Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Agnieszka Stocka

O uogólnieniach skończonych grup modularnych

rozprawa doktorska

Promotor
dr hab. Czesław Bagiński
Wydział Informatyki
Politechnika Białostocka

Listopad 2007

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

. . . .

data *podpis autora rozprawy*

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

. . . .

data *podpis promotora rozprawy*

Streszczenie

W rozprawie rozważane są tylko grupy skończone, zwane dalej grupami. Celem rozprawy jest opisanie pewnych grup z punktu widzenia własności krat ich podgrup. Motywacją do naszych badań były uogólnienia krat modularnych, inspirowane udanymi próbami rozszerzenia pojęcia wymiaru jednolitego (wymiaru Goldiego), znanego wcześniej dla krat modularnych, na istotnie szersze klasy krat. Kraty te nazwano silnie zrównoważonymi i dualnie silnie zrównoważonymi, a grupy o takich kratach podgrup, odpowiednio grupami silnie zrównoważonymi i dualnie silnie zrównoważonymi.

W pierwszym rozdziale rozprawy przypominamy i uzupełniamy potrzebne dalej wiadomości o kratach skończonych.

W drugim rozdziale przedstawiamy pełną klasyfikację grup silnie zrównoważonych. Wykorzystując opis minimalnych grup prostych dowodzimy najpierw, że są one superrozwiązalne, następnie charakteryzujemy silnie zrównoważone p-grupy i $\{p, q\}$-grupy i w końcu uzyskujemy następujące twierdzenie strukturalne: *Skończona grupa G jest silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy jest iloczynem prostym p-grup i $\{p, q\}$-grup silnie zrównoważonych o rzędach parami względnie pierwszych.* Z opisu czynników tego iloczynu wynika, że algebraiczna struktura grup silnie zrównoważonych formalnie przypomina strukturę grup modularnych, chociaż klasa grup silnie zrównoważonych jest istotnie większa.

W rozdziale trzecim opisujemy grupy dualnie silnie zrównoważone. Podobnie jak grupy silnie zrównoważone rozkładają się one na iloczyny proste pewnych p-grup i $\{p, q\}$-grup, których rzędy są parami względnie pierwsze. W tym jednak przypadku zarówno p-grupy, jak i $\{p, q\}$-grupy dualnie silnie zrównoważone mają opis znacznie różniący się od opisu p-grup i $\{p, q\}$-grup modularnych. Z podanych charakteryzacji wynika, że częścią wspólną, klas grup silnie zrównoważonych i dualnie silnie zrównoważonych jest klasa grup modularnych.

Na koniec, korzystając z tego, że w silnie zrównoważonej kracie jest dobrze określony silny wymiar jednolity, definiujemy silny wymiar i kowymiar jednolity w grupach odpowiednio silnie zrównoważonych i dualnie silnie zrównoważonych. Podajemy też metody obliczania tych wymiarów. Pokazujemy, że zarówno silny wymiar jednolity jak i silny kowymiar jednolity grupy ma ścisły związek z mocą pewnego zbioru generatorów tej grupy.

SŁOWA KLUCZOWE: grupa skończona, grupa rozwiązalna, skończona grupa prosta, krata modularna, wymiar jednolity, krata podgrup, grupa modularna

KLASYFIKACJA TEMATYCZNA PRACY: 20D30, 06C05

Abstract

In this work we consider only finite groups which we call simply groups. The aim of the dissertation is to describe certain finite groups from the point of view of properties of subgroup lattices. The motivation of our study was to generalize of the notion of a modular lattice. This was inspired by a successful attempt to extend the notion of a uniform dimension (Goldie dimension) from the class of modular lattices to essentially larger classes. These lattices are called strongly balanced and dually strongly balanced. Groups with such subgroup lattices are called strongly balanced groups and dually strongly balanced groups respectively.

In the first chapter we remind and complet necessary informations about finite lattices.

In the second chapter we present a classification of strongly balanced groups. Using the known description of minimal simple groups first we show that they are supersolvable. Next, we describe strongly balanced p-groups and $\{p, q\}$-groups. Finally we obtain the structural theorem which gives a complete characterization of all strongly balanced groups: *A finite group G is strongly balanced if and only if G is a direct product of strongly balanced p-groups and $\{p, q\}$-groups with pairwise relatively prime orders.* It follows from our description of direct factors that the algebraic structure of finite strongly balanced groups is very similar to the structure of finite modular groups, although the class of strongly balanced groups is essentially larger.

In the third chapter we describe dually strongly balanced groups. Similarly as in the previous case, they are the direct products of dually strongly balanced p-groups and $\{p, q\}$-groups with pairwise relatively prime orders. But in this case p-groups and $\{p, q\}$-groups are essentially different from p-groups and $\{p, q\}$-groups in the modular case. It follows from our characterization that the intersection of the class of finite strongly balanced groups and the class of finite dually strongly balanced groups is the class of finite modular groups, though the intersection of related classes of lattices is essentially bigger than the class of modular lattices.

At the end of the work we study dimensions of strongly balanced and dually strongly balanced groups which can be defined on the basis of the notion of the strong uniform dimension of strongly balanced lattices. In particular we prove that both dimensions of such groups are strictly related to number of elements in their certain minimal generating set.

KEYWORDS: finite group, solvable group, finite simple group, modular lattice, uniform dimension, subgroup lattice, modular group

2000 MATHEMATIC SUBJECT CLASSIFICATION: 20D30, 06C05

Spis treści

Wstęp

Początki teorii krat sięgają pierwszej połowy XIX wieku, a systematyczne badania tej dziedziny rozpoczęły się prawie sto lat później, w latach trzydziestych XX wieku. Jednym ze źródeł motywacji dla tych badań było zapotrzebowanie z innych działów matematyki w tym z teorii pierścieni, skąd m.in. wywodzi się pojęcie krat modularnych, sformułowane jeszcze w dziewiętnastym wieku przez R. Dedekinda. Z czasem okazało się, że kratowe podejście przynosi wiele korzyści również teorii grup, a zważywszy, że kraty podgrup mogą mieć dowolnie bogatą strukturę, teoria grup dostarczyła znacznie więcej motywacji niż teoria pierścieni.

Wzajemne związki własności grupy z własnościami kraty jej podgrup mają charakter swego rodzaju sprzężenia zwrotnego. Nas interesować będą kratowe motywacje w teorii grup wyrosłe z klasycznych zagadnień sięgających pojęcia krat modularnych.

Grupy, których kraty podgrup należą do ważnych klas krat, takich jak właśnie kraty modularne lub rozdzielne były skutecznie badane już w latach trzydziestych XX-go wieku. W 1938 r. O. Ore ([17]) udowodnił, że grupa ma rozdzielną kratę podgrup wtedy i tylko wtedy, gdy jest lokalnie cykliczna. W latach 1941-43 K. Iwasawa ([10, 11]) scharakteryzował modularne grupy lokalnie skończone i modularne grupy zawierające element nieskończonego rzędu. Klasyfikację grup modularnych zakończył R. Schmidt dopiero w 1986 roku opisem modularnych grup torsyjnych ([21]), co było możliwe dzięki konstrukcjom grup Tarskiego uzyskanym przez A. Olshanskii'ego na początku lat osiemdziesiątych XX wieku.

Przegląd najważniejszych wyników uzyskanych przed rokiem 1994 i dotyczących relacji między własnościami grup i krat ich podgrup można znaleźć w obszernej (bo liczącej prawie 600 stron) monografii R. Schmidta poświęconej tej tematyce ([22]).

Badania te są kontynuowane do chwili obecnej. Jednym z interesujacych kierunków rozwoju jest opis grup, których kraty podgrup nie zawierają pewnych szczególnych rodzajów krat. Taką własność mają na przykład kraty rozdzielne i modularne. W ramach badań w tym obszarze, R. Schmidt opisał m.in. skończone grupy z planarną kratą podgrup ([24, 25]) oraz skończone grupy, których kraty podgrup nie zawierają podkraty izomorficznej z kratą podgrup grupy diedralnej rzędu 8 ([26]).

Jak wspomnieliśmy, struktura skończonych grup modularnych, czyli grup, których krata wszystkich podgrup jest modularna, jest znana już od lat czterdziestych ubiegłego wieku. W niniejszej pracy zajmować się będziemy skończonymi grupami należącymi do klas istotnie szerszych, niż klasa grup modularnych. Są to klasy grup z silnie zrównoważoną i z dualnie silnie zrównoważoną kratą podgrup.

Motywacja dla opisu tych klas sięga do zagadnień z teorii pierścieni i modułów, które przeniesione do teorii krat dały w następstwie interesujący impuls do badań w teorii grup. Pojęcie kraty silnie zrównoważonej pojawiło się w związku z udaną próbą uogólnienia pojęcia wymiaru Goldiego (zwanego też wymiarem jednolitym) dla modułów, podjętej w latach osiemdziesiątych przez P. Grzeszczuka i E. Puczyłowskiego. W [7] rozszerzyli oni to pojęcie na kraty modularne z zerem i wykazali, że wymiar jednolity dowolnego modułu jest równy wymiarowi kraty wszystkich podmodułów tego modułu. W pracy [13] J. Krempa i B. Terlikowska-Osłowska pokazali, że wymiar jednolity jest dobrze określony w znacznie szerszej klasie krat, nazwanych tam „permutable”, a obecnie nazywanych *kratami zrównoważonymi*. Tam też wprowadzono pojęcie *krat silnie zrównoważonych* („globally permutable”) i ich silnego wymiaru jednolitego. W pracy [13] została także podana charakteryzacja tych krat analogiczna do klasycznej charakteryzacji krat modularnych, czy rozdzielnych:

Skończona krata jest silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podkraty izomorficznej z jedną z dwóch minimalnych krat niezrównoważonych (tzw. krat testowych).

Warto odnotować, że niezależnie od [13], klasa krat zrównoważonych pojawiła się w pracy Zolotareva ([35]).

W przeciwieństwie do krat modularnych i rozdzielnych, które charakteryzują się tym, iż kraty do nich dualne są odpowiednio modularne i rozdzielne, krata dualna do kraty silnie zrównoważonej na ogół nie jest silnie zrównoważona. Zatem kraty dualnie silnie zrównoważone tworzą nową klasę krat, która również posiada kraty testowe i są one dualne do testowych krat dla klasy krat silnie zrównoważonych.

W niniejszej pracy przedstawiamy opis grup skończonych, których kraty podgrup są silnie zrównoważone lub dualnie silnie zrównoważone. W oparciu o wspomniane wyżej związki z wymiarem Goldiego modułów, badamy również własności wymiarów (jednolitego i silnie jednolitego), wprowadzonych w klasie tych grup.

Wszystkie rozważane w rozprawie kraty i grupy są skończone, aczkolwiek część z uzyskanych wyników można przenieść na znacznie szerszą klasę obiektów. Pierwszy rozdział zawiera wprowadzenie do problematyki z punktu widzenia teorii krat. Podajemy tu charakteryzację krat silnie zrównoważonych (dualnie silnie zrównoważonych), jako tych, które nie zawierają w charakterze podkrat dwóch testowych krat $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ (odpowiednio $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$). Definiujemy ponadto, pojęcia silnego wymiaru jednolitego i silnego kowymiaru jednolitego oraz przedstawiamy ich podstawowe własności ważne dla dalszej części pracy. Rozdział 1 jest oparty głównie na wynikach uzyskanych w pracach [13] i [35].

W rozdziale 2 przedstawiamy kompletną klasyfikację grup skończonych z silnie zrównoważoną kratą podgrup, czyli *grup silnie zrównoważonych*. Okazuje się, że grupa skończona jest silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy rozkłada się na iloczyn prosty p-grup modularnych i pewnych $\{p, q\}$-grup, których rzędy są parami względnie pierwsze (Twierdzenie 2.3.10). Silnie zrównoważone $\{p, q\}$-grupy na ogół nie są modularne, ale ich algebraiczna struktura bardzo przypomina strukturę grup modularnych. Podajemy ich opis za pomocą generatorów i relacji. Dowód jest dość skomplikowany i żmudny. Najpierw, na podstawie klasyfikacji minimalnych skończonych grup prostych dowodzimy, że każda grupa silnie zrównoważona jest rozwiązalna. Następnie pokazujemy, że są one superrozwiązalne, co w dalszej kolejności prowadzi do uzyskania wspomnianego wyżej rozkładu na iloczyn prosty i postaci jego czynników. Przedstawione w tym rozdziale wyniki pochodzą z pracy [2], która dała impuls do dalszych uogólnień uzyskanych przez R. Schmidta w [23]. Charakteryzację silnie zrównoważonych grup lokalnie skończonych można znaleźć w [20].

Rozdział 3 poświęcony jest grupom, których krata podgrup jest dualnie silnie zrównoważona, czyli *grupom dualnie silnie zrównoważonym*. Podobnie jak grupy silnie zrównoważone, one również są rozwiązalne, ponieważ rozkładają się na iloczyn prosty p-grup i $\{p, q\}$-grup dualnie silnie zrównoważonych, których rzędy są parami względnie pierwsze. Tutaj również klasyfikacja minimalnych grup prostych okazała się użyteczna. Jednakże opis składników prostych jest już zupełnie inny. Po pierwsze p-grupy dualnie silnie zrównoważone stanowią klasę szerszą niż p-grupy modularne. Dla $p > 2$, podobnie jak w przypadku modularnym, p-grupa G nie jest dualnie silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy najmniejsza grupa, która nie jest dualnie silnie zrównoważona (którą możnaby nazwać p-grupą testową), zanurza się w grupę G. Dla $p = 2$ taki przejrzysty opis dotyka wyjątkowo trudnych zagadnień związanych z klasyfikacją 2-grup rangi 2, która od lat stanowi jedno z ważnych nierozwiązanych zagadnień teorii skończonych p-grup. Po drugie, opis $\{p, q\}$-grup dualnie silnie zrównoważonych jest również kompletnie inny niż ich odpowiedników silnie zrównoważonych.

Ważną konsekwencją otrzymanych charakteryzacji grup silnie zrównoważonych i dualnie silnie zrównoważonych jest fakt, że częścią wspólną klasy grup z silnie zrównoważoną i dualnie silnie zrównoważoną kratą podgrup jest klasa grup modularnych. Jest to o tyle interesujące, że krata zwana pieciokątem, jest zarówno silnie zrównoważona, jak i dualnie silnie zrównoważona, ale nie jest modularna. Wyniki tego rozdziału są oparte na pracy [3].

W rozdziale 4 na bazie rezultatów z rozdziałów 2 i 3 przedstawiamy sposób wyznaczania wymiarów jednolitych i kowymiarów jednolitych krat podgrup grup silnie zrównoważonych i dualnie silnie zrównoważonych. Pokazujemy m.in., że zarówno jednolity, jak i silnie jednolity wymiar grup silnie zrównoważonych jest monotoniczny (jego wartość dla sekcji nie jest większa, niż dla grupy) i w pewnym sensie jest addytywny (wymiar iloczynu półprostego jest sumą wymiarów czynników). Każda grupa silnie zrównoważona, podobnie jak skończone p-grupy, charakteryzuje się tym, że wszystkie jej minimalne zbiory generatów są równoliczne. Dowodzimy, że w grupach silnie zrównoważonych właśnie moce tych zbiorów są równe obu wymiarom, jednolitemu i silnie jednolitemu (Twierdzenia 4.1.11, 4.2.5), z wyjątkiem grup, które zawierają grupę kwaternionów jako czynnik prosty. W szczególności, więc w klasie tych grup, poza wskazanym wyjątkiem, oba wymiary się pokrywają.

Inaczej wygląda sytuacja z kowymiarami, jednolitym i silnie jednolitym. Nawet w klasie grup dualnie silnie zrównoważonych te kowymiary nie pokrywają się. Pokazujemy m.in., że w klasie tych grup kowymiar jednolity jest równy mocy maksymalnego zbioru g-niezależnego generującego grupę, natomiast silny kowymiar jednolity jest równy mocy maksymalnego zbioru g-niezależnego zawartego w grupie. Te wyniki mają bezpośredni związek z badaniami J. Whistona z jego rozprawy doktorskiej [33] i prac [32], [34].

Warto odnotować, że próby liczenia wymiarów jednolitych były podejmowane przez innych autorów również w innych klasach grup, niż silnie zrównoważone. Pewne wyniki na ten temat można znaleźć np. w pracach [1, 16].

Cześć przedstawionych w tym rozdziale wyników pochodzi z publikacji [12].

Pragnę podziękować Promotorowi rozprawy Panu Profesorowi Czesławowi Bagińskiemu za zaangażowanie, oferowaną pomoc w czasie pisania niniejszej rozprawy, a także za czas poświęcony licznym dyskusjom. Podziękowania kieruję także do Pana Profesora Jana Krempy za wprowadzenie w interesującą tematykę i za kilkuletnią opiekę naukową.

Rozdział 1

Kraty

W tym rozdziale przedstawimy terminologię i rezultaty teorii krat wykorzystywane w następnych rozdziałach. Pojęcia używane w pracy, które tutaj nie zostały zdefiniowane, można znaleźć w monografiach [4, 6, 22].

W pracy rozważamy wyłącznie kraty skończone, zatem istnieje w nich element najmniejszy oznaczany symbolem 0 i element największy oznaczany symbolem 1. Ponadto wszystkie takie kraty są atomowe i koatomowe.

0-*podkratą* kraty L nazywamy podkratę, która zawiera element najmniejszy kraty L a 1-*podkratą* jeśli zawiera ona element największy kraty L. Niech $a \leq b \in L$. Podzbiór $\{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ kraty L nazywamy *przedziałem* i oznaczamy $[a, b]_L$ lub $[a, b]$, jeśli nie będzie to prowadziło do nieporozumień. Dowolny przedział kraty jest jej podkratą, ale stwierdzenie odwrotne na ogół nie jest prawdziwe. Na przykład, jeśli L jest kratą taką, że $|L| \geq 3$, to zbiór $\{0, 1\} \subset L$ jest podkratą, ale nie jest przedziałem kraty L.

Jeśli L jest kratą z porządkiem $\leq$, to na zbiorze wszystkich elementów kraty L możemy wprowadzić porządek dualny $\widehat{\leq}$ taki, że dla dowolnych elementów $x, y \in L$, $x \mathrel{\widehat{\leq}} y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \leq x$. Zbiór elementów kraty L z porządkiem $\widehat{\leq}$ będziemy nazywać *kratą dualną* do L i oznaczać $\widehat{L}$. Łatwo jest wykazać, że krata L jest modularna (rozdzielna) wtedy i tylko wtedy, gdy $\widehat{L}$ jest modularna (rozdzielna).

1.1 Kraty zrównoważone

Niech L będzie kratą. Zbiór $X \subset L \setminus \{0\}$ nazywamy *niezależnym*, jeśli dla dowolnego i, $1 \leq i \leq n$,

$$x_i \wedge (\bigvee_{k \neq i} x_k) = 0.$$

Zbiór ten nazywamy *ciągowo niezależnym* jeśli dla dowolnego $k < n$,

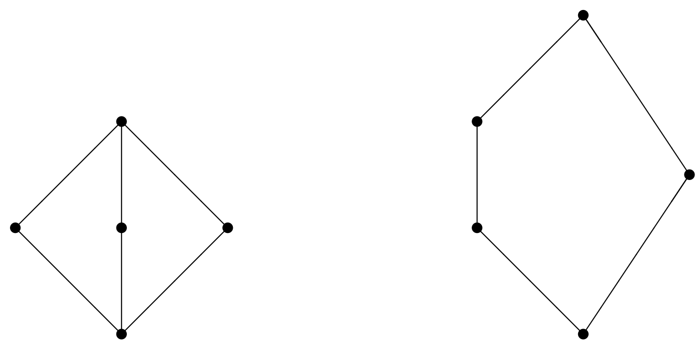
$$(\bigvee_{j=1}^{k} x_j) \wedge x_{k+1} = 0.$$

Z powyższych definicji bezpośrednio widać, że w dowolnej kracie każdy zbiór niezależny jest ciągowo niezależny. Zbiór wszystkich atomów kraty $\mathcal{T}_1$ lub $\mathcal{T}_2$ (patrz Rysunek 1.2, str. 13) jest ciągowo niezależny, ale nie jest niezależny, zatem implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Kratę L nazywamy *zrównoważoną*, jeśli każdy trzyelementowy ciągowo niezależny podzbiór kraty L jest zbiorem niezależnym. W myśl powyższych definicji krata L jest zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych niezerowych elementów $x, y, z \in L$,

$$(x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge z) = 0 \implies ((y \vee z) \wedge x) \vee ((z \vee x) \wedge y) = 0. \tag{1.1}$$

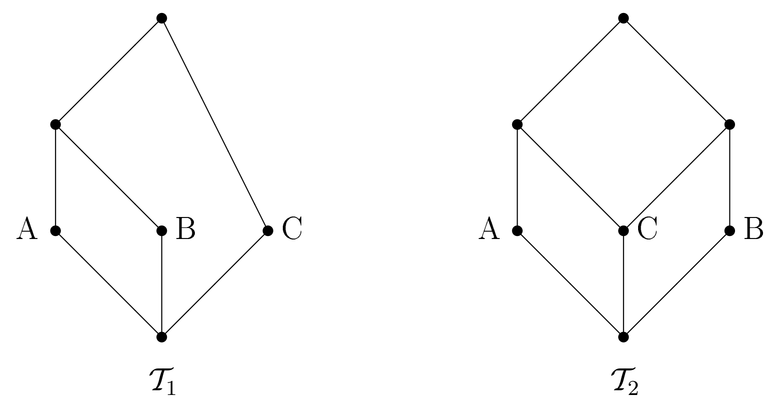
Ważne klasy krat, jak klasę krat rozdzielnych czy modularnych, można scharakteryzować na podstawie nieobecności w niej pewnych konkretnych krat. Dokładniej, krata L jest rozdzielna wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podkraty izomorficznej ani z kratą $\mathcal{M}_3$, ani z kratą $\mathcal{N}_5$ (patrz Rysunek 1.1); L jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podkraty izomorficznej z kratą $\mathcal{N}_5$. W [13] i [35] udowodniono, że kraty zrównoważone mają podobną charakteryzację. Ponieważ rozpatrywane w tej pracy kraty są skończone, więc przedstawimy ją wraz z dowodem wykorzystującym tę umowę.



$\mathcal{M}_3$ $\mathcal{N}_5$

Rysunek 1.1:

Lemat 1.1.1. *Niech L będzie kratą i x, y, z będą niezerowymi elementami kraty L takimi, że $(x \vee y) \wedge z = 0$, $(y \vee z) \wedge x = 0$, $(x \vee z) \wedge y = y$. Wówczas krata generowana przez elementy $x, (x \vee y) \wedge (y \vee z), z$ jest izomorficzna z kratą $\mathcal{T}_2$.*



Rysunek 1.2:

Dowód. Niech $x, y, z \in L$ będą takie jak w założeniach lematu. Przyjmijmy $y_1 = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$. Wówczas

$$\begin{aligned}(x \vee y_1) \wedge z &= (x \vee ((x \vee y) \wedge (y \vee z))) \wedge z \\ &\leq (x \vee x \vee y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge z = (x \vee y) \wedge z = 0.\end{aligned}$$

Podobnie $(z \vee y_1) \wedge x = 0$. Ponadto

$$\begin{gathered}(x \vee y_1) \wedge (y_1 \vee z) = \\ (x \vee ((x \vee y) \wedge (y \vee z))) \wedge (((x \vee y) \wedge (y \vee z)) \vee z) \leq \\ (x \vee x \vee y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (y \vee z \vee z) = \\ (x \vee y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (z \vee y) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) = y_1.\end{gathered}$$

Z drugiej strony łatwo widać, że $y_1 \leq (x \vee y_1) \wedge (y_1 \vee z)$. Stąd otrzymujemy $y_1 = (x \vee y_1) \wedge (y_1 \vee z)$. Zauważmy dalej, że $y_1 \wedge (x \vee z) \geqslant (y_1 \wedge x) \vee (y_1 \wedge z) = y_1$ i $y_1 \leqslant y_1 \wedge (x \vee z) \leqslant y_1$, czyli $(x \vee z) \wedge y_1 = y_1$. Stąd $x \vee y_1 \leq x \vee z$. Jeśli $x \vee y_1 = x \vee z$, to $0 = (x \vee y_1) \wedge z = (x \vee z) \wedge z = z$, co daje sprzeczność. Zatem $x \vee y_1 < x \vee z$ i podobnie $z \vee y_1 \leq z \vee x$. Oczywiście mamy też $y_1 \vee x \vee z = z \vee x$. Zatem krata generowana przez elementy x, y_1, z jest izomorficzna z $\mathcal{T}_2$. □

Twierdzenie 1.1.2. *Niech L będzie kratą. L jest zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera 0-podkraty izomorficznej ani z $\mathcal{T}_1$, ani z $\mathcal{T}_2$.*

Dowód. Przypuśćmy, że L nie jest kratą zrównoważoną. Zatem istnieją elementy $x, y, z \in L$ takie, że $x \wedge y = 0$, $(x \vee y) \wedge z = 0$, ale $(x \vee z) \wedge y \neq 0$. Niech $y_1 < (x \vee z) \wedge y$ będzie atomem kraty L. Wówczas $(x \vee z) \wedge y_1 = y_1$. Jeśli $(y_1 \vee z) \wedge x = 0$, to na mocy Lematu 1.1.1 elementy $x, (x \vee y_1) \wedge (z \vee y_1), z$ generują kratę izomorficzną z $\mathcal{T}_2$. Załóżmy zatem, że $(y_1 \vee z) \wedge x \neq 0$. Niech $x_1 \leq (y_1 \vee z) \wedge x$ będzie atomem kraty L. Rozważmy teraz kratę generowaną przez elementy x_1, y_1, z. Oczywiste jest, że $(x_1 \vee y_1) \wedge z = 0$, $x_1 = (y_1 \vee z) \wedge x_1$

oraz $(x_1 \vee z) \wedge y_1 \leq y_1$. Jeśli $(x_1 \vee z) \wedge y_1 = 0$, to na podstawie Lematu 1.1.1 elementy $y_1, (y_1 \vee x_1) \wedge (z \vee x_1), z$ generują kratę izomorficzną z $\mathcal{T}_2$. Niech zatem $(x_1 \vee z) \wedge y_1 = y_1$. Teraz łatwo można sprawdzić, że elementy x_1, y_1, z generują kratę izomorficzną z $\mathcal{T}_1$. $\square$

Powyższa charakteryzacja krat zrównoważonych na podstawie nieobecności pewnych 'małych' 0-podkrat niesie informację o wewnętrznej strukturze kraty w 'otoczeniu' jej zera, dopuszczając dużą nieokreśloność własności tych krat w podkratach niezawierających zera kraty.

