołku rozspajającym x . W takim przypadku *modyfikacja Algorytmu* polega na rozpoczęciu numerowania wierzchołków od wierzchołka x i jak najszybszym znalezieniu się w najbardziej na prawo wierzchołku minimalnym, leżącym w ścianie zewnętrznej. To przejście jest zilustrowane na Rysunku 7.12(c). Polega ono na przejściu do najbardziej na prawo leżącego wierzchołka minimalnego, przy tym, jeśli wierzchołek minimalny v jest dolnym wierzchołkiem w $K_{1,2}$ zredukowanym z $K_{s,2}$ lub $K_{2,t}^*$, to najpierw jako następne należy ponumerować prawy wierzchołek w tym $K_{1,2}$ oraz kolejne jego następniki o stopniu wejściowym 1.

Zastosowanie tak zmodyfikowanego Algorytmu jest zilustrowane na Rysunkach 7.12 i 7.13

Jeśli doczepiany poddigraf jest wiszący w oryginalnym digrafie, czyli jest z nim połączony swoim wierzchołkiem maksymalnym, to stosujemy opisane tutaj postępowanie do poddigrafu z odwróconym kierunkiem łuków. Zauważmy, że jeśli digraf jest N -wolny, to digraf otrzymany przez odwrócenie kierunku digrafu jest również N -wolny.

Wszystkie etapy postępowania, zastosowane do digrafu pokrycia $D = (P, A)$ zbioru uporządkowanego (P, \leq) , danego jako digraf płaski: sprawdzanie, czy zbiór jest N -wolny, redukcje, właściwy Algorytm i uzupełnienie włożenia digrafu zredukowanego do włożenia oryginalnego digrafu, mogą być wykonane w czasie wielomianowym, przy założeniu, że digraf D jest dany jako digraf do góry płaski.

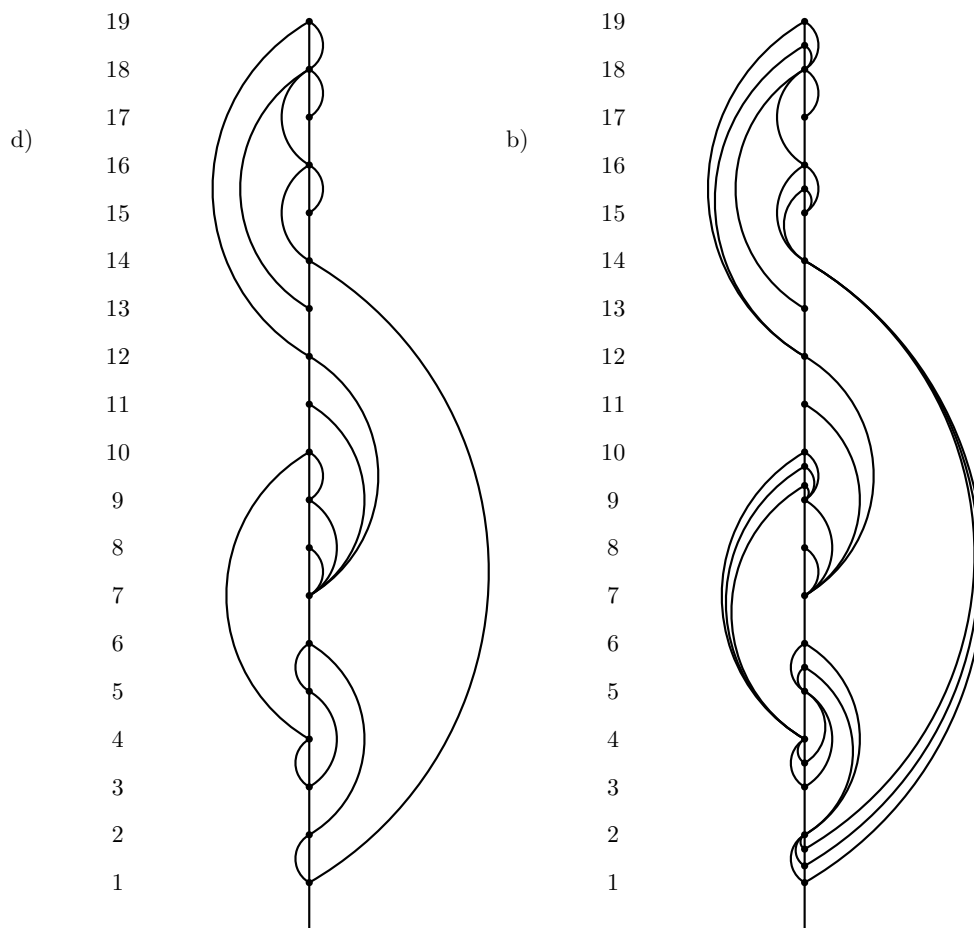
Ten Rozdział możemy podsumować Twierdzeniem, stanowiącym główny wynik pracy:



