

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Zastosowanie algorytmów kombinatorycznych
i numerycznych w klasyfikacji orbit P -krytycznych
bigrafów, TP -krytycznych posetów oraz sieciowych
kołczanów pierwiastków

rozprawa doktorska

Agnieszka Polak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Promotor
prof. dr hab. Daniel Simson

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, listopad 2013

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

1 listopada 2013 roku

data

.....

Agnieszka Polak

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

1 listopada 2013 roku

data

.....

prof. dr hab. Daniel Simson

Streszczenie

W pierwszej części rozprawy podajemy charakteryzację P -krytycznych bigrafów bez pętli zdefiniowanych w [58], tzn. minimalnych bigrafów Δ dla których symetryczna macierz Grama G_Δ nie jest dodatnio określona. Jedno z ważniejszych twierdzeń tej części orzeka, że bigraf Δ bez pętli o $n \geq 3$ wierzchołkach jest P -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieujemny (tzn. G_Δ jest dodatnio półokreślona) oraz grupa $\text{Ker } q_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest generowana przez jeden wierny wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, tzn. wektor taki, że $h_i \neq 0$ dla każdego $1 \leq i \leq n$.

Bigrafy P -krytyczne bez pętli o n wierzchołkach klasyfikujemy z dokładnością do działania $*$: $\mathcal{UBigr}_n \times \text{O}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{UBigr}_n$ grupy ortogonalnej $\text{O}(n, \mathbb{Z})$ na zbiorze \mathcal{UBigr}_n wszystkich P -krytycznych bigrafów bez pętli o $n \geq 2$ wierzchołkach. Innym ważnym osiągnięciem tej części rozprawy jest konstrukcja $(\Delta, w) \mapsto \Delta[[w]]$ przyporządkowująca dowolnemu dodatniemu bigrafowi $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ oraz wektorowi $w \in \mathbb{Z}^n$ spełniającemu równanie $w \cdot G_\Delta \cdot w^{tr} = 1$, P -krytyczny bigraf $\Delta[[w]] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$. Stosując implementację algorytmu opartego na tej konstrukcji znajdujemy pełną listę P -krytycznych bigrafów $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$, dla $n+1 \leq 10$. Ponadto podajemy pełną kasyfikację ortogonalną dla P -krytycznych bigrafów bez pętli.

Druga część rozprawy poświęcona jest prawie TP -krytycznym posetom jednopikowym I (posetom z jednym elementem maksymalnym). Jednym z ważniejszych wyników tej części rozprawy jest charakteryzacja takich posetów, patrz [47]. Przy użyciu wspomnianej charakteryzacji oraz udowodnionemu przez nas ograniczeniu na liczbę elementów takich posetów (tzn. $|I| \leq 9$) znajdujemy, przy pomocy obliczeń komputerowych, pełną listę jednopikowych posetów prawie TP -krytycznych (jest ich 132). Kolejnym ważnym wynikiem tej części jest pokazanie, że jednopikowe posety prawie TP -krytyczne I, I' są kospektralne w sensie spektrum Coxetera wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{C}_{I'} = B^{tr} \cdot \hat{C}_I \cdot B$ dla pewnej \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy B oraz macierzy Titsa $\hat{C}_I, \hat{C}_{I'}$ posetów I, I' .

W trzeciej części rozprawy budujemy pakiet algorytmów wykorzystywanych do klasyfikacji spektralnej Coxetera P -krytycznych bigrafów oraz prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych. Podajemy, w oparciu o udowodnione twierdzenie, algorytm konstruujący P -krytyczne bigrafy $\Delta[[w]]$, algorytm znajdujący P -krytyczne (lub dodatnie) bigrafy o $n \geq 3$ wierzchołkach będące reprezentantami wszystkich parami różnych $\text{O}(n, \mathbb{Z})$ -orbit oraz algorytm, przy pomocy którego znajdujemy wszystkie prawie TP -krytyczne posety jednopikowe. Ponadto szacujemy złożoność czasową wspomnianych algorytmów.

Wyniki zawarte w rozprawie zostały zamieszczone w artykułach [35, 45, 47], [43, 44, 46]. Były one również finansowane w ramach grantu NCN 2011/03/B/ST1/00824.

Słowa kluczowe: P -krytyczny bigraf, dodatni bigraf, P -krytyczny funkcjonal kwadratowy, dodatni funkcjonal kwadratowy, diagram Euklidesa, wierny pierwiastek, macierz Coxetera, wielomian Coxetera, spektrum Coxetera, poset, funkcjonal kwadratowy Titsa, TP -krytyczny poset, TP -wyjątkowy poset, kołczan oczkowy, sieciowy system pierwiastków

Klasyfikacja tematyczna AMS: 05C22, 05C50, 15A63, 11Y16, 68W30, 16G20, 06A11, 68W30, 05E10, 20B40

Abstract

In the first part of the thesis we give a characterisation of P -critical loop-free bigraphs defined in [58], i.e., minimal bigraphs Δ whose symmetric Gram matrix G_Δ is not positive definite. One of the most important theorems of this part states that a loop-free bigraph Δ with $n \geq 3$ vertices is P -critical iff it is non-negative (that is, G_Δ is positive semi-definite) and the group $\text{Ker } q_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ is generated by a single sincere vector $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ i.e., a vector satisfying $h_i \neq 0$ for each $1 \leq i \leq n$.

P -critical loop-free bigraphs with n vertices are classified up to a right action $*$: $\mathcal{UBigr}_n \times \text{O}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{UBigr}_n$ of the orthogonal group $\text{O}(n, \mathbb{Z})$ on the set \mathcal{UBigr}_n of all P -critical loop-free bigraphs with $n \geq 2$ vertices. Another important achievement of this part of the thesis is a construction $(\Delta, w) \mapsto \Delta[[w]]$ which maps an arbitrary positive bigraph $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ together with a vector $w \in \mathbb{Z}^n$ satisfying $w \cdot G_\Delta \cdot w^{tr} = 1$ to a P -critical bigraph $\Delta[[w]] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$. By applying an implementation of an algorithm realizing this construction, we determine a complete list of P -critical bigraphs $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$, for $n + 1 \leq 10$. Moreover, we present the complete orthogonal classification of P -critical bigraphs without loops.

The second part of the thesis is devoted to almost TP -critical one-peak posets I (posets with unique maximal element). One of the results in this part is a characterisation of such posets, see [47]. By means of this characterisation, and by virtue of a bound on the cardinality of such posets that we prove (i.e., $|I| \leq 9$), we determine, via a computer calculation, a complete list of 132 one-peak almost TP -critical posets. Another important result in this part is a proof of a fact that one-peak almost TP -critical posets I, I' are Coxeter cospectral if and only if $\widehat{C}_{I'} = B^{tr} \cdot \widehat{C}_I \cdot B$ for some \mathbb{Z} -invertible matrix B and Tits matrices $\widehat{C}_I, \widehat{C}_{I'}$ of posets I, I' .

In the third part of the thesis we build a package of algorithms used for the purposes of Coxeter spectral classification of P -critical bigraphs and almost TP -critical one-peak posets. Following our theorems, we give an algorithm to construct P -critical bigraphs Δ , an algorithm to determine P -critical (or positive) bigraphs with $n \geq 3$ vertices being representatives of all pairwise different $\text{O}(n, \mathbb{Z})$ -orbits, and an algorithm to list all almost TP -critical one-peak posets. Moreover, we estimate the computational complexity of these procedures.

The results of this thesis have been published in articles [35, 45, 47, 43, 44, 46]. This research has been supported by grant number NCN 2011/03/B/ST1/00824.

Key words: P -critical bigraph, positive bigraph, P -critical quadratic form, positive quadratic form, Euclidean diagram, sincere root, Coxeter matrix, Coxeter polynomial, Coxeter spectrum, poset, Tits quadratic form, TP -critical poset, TP -exceptional poset, mesh quiver, mesh root system

AMS Subject Classification: 05C22, 05C50, 15A63, 11Y16, 68W30, 16G20, 06A11, 68W30, 05E10, 20B40

Spis treści

Wstęp	6
Omówienie wyników rozprawy	7
1. Wprowadzenie	12
1.1. Podstawowe informacje o bigrafach	12
1.2. Spektrum Coxetera bigrafów	14
1.3. Całkowite, jednolite funkcjonały kwadratowe	18
1.4. Funkcjonały Grama bigrafów, diagramy Dynkina oraz rozszerzone diagramy Dynkina	20
1.5. Orbity Coxetera, oczka oraz kołczany oczkowe dla bigrafów	23
2. Klasyfikacja spektralna Coxetera P-krytycznych bigrafów	27
2.1. Charakteryzacja P -krytycznych bigrafów	27
2.2. Działanie grupy ortogonalnej na P -krytycznych bigrafach oraz konstrukcja P -krytycznych bigrafów	36
2.3. Podstawowe informacje o E-typie dla P -krytycznych bigrafów	44
2.4. Klasyfikacja P -krytycznych bigrafów z dokładnością do działania grupy ortogonalnej na bigrafach	47
2.5. Opis wielomianów Coxetera i typów Coxetera dla P -krytycznych bigrafów	67
3. Klasyfikacja spektralna Coxetera prawie TP-krytycznych posetów jednopikowych	78
3.1. Podstawowe informacje o posetach i stowarzyszonych z nimi funkcjonałach kwadratowych	78
3.2. Charakteryzacja prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych	82
3.3. Lista prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych	91
3.4. Informacje o posetach I^{op} , \tilde{I} , $\delta_a I$ powstałych z posetu I	99
3.5. Opis sieciowych systemów pierwiastków dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych	105
4. Pakiet algorytmów	130
4.1. Algorytmy dla P -krytycznych bigrafów	130
4.2. Algorytmy dla prawie TP -krytycznych posetów	139
5. Podsumowanie	145
Spis cytowanej literatury	146

Wstęp

Jednym z podstawowych celów niniejszej rozprawy doktorskiej jest budowanie algorytmów kombinatorycznych i graficznych do rozwiązywania wybranych problemów kombinatoryki algebraicznej, spektralnej teorii grafów, spektralnej klasyfikacji (Coxetera) krawędziowo-dwudzielnych grafów (w skrócie: bigrafów) i spektralnej klasyfikacji (Coxetera) skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych (w skrócie: posetów).

Obiektami badań w rozprawie są:

(a) jednolite całkowite funkcjonały kwadratowe oraz stowarzyszone z nimi skończone bigrafy badane w artykułach: Barot [3]-[4], Barot-de la Peña [5], Dräxler i współautorzy [16], von Höhne [26], Ovsienko [38]-[39], Simson [55]-[58], na wykładach monograficznych [52] oraz w monografiach [2], [18], [49], [51], [59];

(b) zbiór \mathcal{UBigr}_n spójnych krawędziowo-dwudzielnych grafów Δ bez pętli o $n \geq 2$ wierzchołkach oraz orbity prawego działania

$$(1.1) \quad * : \mathcal{UBigr}_n \times \mathrm{O}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{UBigr}_n, (\Delta, B) \mapsto \Delta * B,$$

grupy ortogonalnej $\mathrm{O}(n, \mathbb{Z}) := \{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}); B \cdot B^{tr} = E\}$ na \mathcal{UBigr}_n zdefiniowanego i badanego w artykułach [55]-[58] oraz omawianego na wykładach monograficznych [52];

(c) skończone zbiory częściowo uporządkowane I oraz ich funkcjonały kwadratowe badane w artykułach: Bondarenko [7], Bondarenko-Stepochkina [9]-[11], Drozd [17], Kleiner [28], Simson [53]-[54], w monografiach [18], [49], [51] oraz omawiane na wykładach monograficznych [52].

Tematyka rozprawy jest ściśle powiązana z klasyczną analizą spektralną grafów i posetów (patrz [13]-[15]) oraz z budowaniem algorytmów graficznych opisujących rozwiązania całkowite wybranych klas równań diofantycznych (tzn. z X-tym Problemem Hilberta).

W rozprawie zajmujemy się głównie problemami spektralnej klasyfikacji Coxetera krawędziowo-dwudzielnych grafów Δ w \mathcal{UBigr}_n sformułowanymi w pracach [57]-[58] oraz problemami spektralnej klasyfikacji Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych I sformułowanymi w publikacjach [54], [60] (a także na wykładach monograficznych [52]). W przypadku analizy spektralnej Coxetera, skupiamy się na szerokiej klasie jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych I , tzn. takich I , które posiadają dokładnie jeden element maksymalny.

Przypomnijmy, że w artykule [58] dowolnemu krawędziowo-dwudzielnemu grafowi Δ w \mathcal{UBigr}_n przyporządkowuje się niesymetryczną macierz Grama $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (patrz definicja 1.1.4), macierz Coxetera

$$(1.2) \quad \mathrm{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

oraz jej zespolone spektrum $\mathbf{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$, zwane spektrum Coxetera bigrafu Δ .