Przykład 1.1.3. Niech M będzie kratą, która posiada dokładnie jeden atom a. Ponadto niech $[a, 1]$ będzie przedziałem izomorficznym z kratą $\mathcal{T}_1$ lub $\mathcal{T}_2$. Wówczas oczywiste jest, że M jest kratą zrównoważoną, ale jej podkrata $[a, 1]$ nie jest zrównoważona. Ponadto łatwo można sprawdzić, że odwzorowanie $f : M \longrightarrow [a, 1]$ dane wzorem $f(x) = x \vee a$, dla $x \in M$ jest homomorfizmem kraty M na $[a, 1]$. Zatem obraz kraty M w tym homomorfizmie, nie jest kratą zrównoważoną.

Stosując podobny zabieg, można udowodnić, że każdą kratę daje się zanurzyć w kratę zrównoważoną. To oznacza, że warunek zrównoważoności opisany wzorem (1.1) nie implikuje istotnych 'lokalnych' ograniczeń na kratę i nie narzuca kracie swego rodzaju jednorodności strukturalnej. Ograniczymy zatem rozważania do krat, które taką 'lokalną' jednorodność mają. Kratę nazywamy *silnie zrównoważoną*, gdy każdy jej przedział jest kratą zrównoważoną ([13]).

Wprost z definicji i Twierdzenia 1.1.2 wynika następująca charakteryzacja tych krat:

Twierdzenie 1.1.4. *Krata L jest silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podkraty izomorficznej ani z $\mathcal{T}_1$, ani z $\mathcal{T}_2$.*

Oczywiście dowolna krata silnie zrównoważona jest zrównoważona. Ponadto, z faktu, iż krata $\mathcal{N}_5$ występuje jako podkrata w testowych kratach $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ otrzymujemy

Wniosek 1.1.5. *Jeśli L jest kratą modularną, to L jest kratą silnie zrównoważoną.*

Klasa krat silnie zrównoważonych jest istotnie większa od klasy krat modularnych, ponieważ jak wynika z Twierdzenia 1.1.2 niemodularna krata $\mathcal{N}_5$, jest silnie zrównoważona. Jednocześnie wiele ważnych i interesujących własności krat modularnych zachowują również kraty silnie zównoważone. Na przykład:

Twierdzenie 1.1.6 ([13])**.** *Niech L będzie dowolną podkratą kraty silnie zrównoważonej i X będzie podzbiorem $L \setminus \{0_L\}$. Wówczas następujące warunki są* *równoważne:*

(a) *Dla dowolnych rozłącznych podzbiorów* $Y, Z \subset X$, $(\bigvee Y) \wedge (\bigvee Z) = 0_L$.

(b) X *jest niezależny.*

(c) X *jest ciągowo niezależny.*

Dowód. Udowodnimy implikację $(c) \Rightarrow (a)$. Niech $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i niech Y i Z będą niepustymi rozłącznymi podzbiorami zbioru X. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że $x_n \notin Y$. Używając zasady indukcji pokażemy, że $(\bigvee Y) \wedge (\bigvee Z) = 0$.

Dla $n = 2$ jest to oczywiste. Załóżmy zatem, że $n > 2$. Jeśli $x_n \notin Z$, to na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy tezę. Przypuśćmy więc, że $x_n \in Z$. Jeśli $Z = \{x_n\}$, to ponieważ X jest zbiorem ciągowo niezależnym, więc $x_n \wedge (\bigvee Y) = (\bigvee Z) \wedge (\bigvee Y) = 0$. Załóżmy zatem, że $Z \neq \{x_n\}$ i przyjmijmy $a = \bigvee Y$, $b = \bigvee (Z \setminus \{x_n\})$ i $c = x_n$. Na mocy założenia indukcyjnego, mamy $a \wedge b = 0$. Ponieważ X jest zbiorem ciągowo niezależnym, więc $(a \vee b) \wedge c = 0$. Wobec tego, że L jest kratą zrównoważoną, otrzymujemy $0 = (b \vee c) \wedge a = (\bigvee Y) \wedge (\bigvee Z)$.

Implikacje $(a) \Rightarrow (b)$ i $(b) \Rightarrow (c)$ wynikają bezpośrednio z definicji zbiorów niezależnych i ciągowo niezależnych. □

Twierdzenie to przy założeniu modularności kraty L, zostało udowodnione w [4, 6]. Dodatkowo pokazano tam, że zbiór X jest niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych podzbiorów $Y, Z \subset X$, $(\bigvee Y) \wedge (\bigvee Z) = \bigvee (Y \cap Z)$. Przykład 1.5 z pracy [13] pokazuje, że ten fakt nie jest prawdziwy w kratach zrównoważonych.

Klasy krat rozdzielnych i modularnych, jako rozmaitości, są zamknięte ze względu na podkraty, iloczyny proste i obrazy homomorficzne. Bezpośrednio z definicji kraty silnie zrównoważonej wynika, że klasa takich krat jest także zamknięta na iloczyny proste i podkraty. Nie wiadomo natomiast, czy jest to klasa zamknięta na obrazy homomorficzne. Wiemy tylko, na podstawie Przykładu 1.1.3, że obrazy homomorficzne krat zrównoważonych często nie są kratami zrównoważonymi.

Niniejszy paragraf zakończymy jedną obserwacją techniczną, przydatną w dalszych rozdziałach. Jej dowód wynika bezpośrednio z dowodu Twierdzenia 1.1.2.

Twierdzenie 1.1.7. *Niech L będzie kratą. Jeśli L zawiera 0-podkratę izomorficzną z $\mathcal{T}_1$, to L zawiera 0-podkratę izomorficzną z $\mathcal{T}_2$ lub 0-podkratę izomorficzną z $\mathcal{T}_1$ zawierającą dwa atomy kraty L.*

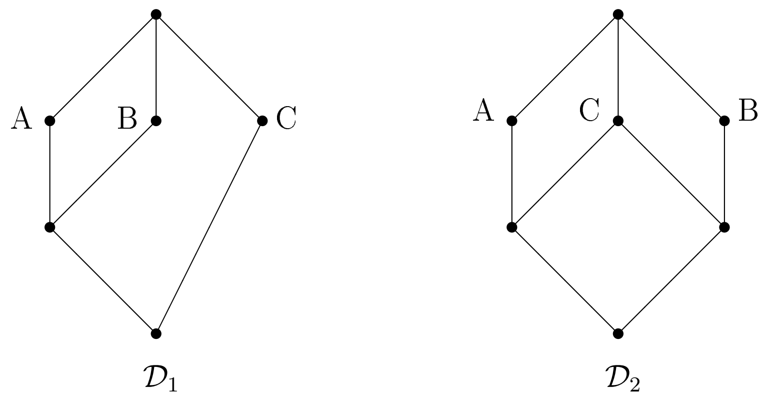
1.2 Kraty dualnie zrównoważone

Krata dualna do kraty modularnej (rozdzielnej) jest modularna (rozdzielna). Dualizacja kraty zrównoważonej (lub silnie zrównoważonej) na ogół nie daje kraty zrównoważonej (silnie zrównoważonej): na przykład kraty $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ (patrz Rysunek 1.3) są silnie zrównoważone, a kraty do nich dualne nie są nawet zrównoważone. Zatem przez dualizację pojęcia kraty silnie zrównoważonej otrzymujemy nową klasę krat, która podobnie, jak klasa krat silnie zrównoważonych, zawiera klasę krat modularnych i jest od niej większa. Ponadto kraty należące do niej zachowują pewne interesujące własności krat modularnych.

Krata L jest *dualnie zrównoważona*, jeśli dla dowolnych różnych od 1 elementów $x, y, z \in L$,

$$(x \vee y) \wedge ((x \wedge y) \vee z) = 1 \implies ((y \wedge z) \vee x) \wedge ((z \wedge x) \vee y) = 1. \tag{1.2}$$

Najmniejszymi kratami, które nie są dualnie zrównoważone są kraty przedstawione na Rysunku 1.3.



Rysunek 1.3:

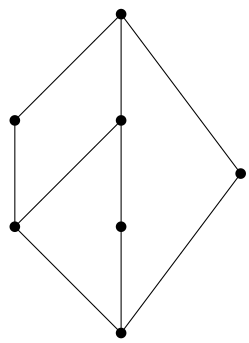
Jak widać, $\mathcal{D}_1$ jest kratą dualną do $\mathcal{T}_1$, a $\mathcal{D}_2$ jest kratą dualną do $\mathcal{T}_2$. Ponadto kraty $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ pełnią podobną rolę w klasie krat dualnie zrównoważonych, jak kraty $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ w klasie krat zrównoważonych.

Twierdzenie 1.2.1. *Niech L będzie kratą. L jest dualnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera 1-podkraty izomorficznej ani z $\mathcal{D}_1$, ani z $\mathcal{D}_2$.*

Powyższy fakt można udowodnić 'dualizując' rozważania przeprowadzone w dowodzie Twierdzenia 1.1.2, dlatego nie zamieszczamy dowodu. Z tych samych powodów pominiemy dowody własności krat dualnie (silnie) zrównoważonych wynikających tylko z dualizacji krat (silnie) zrównoważonych ograniczając się jedynie do wyszczególnienia wybranych własności, które będą istotne w dalszych rozważaniach.

Krata L jest *dualnie silnie zrównoważona*, gdy każdy jej przedział jest kratą dualnie zrównoważoną. Klasa krat dualnie silnie zrównoważonych jest oczywiście zamknięta ze względu na podkraty i iloczyny proste. Nie wiadomo natomiast, czy jest zamknięta na obrazy homomorficzne.

Odnotujmy jeszcze, że niemodularna krata $\mathcal{N}_5$ z Rysunku 1.1 jest zarówno kratą silnie zrównoważoną, jak i dualnie silnie zrównoważoną, zatem przekrój obu rozważanych klas jest istotnie większy od klasy krat modularnych. Analizując diagramy krat mocy co najwyżej 6, na podstawie Twierdzenia 1.1.4 otrzymujemy, że każda z tych krat jest albo silnie zrównoważona, albo dualnie silnie zrównoważona. Przykładem minimalnej kraty, która nie jest ani silnie zrównoważona, ani dualnie silnie zrównoważona, jest 7-elementowa krata na Rysunku 1.4.



Rysunek 1.4:

Opis krat dualnie silnie zrównoważonych zakończymy charakteryzacją, ułatwiającą ich rozpoznawalność, analogiczną do tej z Twierdzenia 1.1.4 dotyczącą klasy krat silnie zrównoważonych.

Twierdzenie 1.2.2. *Niech L będzie kratą. L jest dualnie silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy L nie zawiera podkraty izomorficznej ani z kratą $\mathcal{D}_1$, ani z kratą $\mathcal{D}_2$.*

1.3 Wymiary i kowymiary jednolite krat

W pierwszej części tego paragrafu skoncentrujemy się na wymiarach jednolitych krat. Własności wymiaru jednolitego w kratach modularnych są opisane w [7]. Podane tutaj fakty pokazują, że wymiar jednolity istnieje również w opisanych w poprzednim paragrafie kratach zrównoważonych i szereg jego własności można przenieść z krat modularnych na kraty zrównoważone.

Jak w [7] powiemy, że element $a \in L$ jest *istotny w L*, jeśli $x \wedge a \neq 0$ dla dowolnego $0 \neq x \in L$ oraz element $u \in L$ jest *jednolity* jeśli $u \neq 0$

i dowolny niezerowy element należący do przedziału $[0, u]$ jest istotny w $[0, u]$. Przykładem elementu istotnego w kracie jest element największy, a dowolny atom jest przykładem elementu jednolitego.

Lemat 1.3.1 ([7]). *Niech $a, b \in L$. Wówczas:*

(a) *Jeśli a jest istotnym elementem w przedziale $[0, b]$ i b jest istotny w L, to a jest istotny w L.*

(b) *Jeśli a jest istotny w L i $b \neq 0$, to $a \wedge b$ jest istotny w przedziale $[0, b]$.*

Lemat 1.3.2 ([13]). *Niech L będzie kratą zrównoważoną i $a, b, c \in L$ takimi elementami, że $a \leq b$ i $b \wedge c = 0$. Wówczas a jest elementem istotnym w $[0, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \vee c$ jest istotny w $[0, b \vee c]$.*

Bezpośrednią konsekwencją Lematów 1.3.1 i 1.3.2 jest następujący fakt.

Lemat 1.3.3. *Niech L będzie kratą zrównoważoną. Niech $a, b \in L$ będą niezerowymi elementami takimi, że $a \wedge b = 0$. Jeśli a_1 jest istotnym elementem w $[0, a]$ oraz b_1 jest istotnym elementem w $[0, b]$, to $a_1 \vee b_1$ jest istotnym elementem w $[0, a \vee b]$.*

Podzbiór $B \subset L$ nazywamy *bazą* kraty L jeśli B jest niezależnym zbiorem elementów jednolitych i element $\bigvee B$ jest istotny w L.

Twierdzenie 1.3.4 ([13]). *Niech L będzie kratą zrównoważoną.*

(a) *W L istnieje baza.*

(b) *Każdy niezależny zbiór elementów jednolitych kraty L można rozszerzyć do bazy.*

(c) *Dowolne dwie bazy kraty L są równoliczne.*

Część (a) tego twierdzenia wynika bezpośrednio ze skończoności krat, do których ograniczamy nasze rozważania. Część (b) jest kratową wersją Lematu Steinitza o bazie z bardzo podobnym dowodem i wreszcie część (c) jest bezpośrednią konsekwencją (b). Szczegółowy dowód można znaleźć w [13].

Niech B będzie bazą w L. Tak jak w [7, 13] ilość elementów zbioru B nazywamy *wymiarem jednolitym* lub *wymiarem Goldiego* kraty L i oznaczamy przez $\mathrm{u}(L)$. Twierdzenie 1.3.4 pokazuje, że w kratach zrównoważonych wymiar jednolity istnieje i jest dobrze określony.

Stwierdzenie 1.3.5. *Niech L będzie kratą zrównoważoną.*

(a) *Element $a \in L$ jest jednolity w L wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{u}([0, a]) = 1$.*

(b) *Jeśli K jest 0-podkratą kraty L, to $\mathrm{u}(K) \leq \mathrm{u}(L)$.*

(c) *$\mathrm{u}(L) = \mathrm{u}([0, a])$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest istotnym elementem kraty L.*

Dowód. (a) Wynika bezpośrednio z definicji elementu jednolitego i bazy.

(b) Niech $\mathrm{u}(K) = n$ i $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie bazą kraty K. Wówczas X jest niezależnym podzbiorem kraty L. Ponieważ L jest skończona, więc w przedziale $[0, x_i]_L$ istnieje atom a_i, dla $i = 1, \ldots, n$. Łatwo jest pokazać, że $\{a_1, \ldots, a_n\}$ jest również niezależnym zbiorem elementów jednolitych kraty L i na mocy Twierdzenia 1.3.4 można go rozszerzyć do bazy L. Stąd otrzymujemy $\mathrm{u}(K) \leq \mathrm{u}(L)$.

(c) Załóżmy, że a jest istotnym elementem kraty L. Niech $\mathrm{u}([0, a]) = n$ i $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie bazą przedziału $[0, a]$. Wówczas X jest zbiorem elementów jednolitych L. Ponadto $\bigvee X$ jest elementem istotnym w $[0, a]$ i z założenia a jest istotne w kracie L. Stąd na mocy Lematu 1.3.1, $\bigvee X$ jest elementem istotnym w kracie L i tym samym X jest bazą kraty L.

Załóżmy, że a nie jest elementem istotnym kraty L. Wówczas istnieje element $x \in L$ taki, że $a \wedge x = 0$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że x jest atomem. Oczywiście $x \notin [0, a]$. Niech B będzie bazą $[0, a]$. Otrzymujemy wtedy, że $\bigvee B \wedge x = 0$, a w konsekwencji $B \cup \{x\}$ jest zbiorem ciągowo niezależnym w kracie L. Wobec tego, że L jest kratą zrównoważoną, $B \cup \{x\}$ jest również niezależny. Ponadto B składa się z elementów jednolitych. Stąd $\mathrm{u}(L) > \mathrm{u}([0, a])$. Ta sprzeczność kończy dowód. □

Lemat 1.3.6. *Niech L będzie kratą zrównoważoną i $a, b \in L$. Jeśli $a \wedge b = 0$ i $a \vee b$ jest istotnym elementem w L, to* $\mathrm{u}(L) = \mathrm{u}([0, a]) + \mathrm{u}([0, b])$.

Dowód. Niech $a, b \in L$ będą elementami spełniającymi założenia lematu. Przyjmijmy $\mathrm{u}([0, a]) = n$ i $\mathrm{u}([0, b]) = k$. Wówczas istnieją niezależne zbióry elementów jednolitych takie, że $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset [0, a]$ i $\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}\} \subset [0, b]$. Wiemy, że

$$(x_{n+1} \vee \ldots \vee x_{i-1}) \wedge x_i = 0$$

dla $i \in \{n + 2, \ldots, n + k\}$ oraz

$$(x_1 \vee \ldots \vee x_n) \wedge ((x_{n+1} \vee \ldots \vee x_{i-1}) \vee x_i) \leq a \wedge b = 0.$$

Wobec tego, że L jest kratą zrównoważoną, to

$$(x_1 \vee \ldots \vee x_n \vee x_{n+1} \vee \ldots \vee x_{i-1}) \wedge x_i = 0,$$

dla $i \in \{n+1, \ldots, n+k\}$. Ponieważ zbiór $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jest niezależny z założenia, więc otrzymujemy, że zbiór $\{x_1, \ldots, x_{n+k}\}$ jest ciągowo niezależny. Jako, że L jest zrównoważona to na podstawie Twierdzenia 1.1.6 $\{x_1, \ldots, x_{n+k}\}$ jest również zbiorem niezależnym. Wobec tego, że elementy jednolite w przedziale $[0, c]$ są jednolite w L, to otrzymujemy $\mathrm{u}(L) \geq n + k$.

Przyjmijmy teraz $a_1 = x_1 \vee \ldots \vee x_n$ i $b_1 = x_{n+1} \vee \ldots \vee x_{n+k}$. Wówczas a_1 jest istotny w $[0, a]$ i b_1 jest istotny w $[0, b]$. Stąd na mocy Lematu 1.3.3, element $a_1 \vee b_1$ jest istotny w $a \vee b$. Ponieważ $a \vee b$ jest istotny w L, to z Lematu 1.3.1, $a_1 \vee b_1$ jest istotny w L. Otrzymujemy więc $\mathrm{u}(L) = n + k$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 1.3.7. *Jeśli L_1, L_2 są kratami zrównoważonymi, to* $\mathrm{u}(L_1 \times L_2) = \mathrm{u}(L_1) + \mathrm{u}(L_2)$.

Twierdzenie 1.3.8. *Niech L będzie kratą zrównoważoną. W L istnieje n-elementowy zbiór niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy w L istnieje zbiór $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ taki, że*

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_n = 0$$

oraz

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_n \neq 0$$

dla $i = 1, \ldots, n$.

Dowód. Niech $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset L \setminus \{0\}$ będzie zbiorem niezależnym. Rozważmy elementy

$$\bar{x}_i = x_1 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_n$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Pokażemy, że

$$\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n = 0$$

oraz dla i, $i = 1, \ldots, n$

$$\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_{i-1} \wedge \bar{x}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n \neq 0.$$

W tym celu zauważmy, że $x_2 \wedge \bar{x}_2 = 0$ i załóżmy przez indukcję, że dla $k < n$ prawdziwa jest tożsamość:

$$(x_2 \vee \ldots \vee x_k) \wedge \bar{x}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_k = 0.$$

Przyjmijmy oznaczenia $a = x_n$, $b = \bar{x}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n$ i $c = x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1}$. Wówczas

$$a \wedge b = x_n \wedge \bar{x}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n = x_n \wedge \bar{x}_n = 0.$$

Ponadto

$$\begin{gathered}(a \vee b) \wedge c = (x_n \vee (\bar{x}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n)) \wedge (x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1}) \leq \\ (x_n \vee \bar{x}_2) \wedge \ldots \wedge (x_n \vee \bar{x}_n) \wedge (x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1}) = \\ \bar{x}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_{n-1} \wedge (x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1}) = 0\end{gathered}$$

na mocy założenia indukcyjnego. Ponieważ L jest kratą zrównoważoną, więc

$$0 = (a \vee c) \wedge b = (x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1} \vee x_n) \wedge \bar{x}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n = \bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n$$

Gdyby

$$\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_{i-1} \wedge \bar{x}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n = 0$$

dla pewnego i, to ponieważ $x_k < \bar{x}_i$ dla $i \neq k$ otrzymujemy, że $x_k = 0$ co jest sprzeczne z założeniem. Zatem

$$\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_{i-1} \wedge \bar{x}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n \neq 0$$

Niech teraz $\{a_1, \ldots, a_n\}$ będzie podzbiorem kraty L takim, że $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n = 0$ oraz $a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_n \neq 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Rozważmy elementy

$$\bar{a}_i = a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_n$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Jeśli $i \neq k$, to $\bar{a}_i < a_k$. Stąd

$$\bar{a}_k \wedge (\bigvee_{i \neq k} \bar{a}_i) < \bar{a}_k \wedge (\bigvee_{i \neq k} a_k) = \bar{a}_k \wedge a_k = 0$$

Zatem zbiór $\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ jest niezależny. □

Niech L będzie kratą silnie zrównoważoną. Najmniejszą liczbę α taką, że $\mathrm{u}([a, b]) \leq \alpha$ dla dowolnego $[a, b] \subseteq L$ nazywamy *silnym wymiarem jednolitym* lub *silnym wymiarem Goldiego* kraty L i oznaczamy przez $\mathrm{u_s}(L)$.

Ponieważ dowolny przedział kraty skończonej jest kratą skończoną, więc na mocy Twierdzenia 1.3.4 dla każdego takiego przedziału można wyznaczyć wymiar jednolity. A zatem możemy sformułować następujący fakt:

Twierdzenie 1.3.9 ([13])**.** *Niech L będzie kratą silnie zrównoważoną. Wówczas w L istnieje silny wymiar jednolity i jest dobrze określony.*

Przytoczymy na koniec jeszcze dwie własności silnego wymiaru jednolitego, które będą istotne w dalszych rozważaniach.

Lemat 1.3.10. *Niech L będzie kratą silnie zrównoważoną. Jeśli K jest podkratą L, to $\mathrm{u_s}(K) \leq \mathrm{u_s}(L)$.*

Dowód. Jeśli $\mathrm{u_s}(K) = n$, to istnieje przedział $[a, b]_K$ taki, że $\mathrm{u}([a, b]_K) = n$. Przedział $[a, b]_K$ jest 0-podkratą w przedziale $[a, b]_L$. A zatem na mocy Stwierdzenie 1.3.5 $\mathrm{u}([a, b]_K) \leq \mathrm{u}([a, b]_L)$. Z definicji silnego wymiaru jednolitego otrzymujemy $\mathrm{u}([a, b]_L) \leq \mathrm{u_s}(L)$. □

Wobec tego, że dowolny przedział iloczynu prostego krat jest iloczynem prostym przedziałów z poszczególnych czynników prostych, więc na mocy Wniosku 1.3.7 prawdziwe jest

Stwierdzenie 1.3.11. *Niech* L_1, L_2 *będą kratami silnie zrównoważonymi. Wówczas istnieje* $\mathrm{u_s}(L_1 \times L_2)$ *i*

$$\mathrm{u_s}(L_1 \times L_2) = \mathrm{u_s}(L_1) + \mathrm{u_s}(L_2).$$

Kowymiar jednolity kraty odpowiada wymiarowi jednolitemu kraty do niej dualnej. W związku z tym własności kowymiaru jednolitego są analogiczne do własności wymiaru jednolitego. Zatem tutaj przytaczamy tylko najważniejsze z nich.

Jak w [7] powiemy, że element $a \in L$ jest *koistotny w* L jeśli $x \vee a \neq 1$ dla dowolnego $1 \neq x \in L$ oraz element $u \in L$ jest *kojednolity* jeśli $u \neq 1$ i dowolny różny od 1 element należący do przedziału $[u, 1]$ jest koistotny w $[u, 1]$. Przykładem elementu koistotnego w kracie jest jej element najmniejszy, a przykładem elementu kojednolitego jest dowolny koatom.

Powiemy, że zbiór $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset L \setminus \{1\}$ jest *dualnie niezależny* jeśli dla każdego $1 \leq i \leq n$ mamy $x_i \vee (\bigwedge_{k \neq i} x_k) = 1$. Powiemy wówczas, że podzbiór $B \subset L$ jest *bazą dualną* kraty L, jeśli B jest dualnie niezależnym zbiorem elementów kojednolitych i element $\bigwedge B$ jest koistotny w L.

Niech B będzie bazą dualną w L. Ilość elementów zbioru B nazywamy *kowymiarem jednolitym* kraty L i oznaczamy przez $\widehat{\mathrm{u}}(L)$.