Rysunek 7.12. Przykład działania algorytmu w przypadku, gdy najniższy numer ma uzyskać wierzchołek minimalny digrafu, który niekoniecznie leży najbardziej na prawo – jest nim wierzchołek x w digrafie E (a); zredukowany digraf E_r (b); naddigraf \bar{E}_r otrzymany w wyniku działania zmodyfikowanego Algorytmu (c)

Twierdzenie 27. *Przedstawiony w tym punkcie algorytm umieszcza płaski N -wolny digraf pokrycia D zbioru uporządkowanego (P, \leq) na dwóch stronach w książce. Czas działania algorytmu jest wielomianowy względem liczby elementów i liczby relacji pokrycia w zbiorze P , czyli względem liczby wierzchołków n i liczby łuków m w digrafie D .*

Łatwo zauważyć, że wszystkie kroki postępowania, mające na celu umieszczenie danego do góry płaskiego digrafu pokrycia na dwóch stronach, mogą być wykonane w czasie $O(m + n)$.



Rysunek 7.13. Dla digrafu E z Rysunku 7.12(a), umieszczenie na dwóch stronach zredukowanego digrafu E_r (a) i umieszczenie na dwóch stronach oryginalnego digrafu E (b)

8. Podsumowanie

Praca jest poświęcona problemowi liczby stron w dziedzinie zbiorów uporządkowanych. Główną uwagę skupiono na dwóch problemach w tym obszarze badań, które dotychczas nie doczekały się pełnego rozwiązania:

- scharakteryzować zbiory, które mogą być umieszczone na dwóch stronach w książce,
- określić liczbę stron planarnych zbiorów uporządkowanych.

Najważniejsze wyniki osiągnięto dla klasy N -wolnych zbiorów uporządkowanych korzystając z interpretacji takich zbiorów jako digrafów łukowych. Dla tej klasy zbiorów uporządkowanych otrzymano wcześniej częściowe wyniki i ta klasa zbiorów występuje często w badaniach trudnych problemów kombinatorycznych, dając szansę na otrzymanie przynajmniej częściowych wyników. Tak też się stało w tej pracy. Najważniejszy wynik pracy, to algorytmiczny dowód twierdzenia, że każdy N -wolny planarny zbiór uporządkowany można umieścić w książce na dwóch stronach pod warunkiem jednak, że digraf pokrycia takiego zbioru jest dany jako digraf do góry płaski, gdyż badanie do góry planarności zbiorów uporządkowanych jest problemem NP-zupełnym.

Wymienione powyżej dwa problemy pozostają nadal otwarte w całej swej ogólności.

Bibliografia

- [1] Alhashem M., Jourdan G.-V., Zaguia N., On pagenumber of bipartite orders, Proceedings of the CCCG, Ottawa, 2005, 252-255.
- [2] Alzohairi M., *The Pagenumber of Ordered Sets*, Ph. D. Thesis, University of Ottawa, Ottawa 1996.
- [3] Alzohairi M., Rival I., Series-parallel planar ordered sets have page number two, w: North S. (ed.), *Graph Drawing*, Proceedings of GD'96, LNCS **1190**(1997), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 11-24.
- [4] Alzohairi M., Rival I., Kostochka A., The pagenumber of spherical lattices is unbounded, *Arab. J. Math. Sci.* **7**(2001), 79-82.
- [5] Alzohairi M., N -free planar ordered sets that contain no covering four-cycle have page number two, *Arab. J. Sci. Eng.* **31**(2006), 1-8.
- [6] Bertolazzi P., Di Batista G., Liotta G., Mannino C., Upward drawings of triconnected digraphs, *Algorithmica* **12**(1994), 476-497.
- [7] Bernhart F., Kainen P.C., The book thickness of a graph, *J. Combin. Theory B* **27**(1979), 320-321.
- [8] Bilski T., Embedding graphs in books: a survey, *IEE, Proceedings-E*, **139**(1992), 134-138.
- [9] Birkhoff Garrett, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence 1940 (1979, 3rd edition).
- [10] Chung F.R.K., Leighton F.T., Rosenberg A.L., Embedding graphs in books: a layout problem with application to VLSI design, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* **8**(1987), 33-58.
- [11] Czyzowicz J., informacja osobista, 1992.
- [12] Diaz J., Petit J., Serna M., A survey of graph layout problems, *ACM Computing Survey* **34**(2002), 313-356.
- [13] Diestel R., *Graph Theory*, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2005.
- [14] Di Giacomo E., Didimo W., Liotta G., Wismath S., Book embeddings and point-set embeddings of series-parallel digraphs, w: *Graph Drawing*, LNinCS, vol. 2528, 2002, 162-173.
- [15] Di Giacomo E., Didimo W., Liotta G., Wismath S., Curve-constrained drawings of planar graphs, *Comput. Geom. Theory Appl.* **30**(2005), 1-23.
- [16] Dujmovic V., Wood D.R., On linear layouts of graphs, *Discrete Math. and Theoretical Comp. Sci.* **6**(2004), 339-358.
- [17] Even S., Itai A., Ques, stacks, and graphs, in: Z. Kohavi, A. Paz (eds.), Proc. International Symp. on Theory of Machines and Computations, Academic Press, 1971, 71-86.
- [18] Garey M.R., Johnson D.S., Miller G.L., Papadimitriou C.H., The complexity of coloring circular arcs and chords, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* **1**(1980), 216-227.
- [19] Garg A., Tamassia R., On the computational complexity of upward and rec-