W artykule [54], dowolnemu zbiorowi częściowo uporządkowanemu $I \equiv (I, \preceq)$ o $n \geq 2$ punktach, przyporządkowuje się macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (patrz definicja 3.1.2), incydencyjną macierz Coxetera

$$(1.3) \quad \mathrm{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

oraz jej zespolone spektrum $\mathbf{specc}_I \subseteq \mathbb{C}$, zwane spektrum Coxetera posetu I . W artykule [58] udowodniono:

(i) jeśli Δ oraz I spełniają pewne „warunki nieujemności” (opisane w rozdziałach 1.1 i 3.1), to spektra $\mathbf{spec}\Delta$ oraz $\mathbf{spec}I$ leżą na okręgu jednostkowym zespolonej płaszczyzny Gaussa \mathbb{C} ;

(ii) skończony zbiór $\mathbf{spec}\Delta$ nie jest niezmienny ze względu na działanie (1.1) grupy $O(n, \mathbb{Z})$. W szczególności $\mathbf{spec}\Delta$ może zależeć od numeracji wierzchołków bigrafu Δ .

Jednymi z głównych problemów spektralnej analizy Coxetera zdefiniowanej w artykułach [57]-[58], [54], [60] oraz [52] są następujące problemy klasyfikacyjno-algorytmiczne:

(i) znalezienie szerokiej klasy krawędziowo-dwudzielnych grafów Δ w \mathcal{UBigr}_n , dla których macierz Grama \check{G}_Δ jest jednoznacznie wyznaczona przez spektrum Coxetera $\mathbf{spec}\Delta$, z dokładnością do \mathbb{Z} -kongruencji macierzy $\sim_{\mathbb{Z}}$, gdzie $A \sim_{\mathbb{Z}} A' \Leftrightarrow A' = B^{tr} \cdot A \cdot B$, dla pewnej \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$;

(ii) znalezienie szerokiej klasy posetów I , dla których macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, gdzie $n = |I|$, jest jednoznacznie wyznaczona przez spektrum Coxetera $\mathbf{spec}I$, z dokładnością do \mathbb{Z} -kongruencji $\sim_{\mathbb{Z}}$;

(iii) znalezienie szerokiej klasy krawędziowo-dwudzielnych grafów Δ w \mathcal{UBigr}_n oraz klasy posetów I , dla których macierz Grama \check{G}_Δ jest \mathbb{Z} -kongruentna z macierzą transponowaną \check{G}_Δ^{tr} oraz macierz incydencji C_I jest \mathbb{Z} -kongruentna z macierzą transponowaną C_I^{tr} (jest to problem bliski problemowi kongruencji macierzy badanemu przez Horna i Sergeichucka w pracy [25]);

(iv) zbudowanie algorytmów numerycznych i symbolicznych pozwalających zastosować narzędzia algebry komputerowej do obliczania \mathbb{Z} -kongruencji „oczekiwanych” w (i), (ii) oraz (iii).

Jednym z celów badań podjętych w rozprawie jest zastosowanie narzędzi algebry komputerowej do rozwiązania obliczeniowo złożonych problemów kombinatorycznych związanych z problemami (i)-(iv). Cele te w dużym stopniu zostały osiągnięte w rozprawie przez podanie rozwiązań problemów (i)-(iv) dla krawędziowo-dwudzielnych grafów P -krytycznych (w rozdziale 2) oraz dla posetów prawie TP -krytycznych (w rozdziale 3). Przedstawione rozwiązania wykorzystują z jednej strony wyniki teoretyczne zawarte w rozdziałach 2 oraz 3, a z drugiej strony pakiet algorytmów z rozdziału 4.

Wyniki badań uzyskanych w rozprawie zostały opublikowane w trzech obszernych artykułach [35], [47], [45] oraz w trzech artykułach pokonferencyjnych [43], [44], [46]. Pakiet algorytmów przedstawiony w rozdziale 4, będący jednym z głównych osiągnięć rozprawy, został opublikowany w pracy [45]. Niektóre z algorytmów zawarte są w publikacjach [43], [44], [46]. Są one również finansowane w ramach grantu NCN 2011/03/B/ST1/00824.

Główne wyniki rozprawy zostały przedstawione w trzech referatach na następujących międzynarodowych konferencjach naukowych:

1° European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb'11) w dniach 29 sierpnia – 2 września 2011 roku w Budapeszcie,

2° Combinatorics 2012 w dniach 9 – 15 września 2012 roku w Perugii,

3° 15th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2013) w dniach 23 – 26 września 2013 roku w Timisoarze.

Motywacją dla podjęcia badań problemów klasyfikacyjnych spektralnej analizy Coxetera krawędziowo-dwudzielnych grafów oraz zbiorów częściowo uporządkowanych są ich zastosowania w teorii reprezentacji algebr skończonego wymiaru nad ciałem, teorii liniowych reprezentacji posetów (opisane w [2], [18], [49], [50], [59]), a także w teorii Auslander-Reiten dla algebr i kategorii pochodnych oraz elementarnych problemów geometrii diofantycznej (opisanych w [17], [33], [37], [40], [54]-[57] oraz omawianych na wykładach monograficznych [52]).

Omówienie wyników rozprawy

Rozdział pierwszy podzielony jest na pięć części. Przypominamy w nim podstawowe definicje i fakty dotyczące bigrafów, stowarzyszonych z nimi całkowitych funkcjonałów kwadratowych oraz spektrum Coxetera.

W pierwszej części tego rozdziału przytaczamy definicję bigrafu (patrz [58, 3, 4, 38, 26]) oraz niesymetrycznej i symetrycznej macierzy Grama stowarzyszonej z bigrafem, patrz [58] (a także [55, 56]). Przypominamy definicje dodatniego, nieujemnego oraz P -krytycznego bigrafu, patrz [58] (a także [56, 59]). Część tę kończymy przykładem P -krytycznego bigrafu.

Druga część tego rozdziału zawiera podstawowe informacje dotyczące spektrum Coxetera bigrafów. Przytaczamy tu definicję macierzy Coxetera Cox_Δ , wielomianu Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$, a także transformacji Coxetera Φ_Δ bigrafu Δ , patrz [58, 55, 56]. Podajemy przykłady par bigrafów Δ, Δ' kospektralnych w sensie spektrum Coxetera, tzn. bigrafów takich, że $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t)$. W przykładzie 1.2.6 pokazujemy, że spektrum Coxetera bigrafów zależy od numeracji wierzchołków. Przypominamy również definicję \mathbb{Z} -równoważności oraz \mathbb{Z} -dwuliniowej równoważności bigrafów [58] (patrz definicja 1.2.3).

W trzeciej części tego rozdziału przytaczamy kilka faktów o całkowitych jednolitych funkcjonałach kwadratowych badanych m.in. w [38, 49], a także [56, 52, 58]. Przypominamy definicję całkowitego funkcjonału kwadratowego, funkcjonału dodatniego, nieujemnego, krytycznego [38, 49, 59]) oraz P -krytycznego [56, 58], a także niesymetrycznej i symetrycznej macierzy Grama (patrz [55, 56, 52]) jednoznacznie wyznaczającej ten funkcjonał.

Czwarta część tego rozdziału dotyczy funkcjonałów Grama stowarzyszonych z bigrafami $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$. Przytaczamy definicję funkcjonału Grama q_Δ , funkcjonału dwuliniowego Grama b_Δ [58], a także zbioru pierwiastków z jedynki \mathcal{R}_Δ i zera $\text{Ker } q_\Delta$ dla bigrafów Δ , patrz [2, 55]. Przypominamy fakt, że zbiór pierwiastków z jedynki dodatniego bigrafu bez pętli jest skończony [17, 49, 55] oraz podajemy przykład takiego bigrafu Δ wraz z opisem \mathcal{R}_Δ . Przy klasyfikacji spektralnej Coxetera dodatnich i P -krytycznych bigrafów szczególną rolę odgrywają diagramy Dynkina oraz rozszerzone diagramy Dynkina (zwane grafami Euklidesa) [55, 58, 59, 52], które prezentujemy w tym rozdziale. Podajemy również wielomiany Coxetera dla diagramów Dynkina i rozszerzonych diagramów Dynkina przedstawione w pracach [58, 56, 54, 52].

Ostatnia część tego rozdziału poświęcona jest kołczanom (digrafom) oczkowym. Przytaczamy tu definicje Φ_Δ -orbity, Φ_Δ -oczka oraz sieciowego systemu pierwiastków bigrafu Δ , zobacz [55, 56, 54, 58].

W rozdziale drugim prezentujemy charakteryzację P -krytycznych bigrafów w \mathcal{UBigr}_n . Dowodzimy w nim twierdzenia 2.1.2 opisującego P -krytyczne bigrafy bez pętli. Pokazujemy, że bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ o liczbie wierzchołków $|\Delta_0| \geq 3$ jest P -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieujemny oraz jądro $\text{Ker } q_\Delta$ jest generowane przez wierny wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ (tzn. $h_i \neq 0$ dla dowolnego $i \in \Delta_0$). Korzystając z wyników H. J. von Höhne [26] i S. A. Ovsienki [38] dla krytycznych bigrafów pokazujemy dodatkowo, że wektor \mathbf{h} ma współrzędne ograniczone w następujący sposób : $-6 \leq h_i \leq 6$ dla dowolnego $i \in \Delta_0$ oraz istnieje $s \in \Delta_0$ takie, że $h_s \in \{-1, +1\}$, patrz rozdział 2.1. Dowodzimy ponadto, że bigraf Δ o $|\Delta_0| \geq 2$ wierzchołkach jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór pierwiastków \mathcal{R}_Δ bigrafu Δ jest skończony. Ponadto pokazujemy, że w przypadku P -krytycznych bigrafów bez pętli Δ , zbiór \mathcal{R}_Δ jest nieskończony.

Dalsza część tego rozdziału poświęcona jest klasyfikacji ortogonalnej P -krytycznych bigra-

fów. Przypominamy strukturę grupy ortogonalnej $O(n, \mathbb{Z})$ (patrz [56, 58]), której używamy przy wspomnianej klasyfikacji. Definiujemy działanie grupy ortogonalnej na P -krytycznych bigrafach w \mathcal{UBigr}_n . Dowodzimy twierdzenia 2.2.6, z którego wynika konstrukcja (2.2.9) P -krytycznych bigrafów w \mathcal{UBigr}_{n+1} . P -krytyczne bigrafy o $n + 1$ wierzchołkach konstruujemy z dodatnich i spójnych bigrafów o n wierzchołkach oraz ich wiernych pierwiastków, czyli wektorów $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{R}_\Delta$ takich, że $w_i \neq 0$ dla dowolnego $1 \leq i \leq n$.

W rozdziale drugim przypominamy również definicję typu Euklidesa (w skrócie E-typ) dla P -krytycznych bigrafów [58, 31] oraz definicje inflacji bigrafu Δ względem niepustego zbioru krawędzi przerywanych i inflacji bigrafu Δ względem wierzchołka, patrz [58] (a także definicja 2.3.2). Do znalezienia E-typu P -krytycznych bigrafów używamy algorytmu inflacyjnego opisanego w [58, 31], który przedstawiamy w rozdziale 4.1. Podrozdział ten kończymy przykładem P -krytycznego bigrafu, dla którego stosując kolejne kroki algorytmu inflacyjnego znajdujemy E-typ.

Ponadto w rozdziale tym podajemy pełną listę P -krytycznych bigrafów o liczbie wierzchołków ≤ 10 z dokładnością do działania grupy ortogonalnej na bigrafach w \mathcal{UBigr}_n . Lista ta została uzyskana przy pomocy obliczeń komputerowych wykorzystujących wyniki teoretyczne dla P -krytycznych bigrafów, m.in. przez uruchomienie implementacji algorytmów opisanych w rozdziale 4.1 (patrz konstrukcja 2.2.9 i algorytm 4.1.12). Dla każdego P -krytycznego bigrafu ze wspomnianej listy podajemy jego wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$, a także E-typ. W tabeli 2.4.11 przedstawiamy liczbę P -krytycznych bigrafów o liczbie wierzchołków ≤ 10 z dokładnością do działania grupy $O(n, \mathbb{Z})$ na tych bigrafach. Podajemy również pełną kasyfikację ortogonalną dla P -krytycznych bigrafów bez pętli.

Ostatnia część rozdziału drugiego zawiera pełną listę wielomianów Coxetera dla P -krytycznych bigrafów o liczbie wierzchołków ograniczonej przez dziesięć. Została ona uzyskana poprzez obliczenia komputerowe oparte na algorytmach z rozdziału 4. W tabelach 2.5.2 i 2.5.4 prezentujemy wielomiany Coxetera dla P -krytycznych bigrafów w \mathcal{UBigr}_{n+1} , pogrupowane względem E-typu. Dla P -krytycznych bigrafów E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$ podajemy listę wielomianów Coxetera dla dowolnego $n + 1 = |\Delta_0| \geq 2$.

Rozdział trzeci poświęcony jest klasyfikacji spektralnej Coxetera prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych (zobacz definicja 3.1.8).