Twierdzenie 1.3.12. *Niech* L *będzie kratą dualnie zrównoważoną.*

(a) *W* L *istnieje baza dualna.*

(b) *Każdy dualnie niezależny zbiór elementów kojednolitych* L *można rozszerzyć do bazy dualnej.*

(c) *Dwie dowolne bazy dualne* L *są równoliczne.*

Niech L będzie kratą dualnie silnie zrównoważoną. Najmniejszą liczbę α taką, że $\mathrm{u}([a, b]) \leq \alpha$ dla dowolnego $[a, b] \subseteq L$ nazywamy *silnym kowymiarem jednolitym* kraty L i oznaczamy przez $\widehat{\mathrm{u}}_{\mathrm{s}}(L)$.

Dualizując Twierdzenie 1.3.9 otrzymujemy.

Twierdzenie 1.3.13 ([13])**.** *Niech* L *będzie kratą dualnie silnie zrównoważoną. Wówczas w* L *istnieje silny kowymiar jednolity i jest dobrze określony.*

W podobny sposób możemy otrzymać odpowiedniki Lematu 1.3.10 i Stwierdzenia 1.3.11 dla krat dualnie silnie zrównoważonych.

Rozdział 2

Grupy silnie zrównoważone

Koncepcja opisu grup na podstawie własności kraty ich podgrup wywodzi się z lat trzydziestych dwudziestego wieku. Z tego okresu pochodzi m.in. opis grup z rozdzielną kratą podgrup podany przez O. Orego i początki prac nad grupami z modularną kratą podgrup, uwieńczone prawie pełnym opisem takich grup na początku lat czterdziestych i uzupełnione przez R. Schmidta w 1986 roku. Różne aspekty kratowej modularności przewijają się w większości badań nad kratami podgrup ([22]). Taki charakter mają również badania stanowiące podstawowy cel niniejszej rozprawy, tzn. opis grup, których kraty podgrup są takie, jak wprowadzone w poprzednim rozdziale uogólnienia krat modularnych. Zaczniemy od opisu grup z silnie zrównoważoną kratą podgrup. Z konieczności, poświęcimy trochę uwagi grupom z modularną kratą podgrup. Pierwszy paragraf tego rozdziału jest wprowadzeniem do tej tematyki.

2.1 Wybrane elementy teorii krat podgrup

Wszystkie grupy rozważane w tym i w następnych rozdziałach będą skończone. Podobnie jak w [22, 27], do pewnych pojęć dotyczących krat podgrup będziemy stosować uproszczoną terminologię. Grupę, której krata wszystkich podgrup jest modularna, (dualnie) zrównoważona, (dualnie) silnie zrównoważona będziemy nazywać odpowiednio *modularną, (dualnie) zrównoważoną, (dualnie) silnie zrównoważoną.* Definicje pojęć z teori grup używanych w pracy można znaleźć w [5, 18], a z teorii krat podgrup w [22, 27]. Przypomnimy tylko niektóre z nich.

Jeśli G jest grupą, to przez $L(G)$ będziemy oznaczać kratę wszystkich podgrup grupy G. $L(G)$ jest oczywiście kratą skończoną. Jeśli $H_1, \ldots, H_n$ są podgrupami G, to przez $L(H_1, \ldots, H_n)$ będziemy oznaczali podkratę kraty $L(G)$ generowaną przez $H_1, \ldots, H_n$. Jeśli H jest podgrupą normalną w K, to przedział $[H, K]$ będziemy nazywać *sekcją* grupy G. Wówczas $[H, K] \simeq L(K/H)$.

Grupę G nazywamy *L-rozkładalną*, jeśli krata $L(G)$ jest iloczynem prostym swoich nietrywialnych podkrat. W przeciwnym przypadku mówimy, że G jest *L-nierozkładalna.* Automorfizm φ grupy G nazywamy *automorfizmem potęgowym*, jeśli każda podgrupa grupy G jest niezmiennicza ze względu na jego działanie, innymi słowy, jeśli dla dowolnego elementu $g \in G$ istnieje liczba całkowita n taka, że $\varphi(g) = g^n$. W p-grupie abelowej G wykładnik n jest wspólny dla wszystkich $g \in G$ (patrz [18, 13.4.3]). Jest jasne, że każdy automorfizm grupy indukuje automorfizm kraty jej podgrup. Ponadto, jak wynika bezpośrednio z definicji, wszystkie automorfizmy potęgowe grupy G indukują na $L(G)$ przekształcenia tożsamościowe.

Punktem wyjścia do charakteryzacji grup silnie zrównoważonych jest opis skończonych grup modularnych. Pełny opis tych grup wraz z dowodami można znaleźć w [22, 27].

Lemat 2.1.1 ([22])**.** *Niech G będzie p-grupą. G jest grupą modularną wtedy i tylko wtedy, gdy każda sekcja rzędu p^3 w G jest modularna.*

Twierdzenie 2.1.2 ([22])**.** *Niech G będzie p-grupą. G jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy G jest:*

(a) *abelową p-grupą,*

(b) *iloczynem prostym grupy kwaternionów rzędu* 8 *i elementarnej abelowej* 2*-grupy,*

(c) *zawiera normalną abelową podgrupę A taką, że $G = A\langle b\rangle$ i istnieje liczba naturalna s taka, że $b^{-1}ab = a^{1+p^s}$ dla dowolnego $a \in A$, przy czym $s \geq 2$ w przypadku, gdy $p = 2$.*

Grupę G nazywamy *P^*-grupą*, jeśli $G = A \rtimes \langle t\rangle$ gdzie A jest elementarną abelową p-grupą, normalną w G, natomiast $\langle t\rangle$ jest q-grupą, dla pewnej liczby pierwszej q, $p \neq q$, przy czym t działa na A przez automorfizm potęgowy rzędu q.

Twierdzenie 2.1.3 ([22])**.** *Niech G będzie grupą. G jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy G jest izomorficzna z jedeną z następujących grup:*

(a) *modularną p-grupą;*

(b) *P^*-grupą;*

(c) *iloczynem prostym grup danych w (a) i (b), których rzędy są parami względnie pierwsze.*

Przykład 2.1.4. Przy ustalonej liczbie pierwszej p, najmniejsze nieabelowe p-grupy mają rząd p^3. Dla $p = 2$ spośród dwóch nieabelowych grup tego rzędu jedyną niemodularną jest dihedralna grupa

$$D_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = e, b^{-1}ab = a^3\rangle.$$

Dla zbadania, czy jest ona silnie zrównoważona rozważmy podgrupy $A = \langle ab \rangle$, $B = \langle b \rangle$ i $C = \langle a^2 \rangle$ w tej grupie. Wówczas $|A| = |B| = |C| = 2$, $|A \vee C| = |B \vee C| = 4$, $A \vee B = A \vee B \vee C = D_8$ i oczywiście $A \wedge B = A \wedge C = B \wedge C = \{e\}$. Zatem $L(A, B, C)$ jest izomorficzna z $\mathcal{T}_2$, co na mocy Twierdzenia 1.1.4 oznacza, że D_8 nie jest silnie zrównoważona.

Dla $p > 2$ także istnieją dwie nieabelowe grupy rzędu p^3 i tylko jedna z nich jest niemodularna. Jest to grupa

$$N = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = e,\ ab = bac,\ ac = ca,\ cb = bc \rangle.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, nie jest to grupa silnie zrównoważona. Dla dowodu rozważmy jej podgrupy: $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ i $C = \langle c \rangle$. Wówczas $A \wedge B = A \wedge C = B \wedge C = \{e\}$ i $(A \vee C) \wedge B = (B \vee C) \wedge A = \{e\}$. Ponadto $|A| = |B| = |C| = p$, $|A \vee C| = p^2 = |B \vee C|$, $A \vee B = A \vee B \vee C = N$. Stąd mamy, że $L(A, B, C)$ jest izomorficzna z $\mathcal{T}_2$.

W świetle Lematu 2.1.1, grupy D_8 i N są testowe dla p-grup modularnych w tym sensie, że nieistnienie izomorficznej kopii wśród sekcji grupy G jest równoważne jej modularności. Dokładnie to samo kryterium można zastosować dla p-grup silnie zrównoważonych.

Lemat 2.1.5. *Niech G będzie p-grupą. G jest silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy G jest modularna.*

Dowód. Implikacja " $\Leftarrow$ " w oczywisty sposób wynika z Wniosku 1.1.5.
Przejdźmy do implikacji w stronę przeciwną. Załóżmy, że G jest niemodulaną p-grupą. Wówczas na mocy Lematu 2.1.1 w G istnieje niemodularna sekcja rzędu p^3, czyli sekcja izomorficzną z grupą D_8 lub z grupą N. Zatem z Przykładu 2.1.4 w kracie $L(G)$ istnieje podkrata izomorfczna z kratą $\mathcal{T}_2$. Stąd na mocy Twierdzenia 1.1.4, G nie jest silnie zrównoważona. □

Powyższą obserwację można łatwo uogólnić na przypadek skończonych grup nilpotentnych. Jak wiadomo są one iloczynami prostymi swoich p-podgrup Sylowa (patrz [18, 5.2.4]). Struktura kratowa takich iloczynów prostych ma naturalny opis.

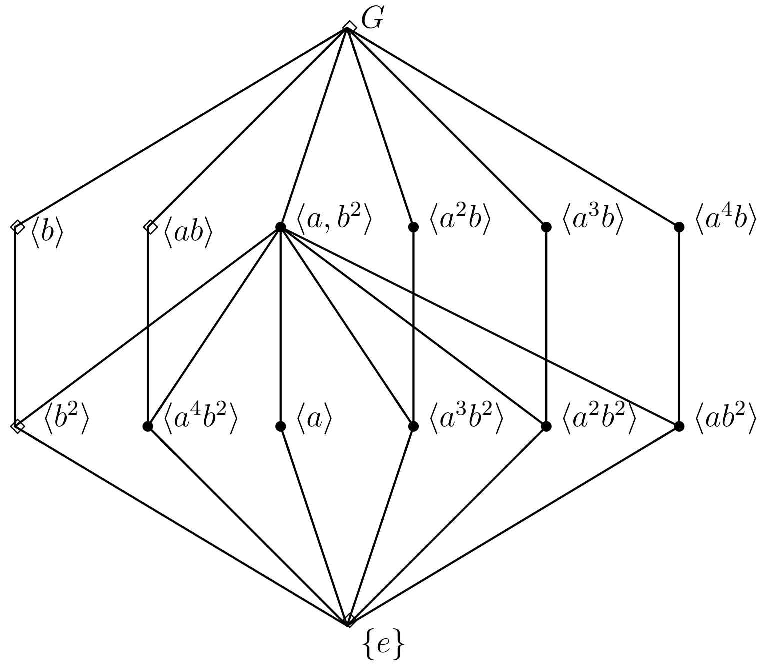
Twierdzenie 2.1.6 ([22]). *Niech G i H będą grupami. Wówczas*

$$L(G \times H) \simeq L(G) \times L(H)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy rzędy G i H są względnie pierwsze.

Zatem otrzymujemy

Twierdzenie 2.1.7. *Niech G będzie grupą nilpotentną. G jest silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy G jest modularna.*



Rysunek 2.1:

Taki opis dla grup nienilpotentnych nie jest możliwy.

Przykład 2.1.8. Niech G będzie grupą rzędu 20 opisaną następująco:

$$G = \langle a, b \mid a^5 = b^4 = e, b^{-1}ab = a^2\rangle.$$

Na Rysunku 2.1 przedstawiamy diagram kraty jej podgrup. Jak widać $L(G)$ nie zawiera podkraty izomorficznej ani z kratą $\mathcal{T}_1$, ani z kratą $\mathcal{T}_2$, ale podgrupy oznaczone kwadracikami generują kratę izomorficzną z kratą $\mathcal{N}_5$. Zatem $L(G)$ jest silnie zrównoważona, ale nie jest modularna.

Zanim przejdziemy do opisu nienilpotentnych grup silnie zrównoważonych podamy jeszcze fakty przydatne w tym i w następnych rozdziałach.

Twierdzenie 2.1.9 (Prawo Modularności Dedekinda, [18])**.** *Niech G będzie grupą i niech $K \leq N, M$ będą podgrupami G. Wówczas*

$$N \wedge MK = (N \wedge M)K.$$

W szczególności jeśli MK i $(N \wedge M)K$ są podgrupami G, to możemy zapisać

$$N \wedge (M \vee K) = (N \wedge M) \vee K.$$

Rola podgrup A, B i C występujących w poniższym lemacie jest zgodna z oznaczeniami z Rysunków 1.2 i 1.3

Lemat 2.1.10. *Niech G będzie grupą, a A, B, C podgrupami grupy G.*

(a) *Jeśli $L(A,B,C) \simeq \mathcal{T}_1$, to $AC \neq A \vee B \vee C \neq BC$. W szczególności podgrupy A, B, C nie są normalne w $A \vee B \vee C$.*

(b) *Jeśli $L(A,B,C) \simeq \mathcal{T}_2$, to $AB \neq A \vee B \vee C$. W szczególności podgrupy A, B nie są normalne w $A \vee B \vee C$.*

(c) *Jeśli $L(A,B,C) \simeq \mathcal{D}_1$, to $(A \wedge B)C \neq A \vee B \vee C$. W szczególności podgrupy $A \wedge B, C$ nie są normalne w $A \vee B \vee C$.*

(d) *Jeśli $L(A,B,C) \simeq \mathcal{D}_2$, to $AB \neq A \vee B \vee C$. W szczególności podgrupy $A \wedge C, B \wedge C, A, B$ nie są normalne w $A \vee B \vee C$.*

Dowód. (a) Niech $L(A,B,C) \simeq \mathcal{T}_1$. Jeśli $AC = A \vee B \vee C$, to na mocy Twierdzenia 2.1.9

$$A \vee B = (A \vee C) \wedge (A \vee B) = AC \wedge (A \vee B) = (C \wedge (A \vee B))A = A,$$

co jest sprzeczne z kształtem kraty $\mathcal{T}_1$. Zatem $AC \neq A \vee B \vee C$. Jeśli podgrupa A lub C jest normalna to oczywiście $AC = A \vee C$ i z kształtu kraty $\mathcal{T}_1$ wynika, że $AC = A \vee B \vee C$. Ta sprzeczność kończy dowód.

Dowód punktu (a) przy założeniu, że $BC \neq A \vee B \vee C$, jak i dowódy pozostałych punktów jest bardzo podobny do przedstawionego powyżej, dlatego je pomijamy. □

2.2 Grupy proste

W dalszych rozważaniach ważną rolę odegrają minimalne grupy proste tj. grupy proste, których każda podgrupa właściwa jest rozwiązalna. Przedstawiamy zatem ich opis:

Twierdzenie 2.2.1 ([28, 29, 30, 31]). *Każda minimalna grupa prosta jest izomorficzna z jedną z następujących grup:*

(a) *$PSL(2, 2^p)$, p jest dowolną liczbą pierwszą;*

(b) *$PSL(2, 3^p)$, p jest dowolną nieparzystą liczbą pierwszą;*

(c) *$PSL(2, p)$, p jest liczbą pierwszą taką, że $p > 3$ i $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$;*

(d) *$Sz(2^p)$, p jest dowolną nieparzystą liczbą pierwszą;*

(e) *$PSL(3, 3)$.*

Niech G będzie grupą Suzukiego $Sz(2^p)$, gdzie $p = 2m + 1$. Niech

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & a^\theta & 1 & 0 \\ a^{2+\theta}+ab+b^\theta & a^{1+\theta}+b & a & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in GF(2^p) \right\rangle,$$

gdzie θ jest automorfizmem ciała $GF(2^p)$ takim, że $\theta^2 = 1$ i $\theta \neq 1$. Wówczas F jest 2-podgrupą Sylowa grupy $Sz(2^p)$. Niech ponadto

$$H = \left\langle \begin{pmatrix} c^{1+2^m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^{2^m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-2^m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^{-1-2^m} \end{pmatrix} \mid 0 \neq c \in GF(2^p) \right\rangle$$

oraz

$$t = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Wówczas $Sz(2^p) = \langle F, H, t\rangle$, na podstawie [9, 11.3.2]. Ponadto z [9, 11.3.12], łatwo otrzymujemy:

Twierdzenie 2.2.2 ([9])**.** *Maksymalna podgrupa grupy $Sz(2^p)$ jest sprzężona z jedną z następującuch podgrup:*

(a) $FH = N_G(F)$

(b) $N_G(H)$*, która jest izomorficzna z dihedralną grupą rzędu* $2(q-1)$*;*

(c) $B_i = \langle U_i, t_i\rangle$*, gdzie dla* $i = 1, 2$*,* U_i *jest grupą cykliczną rzędu* $q \pm 2^{m+1} + 1$*. Ponadto dla każdego* $u \in U_i$*,* $u_i^{t_i} = u^q$ *oraz* $|B_i : U_i| = 4$

(d) $Sz(2^s)$*, gdzie* 2^p *jest potęgą* 2^s*.*

Okazuje się, że silnie zrównoważonymi grupami prostymi są jedynie cykliczne grupy rzędu p. Wykazaniu tego posłuży Twierdzenie 2.2.1.

Twierdzenie 2.2.3. *Jeśli G jest nieabelową grupą prostą, to $L(G)$ zawiera podkratę izomorficzną z kratą $\mathcal{D}_1$ i z kratą $\mathcal{D}_2$.*

Dowód. Niech $G = SL(*,*)$ będzie jedną z grup $SL(2,p), SL(2,2^p), SL(2,3^p)$ lub $SL(3,3)$. Niech A będzie podgrupą grupy G macierzy unitrójkątnych górnych $UT_g(*,*)$, B podgrupą macierzy unitrójkątnych dolnych $UT_d(*,*)$ grupy G, a C podgrupą G macierzy diagonalnych $D(*,*)$. Wówczas $A \vee C$ jest podgrupą macierzy górnotrójkątnych $T_g(*,*)$, a $B \vee C$ jest podgrupą macierzy dolnotrójkątnych $T_d(*,*)$. Ponieważ wszystkie transwekcje grupy G należą albo do podgrupy A albo do podgrupy B, to $A \vee B = SL(*,*)$ (patrz [18, 3.2.10]). Ponadto $A \wedge B = A \wedge C = B \wedge C = (A \vee C) \wedge B = (B \vee C) \wedge A = \{e\}$. Zatem podkrata $L(A,B,C)$ jest izomorficzna z $\mathcal{T}_2$.

Rozważmy epimorfizm $L(SL(*,*))$ w $L(PSL(*,*))$ indukowany przez naturalny epimorfizm $SL(*,*)$ w $PSL(*,*)$. Obraz podkraty $L(A,B,C)$ w tym epimorfizmie jest z nią izomorficzny. Zatem $L(PSL(*,*))$ zawiera podkratę izomorficzną z $\mathcal{T}_2$.

Niech teraz G będze grupą Suzukiego $Sz(2^p)$. Przyjmijmy $A = F$, $B = F^T$ i $C = H$. Na mocy Twierdzenia 2.2.2, $A \vee B = G$. Przeprowadzając rozumowanie podobne jak w pierwszej części dowodu mamy $L(A,B,C) \simeq \mathcal{T}_2$.

Niech ponownie $G = PSL(2,q)$, gdzie $q = 2^p$ lub 3^p. Przyjmijmy

$$a = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix},$$

gdzie $x, y \in GF(q)$ i t jest generatorem multyplikatywnej grupy ciała $GF(q)$. Wówczas łatwo jest pokazać, że $\langle a\rangle^{\langle c\rangle} = \langle b\rangle^{\langle c\rangle} = UT(2,q)$ oraz $\langle a, b\rangle$ jest elementarną abelową grupą rzędu 4, jeśli $q = 2^p$ lub rzędu 9, jeśli $q = 3^p$.

Ponadto $\langle c \rangle$ jest cykliczną grupą rzędu $2^p - 1$. Stąd widac, że podgrupy $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ i $C = \langle c \rangle$ generuja podkratę izomorficzną z $\mathcal{T}_1$.

Weźmy $G = PSL(3, 3)$. Przyjmijmy

$$a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ c = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Wówczas mamy $a^3 = e = b^3$, $c^2 = e$ i $a^c = b$. Ponadto elementy a, b generują grupę rzędu 27 o wykładniku 3. Z prostych rachunków wynika, że podgrupy $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ i $C = \langle c \rangle$ generują podkratę izomorficzną z $\mathcal{T}_1$.

Niech teraz $G = PSL(2, p)$. Przyjmijmy

$$a = \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{smallmatrix}\right), b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), c = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

gdzie t jest generatorem multyplikatywnej grupy ciała $GF(q)$. Ponieważ $ac^{-1}ac = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1-t^2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $acac^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1-t^2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, więc grupa $\langle a, c \rangle$ zawiera wszystkie transwekcje grupy G, zatem $\langle a, c \rangle = G$. Podobnie $b^c = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, więc grupa $\langle b, c \rangle$ również zawiera wszystkie transwekcje grupy G, zatem $\langle b, c \rangle = G$. Ponadto łatwo widać, że $\langle a, b \rangle = T(2, p) \neq G$. Stąd otrzymujemy, że podgrupy $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ i $C = \langle c \rangle$ generuja podkratę izomorficzną z $\mathcal{T}_1$.

Jeśli $G = Sz(2^p)$, to weźmy

$$a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ xx^\theta & 0 & 1 & 0 \\ x^2x^\theta & xx^\theta & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), c = \begin{pmatrix} y^{1+2^m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{2^m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^{-2^m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^{-1-2^m} \end{pmatrix}, b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ yx(yx)^\theta & 0 & 1 & 0 \\ y^2x^2(yx)^\theta & yx(yx)^\theta & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

gdzie $x \in GF(2^p)$, θ jest automorfizmem ciała $GF(2^p)$ takim, że $\theta^2 = 1$ i $\theta \neq 1$ oraz $GF(2^p)^* = \langle y \rangle$. Wówczas można sprawdzić, że $\langle a \rangle^{\langle c \rangle} = \langle b \rangle^{\langle c \rangle} = F^2H$. Natomiast $\langle a, b \rangle$ jest elementarną abelową grupa rzędu 4. Ponadto $\langle c \rangle$ jest cykliczną grupą rzędu $2^p - 1$. Stąd widać, że podgrupy $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ i $C = \langle c \rangle$ generują podkratę izomorficzną z $\mathcal{T}_1$.

Ostatecznie otrzymujemy, że krata dowolnej minimalnej grupy prostej zawiera zarówno podkratę izomorficzną z $\mathcal{T}_1$ jak i z $\mathcal{T}_2$. $\square$

2.3 Grupy rozwiązalne

Z poprzedniego paragrafu wiemy, że żadna grupa prosta nie jest silnie zrównoważona. W tym paragrafie skupimy się więc na badaniu grup rozwiązalnych.

Lemat 2.3.1. *Jeśli G jest grupą rozwiązalną i silnie zrównoważoną, to G jest superrozwiązalna.*

Dowód. Niech G będzie minimalnym kontrprzykładem i niech

$$\{e\} = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G$$

będzie ciągiem normalnym o ilorazach abelowych, którego nie można zagęścić. Wówczas przynajmniej jeden z ilorazów nie jest cykliczny, gdyż G nie jest superrozwiązalna. Ponieważ jednak z założenia G jest rozwiązalna, więc G_1 jest elementarną abelową p-grupą. Jeśli G_1 jest cykliczna, to G/G_1 nie jest superrozwiązalna, co jest sprzeczne z wyborem G. Zatem G_1 nie jest cykliczna. Ponadto $\langle g^G \rangle = G_1$ dla dowolnego elementu $g \in G_1$, $g \neq e$, ponieważ G_1 jest minimalną podgrupą normalną w G. Wobec tego istnieje element $y \in G \setminus G_1$ taki, że dla pewnego $x \in G_1$ mamy $\langle x^y \rangle \wedge \langle x \rangle = \{e\}$. Rozważmy teraz podgrupy $A = \langle x \rangle$, $B = \langle x^y \rangle$ i $C = \langle y \rangle$. Jeśli $A \wedge C \neq \{e\}$, to $\langle x \rangle \leq \langle y \rangle$, a wówczas $x^y = x$, sprzeczność. Zatem $A \wedge C = \{e\}$ i podobnie $B \wedge C = \{e\}$. Stąd widać, że $L(A, B, C) \simeq \mathcal{T}_1$. Ponieważ $A \vee B \vee C \neq G$, otrzymujemy sprzeczność, która kończy dowód. $\square$

Lemat 2.3.2. *Niech $G = PH$ będzie iloczynem półprostym normalnej elementarnej abelowej p-grupy P i cyklicznej p'-grupy $H = \langle y \rangle$. Jeśli G jest silnie zrównoważona, to y indukuje automorfizm potęgowy na P. Ponadto istnieje liczba pierwsza $q < p$ taka, że $|G/C_G(P)| = q^n$.*

Dowód. Niech $h \in H$ i $x \in P$. Jeśli $x^h \notin \langle x \rangle$, wówczas $L(\langle x^h \rangle, \langle x \rangle, \langle h \rangle) \simeq \mathcal{T}_1$. Zatem wszystkie cykliczne podgrupy grupy P są normalne w G, czyli y indukuje automorfizm potęgowy na P. Stąd na mocy [18, 13.4.3], otrzymujemy, że istnieje liczba całkowita k taka, że $x^y = x^k$ dla dowolnego $x \in P$.