- tilinear planarity testing, w: Tamassia R., Tollis I.G. (eds.), *Graph Drawing*, LNinCS vol. **894**, Springer-Verlag 1995, 286-297.
- [20] Garg A., Tamassia R., Upward planarity testing, *Order* **12**(1995), 109-133.
- [21] Giordano F., Liotta T., Mchedlidze T., Symvonis A., Computing upward topological book embeddings of upward digraphs, w: *ISAAC 2007*, LNinCS vol. **4835**, Springer-verlag 2007, 172-183.
- [22] Golumbic M.C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press New York, 1980.
- [23] Gratzner G., *General Lattice Theory*, Birkhauser, Basel, Stuttgart, 1978.
- [24] Grillet P.A., Maximal chains and antichains, *Fund. Math.* **65**(1969), 157-167.
- [25] Habib M., Comparability invariants, *Ann. Discrete Math.* **23**(1984), 371-386.
- [26] Habib M., Moehring R.H., Steiner G., Computing the bump number is easy, *Order* **5**(1988), 107-129.
- [27] Harary F., Norman Z.R., Some properties of line digraphs, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **9**(1960), 161-168.
- [28] Hashemi S.M., Rival I., Kisielewicz A., The complexity of upward drawings on sphere, *Order* **14**(1998), 327-363.
- [29] Heath L.S., Pemmaraju S.V., Stack and queue layouts of posets, *SIAM J. Discrete Math.* **10**(1997), 599-625.
- [30] Heath L.S., Pemmaraju S.V., Trenk A., Stack and queue layouts of directed acyclic graphs: Part I, *SIAM J. Comput.* **28**(1999), 1510-1539.
- [31] Heath L.S., Pemmaraju S.V., Stack and queue layouts of directed acyclic graphs: Part II, *SIAM J. Comput.* **28**(1999), 1588-1626.
- [32] Heath L.S., Rosenberg A.L., Laying out graphs using queues, *SIAM J. Comput.* **21**(1992), 927+958.
- [33] Hemminger R.L., Beineke L.W., Line graphs and line digraphs, w: Beineke L.W., Wilson R.J. (eds.), *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press. London 1978, 271-305.
- [34] Heuchenne C., Sur une certaine correspondance entre graphs, *Bull. Soc. Roy. Soc. Liege* **33**(1964), 743-753.
- [35] Kelly D., Rival I., Fundamentals of planar ordered sets, *Discrete Math.*, **63**(1987), 197-216.
- [36] Kelly D., Rival I., Planar lattices, *Canad. J. Math.*, **27**(1975), 636-665.
- [37] Kisielewicz A., Easy planarity testing for ordered sets, w: H. Zimmermann at al. (eds.), *Operations Research Proceedings 1966*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1997, 151-156.
- [38] Kisielewicz A., Rival I., Every triangle-free planar graph has an upward planar drawing, *Order* **10**(1993), 1-16.
- [39] Kwiatkowska A.B., Syslo M.M., On Posets of Page Number 2, *Electronic Notes In Discrete Mathematics* **22**(2005), 549-552; Materiały konferencji 7th International Colloquium on Graph Theory, Giens, Francja, 12-16.09.2005.
- [40] Kwiatkowska A.B., Syslo M.M., *On page number of some planar posets*, Manuskrypt, 2005.
- [41] Kwiatkowska A.B., Syslo M.M., On Page Number of N -free Posets, *Electronic Notes In Discrete Mathematics* **24**(2006), 243-249; Materiały konferencji 5th Cracow Conference on Graph Theory, Ustroń, 11-15.09.2006.
- [42] Kwiatkowska A.B., Syslo M.M., Book embedding of N -free posets, Materiały konferencji EuroCG 2012, Assisi, Włochy, 19-21.03.2012.
- [43] Leclerc B., Monjardet B., Orders C. A. C., *Fund. Math.* **79**(1973), 11-22.