W pierwszej części tego rozdziału przypominamy m.in. definicje macierzy incydencji C_I , macierzy Eulera \overline{C}_I oraz macierzy Titsa \widehat{C}_I posetu I [53, 51, 60, 54], a także definicje symetrycznych macierzy incydencji, Eulera i Titsa posetu I , patrz [60]. Z każdym takim posetem stowarzyszamy funkcjonal incydencji, Eulera i Titsa posetu I , zobacz [53, 54, 52, 60], przypominane w rozdziale 3.1. Przytaczamy również definicję dodatniości, nieujemności posetu I , patrz [60] (a także [54]). Szczególną uwagę poświęcamy jednopikowym posetom prawie TP -krytycznym (zobacz definicja 3.1.8). Posety krytyczne (ze względu na dodatniość) były badane przez Bondarenkę i Stepankinę, patrz [10] (a także [8]). Wśród prawie TP -krytyczne posetów jednopikowych wyróżniamy posety TP -krytyczne oraz posety TP -wyjątkowe, zobacz definicja 3.1.8. W rozdziale tym przypominamy również definicję macierzy Coxetera Cox_I , macierzy Coxetera-Eulera $\overline{\text{Cox}}_I$, macierzy Coxetera-Titsa $\widehat{\text{Cox}}_I$, a także wielomianu Coxetera $\text{cox}_I(t)$ posetu I , zobacz [54, 60, 52].

W drugiej części rozdziału trzeciego charakteryzujemy prawie TP -krytyczne posety jednopikowe. Dowodzimy górnego ograniczenia na liczbę elementów prawie TP -krytycznego posetu jednopikowego. Pokazujemy (wniosek 3.2.7), że I jest prawie TP -krytycznym posetem

jednopikowym wtedy i tylko wtedy, gdy $5 \leq |I| \leq 9$, I jest nieujemny oraz $\text{Ker } \hat{q}_I = \{v \in \mathbb{Z}^I; v \cdot \hat{C}_I \cdot v^{tr} = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_*)$ jest prawie wiernym wektorem (tj. $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$). Ponadto współrzędne wektora \mathbf{h} są ograniczone w następujący sposób: $-6 \leq h_i \leq 6$ dla dowolnego $1 \leq i \leq |I| = n + 1$ oraz istnieje $1 \leq j \leq n + 1$ takie, że $h_j \in \{-1, +1\}$. W przypadku posetów TP -krytycznych dodatkowo $h_* \neq 0$. Podajemy również charakteryzację posetów TP -wyjątkowych. Dowodzimy (patrz twierdzenie 3.2.8), że poset jednopikowy I jest TP -wyjątkowy wtedy i tylko wtedy, gdy $5 \leq |I| \leq 9$, posety I i $T = I \setminus \{*\}$ są nieujemne, $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ i $\text{Ker } q_T = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$, gdzie $\mathbf{h}^- = (h_1, \dots, h_n)$ jest wiernym wektorem (tj. $h_i \neq 0$ dla dowolnego $i \leq n$) oraz $\sum_{i=1}^n h_i = 0$, zaś $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^-, 0)$.

W trzeciej części tego rozdziału podajemy pełną listę prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych, na które składają się posety TP -krytyczne (jest ich 115) oraz posety TP -wyjątkowe (jest ich 17). Uzyskana przez nas w algorytmiczny sposób lista prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych pokrywa się (z dokładnością do pewnych operacji) z uzyskaną przez Bondarenkę i Stepankinę [10] listą posetów krytycznych ze względu na dodatniość, zobacz twierdzenie 3.2.9. Lista takich posetów uzyskanych poprzez uruchomienie implementacji algorytmu 4.2.1 bazuje na twierdzeniu 3.2.6 ograniczającym ($|I| \leq 9$) liczbę elementów prawie TP -krytycznego posetu jednopikowego.

W dalszej części rozdziału czwartego przypominamy definicję posetu przeciwnego I^{op} do posetu I , odbicia w talii δI posetu I oraz odbicia dualnego \tilde{I} posetu I , patrz [50, 51, 53, 20] (a także definicje 3.4.1-3.4.3). W rozdziale tym dowodzimy (lemat 3.4.5, twierdzenie 3.4.6, twierdzenie 3.4.7), że jeśli posety I, I' są prawie TP -krytyczne oraz poset I' jest jednym z posetów $I^{\text{op}}, \delta I, \tilde{I}$, to $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \hat{b}_{I'}$, tzn. istnieje macierz \mathbb{Z} -odwracalna $B \in \text{M}_I(\mathbb{Z})$ taka, że $\hat{C}_I = B^{tr} \cdot \hat{C}_{I'} \cdot B$. W dowodzie korzystamy m.in. z faktu, że $\hat{C}_I = B^{tr} \cdot \bar{C}_I \cdot B$ dla pewnej macierzy \mathbb{Z} -odwracalnej B , zobacz [53, 60, 52].

Ostatnia część rozdziału trzeciego (rozdział 3.5) poświęcona jest sieciowym systemom pierwiastków dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych. W rozdziale tym przypominamy twierdzenie 3.5.1 mówiące o tym, że dla skończonych posetów głównych J (tzn. J jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_J = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} \neq 0$) istnieje defekt Titsa (odp.: incydencyjny defekt) oraz zredukowana liczba Coxetera, zobacz [60, 53, 22, 52] (a także twierdzenie 3.5.1). Przypatrzamy również kilka faktów dotyczących zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_{\hat{q}_I} = \{v \in \mathbb{Z}^{n+1}; v \cdot \hat{C}_I \cdot v^{tr} = 1\}$ oraz $\mathcal{R}_{q_I} = \{v \in \mathbb{Z}^{n+1}; v \cdot C_I \cdot v^{tr} = 1\}$, zobacz [60, 56, 55]. Dla posetów prawie TP -krytycznych I opisujemy zbiory pierwiastków $\mathcal{R}_{\hat{q}_I}$, zaś w przypadku posetów TP -wyjątkowych I opisujemy dodatkowo zbiory \mathcal{R}_{q_T} dla posetów $T = I \setminus \{*\}$. Z pierwiastków budujemy kołczany (digrafy) oczkowe, patrz [55, 56, 2, 57]. Sieciowe systemy pierwiastków dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych wykorzystujemy do udowodnienia następującego faktu: jeśli I, I' są prawie TP -krytycznymi posetami jednopikowymi oraz $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_{I'}(t)$, to $I \approx_{\mathbb{Z}} I'$, tzn. istnieje macierz \mathbb{Z} -odwracalna B taka, że $\hat{C}_I = B^{tr} \cdot \hat{C}_{I'} \cdot B$. W przypadku posetów TP -wyjątkowych dowodzimy również tego faktu dla posetów $T = I \setminus \{*\}$.

W czwartym rozdziale budujemy pakiet algorytmów, które posłużyły nam do klasyfikacji ortogonalnej P -krytycznych bigrafów oraz klasyfikacji spektralnej Coxetera prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych. Szacujemy również złożoność czasową wspomnianych algorytmów.

Powszechnie dostępne są pakiety oprogramowania stosowane przy klasyfikacji grafów i innych obiektów z pogranicza kombinatoryki i algebry, takie jak GAP4, CREP, MAGMA czy LAPACK++. Nie są one jednak wystarczające do rozwiązania powyższych problemów

dotyczących spektralnej analizy Coxetera P -krytycznych bigrafów i prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych.

W rozdziale 4 podajemy m.in. implementacje: kryterium Sylwestera wykorzystywanego do sprawdzenia P -krytyczności bigrafów; algorytmów używanych przy realizacji grupy ortogonalnej $O(n, \mathbb{Z})$; macierzowej grupy permutacji oraz grupy macierzy znaku składających się na grupę ortogonalną.

Opisujemy metodę wyznaczania reprezentantów parami różnych $O(n, \mathbb{Z})$ -orbit P -krytycznych lub dodatnich bigrafów w \mathcal{UBigr}_n . Przetawiamy również algorytm używany do konstrukcji P -krytycznych bigrafów o $n + 1 \geq 3$ wierzchołkach z dodatnich i spójnych bigrafów o n wierzchołkach oraz ich wiernych pierwiastków. P -krytyczne bigrafy o $n + 1$ wierzchołkach konstruujemy z dodatnich bigrafów o n wierzchołkach, które z kolei uzyskujemy z dodanych bigrafów o $n - 1$ wierzchołkach. Przedstawiamy również implementację algorytmu inflacyjnego dla P -krytycznych bigrafów, zobacz [58, 31]. Podajemy algorytm, który posłużył nam do wyliczenia wszystkich wielomianów Coxetera dla P -krytycznych bigrafów o $n + 1 \leq 10$ wierzchołkach. Wspomniane wyżej algorytmy zostały zaimplementowane w języku C#. Część obliczeń została zrealizowana w Maple i opisujemy je również w tym rozdziale.

W dalszej części rozdziału czwartego opisujemy algorytm, który posłużył nam do znalezienia pełnej listy prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych złożonej z posetów TP -krytycznych oraz posetów TP -wyjątkowych. Bazuje on na udowodnionym w rozdziale 3 twierdzeniu o ograniczeniu liczby elementów jednopikowych posetów prawie TP -krytycznych. Przedstawiamy również metodę, która posłużyła nam do policzenia defektu oraz zredukowanej liczby Coxetera (zobacz [56] a także [22, 60], twierdzenie 3.5.1) dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych I . Opisujemy także implementacje algorytmów, które posłużyły nam do zbudowania oczkowych kołczanów (digrafów) dla prawie TP -krytycznych posetów I , zobacz [56, 55].

1. Wprowadzenie

Celem tego rozdziału jest przypomnienie podstawowych definicji i faktów związanych z krawędziowo-dwudzielnymi grafami (w skrócie bigrafami) [58] (a także [3, 4, 49, 38]) oraz stowarzyszonymi z nimi całkowitymi funkcjonalami kwadratowymi, patrz [56, 55, 52, 58]. Przytaczamy informacje dotyczące spektrum Coxetera nieujemnych bigrafów, do których należą m.in. dodatnie i P -krytyczne bigrafy, zobacz [5, 58]. W rozdziale tym podajemy kilka przykładów par bigrafów kospektralnych w sensie Coxetera, tzn. bigrafów o równych wielomianach Coxetera.

W teorii grafów występują grafy oznakowane (ang. signed graphs) wprowadzone przez Hararego [24] i badane przez kolejnych kilkadziesiąt lat (zobacz także [62]). W teorii form kwadratowych oraz w teorii reprezentacji algebr analizuje się bigrafy, zobacz [3, 4, 5, 38, 58, 26].

1.1. Podstawowe informacje o bigrafach

W rozdziale tym przypominamy kilka podstawowych definicji, m.in. definicję bigrafu [58, 3, 4, 38, 26]; niesymetrycznej i symetrycznej macierzy Grama [58] (a także [56, 55, 52, 23]); dodatniego, nieujemnego oraz P -krytycznego bigrafu [58] (a także [59, 52, 38]). Rozdział ten kończymy przykładem P -krytycznego bigrafu.

Definicja 1.1.1. Grafem nazywamy parę $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, gdzie Δ_0 jest zbiorem, Δ_1 jest multizbiorem nieuporządkowanych par elementów zbioru Δ_0 , $\Delta_0 \cap \Delta_1 = \emptyset$. Elementy zbioru Δ_0 nazywamy **wierzchołkami**, zaś elementy zbioru Δ_1 nazywamy **krawędziami**.

Następująca definicja oraz oznaczenia zostały wprowadzone w pracy [58, Definition 2.1, p. 830].

Definicja 1.1.2. Krawędziowo-dwudzielnym grafem (w skrócie **bigrafem**) nazywamy parę $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ wraz z podziałem $\Delta_1 = \Delta_1^- \dot{\cup} \Delta_1^+$, gdzie Δ_0 jest niepustym zbiorem wierzchołków, zaś Δ_1 jest zbiorem krawędzi takich, że zbiór krawędzi $\Delta_1(i, j) = \Delta_1^-(i, j) \cup \Delta_1^+(i, j)$ łączących wierzchołki i oraz j , dla dowolnych $i, j \in \Delta_0$, składa się z krawędzi wyłącznie jednego typu, tzn. $\Delta_1(i, j) = \Delta_1^-(i, j)$ albo $\Delta_1(i, j) = \Delta_1^+(i, j)$.

Przez \mathcal{UBigr}_n oznaczamy zbiór skończonych bigrafów bez pętli o zbiorze wierzchołków $\Delta_0 = \{1, 2, \dots, n\}$.

W teorii grafów rozważa się **grafy oznakowane** (ang. signed graph), omówione m.in. w [24] oraz [62], w których krawędzie są etykietowane liczbami wymiernymi. Bigrafy stanowią więc ich podklasę (w której liczba krawędzi jest całkowita oraz spełniony jest warunek rozłączności zbioru krawędzi między dowolnymi dwoma wierzchołkami).