Załóżmy teraz, że istnieją różne liczby pierwsze q, r takie, że qr dzieli $|G/C_G(P)|$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że $C_G(P) = \{e\}$. Wówczas istnieją elementy $y_1, y_2 \in \langle y \rangle$ i liczby całkowite m_1, m_2 takie, że $o(y_1) = q$, $o(y_2) = r$, $m_1 \not\equiv 1 \pmod{p}$ $m_2 \not\equiv 1 \pmod{p}$ i $x^{y_1} = x^{m_1}$, $x^{y_2} = x^{m_2}$, dla wszystkich $x \in G$. Rozważmy podgrupy $A = \langle y_1 \rangle$, $B = \langle x \rangle$ i $C = \langle xy_2 \rangle$, gdzie x jest ustalonym elementem podgrupy P, $x \neq e$. Otrzymujemy wówczas $|A \vee B| = pq$, $|B \vee C| = pr$, $A \vee C = A \vee B \vee C$ i $A \wedge B = A \wedge C = B \wedge C = \{e\}$. Zatem krata $L(A, B, C)$ jest izomorficzna z $\mathcal{T}_2$. Wynika stąd, że $|G/C_G(P)| = q^n$ dla pewnej liczby pierwszej q. $\square$

Wobec tego, że $G/C_G(P) = N_G(P)/C_G(P) \simeq AutP$ (patrz [18, 1.6.13]) oraz tego, że grupa automorfizmów potęgowych jest cykliczna (patrz [22, 1.5.6]) otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 2.3.3. *Niech p będzie największą liczbą pierwszą dzielącą rząd grupy G i niech P będzie elementarną abelową p-podgrupą Sylowa grupy G. Jeśli G jest silnie zrównoważona, to $G/C_G(P)$ jest cykliczna.*

Lemat 2.3.4. *Niech p będzie największą liczbą pierwszą dzielącą rząd grupy G i niech P będzie p-podgrupą Sylowa G. Jeśli G jest silnie zrównoważona i P nie jest czynnikiem prostym w G, to P jest elementarna abelowa.*

Dowód. Niech G będzie minimalnym kontrprzykładem dla tego lematu. Z Twierdzenia 2.2.3 i Lematu 2.3.1 wiemy, że G jest superrozwiązalna. Zatem P jest normalną podgrupą w G na podstawie [8, 6.9.1], Ponieważ P nie jest czynnikiem prostym w G, to istnieje element $y \notin C_G(P)$ rzędu q^n, gdzie q jest liczbą pierwszą taką, że $q < p$. Ponadto z wyboru G wynika, że $G = \langle P, y\rangle = P\langle y\rangle$. Wobec tego, że podgrupa Frattiniego $\Phi(P)$ jest charakterystyczna w P, a P jest normalna w G wiemy, że $\Phi(P)$ jest normalna w G. Zatem $\Phi(P)\langle y\rangle$ jest podgrupą w G i z minimalności G wynika, że $\Phi(P)$ jest elementarna abelowa. Rozważmy zatem grupę $\langle \Phi(P), y\rangle$. Z Lematu 2.3.2 wynika, że y indukuje automorfizm potęgowy na $\Phi(P)$. Ponieważ $\Phi(P)$ jest abelowa, więc z [18, 13.4.3], istnieje liczba całkowita k taka, że dla wszystkich $z \in \Phi(P)$

$$z^y = z^k \tag{2.1}$$

Rozważmy teraz grupę ilorazową $\bar{G} = G/\Phi(P)$. $\bar{G}$ jest iloczynem półprostym elementarnej abelowej p-grupy i cyklicznej q-grupy. Zatem dla dowolnego $g \in P$ istnieje $z \in \Phi(P)$ takie, że

$$g^y = g^m z, \tag{2.2}$$

na mocy Lematu 2.3.2 i Twierdzenia 13.4.3 z [18]. Jeśli P nie jest abelowa, to jako p-grupa silnie zrównoważona zawiera element x rzędu p^2 (patrz Twierdzenie 2.1.2). Ponieważ $\Phi(P)$ jest elementarna abelowa, więc $x \notin \Phi(P)$. Zatem $x^y = x^m z$ dla pewnego elementu $z \in \Phi(P)$. Z (2.1) i (2.2) wynika, że podgrupa $\langle x, z\rangle$ jest normalna w G. Ponadto z Twierdzenia 2.1.2 wynika, że $p^2 \leq |\langle x, z\rangle| \leq p^3$. Jeśli $|\langle x, z\rangle| = p^2$, to $z \in \langle x\rangle$ czyli $\langle x\rangle$ jest podgrupą normalną w G. Wówczas podgrupy $A = \langle y\rangle$, $B = \langle xy\rangle$, $C = \langle x^p\rangle$ generują podkratę kraty $L(G)$ izomorficzną z $\mathcal{T}_2$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem $|\langle x, z\rangle| = p^3$. Wówczas $\Phi(\langle x, z\rangle) = \langle x^p\rangle$. W grupie ilorazowej $\langle x, y, z\rangle/\langle x^p\rangle$ rozważmy podgrupy $A = \langle x'\rangle$, $B = \langle z'\rangle$ i $C = \langle y'\rangle$, gdzie $x' = x\langle x^p\rangle, y' = y\langle x^p\rangle, z' = z\langle x^p\rangle$. Wówczas $L(A, B, C) \leq L(\langle x, y, z\rangle/\langle x^p\rangle)$ i $L(A, B, C)$ jest izomorficzna z $\mathcal{T}_2$. Ta sprzeczność kończy dowód. □

Lemat 2.3.5. *Niech p będzie największą liczbą pierwszą dzielącą rząd grupy G i niech P będzie p-podgrupą Sylowa tej grupy. Jeśli G jest silnie zrównoważona i P nie wydziela się jako czynnik prosty grupy G, to istnieje liczba pierwsza q i q-podgrupa Sylowa Q grupy G taka, że PQ wydziela się jako czynnik prosty w G.*

Dowód. Niech G będzie grupą silnie zrównoważoną. Niech $\{p_1, p_2, ..., p_t\}$ będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych mniejszych od p dzielących $|G|$ i niech $p_1 > p_2 > ... > p_t$. Na mocy Twierdzenia 2.2.3 i Lematu 2.3.1, G jest superrozwiązalna. Z [8, 6.2.3] grupa G posiada więc system Sylowa $\{P, P_1, ..., P_t\}$

p_i-podgrup. Dodatkowo z superrozwiązalności wynika, że P jest podgrupą normalną w G i istnieje p'-podgrupa H w G taka, że $G = PH$, $H = P_1P_2 \dots P_t$. Ponadto $P_1P_2...P_i$ jest dzielnikiem normalnym w H dla $i = 1, ..., t$. Ponieważ P nie wydziela się jako czynnik prosty w G, więc istnieje liczba pierwsza $q \in \{p_1, p_2, ..., p_t\}$ taka, że q-podgrupa Sylowa Q grupy G nie należy do centralizatora P. Niech $q = p_s$ będzie największą taką liczbą.

Oznaczmy $K = P_1P_2...P_{s-1}$. Z wyboru q wynika, że $K \leq C_G(P)$, a zatem $PK = P \times K$ jest podgrupą normalną w G. Niech $Q = P_s$ będzie q-podgrupą Sylowa G.

Jeśli $Q \nleq C_G(K)$, to istnieje $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \ \leq s-1$ takie, że $Q \nleq C_G(P_i)$. Ponieważ PQ i P_iQ są silnie zrównoważone, więc P i P_i są elementarne abelowe na mocy Lematu 2.3.4. Niech $y \in Q \setminus (C_G(P) \cup C_G(K))$ i niech $x_1 \in P$, $x_2 \in P_i, x_1, x_2 \neq e$. Z Lematu 2.3.2, istnieją liczby całkowite k_1, k_2 takie, że $y^{-1}x_1y = x_1^{k_1}$ $y^{-1}x_2y = x_2^{k_2}$. Wówczas, jak łatwo sprawdzić, $L(\langle y\rangle, \langle x_1\rangle, \langle yx_1x_2\rangle) \simeq \mathcal{T}_2$, co daje sprzeczność. Wiemy więc, że $Q \leq C_G(K)$, a w konsekwencji $PKQ = PQ \times K$. Przyjmijmy $T = P_{s+1}...P_t$. Ponieważ $H = (K \times Q)T$, zatem otrzymujemy $G = ((PQ) \times K)T$.

Załóżmy teraz, że istnieje liczba pierwsza $r = p_j$, $r < q$, taka, że r-podgrupa Sylowa $R = P_j$ nie jest zawarta w $C_G(PQ)$. Weźmy $z \in R \setminus C_G(PQ)$. Jeśli $z \in C_G(Q)$, to $z \notin C_G(P)$ i dla pewnego $y \in Q \setminus C_G(P)$ i $e \neq x \in P$ otrzymujemy $L(\langle y\rangle, \langle x\rangle, \langle xz\rangle) \simeq \mathcal{T}_2$. Zatem $z \notin C_G(Q)$. Ponieważ QR jest silnie zrównoważona i spełnia założenia Lematu 2.3.4, to Q jest grupą elementarną abelową. Ponadto istnieje liczba całkowita k taka, że dla dowolnego $a \in Q$, $z^{-1}az = a^k$. Przypuśćmy, że $y \in Q$ jest elementem, który nie centralizuje P. Jeśli $z \in C_G(P)$, to podgrupy $A = \langle xy\rangle$, $B = \langle z\rangle$, $C = \langle y\rangle$ generują podkratę izomorficzną z $\mathcal{T}_2$. Zatem $z \notin C_G(P)$. Wówczas w grupie ilorazowej $G/C_G(P)$ obrazy elementów y, z są nietrywialne. Wobec tego, że $o(y) = q$ i $y^z = y^k$, gdzie $k \neq 1$, mamy $y^{-1}y^z \notin C_G(P)$. Zatem grupa $\langle zC_G(P), yC_G(P)\rangle$ nie jest abelowa, co jest sprzeczne z Wnioskiem 2.3.3. Zatem $T \leq C_G(PQ)$, a w konsekwencji $G = (PQ) \times (KT)$. □

Lemat 2.3.6 ([2]). *Niech p i q będą liczbami pierwszymi i $p > q$. Niech G będzie iloczynem półprostym normalnej p-podgrupy Sylowa P i q-podgrupy Sylowa Q. Jeśli G jest silnie zrównoważona i $Q \nleq C_G(P)$, to Q jest cykliczna.*

Dowód. Przypuśćmy, że Q nie jest cykliczna. Rozważmy grupę ilorazową $QC_G(P)/C_G(P) \leq G/C_G(P)$, która na mocy Wniosku 2.3.3 jest cykliczna. Wtedy $QC_G(P)/C_G(P) \simeq Q/(Q \wedge C_G(P))$ jest również cykliczna. Zatem $Q' \leq Q \wedge C_G(P) \leq C_G(P)$. Podgrupa Q' jest więc normalna w G, jako podgrupa charakterystyczna w $C_G(P)$. Możemy zatem przyjąć, że $Q' = \{e\}$. W przeciwnym razie G możemy zastąpić przez G/Q'. Weźmy $e \neq x \in P$, $y \in Q \setminus C_Q(P)$ i $e \neq z \in C_Q(P) \setminus \langle y\rangle$. Bez zmniejszenia ogólności rozumowania możemy również założyć, że y i z są rzędu q. Wówczas przyjmując $A = \langle y \rangle$, $B = \langle y^x \rangle$ i $C = \langle y^x z \rangle$ otrzymujemy $L(A, B, C) \simeq \mathcal{T}_2$, co jest sprzeczne z założeniem o silnej zrównoważoności grupy G. Zatem Q jest cykliczna. $\square$

Nieabelową grupę G będziemy nazywać *$P^{\#}$-grupą*, jeśli G jest iloczynem półprostym normalnej elementarnej abelowej p-podgrupy Sylowa P i cyklicznej q-podgrupy Sylowa Q. Ponadto jeśli $Q = \langle y \rangle$, to $g^y = g^k$ dla wszystkich $g \in P$ i $k^{q^m} \equiv 1 \pmod p$.

Z definicji $P^{\#}$-grupa G ma następującą prezentację:

$$\begin{aligned} G = \langle & y, x_1, x_2, ..., x_n | \\ & y^{q^m} = x_i^p = e, [x_i, x_j] = e, y^{-1} x_i y = x_i^k, i, j = 1, 2, ..., n \rangle \end{aligned} \tag{2.3}$$

W celu uproszczenia dalszych rozważań, podajemy kilka własności $P^{\#}$-grup.

Niech zatem G będzie $P^{\#}$-grupą z prezentacją 2.3. Niech $P = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Wówczas P jest normalną p-podgrupą Sylowa G. Jeśli H jest dowolną podgrupą G, to przez P_H będziemy oznaczać p-podgrupę Sylowa grupy H. Wtedy oczywiście $P_H = P \wedge H$.

Lemat 2.3.7. (a) *Jeśli $H \leq G$, to istnieje $x \in P$ oraz liczba całkowita i, $0 \leq i \leq m$ taka, że $H = \langle y^{q^i} x, P_H \rangle$.*

(b) *Jeśli r jest liczbą naturalną taką, że $k^{q^r} \equiv 1 \pmod p$ i $k^{q^{r-1}} \not\equiv 1 \pmod p$, to $Z(G) = \langle y^{q^r} \rangle$.*

(c) *Podgrupa H grupy G nie jest normalna w G wtedy i tylko wtedy, gdy $P_H \neq P$ i q-podgrupa Sylowa grupy H zawiera element niecentralny.*

(d) *Podgrupa H grupy G jest normalna w G wtedy i tylko wtedy, gdy $H \leq PZ(G)$ lub $P \leq H$.*

Dowód. (a) Niech H będzie podgrupą grupy G. Wówczas łatwo widać, że H jest elementarną abelową p-podgrupą, cykliczną q-grupą lub iloczynem półprostym normalnej elementarnej abelowej p-podgrupy i cyklicznej q-grupy. Załóżmy, że $y^{q^i} x$ nie jest p-elementem. Wówczas

$$(y^{q^i} x)^{q^m} = y^{q^{i+m}} x^{1+k+\ldots+k^{q^m-1}} = x^{1+k+\ldots+k^{q^m-1}}.$$

Ponieważ $k \not\equiv 1 \pmod p$ i

$$k^{q^m} - 1 = (1 + k + \ldots + k^{q^m-1})(1 - k) \equiv 0 \pmod p,$$

więc $1 + k + \ldots + k^{q^m-1} \equiv 0 \pmod p$. Stąd otrzymujemy, że rząd elementu $y^{q^i} x$ dzieli q^m, czyli $y^{q^i} x$ jest q-elementem. Zatem $H = \langle y^{q^i} x, P_H \rangle$.

(b) Z prezentacji grupy $P^{\#}$ wynika, że każdy p-element jest nieprzemienny z elementem y. Zatem $Z(G) \wedge P = \{e\}$. Ponieważ $y^{-q^r} x y^{q^r} = x^{k^{q^r}}$ i $k^{q^r} \equiv 1$

(mod p), to $Z(G) = \langle y^{q^r} \rangle$.
(c) Przypuśćmy, że q-podgrupa Sylowa grupy H zawiera niecentralny q-element xy^{q^i} i $P_H \neq P$. Niech x_1 będzie p-elementem, który nie należy do P_H. Wówczas $(xy^{q^i})^{x_1} \in H$, jeżeli istnieje element $x_2 \in P_H$ taki, że $(xy^{q^i})^{x_1 x_2^{-1}} = (xy^{q^i})$. Wobec tego że, xy^{q^i} nie jest centralny, to otrzymujemy $x_1 = x_2$, co daje sprzeczność. Zatem H nie jest podgrupą normalną w G.

Przypuśćmy, że jedynymi q-elementami w podgrupie H są elementy centralne. Z prezentacji grupy $P^{\#}$ wynika, że każda podgrupa grupy P jest normalna w G. Wobec tego, że $H^g = \langle y^{q^i} x, P_H \rangle^g = H$ dla dowolnego elementu $g \in G$, $H^g = H$.
(d) Wynika bezpośrednio z (c). □

W kolejnym lemacie obowiązują wyżej ustalone oznaczenia.

Lemat 2.3.8. (a) *Jeśli H i K są q-podgrupami grupy G takimi, że $H \nleq K$ i $K \nleq H$, to $H \wedge K = Z(G)$.*

(b) *Jeśli H i K nie są normalnymi podgrupami grupy G, to $Z(G) \leq H \wedge K$.*

(c) *Jeśli H i K są podgrupami G takimi, że $H \wedge K$ nie jest podgrupą normalną w G, to pewna q-podgrupa Sylowa H jest zawarta w K lub pewna q-podgrupa Sylowa grupy K jest zawarta w H.*

(d) *Jeśli $H, K \leq G$, to $P_H \wedge P_K = P_{H \wedge K}$.*

Dowód. (a) Przypuśćmy, że $H \leq \langle y^{x_1} \rangle$ i $K \leq \langle y^{x_2} \rangle$, gdzie $x_1 \neq x_2$. Ponieważ $H \nleq K$ i $K \nleq H$, więc $H, K \nleq Z(G)$. Wówczas jeżeli $g \in H \wedge K$, to $g = (y^i)^{x_1} = (y^j)^{x_2}$. Stąd łatwo otrzymujemy, że $[y^i, x_2 x_1^{-1}] = y^{i-j} \in Q \wedge P$ Zatem $[y^i, x_2 x_1^{-1}] = y^{i-j} = e$, czyli $y^i \in Z(G)$ i $y^j = y^i$. Dlatego $H \wedge K \leq Z(G)$. Ponieważ $Z(G)$ jest zawarte w każdej q-podgrupie Sylowa G, więc z wyboru H i K otrzymujemy $Z(G) \leq H \wedge K$.
(b) Niech H i K będa podgrupami G, które nie są normalne. Wobec tego H i K zawierają niecentralne q-elementy. Ponieważ q-podgrupy generowane przez te elementy zawierają $Z(G)$, więc $Z(G) \leq H \wedge K$.
(c) Jeśli $H \wedge K$ nie jest normalna w G, to $H \wedge K$ zawiera niecentralny q-element y'. Zatem istnieją q-podgrupa Sylowa Q_H w H i q-podgrupa Sylowa Q_K w K takie, że $y' \in Q_H$ i $y' \in Q_K$. Ponieważ częścią wspólną dowolnych dwóch q-podgrupy Sylowa grupy G jest $Z(G)$ lub są one sobie równe, to Q_H i Q_K są podgrupami tej samej q-podgrupy Sylowa G. Stąd $Q_H \leq Q_K$ lub $Q_K \leq Q_H$.
(d) Wynika bezpośrednio z wprowadzonych oznaczeń. □

Stwierdzenie 2.3.9. *Jeśli G jest $P^{\#}$-grupą, to G jest silnie zrównoważona.*

Dowód. Niech G będzie grupą opisaną prezentacją 2.3 i przypuśćmy, że G jest minimalnym kontrprzykładem. Zatem G zawiera podkratę $L(A, B, C)$

izomorficzną z kratą $\mathcal{T}_1$ lub $\mathcal{T}_2$. Niech podgrupy A, B, C będą takie, jak na Rysunku 1.2. Wówczas, z wyboru grupy G, $A \vee B \vee C = G$ oraz $A \wedge B \wedge C$ nie jest podgrupą normalną w G lub $A \wedge B \wedge C = \{e\}$. Na mocy Lematu 2.1.10, co najwyżej jedna z podgrup A, B, C jest normalna. Zatem z Lematu 2.3.8 (b), $Z(G) \leq A \wedge B \wedge C$. Ponieważ $Z(G)$ jest podgrupą normalną w G i $L(A, B, C) \leq [Z(G), G]$, więc możemy założyć, że $Z(G) = \{e\}$. Ponadto, na mocy Lematów 2.3.7, 2.3.8, możemy przyjąć

$$A = \langle y^{q^i}x, P_A\rangle, \quad B = \langle y^{q^j}x', P_B\rangle, \quad C = \langle y^{q^l}, P_C\rangle$$

gdzie $x, x' \in P$.

I Załóżmy na początek, że $A \wedge B \wedge C = \{e\}$.

I.1. Niech $L(A, B, C) \simeq \mathcal{T}_1$. Z Lematu 2.1.10 żadna z podgrup A, B, C nie jest normalna. Stąd $y^{q^i}, y^{q^j}, y^{q^l} \neq e$. Ponieważ A, B są ułożone symetrycznie w kracie $L(A, B, C)$, to możemy założyć, że $i \leq j$. Niech $z \in P$ będzie takim elementem, że $(y^{q^i}x)^{q^{j-i}}z = y^{q^j}x'$. Wówczas $z = x^t x'$ dla pewnej liczby naturalnej t. Stąd

$$A \vee B = \langle y^{q^i}x, z, P_A, P_B\rangle$$
$$\langle y^{q^{\min\{i,l\}}}, x, P_A, P_C\rangle = A \vee C = B \vee C = \langle y^{q^{\min\{j,l\}}}, x', P_B, P_C\rangle.$$

Ponadto $x \neq e \neq x'$. Jeśli $x \in P_A \vee P_C$, to istnieją $a \in P_A$ i $c \in P_C$ takie, że $x = ac$. Wówczas $xa^{-1} = c$ i $y^{q^i}xa^{-1} = y^{q^i}c$. Niech $1 \neq y' \in \langle y^{q^i}\rangle \wedge \langle y^{q^j}\rangle \wedge \langle y^{q^l}\rangle$ i $d \in N$ będzie taki, że $(y^{q^i})^d = y'$. Stąd $(y^{q^i}xa^{-1})^d = (y^{q^i}c)^d = y'c' \in A \wedge C = A \wedge B \wedge C$ i $y'c' \notin P$, co jest sprzeczne z założeniem o $A \wedge C = A \wedge B \wedge C$. Zatem $x \notin P_A \vee P_C$ i podobnie możemy pokazać, że $x' \notin P_B \vee P_C$. Otrzymujemy zatem $z = x^t x' \in A \vee C = A \vee B \vee C$, a to znaczy, że istnieją $a \in A$, $c \in C$ i liczba całkowita v taka, że $x^t x' = x^v ac$.

Jeśli $v \equiv 0 \pmod p$, to $za^{-1} = c \in (A \vee B) \wedge C = A \wedge B \wedge C = \{e\}$. Zatem $z = a \in A$ a wówczas $y^{q^j}x' = (y^{q^i}x)^{q^{j-i}}z \in A \wedge B$, co daje sprzeczność. Jeśli $v \equiv t \pmod p$, to $x'a^{-1} = c$ i dlatego $y^{q^j}c = y^{q^j}x'a^{-1} \in A \vee B$. Ponownie niech $e \neq y' \in \langle y^{q^j}\rangle \wedge \langle y^{q^l}\rangle$ i $(y^{q^j})^d = y'$. Stąd $(y^{q^j}x'a^{-1})^d = (y^{q^j}c)^d = y'c' \in (A \vee B) \wedge C$, sprzeczność. Zatem możemy założyć, że $v \not\equiv 0 \pmod p$ i $v \not\equiv t \pmod p$. Weźmy liczbę całkowitą w taką, że $uw \equiv -1 \pmod p$. Wówczas $c^w = (x^{-v}za^{-1})^w = xz^w a^{-w}$ i $A \vee B \ni ((y^{q^i}x)z^w a^{-w})^d = (y^{q^i}c^w)^d = y'c' \in C$ dla pewnego d takiego, że $(y^{q^i})^d = y' \neq e$. Co ponownie daje sprzeczność i kończy dowód części I.1.

I.2. Niech teraz $L(A, B, C) \simeq \mathcal{T}_2$. Z Lematu 2.1.10 wynika, że tylko podgrupa C może być normalna w G. Ponadto, skoro $A \vee B = G$ i podgrupy A, B odgrywają symetryczną rolę, to możemy przyjąć, że $A = \langle yx, P_A\rangle$.

I.2.a. Załóżmy że $C \lhd G$. Wówczas z Lematu 2.3.7 (c), $C \leq P$ lub $P \leq C$. Niech na początek $P \leq C$. Otrzymujemy zatem:

$$A = \langle yx, P_A\rangle, \quad B = \langle y^{q^j}x', P_B\rangle, \quad C = \langle y^{q^l}, P\rangle.$$

Stąd $A \vee C = \langle yx, P_A, y^{q^l}, P\rangle = \langle y, P\rangle = G$, sprzeczność.

Zatem $C \leq P$, tzn. $C = P_C$. Wówczas

$$A \vee C = \langle yx,\ P_A,\ P_C\rangle, \quad A \vee B = \langle yx,\ y^{q^j}x',\ P_A,\ P_B\rangle.$$

Niech z będzie elementem podgrupy P takim, że $(yxz)^{q^j} = y^{q^j}x'$. Stąd

$$A \vee B = \langle yx, z, P_A, P_B\rangle.$$

Ponieważ $P_C \nleq P_A$ (w przeciwnym razie $C \leq A$), więc istnieje element $c \in P_C \setminus P_A$. Weźmy $a \in P_A$ i $b \in P_B$ takie, że $c = z^d ab$ jako, że $c \in A \vee B$. Jeśli $d \equiv 0 \pmod p$, to $ca^{-1} = b \in (A \vee C) \wedge B = A \wedge B \wedge C$. Zatem $c = (ca^{-1})a \in A$. Więc $d \not\equiv 0 \pmod p$ i możemy przyjąć, że $d = e$ (Jeśli $d \neq e$ to możemy w miejsce elementu c przyjąć jego odpowiednią potęgę). Stąd $(yx)ca^{-1} = (yxz)b$ i

$$(yxca^{-1})^{q^j} = y^{q^j}x'b' \in (A \vee C) \wedge B = A \wedge B \wedge C.$$

Zatem C nie może być podgrupą normalną.

I.2.b. Niech A, B, C nie będą podgrupami normalnymi w G, to znaczy $y, y^{q^j}, y^{q^l} \neq e$ na mocy Lematu 2.3.7(c). Niech $e \neq y' \in \langle y\rangle \wedge \langle y^{q^j}\rangle \wedge \langle y^{q^l}\rangle$. Stąd

$$A \vee B = \langle yx, y^{q^j}x', P_A, P_B\rangle, \quad A \vee C = \langle y^{q^l}, x, P_A, P_C\rangle,$$

$$B \vee C = \langle y^{q^{\min\{j,l\}}}, x', P_B, P_C\rangle.$$

Ponieważ $B \vee C, A \vee C < A \vee B$, to

$$A \vee B = \langle y, y^{q^j}, x, x', P_A, P_B\rangle,$$

$x, x' \notin P_A \vee P_B$.