- [44] Le Tu Quoc Hung, A planar poset which requires four pages, *Ars Combin.* **35**(1993), 291-302.
- [45] Le Tu Quoc Hung, *Numbering problems in graphs and in posets*, Ph.D. Thesis, Institute of Computer Science, University of Wrocław, 1994.
- [46] Mchedlidze T., Symvonis A., Crossing-optimal acyclic hamiltonian path completion and its application to upward topological book embeddings, in: Das S., Uehara R. (eds.), *WALCOM 2009*, LNCS 5431, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009, 250–261.
- [47] Mchedlidze T., Symvonis A., Crossing-free path completion for planar *st*-digraphs, in: Dong Y., Du D.-Z., Ibarra O. (eds.), *ISAAC 2009*, LNCS 5878, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009, 882–891.
- [48] Nowakowski R., Problems 3.7 and 3.8, in: I. Rival (ed.), *Algorithms and Order*, Kluwer, Dordrecht 1989, 478.
- [49] Nowakowski R., Parker A., Ordered sets,pagenumbers and planarity, *Order* **6**(1989), 209-218.
- [50] Ollmann L.T., On the book thickness of various graphs, w: Proceedings of the 4th S.-E. Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Utilitas Mathematica Publ. Inc., Winnipeg 1973, 459.
- [51] Pemmaraju S.V., *Exploring the Power of Stacks and Queues via Graph Layouts*, Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1992.
- [52] Platt C.R., Planar lattices and planar graphs, *J. Combinatorial Theory* **21B**(1976), 30-39.
- [53] Pouzet M., Zaguia N., *N*-free extensions of posets. Note on a theorem of P.A. Grillet, *Manuskrypt*, 2005.
- [54] Pulleyblank W.R., On minimizing setups in precedence constrained scheduling, *Discr. Appl. Math.*, 1985 (ma się ukazać!).
- [55] Rival I., Stories about order and the letter *N*, in: *Combinatorics and Odered Sets*, Contemp. Math. 57, AMS, 1986, 263-285.
- [56] Rosenberg A.L., DIOGENS, circa 1986, LNinCS **237**, Springer Verlag, Berlin, 96-107.
- [57] Schaeffer A.A., Simons B.B., Computing the bump number with techniques from two-processor scheduling, *Order* **5**(1988), 131-141.
- [58] Syslo M.M., Iri M., Efficient outerplanarity testing, *Fund. Inform.* **2**(1979), 261-275.
- [59] Syslo M.M., A labeling algorithm to recognize a line digraph and output its root graph, *Information Processing Letters* **15**(1982), 28-30.
- [60] Syslo M.M., Optimal constructions of reversible digraphs, *Discrete Applied Mathematics* **7**(1984), 209-220.
- [61] Syslo M.M., Minimizing the jump number for partially ordered sets: a graph-theoretic approach, *Order* **1**(1984), 7-19.
- [62] Syslo M.M., An algorithm for solving the jump number problem, *Discrete Mathematics* **72**(1988), 337-346.
- [63] Syslo M.M., Bounds to the page number of partially ordered sets, in: M. Nagel (ed.), *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, LNCS **411**(1990), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 181-195.
- [64] Syslo M.M., The jump number problem on interval orders: a 3/2-approximation algorithm, *Discrete Mathematics* **144**(1995), 119-130.
- [65] Szamkołowicz L., On foundations of network planning (in Polish), *Studia i Ma-*

teriały. Prace Naukowe Instytutu Matematyki i Fizyki Teoretycznej **4** (1972), Politechnika Wroclawska, 3-16.

- [66] Tarjan R., Sorting using networks of queues and stacks, *J. ACM* **19**(1111), 341-346.
- [67] Wigderson A., The complexity of the Hamiltonian circuit problem for maximal planar graphs, Tech. report 82-298, Electrical Engineering and Computer Science Department, Princeton University, Princeton, NJ, 1982.
- [68] Yannakakis M., Four pages are necessary and sufficient for planar graphs, in: *Proceedings of the 18th ACM Symposium on Theory of Computing*, 1986, 104-108; see also Embedding planar graphs in four pages, *J. Computer and System Sciences* **38**(1989) 36-67.