Dowolny graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ traktujemy jak bigraf, w którym zbiór krawędzi Δ_1 jest równy Δ_1^- .

Wizualizując bigrafy, rysujemy krawędź ciągłą $\bullet_i \text{---} \bullet_j$, gdy $\Delta_1(i, j) = \Delta_1^-(i, j)$, zaś przerywaną $\bullet_i \text{- -} \bullet_j$, gdy $\Delta_1(i, j) = \Delta_1^+(i, j)$ dla dowolnych $i, j \in \Delta_0$. W przykładzie 1.1.6 przedstawiamy przykładowy bigraf.

W niniejszej pracy rozważamy bigrafy $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ bez pętli, tzn. zakładamy, że $\Delta_1(i, i) = \emptyset$ dla dowolnego $i \in \Delta_0$. Bigraf Δ nazywamy **spójnym**, gdy graf powstały z Δ przez zamianę każdej krawędzi $\bullet_i \text{- -} \bullet_j$ na $\bullet_i \text{---} \bullet_j$ jest spójny.

Definicja 1.1.3. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie bigrafem wraz z podziałem $\Delta_1 = \Delta_1^- \cup \Delta_1^+$. Bigraf Δ' nazywamy **podbigrafem** bigrafu Δ , jeśli $\Delta'_0 \subseteq \Delta_0$ oraz $\Delta'_1{}^+(i, j) \subseteq \Delta_1^+(i, j)$ i $\Delta'_1{}^-(i, j) \subseteq \Delta_1^-(i, j)$, dla dowolnych $i, j \in \Delta'_0$. Jeśli dodatkowo $\Delta'_1(i, j) = \Delta_1(i, j)$ dla dowolnych $i, j \in \Delta'_0$, to bigraf Δ' nazywamy **pełnym podbigrafem** bigrafu Δ .

Definicja 1.1.4. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie bigrafem bez pętli o $n = |\Delta_0| \geq 1$ wierzchołkach oraz $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$.

(a) **Niesymetryczną macierzą sąsiedztwa** \check{D}_Δ i **niesymetryczną macierzą Grama** \check{G}_Δ bigrafu Δ , nazywamy macierze zdefiniowane w następujący sposób:

$$\check{D}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & d_{12}^\Delta & \dots & d_{1n}^\Delta \\ 0 & 0 & \dots & d_{2n}^\Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \text{ i } \check{G}_\Delta = E + \check{D}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & d_{12}^\Delta & \dots & d_{1n}^\Delta \\ 0 & 1 & \dots & d_{2n}^\Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

gdzie $d_{ij}^\Delta = -|\Delta_1^-(a_i, a_j)|$, gdy istnieje krawędź $a_i - a_j$ oraz $i \leq j$, zaś $d_{ij}^\Delta = |\Delta_1^+(a_i, a_j)|$, gdy istnieje krawędź $a_i - a_j$ oraz $i < j$. Jeśli $\Delta_1(a_i, a_j)$ jest pusty lub $j < i$, to $d_{ij}^\Delta = 0$.

(b) **Symetryczną macierzą sąsiedztwa** bigrafu Δ nazywamy macierz $Ad_\Delta := \check{D}_\Delta + \check{D}_\Delta^{tr}$.

(c) **Symetryczną macierzą Grama** bigrafu Δ nazywamy macierz $G_\Delta := \frac{1}{2}(\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr})$.

Definicja 1.1.5. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie bigrafem bez pętli o $n = |\Delta_0| \geq 1$ wierzchołkach oraz $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$.

(a) Bigraf Δ nazywamy **dodatnim** , gdy jego symetryczna macierz Grama jest dodatnio określona (tzn. spełnia warunki kryterium Sylwestera [19]).

(b) Bigraf Δ nazywamy **nieujemnym**, gdy jego symetryczna macierz Grama jest nieujemnie określona (tzn. spełnia uogólnione warunki kryterium Sylwestera [19, 32]).

(c) Bigrafem **P-krytycznym** nazywamy bigraf Δ bez pętli taki, że

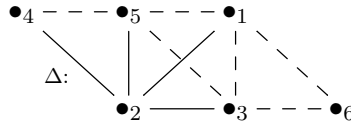
(c1) Δ nie jest dodatnim bigrafem, zaś

(c2) dowolny pełny podbigraf (właściwy) bigrafu Δ jest dodatni.

Ponieważ definicje (a), (b), (c) nie zależą od numeracji wierzchołków a_1, \dots, a_n , więc w danym ciągu możemy zakładać, że $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$.

Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie spójnym bigrafem. Przez $\Delta^{(a)}$, gdzie $a \in \Delta_0$, oznaczamy pełny podbigraf bigrafu Δ powstały z Δ przez usunięcie wierzchołka a wraz z sąsiadującymi z nim krawędziami.

Przykład 1.1.6. Rozważmy następujący bigraf.



$$\bullet \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \hat{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 2G_\Delta = \begin{bmatrix} 2 & \hat{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hat{1} & 2 & \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} & 0 \\ 1 & \hat{1} & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \hat{1} & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & \hat{1} & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

- Ponieważ $\det 2G_\Delta = 0$, więc Δ nie jest dodatni.
- Bigraf $\Delta^{(1)}$ jest dodatni, gdyż

$$\det 2G_\Delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} & 0 \\ \hat{1} & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hat{1} & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hat{1} & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & 2 & 0 & 1 \\ \hat{1} & 0 & 2 & 1 \\ \hat{1} & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & 2 & 0 \\ \hat{1} & 0 & 2 \end{bmatrix} > 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & \hat{1} \\ \hat{1} & 2 \end{bmatrix} > 0, \quad \det[2] > 0,$$

Bigrafy $\Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}, \Delta^{(5)}, \Delta^{(6)}$ również są dodatnie. Z kryterium Sylwestera wynika, że dowolny pełny i właściwy podbigraf bigrafu dodatniego $\Delta^{(a)}$ jest dodatni, dla dowolnego $a \in \{1, \dots, 6\}$.

- Zatem bigraf Δ jest P -krytyczny.

1.2. Spektrum Coxetera bigrafów

W rozdziale tym przypominamy definicję macierzy Coxetera Cox_Δ , wielomianu Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ oraz spektrum Coxetera spec_Δ bigrafu Δ [58] (a także [55, 56, 52]). Przytaczamy również definicję \mathbb{Z} -równoważności $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz \mathbb{Z} -dwuliniowej równoważności $\approx_{\mathbb{Z}}$ bigrafów, względem których klasyfikujemy dodatnie i nieujemne bigrafy [58, 26, 3, 4]. Przypominamy również twierdzenie 1.2.4, z którego wynika, że jeśli $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, to $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$.

W przykładzie 1.2.6 pokazujemy, że spektrum Coxetera bigrafów, w przeciwieństwie do spektrum z macierzy sąsiedztwa grafów, zależy od numeracji wierzchołków. Podajemy przykłady par bigrafów o równych wielomianach Coxetera oraz spełniających pewne dodatkowe warunki. Przypominamy lemat (1.2.11) opisujący spektrum Coxetera dla nieujemnych bigrafów [5, 58]. Dla takich bigrafów zespolone wartości własne macierzy Coxetera leżą na okręgu jednostkowym S^1 i są pierwiastkami z jedynki.

Definicja 1.2.1 ([58]). Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie bigrafem bez pętli o $n = |\Delta_0| \geq 1$ wierzchołkach oraz $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$. **Spektrum** bigrafu Δ nazywamy zbiór $\text{spec}_\Delta \subset \mathbb{R}$ wszystkich n rzeczywistych wartości własnych symetrycznej macierzy sąsiedztwa $Ad_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ bigrafu Δ , tzn. zbiór wszystkich n pierwiastków **wielomianu charakterystycznego**

$$P_\Delta(t) = \det(t \cdot E - Ad_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$$

bigrafu Δ .

Przez $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ oznaczamy grupę macierzy $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ takich, że $\det A \in \{-1, +1\}$.

Definicja 1.2.2. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ oraz $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$, gdzie $n \geq 1$.

(a) **Macierzą Coxetera** bigrafu Δ nazywamy macierz

$$\text{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}).$$

(b) **Wielomianem Coxetera** bigrafu Δ nazywamy wielomian charakterystyczny

$$\text{cox}_\Delta(t) = \det(t \cdot E - \text{Cox}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$$

macierzy Coxetera bigrafu Δ .

(c) Automorfizm grup $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ zdefiniowany wzorem

$$\Phi_\Delta(v) = v \cdot \text{Cox}_\Delta,$$

dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$, nazywamy **transformacją Coxetera** bigrafu Δ .

(d) **Spektrum Coxetera** bigrafu Δ nazywamy zbiór $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$ wszystkich n zespolonych wartości własnych macierzy Coxetera $\text{Cox}_\Delta \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ bigrafu Δ , tzn. zbiór wszystkich n pierwiastków wielomianu Coxetera $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ bigrafu Δ .

(e) **Liczbą Coxetera** \mathbf{c}_Δ bigrafu Δ nazywamy najmniejszą liczbę całkowitą $r \geq 1$ taką, że $\text{Cox}_\Delta^r = E$. Jeśli $\text{Cox}_\Delta^r \neq E$, dla dowolnego $r \geq 1$, to przyjmujemy $\mathbf{c}_\Delta = \infty$.

Definicja 1.2.3. Niech Δ, Δ' będą bigrafami bez pętli o $n \geq 2$ wierzchołkach.

(a) Bigrafy Δ i Δ' nazywamy \mathbb{Z} -**równoważnymi** lub \mathbb{Z} -**kongruentnymi**, jeśli istnieje macierz $B \in \text{M}_n(\mathbb{Z})$ o wyznaczniku $\det B \in \{-1, 1\}$ taka, że $G_{\Delta'} = B \cdot G_\Delta \cdot B^{tr}$. Stosujemy wówczas następujące oznaczenie: $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$.

(b) Bigrafy Δ i Δ' nazywamy \mathbb{Z} -**dwuliniowo równoważnymi**, jeśli istnieje macierz $B \in \text{M}_n(\mathbb{Z})$ o wyznaczniku $\det B \in \{-1, 1\}$ taka, że $\check{G}_{\Delta'} = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$. Stosujemy wówczas następujące oznaczenie: $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$.

Twierdzenie 1.2.4 ([58]). Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \text{UBigr}_n$ oraz $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$ będzie ustalonym zbiorem wierzchołków.

(a) Jeśli $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ i $\check{G}_{\Delta'} = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$, gdzie $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$, to $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ oraz

(a1) $\text{Cox}_{\Delta'} = B \cdot \text{Cox}_\Delta \cdot B^{-1}$ i następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_{\Delta'}} & \mathbb{Z}^n \\ h_B \downarrow \simeq & & h_B \downarrow \simeq \\ \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_\Delta} & \mathbb{Z}^n \end{array}$$

gdzie $h_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest izomorfizmem grup zdefiniowanym wzorem $h_B(v) = v \cdot B$.

(a2) $\text{cox}_{\Delta'}(t) = \text{cox}_\Delta(t)$, $\text{specc}_{\Delta'} = \text{specc}_\Delta$ oraz $\mathbf{c}_{\Delta'} = \mathbf{c}_\Delta$.

Uwaga 1.2.5. Wielomian charakterystyczny $P_\Delta(t)$ bigrafu Δ oraz spektrum spec_Δ bigrafu Δ nie zależą od numeracji wierzchołków, natomiast wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ bigrafu Δ oraz spektrum Coxetera specc_Δ bigrafu Δ zależą od numeracji wierzchołków, zobacz przykład 1.2.6.

Przykład 1.2.6. Rozważmy następujące dwa bigrafy:



Zuważmy, że bigraf Δ' powstaje z bigrafu Δ przez permutację wierzchołków oraz

- Δ, Δ' nie są nieujemne,

- $\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$

- $\check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$

- $P_\Delta(t) = P_{\Delta'}(t) = t^4 - 7t^2 + 9,$

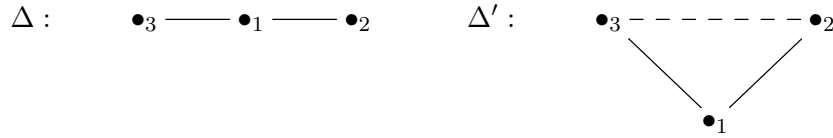
- $\text{spec}_\Delta = \text{spec}_{\Delta'} = \{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}\},$

- $\text{cox}_\Delta(t) = t^4 - t^3 - 3t^2 - t + 1, \text{specc}_\Delta = \{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{21} + \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{21}}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{21} - \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{21}}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{21} + \frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{21}}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{21} - \frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{21}}\},$

- $\text{cox}_{\Delta'}(t) = t^4 - 3t^3 + t^2 - 3t + 1, \text{specc}_{\Delta'} = \{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{13} + \frac{1}{4}\sqrt{6+6\sqrt{13}}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{13} - \frac{1}{4}\sqrt{6+6\sqrt{13}}, \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{13} + \frac{1}{4}\sqrt{6-6\sqrt{13}}, \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{13} - \frac{1}{4}\sqrt{6-6\sqrt{13}}\}.$

Zatem $\text{specc}_\Delta \neq \text{specc}_{\Delta'}$.