Jeśli $x \in P_A \vee P_B$, to istnieją elementy $a \in P_A, b \in P_B$ takie, że $x = ab$. A wówczas $yxa^{-1} = yb \in A$. Stąd otrzymujemy, że dla $d \in \mathbb{N}$ takiego, że $e \neq y^d \in \langle y'\rangle$, czyli $e \neq (yxa^{-1})^d = (yb)^d \in (B \vee C) \wedge A$, sprzeczność. Zatem $x \notin P_A \vee P_B$ i podobnie $x' \notin P_A \vee P_B$. Dlatego $P_{A\vee B} = \langle x, x', P_A, P_B\rangle$. Niech $c \in P_C$ będzie dowolnym elementem. Wtedy $c = x^w(x')^v ab$ dla pewnych $a \in P_A,\ b \in P_B,\ w, v \in N$. Stąd $x^{-w}ca^{-1} = (x')^v b \in (A \vee C) \wedge (B \vee C) = C$. To znaczy że istnieje $c' \in P_C$ i b' potęga b takie, że $x'b' = c'$. Dlatego $y^{q^j}x'b' = y^{q^j}c'$. Stąd dla pewnego $t \in \mathbb{N}$ takiego, że $e \neq (y^{q^j})^t \in \langle y'\rangle$ otrzymujemy $e \neq (y^{q^j}x'b')^t = (y^{q^j}c')^t \in C \wedge B = A \wedge B \wedge C$, co jest sprzeczne z założeniem, że $A \wedge B \wedge C = \{e\}$.

II. Załóżmy na koniec, że $A \wedge B \wedge C$ nie jest podgrupą normalną w G. Ponieważ $A \wedge B \wedge C = A \wedge B = B \wedge C = A \wedge C > \{e\}$, to na mocy Lematu

2.3.8(c) istnieją q-podgrupy Sylowa grup A, B, C, które są parami porównywalne, a zatem tworzą łańcuch. Dlatego możemy przyjąć

$$A = \langle y^{q^i}, P_A \rangle, \quad B = \langle y^{q^j}, P_B \rangle, \quad A = \langle y^{q^l}, P_C \rangle.$$

Ponieważ w obu przypadkach podgrupy A, B są położone symetrycznie, więc możemy założyć, że $i \leq j$. Załóżmy teraz, że $L(A, B, C) \simeq \mathcal{T}_1$. Ponieważ P jest grupą modularną oraz $P_{A \vee C} = P_A \vee P_C$ i $P_{A \vee B} = P_A \vee P_B$, to

$$P_{A \vee B} = P_{A \vee B} \wedge (P_A \vee P_C) = P_A \vee (P_{A \vee B} \wedge P_C) = P_A \vee P_{(A \vee B) \wedge C} = P_A.$$

Stąd $P_B < P_A$ i $B < A$.

Jeśli $L(A, B, C) \simeq \mathcal{T}_2$, to podobnie

$$P_{A \vee C} = P_{A \vee C} \wedge (P_A \vee P_B) = P_A \vee (P_{A \vee C} \wedge P_B) = P_A \vee P_{(A \vee C) \wedge B} = P_A.$$

Stąd $P_C \leq P_A$, a dalej $P_A = P_C \wedge P_A = P_A \wedge P_B$. Zatem $P_B \leq P_A$ i $B \leq A$, co jest sprzeczne z wyborem podgrup A, B. □

Podsumowaniem tego rozdziału jest następująca charakteryzacja grup silnie zrównoważonych.

Twierdzenie 2.3.10. *Niech G będzie grupą. G jest silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy G jest izomorficzna z jedną z następujących grup:*

(a) *modularną p-grupą;*

(b) *$P^{\#}$-grupą;*

(c) *iloczynem prostym grup danych w (a) i (b), których rzędy są parami względnie pierwsze.*

Z rozdziału 1 wiemy, że iloczyn prosty krat silnie zrównoważonych jest kratą silnie zrównoważoną. Zatem z Twierdzenia 2.1.6 i Stwierdzenia 2.3.9 wynika, że wszystkie grupy wymienione w powyższym twierdzeniu są silnie zrównoważone. Implikacja w drugą stronę jest bezpośrednią konsekwencją Lematów 2.3.1–2.3.6.

Warto zwrócić uwagę na analogię tego twierdzenia z Twierdzeniem 2.1.3 opisującym strukturę skończonych grup modularnych.

Rozdział 3

Grupy dualnie silnie zrównoważone

Przejdziemy teraz do opisu grup dualnie silnie zrównoważonych. Jak wspomnieliśmy w rozdziale 1, klasa krat dualnie silnie zrównoważonych jest równie naturalnym rozszerzeniem klasy krat modularnych, co klasa krat silnie zrównoważonych. Opis grup dualnie silnie zrównoważonych jest jednak trudniejszy i nie da się go uzyskać przez zwykłą 'dualizację' rozumowań zastosowanych dla opisu grup silnie zrównoważonych. Już w ramach p-grup ta klasa jest istotnie większa od klasy grup modularnych.

3.1 p-grupy

Wiemy z paragrafu 1.2, że grupa jest dualnie silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy jej krata nie zawiera podkrat izomorficznych ani z kratą $\mathcal{D}_1$, ani z kratą $\mathcal{D}_2$. Poniższy lemat pokazuje, że w przypadku p-grup możemy te warunki poprawić.

Lemat 3.1.1. *Niech G będzie p-grupą. G jest dualnie silne zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy $L(G)$ nie zawiera podkraty izomorficznej z $\mathcal{D}_2$.*

Dowód. Implikacja '$\Rightarrow$' wynika bezpośrednio z Twierdzenia 1.2.2. Dla dowodu lematu w przeciwną stronę załóżmy, że G nie jest dualnie silnie zrównoważona. Zatem na podstawie Twierdzenia 1.2.2, $L(G)$ zawiera podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$ lub $\mathcal{D}_2$.

Jeśli $L(G)$ zawiera podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$, to istnieją podgrupy $H < K \leq G$ takie, że przedział $[H, K]$ zawiera 1-podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$. Na mocy Twierdzenia 1.1.7, $[H, K]$ zawiera 1-podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_2$ lub 1-podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$, ale zawierającą dwa koatomy. Ponieważ K jest p-grupą, więc koatomy przedziału $[H, K]$ są podgrupami normalnymi w grupie

K. Zatem otrzymujemy sprzeczność z Lematem 2.1.10. Wobec tego w $L(G)$ istnieje podkrata izomorficzna z $\mathcal{D}_2$. To kończy dowód. $\square$

Stwierdzenie 3.1.2. *Niech G będzie p-grupą. Jeśli $|G'| = p$, to $L(G)$ nie zawiera podkraty izomorficznej z $\mathcal{D}_1$.*

Dowód. Niech G będzie minimalnym kontrprzykładem. Wówczas w G istnieją podgrupy A, B, C takie, że $L(A, B, C) \simeq \mathcal{D}_1$ oraz $A \vee B \vee C = G$. Rola podgrup A, B, C jest zgodna z oznaczeniami z Rysunku 1.3. Stąd na mocy Lematu 2.1.10 podgrupa C nie zawiera komutanta G' oraz jedna z podgrup A lub B nie zawiera G'. Ponieważ $|G'| = p$, więc jeśli podgrupa G nie zawiera komutanta to jest ona abelowa. Zatem C jest grupą abelową i załóżmy, że A jest abelowa. Wówczas $A \wedge C$ jest podgrupą normalną w $A \vee C = G$. Zatem z Lematu 2.1.10 i minimalności G wynika, że $A \wedge C = \{e\}$. Jeśli B jest grupą abelową, to $A \wedge B$ jest podgrupą normalną w $A \vee B = G$, co jest sprzeczne z Lematem 2.1.10. Zatem B jest nieabelową podgrupą grupy G, a więc zawiera G' i tym samym jest podgrupą normalną.

Z drugiej strony wiemy, że podgrupa $G'C$ jest normalna w G, czyli $G = (A \wedge B)G'C$. Stosując dwukrotnie Twierdzenie 2.1.9 otrzymujemy:

$$B = B \wedge (A \wedge B)G'C = (A \wedge B)(B \wedge G'C) = (A \wedge B)G'(B \wedge C) = (A \wedge B)G'.$$

Ponieważ $G' \leq Z(G)$, więc $B = (A \wedge B) \times G'$. Zatem B jest grupą abelową. Ta sprzeczność kończy dowód. $\square$

Poniższy przykład pokazuje, że klasa p-grup, których kraty podgrup nie zawierają $\mathcal{D}_1$ jest większa od klasy p-grup nie zawierających $\mathcal{D}_2$.

Przykład 3.1.3. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą i

$$\begin{aligned} &G_T = \langle x_1, x_2, x_3, y \mid \\ &x_1^p = x_2^p = x_3^p = y^p = e, [x_1, y] = x_2, [x_2, y] = e, [x_3, y] = e, [x_i, x_j] = e\rangle. \end{aligned}$$

Przyjmijmy $A = \langle x_3, y\rangle$, $B = \langle x_1x_2, x_1x_3\rangle$, $C = \langle x_1, y\rangle$. Wówczas A i B są abelowymi grupami rzędu p^2, a C jest grupą rzędu p^3 i wykładniku p. Łatwo można sprawdzić, że $A \wedge C = \langle y\rangle$, $A \wedge B = \{e\}$ oraz $(B \wedge C) \vee A = G_T$. Ponieważ $x_1^y = x_1x_2$, więc $B \wedge C = \langle x_1x_2\rangle$. Ponadto mamy $(x_1x_3)^y(x_1x_2)^{-1} = x_3$, czyli $(A \wedge C) \vee B = G_T$. Zatem $L(A, B, C) \simeq \mathcal{D}_2$. Jak łatwo widać, grupa G_T jest izomorficzna z iloczynem prostym nieabelowej grupy rzędu p^3 o wykładniku p i cyklicznej grupy rzędu p. Na mocy Stwierdzenia 3.1.2, krata $L(G_T)$ nie zawiera podkraty izomorficznej z $\mathcal{D}_2$. Z opisu grup rzędu p^4 i nieskąplikowanych rachunków wynika, że G_T jest jedyną grupą rzędu p^4, której krata zawiera podkratą izomorficzną z $\mathcal{D}_2$ oraz żadna z tych grup nie zawiera podkraty izomorficznej z $\mathcal{D}_1$.

Przykład 3.1.4. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą i

$$G = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, y \mid \begin{array}{l} x_1^p = x_2^p = x_3^p = x_4^p = y^p = e, [x_1, y] = x_2, \\ [x_2, y] = e, [x_3, y] = x_4, [x_4, y] = e, [x_i, x_j] = e \rangle. \end{array}$$

Podgrupa $\langle x_1, x_2, x_4, y\rangle$ jest izomorficzna z grupą G_T. Zatem krata $L(G)$ zawiera podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_2$.

Przyjmijmy $A = \langle x_1, y\rangle$, $B = \langle x_3, y\rangle$, $C = \langle x_1x_4, x_2x_3\rangle$. Wówczas łatwo jest pokazać, że $A \wedge B = \langle y\rangle$ i $B \wedge C = A \wedge C = \{e\}$. Ponieważ $(x_1x_4)^y = x_1x_2x_4$ i $(x_2x_3)^y = x_2x_3x_4$, więc $(A \wedge B) \vee C = \langle y, x_1x_4, x_2x_3\rangle = \langle y, x_1, x_2\rangle = A \vee B = G$. Zatem $L(A, B, C) \simeq \mathcal{D}_1$.

W dalszych rozważaniach ważną rolę będą odgrywały p-grupy potęgowe. Ich własności i rola w teorii p-grup zostały opisane w pracy [15] i monografii [14]. Powiemy, że p-grupa jest *potęgowa*, jeśli $G' \leq G^p$ dla $p > 2$ i $G' \leq G^4$ dla $p = 2$. Klasa p-grup potęgowych jest w pewnym sensie uogólnieniem klasy p-grup modularnych, tzn. dla $p > 2$, p-grupa jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej podgrupa jest potęgowa oraz 2-grupa jest potęgowa wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej podgrupa jest potęgowa lub jest 2-grupą Hamiltona (patrz [15]). Inną istotną dla nas własność p-grup potęgowych przytaczamy w następnym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.1.5 ([15])**.** *Niech G będzie p-grupą potęgową. Jeśli minimalny zbiór generatorów grupy G ma moc d i $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_d\rangle$, to $G = \langle g_1\rangle\langle g_2\rangle \ldots \langle g_d\rangle$.*

Lemat 3.1.6. *Niech G będzie p-grupą potęgową. Niech H, K będą podgrupami grupy G. Jeśli $H \vee K = G$, to $HK = G$.*

Dowód. Niech H i K będą takie, że $H = \langle h_1, \ldots, h_s\rangle$ oraz $K = \langle k_1, \ldots, k_r\rangle$. Wówczas $G = H \vee K = \langle h_1, \ldots, h_s, k_1, \ldots, k_r\rangle$. Z powyższego zbioru generatorów wybieramy minimalny. Niech zatem $\{h_{i_1}, \ldots, h_{i_n}, k_{j_1}, \ldots, k_{j_m}\}$ będzie minimalnym zbiorem generatorów grupy G. Ponieważ grupa G jest potęgowa, więc na mocy Twierdzenia 3.1.5, otrzymujemy

$$G = \langle h_{i_1}\rangle \ldots \langle h_{i_n}\rangle\langle k_{j_1}\rangle \ldots \langle k_{j_m}\rangle \leq \langle h_{i_1}, \ldots, h_{i_n}\rangle\langle k_{j_1}, \ldots, k_{j_m}\rangle \leq HK.$$

□

Bezpośrednio z Lematów 2.1.10 i 3.1.6 otrzymujemy:

Lemat 3.1.7. *Jeśli G jest p-grupą potęgową, to $L(G)$ nie zawiera 1-podkraty izomorficznej z $\mathcal{D}_2$.*

Stwierdzenie 3.1.8. *Niech G będzie p-grupą. Jeśli dowolna niepotęgowa podgrupa grupy G ma co najwyżej dwa generatory, to G jest dualnie silnie zrównoważona.*

Dowód. Niech G będzie minimalnym kontrprzykładem. Z Lematu 3.1.1 istnieją podgrupy A, B, C grupy G takie, że $L(A, B, C) \simeq \mathcal{D}_2$. Ponadto, na podstawie minimalności G mamy, że $A \vee B \vee C = G$, tzn. $L(A, B, C)$ jest 1-podkratą w $L(G)$. Stąd na mocy Lematu 3.1.7, wynika, że G nie jest grupą potęgową. Zatem G ma dwa generatory, czyli $|G/\Phi(G)| = p^2$.

Niech podgrupy A, B, C będą takie jak na Rysunku 1.3. Ponadto niech A_1 będzie podgrupą maksymalną w G zawierającą podgrupę A i C_1 podgrupą maksymalną w G zwierającą podgrupę C. Wówczas $A \wedge C \leq A_1 \wedge C_1 = \Phi(G)$. Zatem $G = \langle A \wedge C, B\rangle = \langle \Phi(G), B\rangle = B$, co jest sprzeczne z kształtem kraty $L(A, B, C)$. □

Lemat 3.1.9. *Niech G będzie p-grupą ($p>2$) taką, że $G' \not\leq G^p$. Jeśli minimalny zbiór generatorów G ma co najmniej trzy elementy, to G zawiera sekcję izomorficzną z grupą G_T (patrz Przykład 3.1.3).*

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że minimalny zbiór generatorów grupy G ma dokładnie trzy elementy. Niech N będzie podgrupą normalną grupy G taką, że $|G' : N| = p$. Grupa ilorazowa $\bar{G} = G/G^pN$ jest grupą o wykładniku p, $|\bar{G}| = p^4$ i $|\bar{G}'| = p$. Zatem w G istnieje sekcja izomorficzna z grupą G_T (patrz Przykład 3.1.3). □

Z Przykładu 3.1.3 wiemy, że jeśli grupa zawiera sekcję izomorficzną z grupą G_T, to nie jest dualnie silnie zrównoważona. Ponieważ grupa G_T nie jest potęgowa i ma 3 generatory, to na podstawie Stwierdzenia 3.1.8 i Lematu 3.1.9 otrzymujemy:

Twierdzenie 3.1.10. *Niech G będzie p-grupą i $p > 2$. Następujące warunki są równoważne:*

(a) *G jest dualnie silnie zrównoważona;*
(b) *G nie zawiera sekcji izomorficznej z grupą G_T;*
(c) *dowolna podgrupa grupy G jest albo potęgowa, albo 2-generowana.*

Na podstawie powyższego twierdzenia i opisu p-grup potęgowych o co najwyżej trzech generatorach, który można znaleźć w [15], możemy sformułować:

Wniosek 3.1.11. *Niech G będzie p-grupa potęgową. Jeśli minimalny zbiór generatorów G ma co najwyżej trzy elementy, to G jest dualnie silnie zrównoważona.*

Następny przykład pokazuje, że w Twierdzeniu 3.1.10 istotne jest założenie o nieparzystości liczby p.

Przykład 3.1.12. Niech G będzie iloczynem centralnym grupy kwaternionów rzędu 8 i cyklicznej grupy rzędu 4.

$$G = \langle x, y, z \mid x^4 = y^4 = z^4 = e, [x, y] = x^2, x^2 = y^2 = z^2, [x, z] = e, [y, z] = e\rangle$$

Grupa G ma 3 generatory. Ponieważ $G^4 = \{e\}$ oraz $G' = \langle x^2\rangle$, więc G nie jest grupą potęgową. Ponadto łatwo można sprawdzić, że $L(G)$ nie zawiera podkraty izomorficznej z $\mathcal{D}_2$.

Przykład 3.1.13. Niech G będzie iloczynem prostym grupy dihedralnej rzędu 8 i cyklicznej rzędy 2.

$$G = \langle x, y, z \mid x^4 = y^2 = z^2 = e, [x, y] = x^2, [x, z] = e, [y, z] = e\rangle$$

Rozważmy podgrypy $A = \langle y, z\rangle$, $B = \langle xy, x^2z\rangle$, $C = \langle x, y\rangle$. Wówczas A, C są abelowymi grupami rzędu 4, a $B \simeq D_8$. Stąd $A \wedge B = \{e\}$, $A \wedge C = \langle y\rangle$ oraz $B \wedge C = \langle xy\rangle$. Zatem łatwo widać, że krata $L(A, B, C)$ jest izomorficzna z $\mathcal{D}_2$. Nieabelowe grupy rzędu 8 mają dwa generatory, więc są one dualnie silnie zrównoważone. Korzystając z klasyfikacji grup rzędu 16 można wywnioskować, że G jest jedyną grupą rzędu 16, której krata zawiera podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_2$.

Za [19] powiemy, że *p-grupa ma rangę r*, jeśli jej największa elementarna abelowa podgrupa ma rząd p^r. Jeśli G jest p-grupą, to rangę grupy G będziemy oznaczać przez $rank(G)$.

Lemat 3.1.14. *Niech G będzie 2-grupą taką, że każda niepotęgowa podgrupa grupy G jest 2-generowana. Wówczas dla dowolnych podgrup $H \lhd K$ grupy G, $\Omega_1(K/H)$ jest abelowa lub $rank(K/H) = 2$.*

Dowód. Niech $H \lhd K$ będą podgrupami G. Ponieważ K jest potęgowa lub 2-generowana, to również każda sekcja K/H jest potęgowa lub 2-generowana. Przyjmijmy $\bar{K} = K/H$. Załóżmy, że $\Omega_1(\bar{K})$ jest potęgowa. Wówczas $\Omega_1(\bar{K})' \leq \Omega_1(\bar{K})^4$. Niech $\Omega_1(\bar{K}) = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$. Stąd na mocy [15, 4.1.9], $\Omega_1(\bar{K})^4 = \langle a_1^4, \ldots, a_n^4\rangle$. Zatem $\Omega_1(\bar{K})^4 = \{e\}$, więc również $\Omega_1(\bar{K})' = \{e\}$. Wobec tego grupa $\Omega_1(\bar{K})$ jest abelowa. Załóżmy teraz, że $\Omega_1(\bar{K})$ nie jest potęgowa, a zatem na mocy założeń lematu ma dwa generatory. Wiadomo, że generatory grupy $\Omega_1(\bar{K})$ są rzędu 2. Wobec tego możemy przyjąć, że $\Omega_1(\bar{K}) = \langle a, b\rangle$ i $o(a) = o(b) = 2$. Ponieważ $\Omega_1(\bar{K})$ nie jest abelowa, więc $[a, b] \neq e$. Stąd wynika, że $\Omega_1(\bar{K})$ jest izomorficzna z grupą dihedralną rzędu 2^n. Zatem $rank(\Omega_1(\bar{K})) = 2$, co kończy dowód. $\square$

Lemat 3.1.15. *Niech G będzie 2-grupą. Jeśli $\Omega_1(G)$ jest nieabelowa i $rank(G) \geq 3$, to G zawiera sekcję izomorficzną z grupą $D_8 \times C_2$.*

Dowód. Niech H będzie maksymalną elementarną abelową podgrupą w $\Omega_1(G)$. Na poczatek pokażemy, że w $\Omega_1(G)$ istnieje element rzędu 2, który normalizuje podgrupę H. Przypuśćmy zatem, że tak nie jest. Przyjmijmy oznaczenia $H_1 = N_{\Omega_1(G)}(H)$ i $H_{i+1} = N_{\Omega_1(G)}(H_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Wówczas $H = H_0 < H_1 < H_2 < \ldots < H_n < H_{n+1} = \Omega_1(G)$. Niech i będzie najmniejszą liczbą naturalną dla której istnieje element $y \in H_{i+1} \setminus H_i$ taki, że $o(y) = 2$. Wówczas dla $k \leq i$ mamy $\Omega_1(H_k) = H$. Ponieważ $\Omega_1(H_i)$ jest charakterystyczną podgrupą w H_i, więc $\Omega_1(H_i)$ jest normalna w H_{i+1}. Zatem $y \in N_{\Omega_1(G)}(H)$, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem. Weźmy zatem element $y \in N_{\Omega_1(G)}(H) \setminus H$ taki, że $o(y) = 2$. Jeśli $y \in C_G(H)$, to $\langle H, y\rangle$ jest elementarną abelową podgrupą $\Omega_1(G)$, co jest sprzeczne z wyborem grupy H. Zatem $y \notin C_G(H)$ i wobec tego istnieje element $h \in H$ taki, że $[h, y] \neq e$. Rozważmy podgrupę $K = \langle H, y\rangle$. Ponieważ $o(h) = 2 = o(y)$ i $[h, y] \neq e$, więc istnieje naturalne $n \geq 3$ takie, że $\langle h, y\rangle \simeq D_{2^n}$. Rozważmy homomorfizm $f : H \to H$ dany wzorem $f(h) = [h, y]$. Łatwo widać, że $Kerf = Z(K) \wedge H = Z(K)$ i $Imf = K'$. Przyjmijmy $|H| = 2^s$. Wówczas $|K| = 2^{s+1}$. Jeśli $|Kerf| = 2$, to $|Imf| = 2^{s-1}$. Tym samym $|K'| = 2^{s-1}$ i K jest generowane przez dwa elementy rzędu 2, które są nieprzemienne (ponieważ $|K/K'| = 4$). Zatem K jest izomorficzne z nieabelową grupą dihedralną, więc $rank(K) = 2$, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem, że $rank(H) \geq 3$. Zatem $|Z(K)| = |Kerf| \geq 4$. Wówczas istnieje $h_1 \in H$ takie, że $h_1 \in C_G(\langle h, y\rangle) \setminus \langle h, y\rangle$ gdyż $|Z(\langle h, y\rangle)| = 2$. Zatem $\langle h, y\rangle \times \langle H_1\rangle$ zawiera podgrupę izomorficzną z $D_8 \times C_2$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3.1.16. *Niech G będzie dualnie silnie zrównoważoną 2-grupą. Wówczas dla dowolnych podgrup $H \lhd K$, $\Omega_1(K/H)$ jest abelowa lub $rank(K/H) = 2$.*

3.2 Grupy proste

W tym paragrafie pokazujemy, że krata podgrup dowolnej grupy prostej zawiera zarówno podkratę $\mathcal{D}_1$, jak i $\mathcal{D}_2$. To oznacza, że jeśli grupa G jest dualnie silnie zrównoważona, to G jest rozwiązalna. Jest jasne, że nasze rozważania, podobnie jak w przypadku grup silnie zrównoważonych, wystarczy przeprowadzić tylko dla minimalnych grup prostych.

Poniższy lemat jest bezpośrednią konsekwencją [8, 2.8.27].