Przykład 1.2.7. Niech Δ, Δ' będą następującymi bigrafami:



- $\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \hat{1} & \hat{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{1} & \hat{1} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

- Δ, Δ' są dodatnie,

- $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t) = t^3 + t^2 + t + 1.$

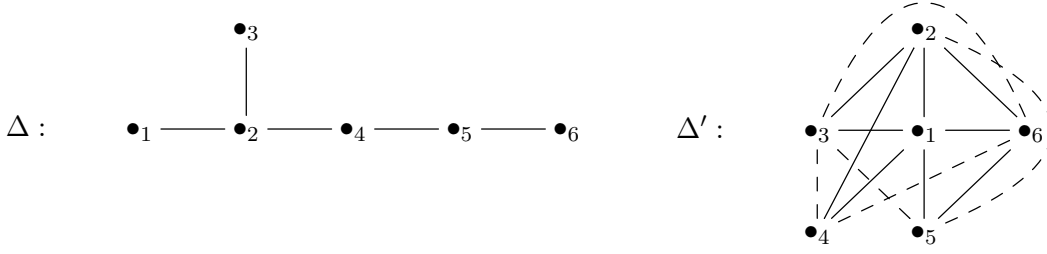
Jest to najmniejszy przykład spójnych bigrafów (bez pętli oraz wielokrotnych krawędzi), które spełniają następujące trzy warunki:

(i) $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t),$

(ii) Δ, Δ' są dodatnie,

(iii) bigrafu $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ nie można otrzymać z bigrafu $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1)$ przez permutację wierzchołków oraz operację zamiany wszystkich krawędzi incydentnych z wierzchołkiem $i \in \Delta_0$ na krawędzie przeciwne (tzn. ciągłych na przerywane, przerywanych na ciągłe).

Przykład 1.2.8. Rozważmy następujące dwa bigrafy:



- Bigraf Δ jest dodatni, zaś Δ' nie jest nieujemny.

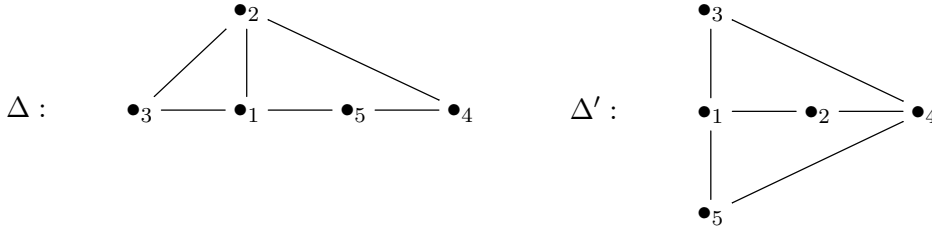
- $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t) = t^6 + t^5 + t + 1$

Jest to najmniejszy przykład spójnych bigrafów bez pętli oraz wielokrotnych krawędzi spełniających następujące dwa warunki:

- (i) $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t)$,
- (ii) Δ jest dodatni, zaś Δ' nie jest nieujemny.

Uwaga 1.2.9. Przykład 1.2.8 pokazuje, że bigrafy dodatnie oraz bigrafy, które nie są nieujemne mogą być kospektralne w sensie spektrum Coxetera.

Przykład 1.2.10. Niech Δ, Δ' będą następującymi grafami:



- $\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \hat{1} & \hat{1} & 0 & \hat{1} \\ 0 & 1 & \hat{1} & \hat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{1} & \hat{1} & 0 & \hat{1} \\ 0 & 1 & 0 & \hat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \hat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

- Δ, Δ' nie są nieujemne,

- $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t) = t^5 - 3t^4 - 6t^3 - 6t^2 - 3t + 1.$

Jest to najmniejszy (zweryfikowany komputerowo) przykład spójnych grafów prostych (tzn. bez pętli i wielokrotnych krawędzi) takich, że

- (i) $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t)$,
- (ii) Δ nie powstaje z Δ' przez permutację wierzchołków.

W pracach [58, Lemma 2.1], [5, Proposition 3.1], [55, Proposition 4.3(e)] udowodniono następujący fakt.

Lemat 1.2.11. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ oraz $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$ będzie ustalonym zbiorem wierzchołków. Jeśli Δ jest nieujemny, to specc_Δ leży na okręgu jednostkowym $\mathcal{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ i dowolny $\lambda \in \text{specc}_\Delta$ jest pierwiastkiem z jedyinki. Dodatkowo, jeśli Δ jest dodatni, to $1 \notin \text{specc}_\Delta$.

1.3. Całkowite, jednolite funkcjonały kwadratowe

W rozdziale 1.3 przypominamy definicję całkowitego funkcjonału kwadratowego [58, 52, 49, 38, 3]; macierzy Grama (symetrycznej i niesymetrycznej) jednoznacznie kodujących ten funkcjonał [55, 56, 52]; \mathbb{Z} -dwuliniowej polaryzacji funkcjonału kwadratowego [54, 56, 55]. Ponadto przytaczamy definicję dodatniego, nieujemnego, krytycznego i P -krytycznego funkcjonału [58, 52, 55, 59, 49, 38]; a także \mathbb{Z} -równoważności i \mathbb{Z} -dwuliniowej równoważności funkcjonałów kwadratowych [55, 52].

Definicja 1.3.1. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną. **Całkowitym jednolitym funkcjonałem kwadratowym** nazywamy funkcję $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowaną wzorem

$$q(x) = q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j,$$

gdzie $q_{ij} \in \mathbb{Z}$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Definicja 1.3.2 ([58]). Niech $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie całkowitym jednolitym funkcjonałem kwadratowym .

(a) Funkcjonał q nazywamy **dodatnim**, jeśli dla dowolnego $0 \neq v \in \mathbb{Z}^n$ zachodzi $q(v) > 0$.

(b) Funkcjonał q nazywamy **słabo dodatnim**, jeśli dla dowolnego $0 \neq v \in \mathbb{N}^n$ zachodzi $q(v) > 0$.

(c) Funkcjonał q nazywamy **nieujemnym**, jeśli dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$ zachodzi $q(v) \geq 0$.

(d) Funkcjonał q nazywamy **P -krytycznym**, jeśli q nie jest dodatni, zaś dla dowolnego $j \leq n$, funkcjonał

$$q^{(j)}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = q(x)|_{x_j=0} = q(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

powstały z $q(x)$ przez obcięcie w j jest dodatni.

(d1) Funkcjonał q nazywamy **krytycznym**, jeśli q nie jest słabo dodatni, zaś dla dowolnego $j \leq n$, funkcjonał

$$q^{(j)}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = q(x)|_{x_j=0} = q(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

powstały z $q(x)$ przez obcięcie w j jest słabo dodatni.

(e) Wektor $v \in \mathbb{Z}^n$ nazywamy **pierwiastkiem** funkcjonału q , jeśli $q(v) = 1$. Jeśli dodatkowo $v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0$, to v nazywamy **wiernym pierwiastkiem** funkcjonału q .

(f) **Niesymetryczną macierzą Grama** funkcjonału q nazywamy macierz

$$\check{G}_q = \begin{bmatrix} 1 & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}), \text{ zaś symetryczną macierzą Grama funkcjonału } q \text{ nazy-$$

wamy macierz $G_q = \frac{1}{2}[\check{G}_q + \check{G}_q^{tr}]$.

(g) **Wielomianem Coxetera** jednolitego funkcjonału q nazywamy wielomian charakterystyczny

$$\text{cox}_q(t) = \det(t \cdot E - \text{Cox}_q),$$

gdzie $\text{Cox}_q = -\check{G}_q \cdot \check{G}_q^{tr} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ jest **macierzą Coxetera(-Gramą)** funkcjonału q .

(h) **Liczbą Coxetera** \mathbf{c}_q funkcjonału q nazywamy minimalną liczbę całkowitą $r \geq 1$ taką, że $\text{Cox}_q^r = E$. Jeśli $\text{Cox}_q^r \neq E$, dla dowolnego $r \geq 1$, to $\mathbf{c}_q = \infty$.

(i) Funkcję $\Phi_q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ zdefiniowaną wzorem $\Phi_q(v) = v \cdot \text{Cox}_q$ nazywamy **transformacją Coxetera** funkcjonału q .

Uwaga 1.3.3. Jednolity funkcjonał kwadratowy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez niesymetryczną macierz Grama \check{G}_q funkcjonału q i symetryczną macierz Grama G_q funkcjonału q oraz

$$q(x) = x \cdot \check{G}_q \cdot x^{tr} = x \cdot G_q \cdot x^{tr},$$

dla dowolnego $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Definicja 1.3.4. Niech $q : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie jednolitym całkowitym funkcjonałem kwadratowym. \mathbb{Z} -**dwuliniową polaryzacją** funkcjonału q nazywamy funkcję $b_q : \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ zdefiniowaną w następujący sposób:

$$b_q(x, y) = x \cdot G_q \cdot y^{tr} = \frac{1}{2} \cdot [q(x + y) - q(x) - q(y)]$$

dla dowolnego $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{Z}^m$.

Przez $\mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ oznaczmy zbiór wszystkich jednolitych funkcjonałów kwadratowych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Definicja 1.3.5. (a) Niech $b, b' : \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ będą \mathbb{Z} -dwuliniowymi funkcjonałami kwadratowymi. Funkcjonał b nazywamy \mathbb{Z} -**dwuliniowo równoważnym** z b' (i piszemy $b \sim_{\mathbb{Z}} b'$), jeśli istnieje automorfizm grup $h : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ taki, że $b'(v, w) = b(h(v), h(w))$ dla dowolnych $v, w \in \mathbb{Z}^m$ oraz przemienny jest następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{b'} & \mathbb{Z} \\ h \times h \downarrow \simeq & \nearrow b & \\ \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m & & \end{array}$$

(b) Niech $q, q' : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ będą całkowitymi jednolitymi funkcjonałami kwadratowymi. Funkcjonał q nazywamy \mathbb{Z} -**równoważnym** z q' (i piszemy $q \sim_{\mathbb{Z}} q'$), jeśli istnieje automorfizm grup $h : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ taki, że $q'(v) = q(h(v))$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^m$ oraz przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{q'} & \mathbb{Z} \\ h \downarrow \simeq & \nearrow q & \\ \mathbb{Z}^m & & \end{array}$$

Następujący wniosek można znaleźć w [55, Lemma 2.8, p. 15].

Wniosek 1.3.6. Niech $b, b' : \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ będą \mathbb{Z} -dwuliniowymi funkcjonałami kwadratowymi takimi, że $b(v, w) = v \cdot A \cdot w^{tr}$, $b'(v, w) = v \cdot A' \cdot w^{tr}$, gdzie $A, A' \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$. Ponadto niech $h : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ będzie automorfizmem grup zdefiniowanym wzorem $h(v) := h_B(v) = v \cdot B$, dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^m$, gdzie $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$.

(a) Diagram z punktu (a) definicji 1.3.5 jest przemienny dla $b = b_A$ i $b' = b_{A'}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A' = B \cdot A \cdot B^{tr}$.

(b) Diagram z punktu (b) definicji 1.3.5 jest przemienny dla $q = q_A$ i $q_{A'}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G_{q'} = B \cdot G_q \cdot B^{tr}$, gdzie $h(x) := h_B(x) = x \cdot B$.

1.4. Funkcjonały Grama bigrafów, diagramy Dynkina oraz rozszerzone diagramy Dynkina

Rozdział 1.4 poświęcony jest podstawowym informacjom na temat funkcyjonałów Grama stowarzyszonych z bigrafami. Przypominamy m.in. definicję funkcyjonału Grama i funkcyjonału dwuliniowego Grama bigrafu, a także definicję zbioru pierwiastków z jedyńki \mathcal{R}_Δ i zera $\mathcal{R}_\Delta(0)$ bigrafu Δ [58, 55, 56]. Przytaczamy fakt, że zbiór pierwiastków (z jedyńki) dodatniego bigrafu bez pętli jest skończony [58, 55, 52]. W dalszej części tego rozdziału podajemy przykład dodatniego bigrafu, dla którego opisujemy jego zbiór pierwiastków z jedyńki.

W klasyfikacji nieujemnych i dodatnich bigrafów szczególną rolę odgrywają diagramy Dynkina oraz rozszerzone diagramy Dynkina (zwane także grafami Euklidesa) przypomniane w tym rozdziale (wraz z wielomianami Coxetera) [59, 58, 52, 55].

Definicja 1.4.1. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie bigrafem bez pętli o $n = |\Delta_0| \geq 1$ wierzchołkach oraz $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$.

(a) **Funkcyjonałem Grama** bigrafu Δ nazywamy funkcję $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowaną wzorem

$$q_\Delta(x) = q_\Delta(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j} d_{ij}^\Delta x_i x_j = x \cdot \check{G}_\Delta \cdot x^{tr},$$

zaś **funkcyjonałem dwuliniowym Grama** nazywamy funkcję $b_\Delta : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowaną w następujący sposób: $b_\Delta(x, y) = x \cdot \check{G}_\Delta \cdot y^{tr}$.