Lemat 3.2.1. *Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą i k liczbą całkowitą dodatnią, przy czym jeśli $p = 3$, to zakładamy, że $k > 1$. Grupa $PSL(2, p^k)$ zawiera podgrupę izomorficzną z S_4 wtedy i tylko wtedy, gdy $p^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{16}$.*

Na podstawie wyników rozdziału II.8 z [8] możemy sformułować:

Lemat 3.2.2. *Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 3 lub $p = 3^k$, gdzie k jest liczbą pierwszą. Niech ponadto $G = PSL(2, p)$. Jeżeli M jest maksymalną podgrupą grupy G, to M jest izomorficzna z jedną z następujących grup:*

(a) *dihedralną grupą rzędu $p - 1$;*

(b) *dihedralną grupą rzędu $p + 1$;*

(c) *grupą A_4 permutacji parzystych stopnia 4;*

(d) *iloczynem półprostym p-podgrupy Sylowa grupy G i cyklicznej grupy rzędu $\frac{p-1}{2}$.*

Wniosek 3.2.3. *Niech G będzie taką grupą, jak w poprzednim lemacie. Załóżmy ponadto, że $|G|$ nie dzieli się przez 8, tzn. $16 \nmid p^2 - 1$. Jeżeli H jest właściwą podgrupą grupy G o rzędzie podzielnym przez 4, to dowolne dwie 2-podgrupy Sylowa grupy H mają nietrywialne przecięcie.*

Lemat 3.2.4. *Kraty $L(S_4)$, wszystkich podgrup grupy permutacji stopnia 4 oraz $L(A_5)$, wszystkich podgrup grupy permutacji parzystych stopnia 5, zawierają podkraty izomorficzne z kratami $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$.*

Dowód. Niech A, B, C będą podgrupami grupy S_4 takimi, że $A = \langle(1\ 2), (1\ 2\ 3)\rangle$, $B = \langle(1\ 2), (1\ 3\ 2\ 4)\rangle$ i $C = \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle$. Wówczas A jest nieabelową podgrupą rzędu 6, B nieabelową podgrupą rzędu 8 i C cykliczną grupą rzędu 4. Zauważmy teraz, że $A \wedge B = \langle(1\ 2))\rangle$ jest podgrupą rzędu 2, $B \wedge C = \langle(1\ 3)(2\ 4)\rangle$ jest również podgrupą rzędu 2 i obie generują podgrupę B. Ponadto A i C mają trywialne przecięcie, a każde dwie spośród podgrup A, B, C generują S_4. Zatem krata generowana przez A, B i C jest izomorficzna z $\mathcal{D}_2$.

Do konstrukcji kraty izomorficznej z $\mathcal{D}_1$ weźmy A jak w poprzednim przykładzie, $B = \langle(1\ \ 2), (3, 4)\rangle$ niech będzie niecykliczną grupą rzędu 4 i $C = \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle$ – grupą cykliczną rzędu 4. Zauważmy, że $A \wedge B = \langle(1\ 2)\rangle$ i $A \wedge C = B \wedge C = \{e\}$, a wobec tego, że $(1\ \ 2) \cdot (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4) = (2\ \ 3\ \ 4)$, mamy $(A \wedge B) \vee C = S_4$. Ponieważ jest jasne, że $A \vee B = S_4$, więc krata generowana przez A, B i C jest izomorficzna z $\mathcal{D}_1$.

Przejdźmy teraz do grupy A_5. Niech

$A = \{1,\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}$

$B = \langle(1\ 2)(3\ 4),\ (3\ 4\ 5)\rangle$

$C = \{1,\ (1\ 2)(3\ 5),\ (1\ 3)(2\ 5),\ (1\ 5)(2\ 3)\}$

Bezpośrednio widać, że B jest nieabelową grupą rzędu 6, $A \wedge B = \langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle$, $B \wedge C = \langle(1\ 2)(3\ 5)\rangle$ i $(A \wedge B) \vee (B \wedge C) = B$. Grupa $A \vee B$ zawiera elementy rzędu 2 i 3, co jest oczywiste, jak również elementy rzędu 5, ponieważ $(1\ 3)(2\ 4) \cdot (3\ 4\ 5) = (1\ 3\ 2\ 4\ 5)$. Jedyną podgrupą grupy A_5, która ma tę własność jest cała grupa, zatem $A \vee B = A_5$. Analogicznie $B \vee C = A_5$. Łatwo sprawdzalną rzeczą jest również to, że dwie różne 2-podgrupy Sylowa grupy A_5 generują A_5. To oznacza, że krata generowana przez podgrupy A, B i C jest izomorficzna z $\mathcal{D}_2$

Jeżeli w powyższym układzie podgrup, C zostanie zastąpiona przez podgrupę $C_1 = \langle(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\rangle$, to otrzymamy układ generuje podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $(A \wedge B) \vee C_1 = A_5$, co łatwo wynika z faktu, że $(1\ 2)(3\ 4) \cdot (1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (2\ 4\ 5)$ i argumentu użytego wyżej o istnieniu w $(A \wedge B) \vee C_1$ elementów rzędów 2, 3 i 5. □

Twierdzenie 3.2.5. *Jeśli G jest nieabelową grupą prostą, to $L(G)$ zawiera podkratę izomorficzną z kratą $\mathcal{D}_1$ i z kratą $\mathcal{D}_2$.*

Dowód. Jak wspominaliśmy na początku tego paragrafu, dla dowodu wystarczy rozważyć minimalne grupy proste. Niech więc G będzie minimalna grupą prostą. Rozpoczniemy od przypadku, gdy $G = PSL(3,3)$. Rozważmy elementy $a, b, c \in PSL(3,3)$ takie, że

$$a = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 2&0&0\\0&2&0\\0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Niech $A = \langle a, d\rangle$, $B = \langle b, d\rangle$, $C = \langle ab\rangle$. Wówczas grupa A jest abelowa rzędu 6, B jest elementarna abelowa rzędu 4 oraz C jest podgrupą rzędu 3. Zatem $A \wedge B = \langle d\rangle$. Ponadto ponieważ $da^2 = (ab)d(ab)$, więc $\langle d, ab\rangle = \langle a, b, d\rangle$. Zatem $(A \wedge B) \vee C = A \vee C = B \vee C$. Wobec tego mamy $L(A, B, C) \simeq \mathcal{D}_1$.

Przyjmijmy teraz

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2&0&0\\0&2&0\\0&0&1 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Wówczas podgrupy $H_1 = \langle a_1, b_1\rangle$, $H_2 = \langle a_2, b_2\rangle$ są izomorficzne z grupą S_3. Weźmy $d = \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$. Podgrupa $\langle d\rangle$ jest normalna w G. Wobec tego, że $[a_1, a_2] = e$, $[a_1, b_2] = e$, $[a_2, b_1] = e$ oraz $[b_1, b_2] = d$, otrzymujemy, że $\langle H_1, H_2\rangle/\langle d\rangle$ jest izomorficzna z $S_3 \times S_3$. Przyjmijmy $\bar{G} = G/\langle d\rangle$. Rozważmy podgrupy $\bar{A} = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2\rangle$, $\bar{B} = \langle \bar{b}_1\bar{a}_1, \bar{b}_2\bar{a}_2\rangle$, $\bar{C} = \langle \bar{a}_1, \bar{b}_1\rangle$. Ponieważ $\bar{A}$ i $\bar{B}$ są izomorficzne z elementarną abelową grupą rzędu 4 i $\bar{C}$ jest izomorficzna z S_3, to $\bar{A} \wedge \bar{C} = \langle \bar{a}_1\bar{a}_2\rangle$ oraz $\bar{C} \wedge \bar{B} = \langle \bar{b}_1\bar{a}_1\bar{b}_2\bar{a}_2\rangle$. Rozważmy teraz podgrupę $(\bar{A} \wedge \bar{C}) \vee \bar{B} = \langle \bar{a}_1\bar{a}_2, \bar{b}_1\bar{a}_1, \bar{b}_2 a_2\rangle$ oraz jej element $\bar{b}_1\bar{a}_1(\bar{a}_1\bar{a}_2^{-1}) = \bar{b}_1\bar{a}_2^{-1}$. Ponieważ $(\bar{b}_1\bar{a}_2^{-1})^2 = \bar{b}_1^2$, to otrzymujemy, że $\bar{b}_1 \in (\bar{A} \wedge \bar{C}) \vee \bar{B}$. Podobnie możemy wykazać, że $\bar{b}_2 \in (\bar{A} \wedge \bar{C}) \vee \bar{B}$. A zatem $(\bar{A} \wedge \bar{C}) \vee \bar{B} = \bar{G}$. Ponadto widać, że $\bar{A} \vee (\bar{C} \wedge \bar{B}) = \bar{G}$, więc $L(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) \simeq \mathcal{D}_2$.

Niech teraz $G = PSL(2, 2^p)$, gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą. Przyjmijmy $A = \{\left(\begin{smallmatrix} 1&a\\0&1 \end{smallmatrix}\right), a \in GF(2^p)\}$, $B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\c&1 \end{smallmatrix}\right), c \in GF(2^p)\}$. Wówczas $A \wedge B = \{e\}$ oraz $A \vee B = G$. Ponadto niech $C = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1&1\\0&1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1&0\\1&1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$. Wówczas C jest dihedralną grupą rzędu 6 i otrzymujemy $A \wedge C = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1&1\\0&1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$ oraz $B \wedge C = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1&0\\1&1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$. Łatwo zauważyć, że $C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$, $(A \wedge C) \vee B = C \vee B$ i $(B \wedge C) \vee A = C \vee A$. Ponadto, wobec tego, że dla dowolnego $a \in F$

i dla $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \in B$ mamy $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\a&1\end{smallmatrix}\right)$, to $A \vee C = G$. Analogicznie $B \vee C = G$. Zatem $L(A, B, C) \simeq \mathcal{D}_2$.

Niech teraz $A = \left\{\left(\begin{smallmatrix}d&a\\0&d^{-1}\end{smallmatrix}\right), a \in GF(2^p), d \in GF(2^p)^*\right\}$, $B = \left\{\left(\begin{smallmatrix}d&0\\a&d^{-1}\end{smallmatrix}\right), a \in GF(2^p), d \in GF(2^p)^*\right\}$ i $C = \langle\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\rangle$. Wobec tego $A \wedge B = \left\langle\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&d^{-1}\end{smallmatrix}\right)\right\rangle$ oraz $A \wedge C = B \wedge C = \{e\}$. Niech $t = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ i $s = \left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&d^{-1}\end{smallmatrix}\right)$. Wówczas $st^{-1}st = \left(\begin{smallmatrix}1&1+d^{-2}\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ i $stst^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1+d^2&1\end{smallmatrix}\right)$. Łatwo jest sprawdzić, że powyższe macierze generują G. Zatem $L(A, B, C) \simeq \mathcal{D}_1$.

Rozważmy teraz $G = PSL(2, p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą większą od 2 lub $p = 3^k$, gdzie k jest liczbą pierwszą. Na mocy Lematów 3.2.4 i 3.2.1 możemy założyć, że $16 \nmid p^2 - 1$, tzn. $|PSL(2, p)|$ nie dzieli się przez 8 lub jeszcze inaczej – 2-podgrupy Sylowa tej grupy są izomorficzne z czwórkową grupą Kleina. Ponieważ p jest liczbą nieparzystą, więc dokładnie jedna spośród liczb $\frac{p-1}{2}$, $\frac{p+1}{2}$ jest liczbą nieparzystą. Oznaczmy tę liczbę przez q. Niech Q będzie ustaloną cykliczną podgrupą tego rzędu. Jej istnienie wynika bezpośrednio z [8, 2.8.27]. Z tego twierdzenia wynika również, że podgrupa $C = N_G(Q)$ jest dihedralną grupą rzędu $2q$. Na mocy Lematu 3.2.2 jest ona maksymalną podgrupą w G. Niech $x, y \in C$ będą elementami rzędu 2 takimi, że $Q = \langle xy \rangle$. Niech teraz A będzie 2-podgrupą Sylowa grupy G zawierającą element x, natomiast B – 2-podgrupą Sylowa grupy G zawierającą element y. Zauważmy, że $A \wedge B = \{e\}$. Istotnie, gdyby było inaczej, to dla pewnego elementu t rzędu 2 mielibyśmy $A = \langle x, t \rangle$ i $B = \langle y, t \rangle$. Element t, jako przemienny z x i y, byłby przemienny ze wszystkimi elementami grupy C, tzn. grupa $\langle C, t \rangle = C \times \langle t \rangle$ byłaby podgrupą właściwą w G, co przeczy maksymalności podgrupy C.

Z maksymalności podgrupy C oraz Wniosku 3.2.3 wynika teraz, że $A \vee B = A \vee C = B \vee C$. Ponadto mamy $A \wedge C = \langle x \rangle$ i $B \wedge C = \langle y \rangle$. Wszystkie te argumenty razem oznaczają, że podgrupy A, B i C generują podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_2$.

Ponieważ grupa $PSL(2, 5)$ jest izomorficzna z A_5, więc na podstawie Lematu 3.2.4 możemy dodatkowo założyć, że $p > 5$. Zatem z tego, że $8 \nmid |G|$, istnieje liczba nieparzysta względnie pierwsza z pq dzieląca $|G|$. Niech r będzie największą z takich liczb (z założeń wynika, że jeśli $q = \frac{p-1}{2}$, to $r = \frac{p+1}{4}$, jeśli natomiast $q = \frac{p+1}{2}$, to $r = \frac{p-1}{4}$; ten drugi przypadek wymaga właśnie założenia, że $p > 5$). Niech teraz A będzie podgrupą dihedralną rzędu $4r$ (jej istnienie wynika z Lematu 3.2.2), $B = N_G(Q)$ niech będzie takie, że $|A \wedge B| = 2$. Niech ponadto C będzie cykliczną podgrupę rzędu r taką, że $A \wedge C = \{e\}$. Wówczas, nietrudno sprawdzić, że krata generowana przez A, B i C jest izomorficzna z $\mathcal{D}_1$.

Na koniec niech $G = Sz(2^p)$, gdzie $p = 2m + 1$. Wówczas rząd grupy $|G| = (2^{2p} + 1)2^{2p}(2^p - 1)$. Niech A będzie 2-podgrupą Sylowa zawierającą element t. Niech C będzie 2 podgrupą Sylowa zawierajacą element t^x, gdzie $x \in G \setminus A$ oraz niech $B = \langle t, t^x \rangle$. Ponieważ dwie różne 2-podgrupy Sylowa przecinają sie trywialnie, to $A \wedge C = \{e\}$. Wobec tego, że $\langle A, t\rangle$ oraz $\langle C, t^x\rangle$ nie zawierają się w żadnej podgrupie maksymalnej grupy $Sz(2^p)$, więc $A \vee (B \wedge C) = G$ oraz $B \vee (A \wedge C) = G$. Stąd otrzymujemy, że $L(A, B, C) \simeq \mathcal{D}_2$.

Niech teraz $A = FH$ i $B = F^tH$, gdzie F^t jest podgrupą macierzy transponowanych do wszystkich macierzy z podgrupy F (patrz konstrukcja grupy Suzukiego str. 27). Ponadto niech $C = S_t$, gdzie S_t jest 2-podgrupą Sylowa G zawierającą element t. Ponieważ różne 2-podgrupy Sylowa mają trywialne przecięcie, to $A \wedge C = B \wedge C = \{e\}$. Dodatkowo, z własności grupy G, przedstawionych powyżej wynika, że $A \wedge B = H$. Wobec tego, że elementy t i t^m, gdzie $m \in H$, są rzędu 2, a element tt^m jest rzędu nieparzystego, to t i t^m należą do różnych 2-podgrup Sylowa grupy G. Zatem $m \notin N_G(S_t)$, czyli H nie zawiera się w $N_G(S_t)$. Ponieważ podgrupa $\langle H, S_t\rangle$ nie zawiera się w żadnej podgrupie maksymalnej grupy G, to $(A \wedge B) \vee C = G$. Zatem $L(A, B, C) \simeq \mathcal{D}_1$. □

3.3 Grupy rozwiązalne

Rezultaty z poprzedniego paragrafu pozwalają nam w kolejnym kroku ograniczyć się do grup rozwiązalnych. Zanim przejdziemy do dalszych rozważań podamy najpierw niezbędną terminologię pojawiająca się w tym paragrafie.

Powiemy, że nietrywialna grupa automorfizmów grupy G jest *regularna*, jeśli każdy nietrywialny automorfizm grupy G nie ma punktów stałych różnych od e. Niech A będzie elementarną abelową p-grupą. Powiemy, że *grupa H działa nieprzywiedlnie na A*, jeśli A i $\{e\}$ są jedynymi H-niezmienniczymi podgrupami A. Ponadto powiemy, że *grupa H działa na grupie G potęgowo* jeśli każdy element grupy H indukuje automorfizm potęgowy na G.

Lemat 3.3.1 ([5]). *Jeżeli A jest regularną p'-grupą automorfizmów p-grupy P, to podgrupy Sylowa grupy A są cykliczne lub uogólnione kwaternionów.*

Lemat 3.3.2. *Niech p i q będą liczbami pierwszymi, takimi że $q < p$. Jeśli G jest grupą rzędu qp^2, to $L(G)$ nie zawiera podkraty izomorficznej z $\mathcal{D}_2$.*

Dowód. Przypuśćmy, że A, B i C są podgrupami takimi jak w kracie $\mathcal{D}_2$ (patrz Rysunek 1.3.) Oczywiście każda z nich ma rząd albo pq, albo p^2, a ponadto ze względu na długość kraty $L(G)$, musi być $A \wedge B = \{e\}$. W grupie G podgrupa rzędu p^2 jest normalna, więc taka podgrupa jest tylko jedna. Poza tym A i B nie mogą być równocześnie podgrupami normalnymi. Zatem $|A| = |B| = pq$. To jednak, wobec równości $|AB| = \frac{|A|\cdot|B|}{|A \wedge B|}$ oznacza, że $A \wedge B > \{e\}$. Sprzeczność. □

Lemat 3.3.3. *Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $G = H \ltimes P$ będzie iloczynem półprostym elementarnej abelowej p-grupy P i cyklicznej p'-grupy H.*

Załóżmy także, że $L(G)$ nie zawiera podkrat izomorficznych z żadną z krat $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$. Wówczas

(a) *Jeżeli $|H| = q$, gdzie q jest liczbą pierwszą, to H działa na P trywialnie, potęgowo lub nieprzywiedlnie.*

(b) *Jeśli H działa na P nietrywialnie, to $|G : C_G(P)| = q$, gdzie q jest liczbą pierwszą.*

Dowód. (a) Załóżmy, że H działa na P nietrywialnie i że nie jest to działanie potęgowe. Przypuśćmy, że działanie H na P jest przywiedlne. Wówczas istnieją H-nieprzywiedlne nietrywialne podgrupy P_1 i P_2 grupy P takie, że $P_1 \neq P_2$ lub inaczej, $P_1P_2 = P_1 \times P_2$ jest podgrupą normalną w G. Nasze rozważania ograniczymy do grupy HP_1P_2 lub, co na jedno wychodzi przyjmujemy, że $P = P_1 \times P_2$.

Załóżmy najpierw, że istnieje $t \in P$ takie, że $\langle t\rangle^H = P$. Wtedy łatwo sprawdzić, że podgrupy $A = HP_1$, $B = HP_2$ i $C = \langle t\rangle$ generują podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$

Załóżmy zatem, że dla dowolnego $t \in P$, $\langle t\rangle^H < P$. Niech $H = \langle y\rangle$, $P_1 = \langle x_1\rangle^H$, $P_2 = \langle x_2\rangle^H$. Wówczas łatwo zauważyć, że żadna z podgrup P_1, P_2 nie jest cykliczna. W przeciwnym wypadku przyjmując $t = x_1x_2$ otrzymujemy $\langle t\rangle^H = P$, sprzeczność. Niech teraz $C = \langle x_1^y x_2^{-1}, x_1x_2^y\rangle$. Oczywiście C nie jest cykliczna. Pokażemy, że $P_i \wedge C = \{e\}$ dla $i = 1, 2$. Przypuśćmy, że $P_1 \wedge C \neq \{e\}$. Wtedy dla pewnych całkowitych k, l zachodzi $e \neq (x_1^y x_2^{-1})^k (x_1x_2^y)^l \in P_1$. Wobec tego i z faktu, iż $(x_1^y)^k x_1^l \in P_1$ wynika $x_2^{-k}(x_2^y)^l \in P_1$. Ponieważ $x_2^{-k}(x_2^y)^l \in P_2$ i $P_1 \wedge P_2 = \{e\}$, więc $x_2^{-k}(x_2^y)^l = e$. Stąd $(x_2^l)^y = x_2^k$, czyli P_2 jest cykliczna. Sprzeczność.

Pokażemy jeszcze, że $C^H = P$. W tym celu zauważmy, że $(x_1^y x_2^{-1})^{y^{-1}}(x_1x_2^y)^{-1} = (x_2^{-1})^{y^{-1}}(x_2^{-1})^y \in P_2$. Gdyby $(x_2^{-1})^{y^{-1}}(x_2^{-1})^y = e$, to $(x_2^{-1})^{y^{-1}} = x_2^y$, czyli $x_2^{-1} = x_2^{y^2}$. Zatem $o(y) = 4$, co jest sprzeczne z założeniami lematu. Stąd $e \neq (x_2^{-1})^{y^{-1}}(x_2^{-1})^y \in P_2 \wedge C^H$. Ponieważ P_2 jest H-nieprzywiedlna, więc $\langle (x_2^{-1})^{y^{-1}}(x_2^{-1})^y\rangle^H = \langle x_2\rangle^H = P_2$. Wobec tego $x_2 \in C^H$, a stąd łatwo jest wywnioskować, że $C^H = P$. Zatem grupy A, B, C generuja kratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$.

(b) Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $H \wedge C_G(P) = Z(G) = \{e\}$. Przypuśćmy ponadto, że istnieją różne liczy pierwsze q i r dzielące $|H|$. Niech Q i R będą podgrupami H takimi, że $|Q| = q$ i $|R| = r$. W myśl punktu (a) można założyć, że każda z podgrup Q i R działa na P albo potęgowo, albo nieprzywiedlnie. Dodatkowo możemy przyjąć, że jeśli obie podgrupy działają potęgowo, to P jest cykliczna. Ponieważ G jest grupą Frobeniusa (patrz [18]), więc H ma trywialny przekrój z każdym swoim sprzężeniem różnym od H. Przyjmijmy $A = H$, $B = H^x$ dla pewnego $x \in P$, $x \neq e$. Niech ponadto $C = \langle Q, Q^x\rangle$, jeśli Q działa na P nieprzywiedlnie lub

$C = \langle R, R^x \rangle$, jeśli nieprzywiedlnie działa R. Bezpośrednio łatwo sprawdzić, że podkrata generowana przaz podgrupy A, B i C jest izomorficzna z $\mathcal{D}_2$. Zatem H jest q-grupą.

Przyjmijmy $H = \langle y \rangle$ i $y^q \notin C_G(P)$. Niech P_1 będzie H-nieprzywiedlną podgrupą P taką, że $y^q \notin C_G(P_1)$. Weźmy $x \in P_1$ i rozważmy podgrupy $A = \langle y \rangle$, $B = \langle y \rangle^x$ i $C = \langle y^q, (y^q)^x \rangle$. W obu przypadkach grupa $\langle x, y \rangle$ jest grupą Frobeniusa. Zatem $\langle y \rangle \wedge \langle y \rangle^x = \{e\}$. Wobec tego krata $L(A, B, C)$ jest izomorficzna z $\mathcal{D}_2$. $\square$

Lemat 3.3.4. *Niech p i q będą różnymi liczbami pierwszymi i niech $G = Q \ltimes P$ będzie iloczynem półprostym elementarnej abelowej p-grupy P i niecyklicznej grupy Q. Jeżeli Q działa nietrywialnie na P, to $L(G)$ zawiera podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$ lub z $\mathcal{D}_2$.*

Dowód. Niech $H = C_G(P) \wedge Q$. Załóżmy najpierw, że Q/H jest niecykliczna i ze względu na to że $H \lhd G$ możemy przyjąć, że $H = \{e\}$ i $|Q| = q^2$. Na mocy Lematu 3.3.1 wiemy, że przynajmniej jeden z elementów grupy Q nie działa na P regularnie. Ponieważ jednak każdy element z Q działa nietrywialnie, mamy sytuację taką, jak opisana w Lemacie 3.3.3.

Jeżeli Q/H jest cykliczna, to z Lematu 3.3.3 mamy $|Q/H| = q$. Ponieważ Q nie jest cykliczna, więc $|Q/\Phi(Q)| \geq q^2$ i ponadto $\Phi(Q) < H$. Zatem $\Phi(Q)$ jest podgrupą normalną w G. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $\Phi(Q) = \{e\}$. Wówczas istnieją w G elementy y, z takie, że $o(y) = o(z) = q$, $y \in Q \setminus H$ oraz $z \in Z(G)$. Niech $x \in P$ będzie elementem takim, że $[x, y] \neq e$. Rozważmy podgrupę $K = \langle x, y, z \rangle$. Jeśli przyjmiemy $A = \langle x, y \rangle$, $B = \langle y, z \rangle$ i $C = \langle xyz \rangle$, to podgrupy A, B, C generują podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$. $\square$

Lemat 3.3.5. *Niech $G = Q \ltimes P$ będzie iloczynem półprostym normalnej abelowej, niecyklicznej p-grupy P i grupy Q rzędu $q \neq p$. Jeśli G jest dualnie silnie zrównoważona i Q indukuje automorfizm potęgowy na P, to P jest elementarna abelowa.*

Dowód. Niech $G = Q \ltimes P$ i $Q = \langle y \rangle$ oraz niech P będzie abelową p-grupą, w której istnieje element x_1 rzędu p^2. Niech $x_2 \in P$ będzie elementem rzędu p takim, że $\langle x_1 \rangle \wedge \langle x_2 \rangle = \{e\}$.