(b) Dla $d \in \mathbb{Z}$, zbiorem Δ -pierwiastków z d nazywamy zbiór

$$\mathcal{R}_\Delta(d) = \mathcal{R}_{q_\Delta}(d) = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = d\}.$$

(b1) Dla $d \in \mathbb{Z}$, zbiorem dodatnich Δ -pierwiastków z d nazywamy zbiór

$$\mathcal{R}_\Delta^+(d) = \mathcal{R}_{q_\Delta}^+(d) = \{v \in \mathbb{N}^n; q_\Delta(v) = d\}.$$

Przez $\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_{q_\Delta} = \mathcal{R}_\Delta(d = 1)$ i $\mathcal{R}_\Delta^+ = \mathcal{R}_{q_\Delta}^+ = \mathcal{R}_\Delta(d = 1)^+$ oznaczamy odpowiednio zbiór pierwiastków z jedyńki oraz zbiór dodatnich pierwiastków z jedyńki, zaś przez $\text{Ker } q_\Delta = \mathcal{R}_\Delta(d = 0)$ **jądro funkcyjonału** q_Δ , tzn. zbiór pierwiastków z zera.

(c) Jeśli bigraf Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} \neq 0$, to nazywamy go **głównym**.

(d) Wektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ taki, że $v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0$, nazywamy **wiernym**.

Lemat 1.4.2. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ oraz $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$ będzie ustalonym zbiorem wierzchołków.

(a) *Niesymetryczna macierz Grama \check{G}_Δ bigrafu Δ jest równa niesymetrycznej macierzy Grama funkcyjonału Grama q_Δ oraz $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{q_\Delta}(t)$, $\mathbf{c}_\Delta = \mathbf{c}_{q_\Delta}$, $b_\Delta(x, y) = b_{q_\Delta}(x, y)$.*

(b) *Dla $n \geq 2$, Δ jest dodatni (odp.: nieujemny) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcyjonał Grama $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni (odp.: nieujemny).*

(c) *Dla $n \geq 3$ następujące trzy warunki są równoważne:*

(c1) *bigraf Δ jest P-krytyczny,*

(c2) *Δ nie jest dodatni, zaś dla dowolnego $a \in \Delta_0$ bigraf $\Delta^{(a)}$ jest dodatni,*

(c3) funkcjonal Grama $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest P -krytyczny.

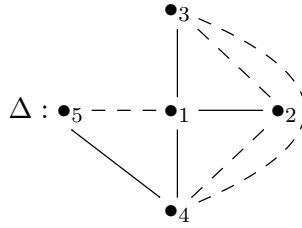
(d) Jeśli Δ jest dodatni lub P -krytyczny, to dowolny pełny (właściwy) podbigraf Δ' bigrafu Δ jest dodatni oraz $|\Delta'_1(i, j)| \leq 1$ dla dowolnych $i, j \in \Delta'_0$.

Dowód. Lemat ten można znaleźć w pracy [58, str. 834]. □

Lemat 1.4.3. Jeśli $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest spójnym oraz dodatnim bigrafem bez pętli o $|\Delta_0| = n \geq 1$ wierzchołkach, to zbiór \mathcal{R}_Δ pierwiastków z jedynki jest skończony.

Dowód. Dowód można znaleźć w pracy [55, Proposition 4.1]. □

Przykład 1.4.4. Niech Δ będzie następującym bigrafem:



Stosując kryterium Sylwestera (algorytm 4.1) sprawdzamy, że Δ jest dodatni. Zatem \mathcal{R}_Δ jest skończony i można go policzyć za pomocą algorytmu (4.1.15) ograniczonego zliczania opisanego w rozdziale 4.1. Oprócz zbioru pierwiastków z jedynki \mathcal{R}_Δ , przedstawiamy również niesymetryczną macierz Grama \check{G}_Δ , funkcjonal Grama q_Δ , wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ oraz liczbę Coxetera \mathbf{c}_Δ .

- $\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $\hat{1} = -1$,

- $q_\Delta(x) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - x_4x_5$,

- $\text{cox}_\Delta(t) = t^5 + t^3 + t^2 + 1$,

- $|\mathcal{R}_\Delta| = 40$, $\mathbf{c}_\Delta = 12$,

- $\mathcal{R}_\Delta = \{[-1, -1, -1, 1, 1], [-1, -1, 0, 0, 0], [-1, -1, 0, 0, 1], [-1, -1, 0, 1, 1], [-1, 0, -1, 0, 0], [-1, 0, -1, 0, 1], [-1, 0, -1, 1, 1], [-1, 0, 0, -1, 0], [-1, 0, 0, 0, 0], [-1, 0, 0, 0, 1], [0, -1, 0, 0, 0], [0, -1, 0, 1, 0], [0, -1, 0, 1, 1], [0, -1, 1, 0, 0], [0, 0, -1, 0, 0], [0, 0, -1, 1, 0], [0, 0, -1, 1, 1], [0, 0, 0, -1, -1], [0, 0, 0, -1, 0], [0, 0, 0, 0, -1], [0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1, 1], [0, 0, 1, -1, -1], [0, 0, 1, -1, 0], [0, 0, 1, 0, 0], [0, 1, -1, 0, 0], [0, 1, 0, -1, -1], [0, 1, 0, -1, 0], [0, 1, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 0, -1], [1, 0, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 1, 0], [1, 0, 1, -1, -1], [1, 0, 1, 0, -1], [1, 0, 1, 0, 0], [1, 1, 0, -1, -1], [1, 1, 0, 0, -1], [1, 1, 0, 0, 0], [1, 1, 1, -1, -1]\}$.

Przyporządkowanie $\Delta \mapsto q_\Delta$ definiuje bijekcję

$$(1.4.5) \quad q_\bullet : \mathcal{UBigr}_n \xrightarrow{1-1} \mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}).$$

Przy klasyfikacji spektralnej Coxetera dodatnich (odp.: P -krytycznych) bigrafów i posetów, szczególną rolę odgrywają diagramy Dynkina (odp. grafy Euklidesa) przedstawione w tabeli 1.4.8 (odp.: w tabeli 1.4.9).

Dowody następujących dwóch twierdzeń można znaleźć w pracach [58, Proposition 2.4] oraz [52].

Twierdzenie 1.4.6. *Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie spójnym grafem bez pętli o $|\Delta_0| = n \geq 1$ wierzchołkach. Następujące warunki są równoważne.*

- (a) *Graf Δ jest dodatni.*
- (b) *Dla dowolnego wektora $0 \neq v \in \mathbb{N}^n$ $q_\Delta(v) > 0$.*
- (c) *Dla dowolnego wektora $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ $q_\Delta(v) > 0$.*
- (d) *Graf Δ jest jednym z diagramów Dynkina przedstawionych w tabeli 1.4.8.*
- (e) *Graf Δ nie zawiera podgrafu izomorficznego z jednym z rozszerzonych diagramów Dynkina (diagramów Dynkina) przedstawionych w tabeli 1.4.9.*

Twierdzenie 1.4.7. *Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie spójnym grafem bez pętli o $|\Delta_0| = n \geq 1$ wierzchołkach. Następujące warunki są równoważne.*

- (a) *Graf Δ jest nieujemny.*
- (b) *Dla dowolnego wektora $0 \neq v \in \mathbb{N}^n$ funkcjonal $q_\Delta(v) \geq 0$.*
- (c) *Graf Δ jest jednym z diagramów Dynkina oraz Euklidesa przedstawionych w tabelach 1.4.8 oraz 1.4.9.*

TABELA 1.4.8. DIAGRAMY DYNKINA

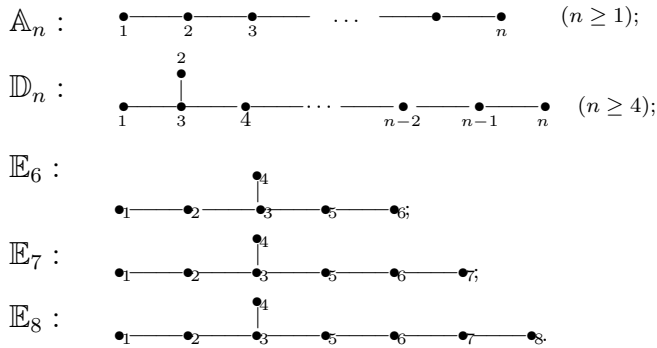
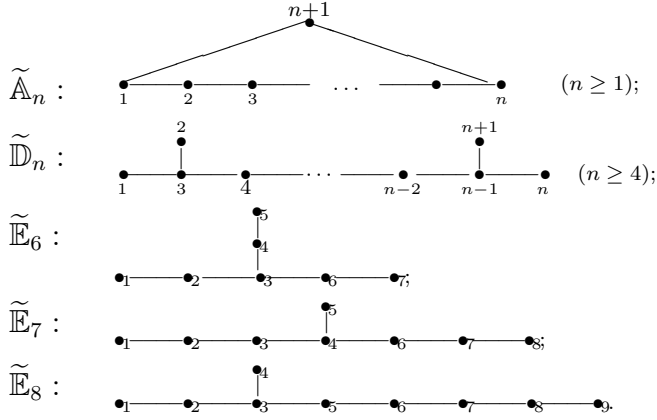


TABELA 1.4.9. ROZSZERZONE DIAGRAMY DYNKINA (GRAFY EUKLIDESY)



Lemat 1.4.10. (a) *Jeśli Δ jest diagramem Dynkina lub diagramem Euklidesa $\Delta \in \{\tilde{D}_n, n \geq 4, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$, to $\text{cox}_\Delta(t) = F_\Delta(t)$, gdzie*

$$F_\Delta(t) := \begin{cases} t^n + t^{n-1} + \dots + t^2 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = n + 1, & \text{dla } \Delta = \tilde{A}_n, n \geq 1, \\ t^n + t^{n-1} + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 2(n - 1), & \text{dla } \Delta = \tilde{D}_n, n \geq 4, \\ t^6 + t^5 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 12, & \text{dla } \Delta = \tilde{E}_6, \\ t^7 + t^6 - t^4 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 18, & \text{dla } \Delta = \tilde{E}_7, \\ t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 30, & \text{dla } \Delta = \tilde{E}_8. \end{cases}$$

$$F_\Delta(t) := \begin{cases} t^{n+1} + t^n - t^{n-1} - t^{n-2} - t^3 - t^2 + t + 1, & \text{dla } \Delta = \tilde{D}_n, n \geq 4, \\ t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1, & \text{dla } \Delta = \tilde{E}_6, \\ t^8 + t^7 - t^5 - 2t^4 - t^3 + t + 1, & \text{dla } \Delta = \tilde{E}_7, \\ t^9 + t^8 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1, & \text{dla } \Delta = \tilde{E}_8. \end{cases}$$

W przypadku $\Delta \in \{\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$ podajemy również liczbę Coxetera \mathbf{c}_Δ .

(b) *Jeśli $n \geq 1$ i $\Delta = \tilde{A}_n$, to wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ bigrafu Δ zależy od numeracji wierzchołków oraz jest jednym z wielomianów $F_\Delta^{(1)}(t), F_\Delta^{(2)}(t), \dots, F_\Delta^{(m_n)}(t)$, gdzie*

$$m_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{jeśli } n \text{ jest parzysta,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{jeśli } n+1 \text{ jest parzysta,} \end{cases}$$

$$F_\Delta^{(j)}(t) = t^{n+1} - t^{n-j+1} - t^j + 1, \quad \text{dla } j = 1, \dots, m_n.$$

Dowód. Patrz [58, Proposition 2.3], [33] oraz [58, Twierdzenie 1.9.23]. \square

1.5. Orbity Coxetera, oczka oraz kołczany oczkowe dla bigrafów

Celem tego rozdziału jest przedstawienie kilku podstawowych informacji dotyczących kołczanów (digrafów) oczkowych. Przypominamy definicję Φ_Δ -orbity, Φ_Δ -oczka oraz kołczanu

Φ_Δ -oczkowego bigrafu Δ (zobacz [56, 57, 55, 2]). Ponadto przytaczamy fakt (lemat 1.5.2), że transformacja Coxetera $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ zdefiniowana wzorem $\Phi_\Delta(x) = x \cdot \text{Cox}_\Delta$ przeprowadza pierwiastki w pierwiastki [55, 52].

Definicja 1.5.1. Niech $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie spójnym bigrafem o $|\Delta_0| = n$, zaś $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ transformacją Coxetera bigrafu Δ .

(a) $\Phi_\Delta(v)$ -**orbitą** wektora $v \in \mathbb{Z}^n$ nazywamy zbiór $\mathcal{O}\text{-}\Phi_\Delta(v) = \{\Phi_\Delta^m(v)\}_{m \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ i przedstawiamy go w następujący sposób:

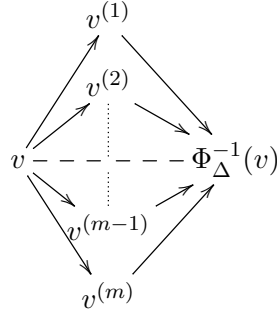
$$\dots - \Phi_\Delta^2(v) - \dots - \Phi_\Delta(v) - \dots - v - \dots - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \dots - \Phi_\Delta^{-2}(v) - \dots$$

(b) Φ_Δ - **oczkiem** w \mathbb{Z}^n nazywamy zbiór wektorów $v, \Phi_\Delta^{-1}(v), v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(s)} \in \mathbb{Z}^n$ spełniających następujące dwa warunki:

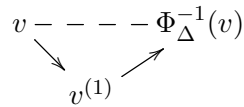
(b1) $v + \Phi_\Delta^{-1}(v) = v^{(1)} + v^{(2)} + \dots + v^{(s)},$

(b2) Wektory $v, v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$ należą do różnych Φ_Δ -orbit.

Zbiór wektorów spełniających warunki (b1) i (b2) przedstawiamy w postaci kołczanu (digrafu) na płaszczyźnie Euklidesa \mathbb{R}^2

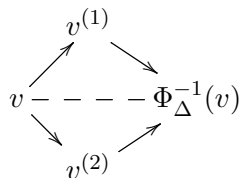


(c) Φ_Δ - oczkiem **szerokości jeden** nazywamy zbiór wektorów $v, \Phi_\Delta^{-1}(v), v^{(1)} \in \mathbb{Z}^n$ spełniających warunki (b1) i (b2), gdzie $v^{(1)} \neq 0$. Φ_Δ - oczko szerokości jeden przedstawiamy w następujący sposób:

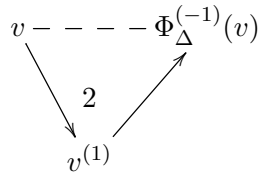


(d) Φ_Δ - oczkiem **szerokości dwa** nazywamy zbiór wektorów $v, \Phi_\Delta^{-1}(v), v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathbb{Z}^n$ spełniających (b1) i (b2), gdzie $v \neq 0, v^{(1)} \neq 0, v^{(2)} \neq 0$. Φ_Δ - oczko szerokości dwa przedstawiamy w następujący sposób:

(d1) w przypadku, gdy $v^{(1)} \neq v^{(2)}$:

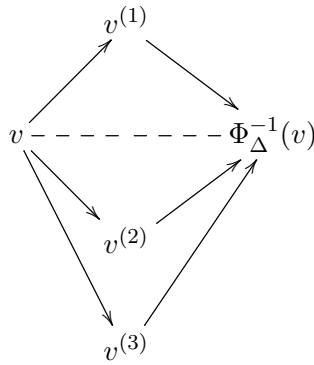


(d2) zaś w przypadku, gdy $v^{(1)} = v^{(2)} \neq 0$:

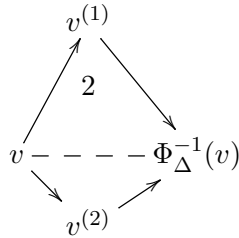


(e) Φ_{Δ} -oczkami **szerokości trzy** nazywamy zbiór wektorów $v, \Phi_{\Delta}^{-1}(v), v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)} \in \mathbb{Z}^n$ spełniających (b1) i (b2), gdzie $v \neq 0, v^{(1)} \neq 0, v^{(2)} \neq 0, v^{(3)} \neq 0$. Φ_{Δ} -oczko szerokości trzy przedstawiamy w następujący sposób:

(e1) w przypadku, gdy $v^{(1)} \neq v^{(2)} \neq v^{(3)}$:



(e2) w przypadku, gdy $v^{(1)} = v^{(3)}$:



Lemat 1.5.2. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie spójnym bigrafem, gdzie $|\Delta_0| = n \geq 2$, zaś $\mathcal{R}_{q_{\Delta}} = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_{\Delta}(v) = 1\}$ zbiorem pierwiastków bigrafu Δ . Ponadto niech $\Phi_{\Delta} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ będzie transformacją Coxetera bigrafu Δ .

(a) Jeśli $v \in \mathcal{R}_{q_{\Delta}}$, to $\Phi(v) \in \mathcal{R}_{q_{\Delta}}$.

(a) Jeśli Δ jest dodatni, to liczba Coxetera \mathbf{c}_{Δ} bigrafu Δ jest skończona oraz $\mathbf{c}_{\Delta} \geq 2$.

Dowód. Dowód można znaleźć w pracy [55, Proposition 4.3]. □

Definicja 1.5.3. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie spójnym bigrafem, gdzie $|\Delta_0| = n$, zaś $\mathcal{R}_{q_{\Delta}} = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_{\Delta}(v) = 1\}$ zbiorem pierwiastków bigrafu Δ . Ponadto niech $\Phi_{\Delta} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ będzie transformacją Coxetera bigrafu Δ .

(a) Mówimy, że \mathcal{R}_Δ ma strukturę **Φ_Δ -oczkowego systemu pierwiastków** (lub **Φ_Δ -sieciowego systemu pierwiastków**), jeśli Φ_Δ -orbity zbioru pierwiastków \mathcal{R}_Δ tworzą Φ_Δ -oczkowy kołczan (digraf) $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$ [55, 56, 57] składający się z Φ_Δ -oczek powstałych z Φ_Δ -orbit zbioru \mathcal{R}_Δ .

(b) Mówimy, że \mathcal{R}_Δ indukuje Φ_Δ -oczkową geometrię pierwiastków $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ w \mathbb{Z}^n , jeśli istnieje minimalny Φ_Δ -niezmienniczy podzbiór $\widehat{\mathcal{R}}_\Delta \subset \mathbb{Z}^n$ zawierający \mathcal{R}_Δ taki, że

(b1) zbiór Φ_Δ -orbit w $\widehat{\mathcal{R}}_\Delta$ ma strukturę Φ_Δ -oczkowego kołczanu $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ zawierającego Φ_Δ -oczek szerokości co najwyżej trzy oraz

(b2) podkołczan kołczanu $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ zawierający wszystkie Φ_Δ -orbity ze zbioru \mathcal{R}_Δ jest spójny.

Algorytmy konstruujące kołczany Φ_Δ -oczkowe $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$ dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych zostały opisane w pracach [55, Proposition 4.5], [56, Lemma 4.6] oraz w [57, Algorithm 4.8.2], patrz rozdział 4.2.

2. Klasyfikacja spektralna Coxetera P -krytycznych bigrafów

Celem tego rozdziału jest klasyfikacja bigrafów z pewnymi warunkami nieujemności (P -krytycznych bigrafów) w terminach spektrum Coxetera. Definiujemy prawe działanie $*$: $\mathcal{Bigr}_n \times O(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{Bigr}_n$ grupy ortogonalnej $O(n, \mathbb{Z})$ na bigrafach $\Delta \in \mathcal{Bigr}_n$ o $n \geq 1$ wierzchołkach oraz podajemy klasyfikację P -krytycznych bigrafów z dokładnością do tego działania. Przedstawiamy charakteryzację P -krytycznych bigrafów, m.in. pokazujemy, że dla bigrafów $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ o $|\Delta_0| = n \geq 3$ wierzchołkach bez pętli następujące warunki są równoważne: (a) bigraf Δ jest P -krytyczny, (b) bigraf Δ jest nieujemny i $\text{Ker } q_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ jest wiernym wektorem, tj. $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$. Dowodzimy również, że zbiór pierwiastków (z jedyńki) dla P -krytycznych bigrafów Δ , tzn. $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 1\}$, jest nieskończony. Pokazujemy, że spójny bigraf bez pętli jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jego pierwiastków \mathcal{R}_{q_Δ} jest skończony.

Przedstawiamy związek P -krytycznych bigrafów ze spójnymi dodatnimi bigrafami i ich wiernymi pierwiastkami, czyli wektorami v takimi, że $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{R}_\Delta$ oraz $v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0$. W rozdziale tym podajemy również algorytm konstruujący P -krytyczne bigrafy o $n+1$ wierzchołkach z dodatnich bigrafów o n wierzchołkach i ich wiernych pierwiastków. Dla P -krytycznych bigrafów Δ o $n \leq 10$ wierzchołkach przedstawiamy również pełną listę wielomianów Coxetera wraz z dodatkowymi parametrami.

2.1. Charakteryzacja P -krytycznych bigrafów

Bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, o $|\Delta_0| = n \geq 2$, nazywamy **krytycznym** jeśli nie jest słabo dodatni, zaś pełne podbigrafy (właściwe) $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n)}$ bigrafu Δ są słabo dodatnie. Bigrafy (funkcjonały) krytyczne zostały scharakteryzowane przez Ovsienkę w [38], zobacz także [59, Section XIV.1] oraz [49, str. 3]. Pokazano tam m.in., że jeśli bigraf Δ o $|\Delta_0| \geq 3$ jest krytyczny, to Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ jest wiernym i dodatnim wektorem. Ponadto w oparciu o wyniki von Höhne [26], współrzędne wektora \mathbf{h} są ograniczone w następujący sposób: dla dowolnego $i \leq n$, $1 \leq h_i \leq 6$ oraz istnieje $1 \leq s \leq n$ takie, że $h_s \in \{-1, +1\}$.

W pracy [8] V. M. Bondarenko i A.M. Polishchuck rozważają posety krytyczne ze względu na dodatniość (zobacz także [10]). P -krytyczne oraz krytyczne bigrafy i posety mają szereg zastosowań w teorii reprezentacji grup, algebr i posetów, zobacz [51, 7, 18, 37, 53, 2, 59, 54, 3, 4, 33, 40].

P -krytyczne bigrafy stanowią szerszą klasę niż krytyczne bigrafy. Jeśli bigraf jest krytyczny, to jest P -krytyczny. Odwrotna implikacja zwykle nie jest prawdziwa (zobacz przykład 2.1.0).

W [35] podaliśmy charakteryzację P -krytycznych (jednolitych) funkcyjonałów kwadratowych oraz algorytm konstruujący P -krytyczne funkcyjonały kwadratowe $q : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ z dodatnich (jednolitych) funkcyjonałów kwadratowych $p : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz ich wiernych pierwiastków.

Celem tego rozdziału jest charakteryzacja P -krytycznych bigrafów. Dowodzimy, że dla spójnych bigrafów $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ o $|\Delta_0| = n \geq 3$ wierzchołkach następujące warunki są

równoważne.

(a) Bigraf Δ jest P -krytyczny.

(b) Bigraf Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ jest wiernym wektorem (tj. $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$) takim, że $6 \geq h_j \geq -6$ dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$ oraz istnieje $s \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $h_s \in \{-1, 1\}$.

(c) Zbiór pierwiastków

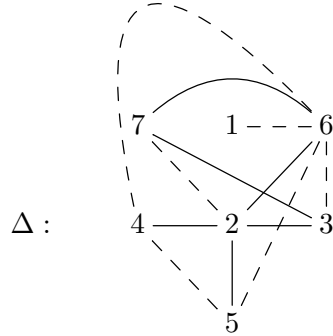
$$\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 1\}$$

bigrafu Δ jest nieskończony, zaś zbiory pierwiastków $\mathcal{R}_{\Delta^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{\Delta^{(n)}}$ pełnych podbigrafów $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n)}$ bigrafu Δ są skończone.

(d) Istnieje graf Euklidesa $\tilde{\Delta} \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ oraz izomorfizm grup $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ taki, że $q_\Delta \circ T$ jest funkcjonałem Grama $q_{\tilde{\Delta}} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ grafu Euklidesa $\tilde{\Delta}$ o $n = |\tilde{\Delta}_0|$ wierzchołkach. Ponadto T przeprowadza wierny wektor $\mathbf{h}' \in \text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$ w wierny wektor $\tilde{\mathbf{h}} \in \text{Ker } q_\Delta$.

Przedstawiamy teraz przykład P -krytycznego bigrafu, który nie jest krytyczny.

Przykład 2.1.0. Niech Δ będzie następującym bigrafem:



$$\bullet \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \hat{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \hat{1} = -1;$$

• Stosując algorytmy opisane w rozdziale 4 sprawdzamy, że Δ jest P -krytyczny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 1, -2, -1)$.

$$\bullet q_\Delta(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 - x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 - x_6x_7 = (x_1 + \frac{1}{2}x_6)^2 + \frac{2}{3} \cdot (x_2 - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_7)^2 + \frac{5}{8} \cdot (x_3 + \frac{3}{5}x_6 - \frac{1}{5}x_7)^2 + (-\frac{1}{2}x_2 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6)^2 + \frac{3}{4} \cdot (-\frac{1}{3}x_2 + x_5 + \frac{1}{3}x_6)^2 + \frac{3}{20} \cdot (x_6 - 2x_7)^2.$$

• Z postaci q_Δ wynika, że Δ jest słabo dodatni, tzn. dla dowolnego $0 \neq v \in \mathbb{N}^7$ $q_\Delta(v) > 0$. Zatem Δ nie jest krytyczny, ale jest P -krytyczny.