Przyjmijmy $A = \langle x_2, y \rangle$, $B = \langle x_1 y, x_2 x_1^p \rangle$ i $C = \langle x_1, y \rangle$. Wówczas podkrata $L(A, B, C)$ jest izomorficzna z $\mathcal{D}_2$. $\square$

Lemat 3.3.6. *Niech $G = Q \ltimes H$ będzie iloczynem półprostym normalnej nilpotentnej grupy H i q-grupy Q, $(|H|, q) = 1$. Jeśli G jest L-nierozkładalna i dualnie silnie zrównoważona, to dla pewnej liczby pierwszej p, $p \neq q$, H jest p-grupą.*

Dowód. Niech $\pi(H) = \{p_1, \ldots, p_r\}$. Jeśli Q działa trywialnie na przykład na p_1-podgrupie Sylowa P_1, to $L(G) = L(P_1) \times L((P_2 \times, \ldots, \times P_r)Q)$ wbrew założeniom. Zatem Q działa nietrywialnie na wszystkich p_i-podgrupach Sylowa grupy P. Stąd wynika, że Q indukuje nietrywialne działanie na wszystkich prymarnych składowych grupy $H/\Phi(H)$. Przyjmijmy dla uproszczenia, że $\Phi(H) = \{e\}$. Z Lematu 3.3.4 wynika zatem, że Q jest cykliczna. Przyjmijmy $Q = \langle y \rangle$. Wówczas z Lematu 3.3.3 wynika, że $y^q \in C_G(P_i)$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, r\}$. Zatem $\langle y^q \rangle$ jest podgrupą normalna w G. Przyjmijmy więc $G = G/\langle y^q \rangle$. W grupie H rozważmy elementy $a \in P_1$ i $b \in P_2$, na których y działa nietrywialnie. Ponieważ wszystkie składowe prymarne grupy H są elementarne abelowe, więc $o(a) = p_1$ i $o(b) = p_2$. Stąd łatwo można pokazać, że podgrupy $A = \langle a, y \rangle$, $B = \langle b, y \rangle$ i $C = \langle aby \rangle$ generują podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$. □

Lemat 3.3.7. *Jeżeli $\pi(G) = \{p, q\}$, $p \neq q$, i G jest dualnie silnie zrównoważona, to albo p-podgrupa Sylowa, albo q-podgrupa Sylowa grupy G jest w niej podgrupą normalną.*

Dowód. Przypuśćmy, że ani p-podgrupa Sylowa, ani q-podgrupa Sylowa nie jest podgrupą normalną w G. Niech $H = K \times M$ będzie podgrupą Fittinga grupy G, gdzie $K = O_p(G)$ i $M = O_q(G)$. Załóżmy przy tym, że $M \neq \{e\}$. Niech H_1/H będzie minimalną podgrupą normalną grupy G/H. Oczywiście H_1 nie jest grupą nilpotentną i H_1/H jest grupą prymarną.Możemy założyć, że H_1/H jest p-grupą. Rzeczywiście, gdyby H_1/H była q-grupą, to podgrupa K byłaby nietrywialna (jej trywialność oznaczałaby, że H_1 jest q-podgrupą normalną większą od podgrupy Fittinga, sprzeczność) i rozważania moglibyśmy prowadzić analogicznie z zamianą ról p i q.

Załóżmy dodatkowo, że M jest elementarną abelową q-grupą i $K = \{e\}$ (jeśli tak nie jest, to możemy przejść do rozważań w grupie $G/(K \times \Phi(M))$).

Niech P będzie p-podgrupą Sylowa grupy G. Wobec faktu, iż H_1 nie jest nilpotentna wnosimy, że P działa na M nietrywialnie. Na podstawie Lematu 3.3.4, P jest grupą cykliczną, a z Lematu 3.3.3b wynika, że $|P : C_P(M)| = p$. Jednocześnie, powszechnie wiadomo, że $C_G(H) \leqslant H$, więc $C_P(M) = C_P(H) \leqslant H = M$. Zatem $C_P(M) = \{e\}$ i tym samym P jest grupą rzędu p. Teraz jest jasne, że $P \leqslant H_1$, i G/H_1 jest cykliczną q-grupą (patrz Lemat 3.3.4).

W istocie G/H_1 musi być grupą rzędu q. Rzeczywiście, jeśli $C_{G/M}(H_1/M)$ zawiera q-elementy, to $O_q(G/M) \neq \{e\}$, co oznaczałoby, że istnieje w G q-podgrupa normalna większa od M. Stąd wszystkie q-elementy działają na H_1/M nietrywialnie i na podstawie Lematu 3.3.3 otrzymujemy $|G/H_1| = q$.

Niech $P = \langle x \rangle$ będzie ustaloną p-podgrupą Sylowa. Pokażemy, że $N_G(P)$ jest nieabelową grupą rzędu pq. W tym celu zauważmy najpierw, że jeśli y jest q-elementem nie należącym do M, to $x^y = x^i m$ dla $0 < i < p$ oraz odpowiedniego $m \in M$. Poza tym każdy element postaci $x^i u$, $u \in M$, jest sprzężony z x^i za pomocą pewnego elementu $t \in M$. Niech zatem t będzie tak dobranym elementem z M, że $(x^i)^t = x^i m^{-1}$. Wtedy

$$x^{yt} = (x^i m)^t = x^i m^{-1} m = x^i$$

Stąd $yt \in N_G(P)$ i oczywiście yt jest q-elementem. Z faktu, iż H_1 jest grupą Frobeniusa z jądrem M i uzupełnieniem P, jest jasne, że $N_G(P) \wedge M = \{e\}$, więc $|N_G(P)| = pq$.

Niech teraz $A = N_G(P)$, załóżmy przy tym, że $N_G(P) = \langle x, y \rangle$, gdzie podobnie, jak wyżej $\langle x \rangle = P$ i $|\langle y \rangle| = q$. Niech $t \in N_G(P)$ będzie takim elementem, że t nie normalizuje pewnej podgrupy sprzężonej z P, niech $z \in M$ będzie elementem przemiennym z t i niech $B = \langle t, z \rangle$. Wtedy oczywiście B jest abelowa rzędu q^2 i $A \wedge B = \langle t \rangle$. Niech v będzie p-elementem, $v \notin P$, takim, że $t \notin N_G(\langle v \rangle)$ i $C = \langle v \rangle$. Wtedy $(A \wedge B) \vee C =< t, C >= G$ (bo $\langle C, C^t \rangle = PM$ i $t \notin PM$) i oczywiście $A \vee C = B \vee C = G$. □

Z powyższych lematów bezpośrednio otrzymujemy:

Wniosek 3.3.8. *Niech G będzie grupą nienilpotentną i $|\pi(G)| = 2$. Jeśli G jest dualnie silnie zrównoważona, to $G = Q \ltimes P$ gdzie P jest p-podgrupą Sylowa grupy G i Q jest q-podgrupą Sylowa grupy G dla pewnych liczb pierwszych p i q. Ponadto*

(a) *P jest potęgowa lub 2-generowana;*
(b) *$Q = \langle y \rangle$ jest cykliczna i $y^q \in C_P(G)$;*
(c) *Q działa na $P/\Phi(P)$ potęgowo lub nieprzywiedlnie.*

Lemat 3.3.9. *Niech G będzie grupą rozwiązalną taką, że $|\pi(G)| = 3$. Jeżeli G jest L-nierozkładalna, to $L(G)$ zawiera podkratę $\mathcal{D}_1$ lub $\mathcal{D}_2$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\pi(G) = \{p, q, r\}$. Wówczas istnieją p-podgrupa Sylowa P, q-podgrupa Sylowa Q i r-podgrupa Sylowa R takie, że $G = PQR$ oraz PQ, PR i QR są podgrupami G.

Załóżmy na poczatek, że $P \lhd G$. Możemy przyjąć, że $\Phi(P) = \{e\}$. Jeśli tak nie jest, to możemy przejść do rozważenia grupy ilorazowej $G/\Phi(P)$. Zatem przypuśćmy, że grupa P jest elementarna abelowa. Z założenia $L(QR)$ nie zawiera podkraty izomorficznej ani z $\mathcal{D}_1$ ani z $\mathcal{D}_2$, więc na podstawie Lematu 3.3.7 możemy założyć, że $Q \lhd QR$. Ponieważ G jest L-nierozkładalna, więc przynajmniej jedna z podgrup Q lub R nie jest zawarta w $C_G(P)$. Jeśli $Q \leq C_G(P)$, to $G = (P \times Q) \rtimes R$ i z Lematu 3.3.6, $L(G)$ zawiera podkratę izomorficzną z $\mathcal{D}_1$. Wobec tego Q nie jest zawarta w $C_G(P)$. Stąd na mocy Lematu 3.3.4, Q jest grupą cykliczną. Weźmy $Q = \langle a \rangle$. Zauważmy, że $\langle a^q \rangle \lhd QR = Q \times R$. Ponadto z Lematu 3.3.3 $a^q \in C_G(P)$. Zatem $\langle a^q \rangle \lhd G$ i możemy przyjąć $G = G/\langle a^q \rangle$.

Jeśli $R \nleq C_G(P)$, to z Lematu 3.3.4 wiemy, że R jest cykliczna. Weźmy $R = \langle b \rangle$. Jeśli $QR = Q \times R$, to otrzymujemy sprzeczność z Lematem 3.3.3. Dlatego $QR = Q \rtimes R$. Ponieważ $L(PR)$ i $L(QR)$ nie zawierają podkraty izomorficznej ani z $\mathcal{D}_1$ ani z $\mathcal{D}_2$, więc $b^r \in C_G(P) \wedge C_G(Q)$. Zatem $\langle b^r \rangle \lhd G$ i ponownie możemy przyjąć $G = G/\langle b^r \rangle$. Wobec tego QR jest regularną grupą automorfizmów grupy P rzędu qr. Na mocy [5, 5.3.14], QR jest cykliczna co przeczy Lematowi 3.3.3. Zatem $R \leq C_G(P)$ i podobnie jak powyżej możemy przyjąć $|R| = r$.

Rozważmy teraz podgrupy $A = \langle x, b \rangle$, $B = \langle a, b \rangle$ oraz $C = \langle xa \rangle$, gdzie $e \neq x \in P$. Wówczas $A \vee B = A \vee C = B \vee C = \langle x, a, b \rangle$ i $A \wedge C = B \wedge C = \{e\}$ oraz $(A \wedge B) \vee C = \langle x, a, b \rangle$. Zatem $L(A, B, C) \simeq \mathcal{D}_1$.

Przypuśćmy, że żadna z podgrup Sylowa nie jest normalna w G. Na mocy Lematu 3.3.7, jedna z podgrup Sylowa w grupach PQ, PR i QR jest normalna. Przypuśćmy, że $Q \leq N_G(P)$. Wówczas $R \nleq N_G(P)$, a zatem $P \leq N_G(R)$. Stąd wynika, że $Q \nleq N_G(R)$, więc $R \leq N_G(Q)$. Czyli $PQ = P \rtimes Q$, $QR = Q \rtimes R$ i $RP = R \rtimes P$. Wówczas na mocy Lematu 3.3.4 otrzymujemy, że $PQ = P \times Q$ lub Q jest grupą cykliczną, $QR = Q \times R$ lub R jest grupą cykliczną, $RP = R \times P$ lub P jest grupą cykliczną. W świetle [18, 10.1.10], wszystkie podgrupy P, Q, R nie mogą być równocześnie cykliczne. Przyjmijmy, że P nie jest cykliczna. Wówczas $RP = R \times P$. Ponieważ $P \lhd PQ$, więc $P \lhd G$. Ta sprzeczność kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3.3.10. *Niech G będzie grupą rozwiązalną. Jeśli G jest dualnie silnie zrównoważona, to G jest iloczynem prostym p-grup lub $\{p, q\}$-grup, których rzędy są parami względnie pierwsze.*

Dowód. Załóżmy, że G jest minimalnym kontrprzykładem. Ponieważ G jest grupą rozwiązalną, to istnieją p_i-podgrupy Sylowa P_i grupy G takie, że $G = P_1 \ldots P_n$ i $P_iP_j = P_jP_i$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Przyjmijmy $H = P_2 \ldots P_n$. Z wyboru G wiemy, że H rozkłada się na iloczyn prosty p-grup i $\{p, q\}$-grup. Jeśli P_1 nie wydziela się jako czynnik prosty w grupie G, to w H istnieje czynnik prosty, który nie centralizuje P_1. Jeśli dla pewnego $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, P_iP_{i+1} nie rozkłada sie na iloczyn prosty podgrup Sylowa, to z minimalności G i powyższego lematu mamy $P_1 \times P_iP_{i+1}$. Zatem istnieje $i \in \{2, \ldots, n\}$ takie, że P_i wydziela się jako czynnik prosty w H i P_1 nie należy do centralizatora P_i. Zatem grupa P_1P_i jest L-nierozkładalna. Weźmy grupę $P_j \in H$, gdzie $j \neq i$ i P_j wydziela się jako czynnik prosty w H. Grupa P_1P_i jest L-nierozkładalna. Jeśli $P_1P_iP_j < G$, to z wyboru G $P_1P_iP_j = P_1P_i \times P_j$. Natomias jeżeli $P_1P_iP_j = G$, to z powyższego lematu również otrzymujemy $P_1P_iP_j = P_1P_i \times P_j$. $\square$

Lemat 3.3.11. *Niech G będzie $P^{\#}$-grupą. G jest dualnie silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy G jest modularna.*

Dowód. Niech G będzie niemodularną $P^{\#}$-grupą. Wówczas na mocy Twierdzenia 2.1.3 i prezentacji 2.3, G jest iloczynem półprostym normalnej elementarnej abelowej p-grupy P i cyklicznej q-grupy rzędu q^m, gdzie $m > 1$, generowanej przez element y. Ponadto dla dowolnego elementu $x \in P$, $x^y = x^k$, gdzie k jest liczbą naturalną większą od 1 i $y^q \notin C_G(P)$. Przyjmijmy $A = \langle y \rangle$, $B = \langle xy \rangle$, $C = \langle x, y^q \rangle$. Wówczas $L(A, B, C)$ jest izomorficzna z $\mathcal{D}_2$. Zatem G nie jest dualnie silnie zrównoważona. $\square$

Stąd na mocy Twierdzenia 2.3.10 otrzymujemy:

Twierdzenie 3.3.12. *Silnie zrównoważona grupa jest dualnie silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy jest modularna.*

Rozdział 4

Wymiary grup zrównoważonych i dualnie zrównoważonych

Jedną z istotnych własności krat silnie zrównoważonych, która przenosi się z krat modularnych, jest istnienie w takich kratach silnego wymiaru jednolitego. W tym rozdziale zajmiemy się wyznaczaniem takiego wymiaru dla grup silnie zrównoważonych opisanych w rozdziale 2. Ponadto przedstawimy tu związki kowymiaru jednolitego grup dualnie silnie zrównoważonych, opisanych w rozdziale 3, z innymi znanymi wymiarami grupowymi.

4.1 Wymiary jednolite

Na początek przedstawimy kilka faktów i przykładów, które będą wykorzystane przy wyznaczaniu wymiarów jednolitych grup silnie zrównoważonych. Niech G będzie grupą silnie zrównoważoną. Wówczas (silny) wymiar jednolity kraty $L(G)$ będziemy nazywać *(silnym) wymiarem jednolitym grupy* G i oznaczać $\mathrm{u}(G)$, $(\mathrm{u_s}(G))$.

Stwierdzenie 4.1.1. *Podgrupa H grupy G jest elementem jednolitym w kracie $L(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy H jest izomorficzna z cykliczną p-grupą lub uogólnioną grupą kwaternionów.*

Dowód. Jeśli G posiada dwie różne podgrupy minimalne K, L, to $K \wedge L = \{e\}$ i $\mathrm{u}(G) \geq 2$. Zatem G posiada tylko jedną podgrupę minimalną. Na mocy [18, 5.3.6], G jest cykliczną p-grupą lub uogólnioną grupą kwaternionów. $\square$

Stwierdzenie 4.1.2. *Niech G będzie grupą. Wówczas* $\mathrm{u_s}(G) = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy G jest cykliczną p-grupą.*

Dowód. Łatwo jest sprawdzić, że w kracie L, $\mathrm{u_s}(L) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy L jest łańcuchem. Ponadto wiadomo, że $L(G)$ jest łańcuchem wtedy i tylko wtedy, gdy G jest cykliczną p-grupą. $\square$

Przykład 4.1.3. Niech G będzie nieabelową grupą rzędu 8. Wobec tego, że grupa dihedralna nie jest zrównoważona (patrz Przykład 2.1.4) i grupa kwaternionów jest modularna (patrz Twierdzenie 2.1.2), silny wymiar jednolity możemy wyznaczyć tylko w grupie kwaternionów. Niech G będzie zatem grupą kwaternionów rzędu 8. Ponieważ G jest modularna, zatem jest również silnie zrównoważona. Sprawdzając wszystkie przedziały kraty $L(G)$ otrzymujemy $\mathrm{u}(G) = 1$ i $\mathrm{u_s}(G) = \mathrm{u}(G/G') = 2$, gdzie G' jest komutantem G.

Poniższe stwierdzenie jest konsekwencją Stwierdzenia 1.3.5 i Lematu 1.3.10

Stwierdzenie 4.1.4. *Niech G będzie grupą silnie zrównoważoną.*

(a) *Jeśli H jest podgrupą G, to* $\mathrm{u}(H) \leq \mathrm{u}(G)$ *i* $\mathrm{u_s}(H) \leq \mathrm{u_s}(G)$.

(b) *Jeśli H jest podgrupą normalną w G, to* $\mathrm{u_s}(G/H) \leq \mathrm{u_s}(G)$.

Dowód. (a) Jeśli H jest podgrupą G, to $L(H)$ jest 0-podkratą $L(G)$. Ponieważ G jest silnie zrównoważona, to ze Stwierdzenia 1.3.5 otrzymujemy $\mathrm{u}(H) \leq \mathrm{u}(G)$, a z Lematu 1.3.10 mamy $\mathrm{u_s}(H) \leq \mathrm{u_s}(G)$.

(b) Jeśli H jest podgrupą normalną grupy G, to krata $L(G/H)$ jest izomorficzna z przedziałem $[H, G]$ w $L(G)$. Zatem ponownie z Lematu 1.3.10 otrzymujemy $\mathrm{u_s}(G/H) \leq \mathrm{u_s}(G)$. □

Lemat 4.1.5. *Niech G_1 i G_2 będą grupami i niech $(|G_1|, |G_2|) = 1$. Wówczas:*

(a) *Jeśli G_1 i G_2 są zrównoważone, to* $\mathrm{u}(G_1 \times G_2) = \mathrm{u}(G_1) + \mathrm{u}(G_2)$;

(b) *Jeśli G_1 i G_2 są silnie zrównoważone, to* $\mathrm{u_s}(G_1 \times G_2) = \mathrm{u_s}(G_1) + \mathrm{u_s}(G_2)$.

Dowód. Niech $(|G_1|, |G_2|) = 1$. Wówczas na mocy Twierdzenia 2.1.6 $L(G_1 \times G_2) \simeq L(G_1) \times L(G_2)$.

(a) Niech G_1 i G_2 będą grupami zrównoważonymi. Ponieważ klasa krat zrównoważonych jest zamknięta na iloczyny proste, więc grupa $G_1 \times G_2$ jest zrównoważona. Wówczas na mocy Wniosku 1.3.7 mamy $\mathrm{u}(G_1 \times G_2) = \mathrm{u}(G_1) + \mathrm{u}(G_2)$.

(b) Niech teraz G_1 i G_2 będą silnie zrównoważone. Ponieważ klasa krat silnie zrównoważonych jest zamknięta na iloczyny proste, więc grupa $G_1 \times G_2$ jest silnie zrównoważona. Zatem wprost ze Stwierdzenia 1.3.11 mamy $\mathrm{u_s}(G) = \mathrm{u_s}(G_1) + \mathrm{u_s}(G_2)$. □

Lemat 4.1.6. *Niech G będzie grupą, P podgrupą normalną G i $H \leq K$ będą podgrupami G.*

(a) *Jeśli dla dowolnej podgrupy X grupy P, HX jest podgrupą, to przedziały $[H, HP]$ i $[H \wedge P, P]$ są izomorficzne.*

(b) *Jeśli $K \wedge HP = H$, to przedziały $[H, K]$ i $[HP, KP]$ są izomorficzne.*

Dowód. (a) Rozważmy odwzorowania $\varphi : [H \wedge P, P] \longrightarrow [H, HP]$ takie, że $\varphi(X) = X \vee H$ dla $X \in [H \wedge P, P]$ i $\psi : [H, HP] \longrightarrow [H \wedge P, P]$ takie, że

$\varphi(Y) = Y \wedge P$ dla $Y \in [H, HP]$. Z założenia XH jest podgrupą grupy G dla dowolnej podgrupy $X \in [H \wedge P, P]$, zatem na mocy Twierdzenia 2.1.9 otrzymujemy

$$\psi(\varphi(X)) = (X \vee H) \wedge P = X \vee (H \wedge P) = X.$$

Stąd wynika, że φ i ψ są wzajemnie odwrotne. Ponadto łatwo można sprawdzić, że φ i ψ są odwzorowaniami zachowyjącymi porządek i suriekcjami. Zatem φ, ψ są izomorfizmami przedziałów $[H, HP]$ i $[H \wedge P, P]$ (patrz [6]).

(b) Wobec założenia $K \wedge HP = H$ możemy rozważyć odwzorowanie $\varphi : [HP, KP] \longrightarrow [H, K]$ takie, że $\varphi(X) = X \wedge K$ dla $X \in [HP, KP]$. Rozważmy ponadto odwzorowanie $\psi : [H, K] \longrightarrow [HP, KP]$ takie, że $\psi(Y) = Y \vee P$ dla $Y \in [H, K]$. Ponieważ P jest podgrupą normalną, więc korzystając z Twierdzenia 2.1.9 mamy:

$$\psi(\varphi(X)) = (X \wedge K) \vee P = X \wedge (K \vee P) = X.$$

Również w tym przypadku odwzorowania φ i ψ zachowują porządek i są suriekcjami, zatem ponownie na podstawie [6], przedziały $[H, K], [HP, KP]$ są izomorficzne. $\square$

Lemat 4.1.7. *Niech G będzie grupą silnie zrównoważoną. Jeśli P jest podgrupą normalną w G, to*

$$\mathrm{u}(G) \leq \mathrm{u}(P) + \mathrm{u}(G/P) \quad i \quad \mathrm{u_s}(G) \leq \mathrm{u_s}(P) + \mathrm{u_s}(G/P).$$

Dowód. Załóżmy, że P jest podgrupą normalną w G i że K jest maksymalną wśród podgrup grupy G takich, że $K \wedge P = \{e\}$. Przypuśćmy, że istnieje podgrupa H grupy G taka, że $(K \vee P) \wedge H = \{e\}$.

Wobec tego, że G jest silnie zrównoważona mamy również $(K \vee H) \wedge P = \{e\}$, co jest sprzeczne z wyborem K. Zatem podgrupa $K \vee P$ jest istotnym elementem kraty $L(G)$. Stąd na mocy Lematu 1.3.6

$$\mathrm{u}(G) = \mathrm{u}(P) + \mathrm{u}(K).$$

Grupa G i podgrupy K, P spełniają założenia Lematu 4.1.6 (b), dlatego

$$L(K) = [\{e\}, K] \simeq [P, KP] = L(KP/P).$$

Ponieważ KP/P jest podgrupą grupy G/P, więc ze Stwierdzenia 4.1.4 otrzymujemy $\mathrm{u}(K) = \mathrm{u}([P, KP]) \leq \mathrm{u}(G/P)$. To oznacza, że $\mathrm{u}(G) \leq \mathrm{u}(P) + \mathrm{u}(G/P)$.

Niech H będzie taką podgrupą G, że $\mathrm{u}([H, G]) = \mathrm{u_s}(G)$. Niech K będzie maksymalną wśród podgrup grupy G, takich, że $K \wedge HP = H$. Jeśli istnieje podgrupa $X \in [H, G]$ taka, że $X \wedge (K \vee P) = X \wedge (K \vee H \vee P) = H$, to wobec tego, że krata $[H, G]$ jest zrównoważona, $HP \wedge (K \vee X) = H$, co jest sprzeczne z wyborem K. Zatem podgrupa KP jest istotna w $[H, G]$. Stąd na mocy Lematu 1.3.6 otrzymujemy

$$\mathrm{u}([H, G]) = \mathrm{u}([H, K]) + \mathrm{u}([H, HP]).$$

Ponieważ grupa G i podgrupy H, K, P spełniają założenia Lematu 4.1.6(b), więc

$$[H, K] \simeq [HP, KP] \leq L(G/P),$$

czyli $\mathrm{u}([H, K]) \leq \mathrm{u}(G/P)$. Z Twierdzenia 2.3.10 można wywnioskować, że jeśli P jest podgrupą normalną w silnie zrównoważonej grupie G, to każda podgrupa X grupy P jest normalna w G. Zatem podgrupy H i P spełniaja założenia Lematu 4.1.6(a), więc

$$[H, HP] \simeq [H \wedge P, P] \leq L(P),$$

czyli $\mathrm{u}([H, HP]) \leq \mathrm{u}(P)$. Stąd ostatecznie otrzymujemy $\mathrm{u_s}(G) \leq \mathrm{u_s}(P) + \mathrm{u_s}(G/P)$. □

Przykład 4.1.8. Niech B_n, $n > 2$, będzie algebrą Boole'a z atomomi $b_1, \ldots, b_n$. Oznaczmy przez L_n kratę otrzymaną z kraty B_n przez dodanie takiego elementu x, że $0 < x < b_1$. Tak otrzymana krata L_n jest silnie zrównoważona i łatwo można sprawdzić, że $\mathrm{u}(L_n) = \mathrm{u_s}(L_n) = n$. Z drugiej strony $\mathrm{u}([0, x]) + \mathrm{u}([x, 1]) = 1 + 1 = 2$ i $\mathrm{u_s}([0, x]) + \mathrm{u_s}([x, 1]) = 1 + n - 1 = n$.

Powyższy przykład pokazuje, że Lemat 4.1.7 nie może być przeniesiony na ogólniejszy przypadek krat silnie zrównoważonych bez dodatkowych założeń na element x. Ponieważ podgrupa P z Lematu 4.1.7, jako podgrupa normalna pełni szczególną rolę w kracie $L(G)$.

Twierdzenie 4.1.9. *Niech G_1 i G_2 będą podgrupami grupy G takimi, że $G = G_1 \rtimes G_2$ i dowolny element z G_2 indukuje automorfizm potęgowy na G_1. Wówczas:*

(a) *Jeśli G jest grupą zrównoważoną, to* $\mathrm{u}(G) = \mathrm{u}(G_1) + \mathrm{u}(G_2)$.

(b) *Jeśli G jest grupą silnie zrównoważoną, to* $\mathrm{u_s}(G) = \mathrm{u_s}(G_1) + \mathrm{u_s}(G_2)$.

Dowód. (a) Niech $G = G_1 \rtimes G_2$. Wówczas $G_1 \wedge G_2 = \{e\}$ i $G_1 \vee G_2 = G$ jest istotnym elementem w $L(G)$. Zatem z Lematu 1.3.6 otrzymujemy $\mathrm{u}(G) = \mathrm{u}(G_1) + \mathrm{u}(G_2)$.

(b) Niech teraz G będzie grupą silnie zrównoważoną. Niech H będzie taką podgrupą grupy G_1, że $\mathrm{u_s}(G_1) = \mathrm{u}([H, G_1])$ i K będzie taką podgrupą grupy G_2, że $\mathrm{u_s}(G_2) = \mathrm{u}([K, G_2])$. Załóżmy, że $g \in G_1K \wedge HG_2$. Wówczas $g \in G_1K$ i $g \in HG_2$, czyli istnieją $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, h \in H, k \in K$ takie, że $g = g_1k =$

hg_2. Stąd $h^{-1}g_1 = g_2k^{-1} = \{e\}$, czyli $g_1 = h$ i $g_2 = k$ i $G_1K \wedge HG_2 = HK$. Ponieważ na mocy założeń tego lematu dowolny element z K indukuje automorfizm potęgowy na H, więc HK jest podgrupą G. Zatem, z Lematu 1.3.6 mamy

$$\mathrm{u}([HK, G]) = \mathrm{u}([HK, G_1K]) + \mathrm{u}([HK, HG_2]).$$

Wobec tego, że G_1 jest podgrupą normalną w G i $HKX = HK \vee X$ dla dowolnej podgrupy $X \in L(G_1)$, więc z Lematu 4.1.6 (a), $[HK, G_1HK] \simeq [HK \wedge G_1, G_1]$, czyli $[HK, G_1K] \simeq [H, G_1]$. Ponadto H jest dzielnikiem normalnym w G i $G_2 \wedge KH = K$. Zatem z Lematu 4.1.6 (b) mamy $[K, G_2] \simeq [HK, HG_2]$. Stąd

$$\mathrm{u_s}(G) \geq \mathrm{u}([HK, G]) = \mathrm{u}([H, G_1]) + \mathrm{u}([K, G_2]) = \mathrm{u_s}(G_1) + \mathrm{u_s}(G_2).$$

Z drugiej strony na mocy Lematu 4.1.7 mamy

$$\mathrm{u_s}(G) \leq \mathrm{u_s}(G_1) + \mathrm{u_s}(G/G_1).$$

Ponieważ $G/G_1 \simeq G_2$, więc ostatecznie otrzymujemy $\mathrm{u_s}(G) = \mathrm{u_s}(G_1) + \mathrm{u_s}(G_2)$. $\square$

Jeśli grupa G jest iloczynem prostym swoich nietrywialnych podgrup, to spełnia założenia Twierdzenia 4.1.9. Zatem oczywisty jest fakt:

Wniosek 4.1.10. *Niech G_1 i G_2 będą grupami silnie zrównoważonymi. Wówczas:*
(a) $\mathrm{u}(G_1 \times G_2) = \mathrm{u}(G_1) + \mathrm{u}(G_2)$.
(b) $\mathrm{u_s}(G_1 \times G_2) = \mathrm{u_s}(G_1) + \mathrm{u_s}(G_2)$.

Wymiary grup silnie zrównoważonych wyznaczamy na podstawie ich opisu otrzymanego w rozdziale 2 (Twierdzenie 2.3.10).

Twierdzenie 4.1.11. *Jeśli G jest L-nierozkładalną grupą silnie zrównoważoną, to silny wymiar jednolity grupy G jest równy mocy minimalnego zbioru generatorów G.*

Dowód. Wszystkie L-nierozkładalne grupy silnie zrównoważone są opisane w Twierdzeniu 2.1.2 i 2.3.10
(1) W pierwszym kroku niech G będzie abelową p-grupą. Wówczas G możemy rozłożyć na iloczyn prosty grup cyklicznych. Niech $G = \langle g_1 \rangle \times \ldots \times \langle g_n \rangle$ będzie takim rozkładem. Stąd na mocy Twierdzenia 4.1.10 i Stwierdzenia 4.1.2 $\mathrm{u}(G) = \mathrm{u_s}(G) = n$.

Z drugiej strony łatwo jest zauważyć, że $\{g_1, \ldots, g_n\}$ jest minimlnym zbiorem generatorów grupy G.

(2) Niech teraz G będzie 2-grupą Hamiltona. Wówczas $G = Q_8 \times A$, gdzie A jest elementarną abelową 2-grupą (patrz [18, 5.3.7]) i $|A| = 2^n$. Z Twierdzenia 4.1.10 i Przykładu 4.1.3 mamy $\mathrm{u}(G) = \mathrm{u}(A) + 1$ i $\mathrm{u_s}(G) = \mathrm{u_s}(A) + 2$. Dalej z punktu (1) tego dowodu mamy

$$\mathrm{u}(G) = n + 1 \quad \text{oraz} \quad \mathrm{u_s}(G) = n + 2.$$

Z drugiej strony, ponieważ $\Phi(G) = G^2$ i $|G^2| = 2$, to $G/\Phi(G)$ jest elementarną abelową grupą rzędu 2^{n+2}. A stąd na mocy Twierdzenia Burnside'a o bazie, G jest generowane dokładnie przez $n + 2$ elementy.

(3) Załóżmy teraz, że G jest nieabelową grupą postaci $G = AB$, gdzie A jest abelową p-grupą i $B = \langle b \rangle$ jest cykliczną p-grupą oraz $b^{-1}ab = a^{1+p^s}$ dla pewnego $s \geq 1$. Ponadto $C = A \wedge B \leq A^p$. Niech $\mathrm{u_s}(A) = n$. Wówczas z punktu (1) wiemy, że minimalny zbiór generatorów grupy A ma n elementów. Ponieważ A^p jest podgrupą charakterystyczna w A i A jest podgrupą normalna w G, więc A^p jest normalne w G. Wobec tego, że $C \leq A^p$, to

$$G/A^p = A/A^p \rtimes BA^p/A^p.$$

Ponadto mamy, że $a^b = a^{p^{s+1}}$. Zatem G/A^p jest iloczynem prostym elementarnej abelowej p-grupy A/A^p i cyklicznej p-grupy BA^p/A^p. To znaczy, że minimalny zbiór generatorów grupy G/A^p ma $n + 1$ elementów. Ponieważ

$$G/\Phi(G) \simeq (G/A^p)/(\Phi(G)/A^p) \simeq (G/A^P)/\Phi(G/A^p),$$

więc G ma równiez $n + 1$ generatorów. Z drugiej strony z założenia wiemy, że istnieje $a \in A$ takie, że $a \notin C$ i $A^p \in C$. Niech $D = \langle a, b \rangle$. Wówczas $D \wedge A = \langle a \rangle$ jest grupą cykliczną. Zatem $|D \wedge \Omega(A)| = p$. Ponieważ D nie jest grupą Hamiltona i nie jest cykliczna, więc na mocy Stwierdzenia 4.1.1, $\mathrm{u}(D) > 1$. Stąd otrzymujemy, że $\Omega(D) \nleq \Omega(A)$. To znaczy, że $\Omega(G)$ jest elementarną abelową p-grupą rzędu co najmniej p^{n+1}. Zatem $n + 1 \leq \mathrm{u}(G)$. Jednocześnie na mocy Lematu 4.1.7 $\mathrm{u_s}(G) \leq \mathrm{u_s}(P) + \mathrm{u_s}(G/P) = n + 1$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\mathrm{u}(G) = \mathrm{u_s}(G) = n + 1.$$

(4) Przyjmijmy oznaczenia jak w punkcie (3). Z założenia $C \nleq A^p$. Niech $C = \langle c \rangle$. Wówczas $c \in A \setminus A^p$. Przyjmijmy ponownie, że $\mathrm{u_s}(A) = n$. Wówczas, na podstawie punktu (a) istnieje minimalny zbiór generatorów grupy A taki, że $A = \langle a_1, \ldots, a_{n-1}, c \rangle$, Stąd widać, że $G = \langle a_1, \ldots, a_{n-1}, b \rangle$, czyli $G/\Phi(G)$ jest rzędu p^n. Zatem G na dokładnie n generatorów.

Z drugiej strony $G = A_1 \rtimes B$, gdzie $A_1 = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$. Zatem z punktu (1), $\mathrm{u}(A_1) = n - 1$. Stąd na mocy Twierdzenia 4.1.9

$$\mathrm{u}(G) = \mathrm{u_s}(G) = n.$$

(5) W ostatnim kroku niech G będzie $P^{\#}$-grupą. Wiemy, że $G = P \rtimes Q$, gdzie P jest elementarną abelową p-grupą rzędu p^n i Q jest cykliczną q-grupą. Wówczas z punktu (a) mamy, $\mathrm{u}(P) = n$ i $\mathrm{u}(Q) = 1$. Zatem na mocy Twierdzenia 4.1.9,

$$\mathrm{u}(G) = \mathrm{u_s}(G) = \mathrm{u_s}(P) + \mathrm{u_s}(Q) = n + 1.$$

Jeśli $P = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, to $\langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle$ jest minimalnym zbiorem generatorów grupy G. Niech $\langle g_1, \ldots, g_k \rangle$ będzie również minimalnym zbiorem generatorów grupy G. Przyjmijmy $g_i = y^{r_i} a_i$, gdzie $a_i \in P$ i r_i jest liczbą całkowitą. Wówczas $G = \langle y^{r_1} a_1, \ldots, y^{r_k} a_k \rangle$. Ponieważ $\langle y \rangle \simeq G/P = \langle y^{r_1} P, \ldots, y^{r_k} P \rangle$, to możemy przyjąć, że $r_1 = 1$. Wtedy $(y^{r_i} a_i)^{-1} (y a_1)^{r_i} = a'_i \in P$. Zatem $G = \langle y a_1, a'_2 \ldots, a'_k \rangle$. Jeśli $\langle a'_2 \ldots, a'_k \rangle < P$, to $|\langle y a_1 \rangle \langle a'_2 \ldots, a'_k \rangle| < |G|$, sprzeczność. Stąd $\langle a'_2 \ldots, a'_k \rangle = P$. Przypuśćmy, że $\langle a'_2 \ldots, a'_k \rangle$ nie jest minimalnym zbiorem generatorów podgrupy P. Wówczas możemy przyjąć, że $a'_k \in \langle a'_2 \ldots, a'_{k-1} \rangle$. Ponieważ jednak $y^{r_k} a_k = (y a_1)^{r_k} = (a'_k)^{-1}$, więc $G = \langle y^{r_1} a_1, \ldots, y^{r_{k-1}} a_{k-1} \rangle$, co daje sprzeczność. Zatem $\langle a'_2 \ldots, a'_k \rangle$ jest minimalnym zbiorem generatorów grupy P i w konsekwencji otrzymujemy, że $k - 1 = n$. $\square$

Powyższe twierdzenie i Wniosek 4.1.10 pozwalają nam wyznaczyć silny wymiar jednolity wszystkich grup silnie zrównoważonych. Ponadto konsekwencją rezultatów tego paragrafu i ich dowodów, w szczególności dowodu Twierdzenia 4.1.11 jest fakt, iż wymiar jednolity grupy G jest o jeden mniejszy niż silny wymiar jednolity grupy G w przypadku, gdy grupa G zawiera podgrupę izomorficzna z grupą kwaternionów rzędu 8. W pozostałych przypadkach oba wymiary są równe.

4.2 Kowymiary jednolite

Kowymiar jednolity i silny kowymiar jednolity kraty wszystkich podgrup grupy G będziemy nazywać kowymiarem jednolitym i odpowiednio silny kowymiarem jednolitym grupy G oznaczać przez $\hat{\mathrm{u}}(G)$ i $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{s}}(G)$.

Okazuje się, że kowymiar jednolity ma związek z wprowadzonym w pracy [32] pojęciem zbioru g-niezależnego. (Autor używał pojęcia zbioru niezależnego. My w celu odróżnienia go od innych używanych w tej pracy pojęć zbiorów niezależnych zmieniliśmy tę terminologię.)

Niech G będzie grupą i $S = \{g_1, \ldots, g_n\}$ będzie podzbiorem elementów grupy G. Powiemy, że zbiór S jest *g-niezależny* jeśli $g_i \notin \langle S \setminus \{g_i\} \rangle$ dla $i = 1, \ldots, n$. Jak w [32, 34] przez $\mu(G)$ będziemy oznaczać ilość elementów w największym zbiorze g-niezależnym generującym grupę G, natomiast przez $\mu'(G)$ ilość elementów w największym zbiorze g-niezależnym zawartym w G. Oczywiście $\mu(G) \leq \mu'(G)$.

Przykład 4.2.1. Niech G będzie iloczynem półprostym elementarnej abelowej p-grupy A rzędu p^n i cyklicznej p-grupy B. Jeśli B działa nieprzywiedlnie na A, to $\mu(G) = 2$ i $\mu'(G) \geq n$, ponieważ $\mu(A) = \mu'(A) = n$. Jeśli B działa potęgowo na A, to $\mu(G) = \mu'(G) = n + 1$.

Twierdzenie 4.2.2. *Niech G będzie grupą dualnie silnie zrównoważoną. Wówczas kowymiar jednolity grupy G równy jest $\mu(G)$.*

Dowód. Przypuśćmy, że kowymiar jednolity grupy G równy jest n. Wówczas istnieją podgrupy $A_1, \ldots, A_n$ grupy G takie, że A_i są elementami kojednolitymi w kracie $L(G)$ i zbiór $\{A_1, \ldots, A_n\}$ jest dualnie niezależny. Z Twierdzenia 1.3.8 wiemy, że istnieje zbiór $\{H_1, \ldots, H_n\}$ podgrup G taki, że

$$H_1 \vee \ldots \vee H_n = G$$

oraz

$$H_1 \vee \ldots \vee H_{i-1} \vee H_{i+1} \vee \ldots \vee H_n \neq G$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Wobec tego istnieje w G g-niezależny podzbiór $S \leq \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ taki, że S generuje G i dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ przynajmniej jeden element z H_i należy do S. Stąd mamy $\mu(G) \geq n$.

Załóżmy teraz, że $\{g_1, \ldots, g_k\}$ jest dowolnym zbiorem g-niezależnym generującym grupę G. Rozważmy podgrupy

$$G_i = \langle g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_k \rangle$$

dla $i = 1, \ldots, k$. Wówczas otrzymujemy

$$G_i \vee (G_1 \wedge \ldots \wedge G_{i-1} \wedge G_{i+1} \wedge \ldots \wedge G_k) \geq G_i \vee \langle g_i \rangle = G.$$

Wobec tego $\{G_1, \ldots, G_k\}$ jest zbiorem dualnie niezależnym. Niech teraz M_i będzie maksymalną podgrupą grupy G zawierającą G_i. Wówczas

$$G = G_1 \vee (G_2 \wedge \ldots \wedge G_k) < M_1 \vee (M_2 \wedge \ldots \wedge M_k).$$

Ponieważ G jest dualnie silnie zrównoważona i podgrupy $M_1, \ldots, M_k$ są elementami kojednolitymi w $L(G)$, więc $\{M_1, \ldots, M_k\}$ jest bazą $L(G)$. Zatem ostatecznie $k = n$, co implikuje, że $\mu(G) = n$. □

Twierdzenie 4.2.3. *Niech G będzie grupą dualnie silnie zrównoważoną. Wówczas silny kowymiar jednolity grupy G równy jest $\mu'(G)$.*

Dowód. W celu wyznaczenia silnego kowymiaru jednolitego grupy G musimy znać kowymiary jednolite wszystkich przedziałów kraty $L(G)$. Korzystajac z odpowiednika Stwierdzenia 1.3.5 dla przypadku dualnego wiemy, że jeśli K jest 1-podkratą dualnie zrównoważonej kraty L, to $\widehat{\mathrm{u}}(K) \leq \widehat{\mathrm{u}}(L)$.

Niech $H_1 \leq H_2$ będą podgrupami G. Ponieważ przedział $[H_1, H_2]$ jest 1-podkratą kraty $L(H_2)$, więc $\widehat{\mathrm{u}}([H_1, H_2]) \leq \widehat{\mathrm{u}}(H_2)$. Z Twierdzenia 4.2.2 wiemy, że $\widehat{\mathrm{u}}(H_2) = \mu(H_2)$. Wobec tego, że dowolny zbiór g-niezależny grupy G generuje pewną podgrupę G, więc prawdą jest, że $\mu'(G) = max_n\{n = \mu(H), H \leq G\}$. Zatem $\mu'(G) = \widehat{\mathrm{u}}_{\mathrm{s}}(G)$. □

Znane własności minimalnych zbiorów generatorów w p-grupach pozwalają nam sformułować następne twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.4. *Jeśli G jest p-grupą dualnie zrównoważoną, to kowymiar jednolity grupy G równy jest mocy minimalnego zbioru generatorów.*

Jeśli G jest p-grupą potęgową, to moc minimalnego zbióru generatorów dowolnej podgrupy grupy G jest nie większa niż moc minimalnego zbioru generatorów grupy G (patrz [15]). Zatem z Twierdzeń 4.2.3 i 4.2.4 otrzymujemy:

Wniosek 4.2.5. *Niech G będzie p-grupą potęgową. Jeśli G jest dualnie silnie zrównoważona, to silny kowymiar jednolity grupy G równy jest mocy minimalnego zbioru generatorów.*

Jeśli G jest dualnie silnie zrównoważoną p-grupą o minimalnym zbiorze generatorów mocy 2, to Przykład 4.2.1 pokazuje, że silny kowymiar jednolity może istotnie różnić się od kowymiaru jednolitego. W przypadku gdy G jest dualnie silnie zrównoważoną $\{p, q\}$-grupą, sytuacja jest podobna. Ponieważ grupy dualnie silnie zrównoważone są iloczynem prostym grup parami względnie pierwszych, więc z Twierdzenia 2.1.6 oraz z dualnej wersji Wniosku 1.3.7 i Stwierdzenia 1.3.11 otrzymujemy

Lemat 4.2.6. *Niech G_1 i G_2 będą grupami i niech $(|G_1|, |G_2|) = 1$. Wówczas:*
(a) *Jeśli G_1 i G_2 są dualnie zrównoważone, to $\widehat{\mathrm{u}}(G_1 \times G_2) = \widehat{\mathrm{u}}(G_1) + \widehat{\mathrm{u}}(G_2)$;*
(b) *Jeśli G_1 i G_2 są dualnie silnie zrównoważone, to $\widehat{\mathrm{u}}_{\mathrm{s}}(G_1 \times G_2) = \widehat{\mathrm{u}}_{\mathrm{s}}(G_1) + \widehat{\mathrm{u}}_{\mathrm{s}}(G_2)$.*

Z punktu widzenia teorii grup pojęcie zbioru niezależnego jest ogólniejsze niż pojęcie kowymiaru jednolitego grupy, ponieważ można je rozważać w dowolnych grupach, nie ograniczając się do grup dualnie silnie zrównoważonych. Na przykład w pracach [32, 33, 34] zostały wyznaczone rozmiary maksymalnych zbiorów g-niezależnych w grupach S_n i $PSL(2, p)$. Jednak zarówno metody jak i motywacja dla badań w tym kierunku są zupełnie inne niż w prezentowanej pracy.

Oznaczenia

$\widehat{L}$	krata dualna do kraty L
$[a,b]_L$	przedział w kracie L
$L_1 \times L_2$	iloczyn prosty krat L_1 i L_2
$\mathrm{u}(L)$	wymiar jednolity (Goldiego) kraty L
$\mathrm{u_s}(L)$	silny wymiar jednolity (Goldiego) kraty L
$\widehat{\mathrm{u}}(L)$	kowymiar jednolity (Goldiego) kraty L
$\widehat{\mathrm{u}}_{\mathrm{s}}(L)$	silny kowymiar jednolity (Goldiego) kraty L
$L(G)$	krata wszystkich podgrup grupy G
$L(H_1,\dots,H_n)$	krata generowana przez podgrupy $H_1,\dots,H_n$
HK	$\{hk \mid h \in H, k \in K\}$
$H \lhd G$	podgrupa H jest normalna w grupie G
$H \vee K = \langle H, K\rangle$	kres górny podgrup H i K
$H \wedge K = H \cap K$	kres dolny podgrup H i K
$G_1 \times G_2$	iloczyn prosty grup G_1 i G_2
$G_1 \rtimes G_2$	iloczyn półprosty grup G_1 i G_2
$rank(P)$	ranga p-grupy P
$\pi(G)$	zbiór wszystkich liczb pierwszych dzielących rząd grupy G
$\mathrm{u}(G)$	wymiar jednolity (Goldiego) grupy G
$\mathrm{u_s}(G)$	silny wymiar jednolity (Goldiego) grupy G
$\widehat{\mathrm{u}}(G)$	kowymiar jednolity (Goldiego) grupy G
$\widehat{\mathrm{u}}_{\mathrm{s}}(G)$	silny kowymiar jednolity (Goldiego) grupy G
$GF(q)$	ciało mocy q
D_{2^n}	grupa dihedralna rzędu 2^n
Q_{2^n}	uogólniona grupa kwaternionów rzędu 2^n
$PSL(n,\mathbb{K})$	projektywna specjalna grupa liniowa
G'	komutant grupy G
$\Phi(G)$	podgrupa Frattiniego grupy G
$\Omega_i(P)$	$\langle x \in P \mid x^{p^i} = e\rangle$
P^p	$\langle x^p \mid x \in P\rangle$

Bibliografia

[1] C. Bagiński, J. Krempa, *On a characterization of infinite cyclic groups,* Publ. Math. Debrecen 63(2003), no.1-2, 249-254.

[2] C. Bagiński, A. Sakowicz, *Finite groups with globally permutable lattices of subgroups,* Colloq. Math. 82(1999), no.1, 65-77.

[3] C. Bagiński, A. Stocka, *Finite groups with L-free lattices of subgroups,* praca przyjęta do druku w Illinois J. Math.

[4] G. Birkhoff, *„Lattice Theory”,* 3rd edition, Providence R.I. 1967.

[5] D. Gorenstein, *„Finite Groups”,* 3rd edition, Chelsea Publishing Company, New York 1980.

[6] G. Grätzer, *„General lattice theory”,* Akademie-Verlag, 1978.

[7] P. Grzeszczuk, E. R. Puczyłowski, *On Goldie and dual Goldie dimension,* J. Pure Appl. Algebra 31(1984), 47-54.

[8] B. Huppert, *„Endliche Gruppen I”,* Springer Verlag, Berlin 1983.

[9] B. Huppert, N. Blackburn, *„Endliche Gruppen III”,* Springer Verlag, Berlin 1983.

[10] K. Iwasawa, *Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen,* J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo. Sect. I. 4(1941), 171-199.

[11] K. Iwasawa, *On the structure of infinite M-groups,* Jap. J. Math. 18(1943), 709-728.

[12] J. Krempa, A. Sakowicz, *On uniform dimension of finite groups,* Colloq. Math. 89(2001), no.2, 223-231.

[13] J. Krempa, B. Terlikowska-Osłowska, *On uniform dimension of lattices,* in: Contributions to General Algebra 9, Holder-Pichler-Tempsky, Wien, 1995, 219-230.

[14] C. R. Leedham-Green, S. McKay, *„The structure of groups of prime power order”* Oxford University Press, Oxford, 2002.

[15] A. Lubotzky, A. Mann, *Powerful p-Groups. I. Finite Groups,* J. Algebra 105(1987), 484-505.

[16] I. Malinowska, *On finite nearly uniform groups,* Publ. Math. Debrecen 69(2006), no.1-2, 155-169.

[17] O. Ore, *Structures and group theory. II,* Duke Math. J. 4(1938), no.2, 247–269.

[18] D. J. S. Robinson, *„A Course in the Theory of Groups”,* Springer-Verlag, New York, 1996.

[19] D. Rusin, *The* 2*-groups of Rank* 2*,* J. Algebra 149(1992), no.1, 1-31.

[20] A. Sakowicz, *On strong uniform dimension of locally finite groups,* Colloq. Math. 95(2003), no.2, 207-216.

[21] R. Schmidt, Gruppen mit modularem Untergruppen verband, Archiv Math. 46(1986), 118-124

[22] R. Schmidt, *„Subgroup Lattices of Groups”,* Walter de Gruyter, Berlin 1994.

[23] R. Schmidt, *L-free groups*, Illinois J. Math. 47(2003), no.1-2, 515-528.

[24] R. Schmidt, *Planar subgroup lattices*, Algebra Universalis 55(2006), 3-12.

[25] R. Schmidt, *On the occurrence of the complete graph K_5 in the Hasse graph of a finite group*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 115(2006), 99-124.

[26] R. Schmidt, *L_{10}-free groups*, J. Group Theory 10(2007), 613-631.

[27] M. Suzuki, *„Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups”,* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1956.

[28] J. G. Thompson, *Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable,* Bull. Amer. Math. Soc. 74(1968), 383-434.

[29] J. G. Thompson, *Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable.II,* Pacific J. Math. 33(1970), 451-536.

[30] J. G. Thompson, *Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable.III,* Pacific J. Math. 39(1971), 483-534.

[31] J. G. Thompson, *Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable.IV, V, VI,* Pacific J. Math. 48(1973), 511-592.

[32] J. Whiston, *Maximal independent generating sets of the symmetric groups,* J. Algebra 232(2000), 255-268.

[33] J. Whiston, *The minimal generating sets of maximal size of selected group,* PhD thesis (2001)

[34] J. Whiston, J. Saxl, *On the maximal size of independent generating sets of $PSL_2(q)$,* J. Algebra 258(2002), 651-657.

[35] A. P. Zolotarev, *Balanced lattices and Goldie numbers in balanced lattices,* Sibirsk. Mat. Zh. 35(1994), 602-611.