Lemat 2.1.1. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$, $n = |\Delta_0| \geq 3$, zaś $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcjonałem Grama bigrafu Δ . Ponadto niech $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ będzie niezerowym wektorem takim, że $q_\Delta(\mathbf{h}) \leq 0$ oraz norma $\|\mathbf{h}\| := |h_1| + \dots + |h_n|$ jest minimalna.

(a) Jeśli q_Δ jest P -krytyczny (tj. Δ jest P -krytycznym bigrafem) lub jest krytyczny (tzn. Δ jest krytycznym bigrafem) i \mathbf{h} jest dodatni, to q_Δ jest nieujemny (tj. Δ jest nieujemnym bigrafem), $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ oraz \mathbf{h} jest wiernym wektorem. Jeśli q_Δ jest krytyczny, to wektor \mathbf{h} jest dodatni (tzn. $h_i > 0$ dla dowolnego $1 \leq i \leq n$).

(b) Jeśli q_Δ jest P -krytyczny, to następujące trzy warunki są równoważne:

- (b1) q_Δ jest słabo dodatni,
- (b2) wierne wektory \mathbf{h} i $-\mathbf{h}$ nie są dodatnie,
- (b3) q_Δ nie jest krytyczny.

Dowód. Idea dowodu lematu 2.1.1 oraz twierdzenia 2.1 jest analogiczna do dowodu twierdzenia Ovsienki [38] podanego w [59, Theorem 1.3] (zobacz także [49, str. 30]).

Niech $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ będzie całkowitym wektorem. Dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$ przez $v^{(j)}$ oznaczamy wektor

$$v^{(j)} := (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Niech b_{q_Δ} będzie \mathbb{Z} -dwuliniową polaryzacją funkcjonału Grama q_Δ bigrafu Δ .

(a) Załóżmy, że $n \geq 3$, zaś q_Δ jest funkcjonałem Grama bigrafu Δ bez pętli. Niech $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ będzie niezerowym wektorem takim, że $q_\Delta(\mathbf{h}) \leq 0$ oraz norma $\|\mathbf{h}\|$ jest minimalna. Ponadto $q_\Delta(\mathbf{h}) = q_\Delta(-\mathbf{h})$. Dla uproszczenia zapisu załóżmy, że istnieje $s \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $h_1 \geq 0, \dots, h_s \geq 0, h_{s+1} \leq 0, \dots, h_n \leq 0$ i $\mathbf{h} \neq 0$.

1° Pokażemy najpierw, że \mathbf{h} jest wiernym wektorem, tzn. $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$. Załóżmy przez sprzeczność, że $h_j = 0$ dla pewnego $j \leq n$. Jeśli q_Δ jest P -krytyczny, to $q_\Delta^{(1)}, \dots, q_\Delta^{(n)}$ są dodatnie, $n \geq 3$, $\mathbf{h} \neq 0$ oraz $0 < q_\Delta^{(j)}(\mathbf{h}^{(j)}) = q_\Delta(\mathbf{h}) \leq 0$. Dostajemy więc sprzeczność. Jeśli q_Δ jest krytyczny i \mathbf{h} jest dodatni, to $q_\Delta^{(1)}, \dots, q_\Delta^{(n)}$ są słabo dodatnie, $s = n$ oraz $0 < q_\Delta^{(j)}(\mathbf{h}^{(j)}) = q_\Delta(\mathbf{h}) \leq 0$.

Zatem \mathbf{h} jest wiernym wektorem oraz $h_1 \geq 1, \dots, h_s \geq 1, h_{s+1} \leq -1, \dots, h_n \leq -1$, $\|\mathbf{h}\| = h_1 + \dots + h_s - (h_{s+1} + \dots + h_n)$. Jeśli wektor \mathbf{h} jest dodatni, to $s = n$.

2° Udowodnimy teraz, że $q_\Delta(\mathbf{h} - e_i) \geq 1$ i $q_\Delta(\mathbf{h} + e_j) \geq 1$ dla dowolnego $i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{s+1, \dots, n\}$.

Załóżmy, że q_Δ jest P -krytyczny. Jeśli $h_i = 1$ lub $h_j = -1$, to $\mathbf{h} - e_i \neq 0$, $\mathbf{h} + e_j \neq 0$, $q_\Delta(\mathbf{h} - e_i) = q_\Delta^{(i)}(\mathbf{h}^{(i)}) > 0$ oraz $q_\Delta(\mathbf{h} + e_j) = q_\Delta^{(j)}(\mathbf{h}^{(j)}) > 0$, gdyż $q_\Delta^{(1)}, \dots, q_\Delta^{(n)}$ są dodatnie. Jeśli $h_i > 1$ lub $h_j < -1$, to $\|\mathbf{h} - e_i\| < \|\mathbf{h}\|$, $\|\mathbf{h} + e_j\| < \|\mathbf{h}\|$ i $q_\Delta(\mathbf{h} - e_i) > 0$, $q_\Delta(\mathbf{h} + e_j) > 0$. W przeciwnym razie mielibyśmy sprzeczność z minimalnością normy $\|\mathbf{h}\|$.

Załóżmy, że q_Δ jest krytyczny oraz \mathbf{h} jest dodatni. Wtedy $s = n$ i jeśli $h_i = 1$, to $q_\Delta(\mathbf{h} - e_i) = q_\Delta^{(i)}(\mathbf{h}^{(i)}) > 0$, gdyż $\mathbf{h}^{(i)}$ jest dodatni. Ponadto $q_\Delta^{(i)}$ jest słabo dodatni. Jeśli $h_i > 1$, to $\|\mathbf{h} - e_i\| < \|\mathbf{h}\|$ i $q_\Delta(\mathbf{h} - e_i) > 0$. W przeciwnym wypadku mielibyśmy sprzeczność z minimalnością normy $\|\mathbf{h}\|$.

3° Korzystając z punktu 2° pokażemy, że $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$. Na podstawie punktu 2° prawdziwe są następujące nierówności:

$$\begin{aligned} 1 &\leq q_\Delta(\mathbf{h} - e_i) = q_\Delta(\mathbf{h}) + q_\Delta(e_i) - 2b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_i) \text{ dla dowolnego } i \in \{1, \dots, s\}, \\ 1 &\leq q_\Delta(\mathbf{h} + e_j) = q_\Delta(\mathbf{h}) + q_\Delta(e_j) + 2b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_j) \text{ dla dowolnego } j \in \{s+1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Ponieważ e_i jest Δ -pierwiastkiem bigrafu bez pętli, tzn. $q_\Delta(e_i) = 1$ oraz $2b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_1), \dots, 2b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_n), q_\Delta(\mathbf{h})$ są liczbami całkowitymi, więc prawdziwe są następujące

nierówności: $2b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_i) < q_\Delta(\mathbf{h}) + 1$ dla $i \leq s$ oraz $-2b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_j) < q_\Delta(\mathbf{h}) + 1$ dla $j \geq s + 1$.
Zatem

$$(*) \quad 2b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_i) \leq q_\Delta(\mathbf{h}) \leq 0, \text{ jeśli } h_i \geq 1 \text{ oraz } -2b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_j) \leq q_\Delta(\mathbf{h}) \leq 0 \text{ jeśli } h_j \geq 1.$$

Na podstawie nierówności $h_1 \geq 1, \dots, h_s \geq 1, h_{s+1} \leq -1, \dots, h_n \leq -1$ oraz $(*)$ otrzymujemy

$$(**) \quad 2h_j \cdot b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_j) \leq h_j \cdot q_\Delta(\mathbf{h}), \text{ jeśli } h_j > 0 \text{ oraz } 2h_j \cdot b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_j) \leq -h_j \cdot q_\Delta(\mathbf{h}), \text{ jeśli } h_j < 0.$$

Z $(**)$ wynikają następujące nierówności:

$$\begin{aligned} 2q_\Delta(\mathbf{h}) &= 2b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 2b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, \sum_{j=1}^n h_j \cdot e_j) = \sum_{j=1}^n 2h_j \cdot b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_j) \leq \\ &\leq h_1 \cdot q_\Delta(\mathbf{h}) + \dots + h_s \cdot q_\Delta(\mathbf{h}) - h_{s+1} \cdot q_\Delta(\mathbf{h}) - \dots - h_n \cdot q_\Delta(\mathbf{h}) = \\ &= (h_1 + \dots + h_s - h_{s+1} - \dots - h_n) \cdot q_\Delta(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\| \cdot q_\Delta(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

W rezultacie otrzymujemy $2q_\Delta(\mathbf{h}) \leq \|\mathbf{h}\| \cdot q_\Delta(\mathbf{h})$. Wiemy, że prawdziwa jest nierówność $q_\Delta(\mathbf{h}) \leq 0$. Pokażemy, że $q_\Delta(\mathbf{h}) = 0$. Załóżmy przez sprzeczność, że $q_\Delta(\mathbf{h}) < 0$. Dzieląc obie strony nierówności $2q_\Delta(\mathbf{h}) \leq \|\mathbf{h}\| \cdot q_\Delta(\mathbf{h})$ przez $q_\Delta(\mathbf{h}) < 0$ otrzymujemy $2 \geq \|\mathbf{h}\| \geq n \geq 3$. Zatem wektor \mathbf{h} należy do jądra $\text{Ker } q_\Delta$, tzn. $q_\Delta(\mathbf{h}) = 0$.

4° Pokażemy teraz, że $b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, -) = 0$. Na podstawie punktu 3° $q_\Delta(\mathbf{h}) = 0$ oraz prawdziwa jest następująca nierówność:

$$0 = q_\Delta(\mathbf{h}) = b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = h_1 \cdot b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_1) + \dots + h_n \cdot b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_n) \leq 0.$$

Z nierówności przedstawionych w $(**)$ oraz $q_\Delta(\mathbf{h}) = 0$ wynikają następujące nierówności:

$$h_r \cdot b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_r) \leq 0, \text{ dla dowolnego } r \in \{1, \dots, n\}.$$

Ponieważ $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$, więc $b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, e_n) = 0$ i w konsekwencji $b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, -) = 0$.

5° Udowodnimy teraz, że q_Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem.

Niech $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ będzie dowolnym wektorem takim, że $q_\Delta(w) \leq 0$. Pokażemy, że wektor w należy do jądra $\text{Ker } q_\Delta$, tzn. $w \in \text{Ker } q_\Delta$.

Założmy, że q_Δ jest P -krytyczny, wtedy $q_\Delta^{(1)}$ jest dodatni. Niech $v := h_1 w - w_1 \mathbf{h}$. Wówczas pierwsza współrzędna wektora v jest zerowa, tj. $v_1 = 0$. Z dodatniości funkcjonału $q_\Delta^{(1)}$ oraz wyboru wektora w wynikają następujące nierówności:

$$\begin{aligned} 0 &\leq q_\Delta^{(1)}(v^{(1)}) = q_\Delta(v) = q_\Delta(h_1 \cdot w - w_1 \cdot \mathbf{h}) = \\ &= q_\Delta(h_1 \cdot w) + q_\Delta(w_1 \cdot \mathbf{h}) - 2 \cdot h_1 \cdot w_1 \cdot b_{q_\Delta}(w, \mathbf{h}) = \\ &= h_1^2 \cdot q_\Delta(w) + w_1^2 \cdot q_\Delta(\mathbf{h}) - 2 \cdot h_1 \cdot w_1 \cdot b_{q_\Delta}(w, \mathbf{h}) = \\ &= h_1^2 \cdot q_\Delta(w) \leq 0 \end{aligned}$$

Zatem q_Δ jest nieujemny oraz $q_\Delta^{(1)}(v^{(1)}) = 0$. Z faktu, że $q_\Delta^{(1)}$ jest dodatni oraz z wynikającej z punktu 4° równości $b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, -) = 0$ otrzymujemy $v^{(1)} = 0, v = 0$. Ponieważ wektor v jest zerowy, więc wektor w ma następującą postać:

$$(***) \quad w = \frac{w_1}{h_1} \cdot \mathbf{h}.$$

Pozostaje pokazać, że $\frac{w_1}{h_1} \in \mathbb{Z}$. W tym celu przedstawiamy ułamek $\frac{w_1}{h_1}$ w nieskracalnej postaci, tzn. $\frac{w_1}{h_1} = \frac{p}{m}$, gdzie $p, m \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze i $m \geq 1$. Z równości (***) wynika równość $w \cdot m = p \cdot \mathbf{h}$. Ponieważ p i m są względnie pierwsze, więc wszystkie współrzędne wektora $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ są podzielne przez m . Zatem istnieje wektor $h' \in \mathbb{Z}^n$ taki, że $\mathbf{h} = m \cdot h'$. Wówczas zachodzą następujące równości: $0 = q_\Delta(\mathbf{h}) = q_\Delta(m \cdot h') = m^2 \cdot q_\Delta(h')$ oraz $\|\mathbf{h}\| = m \cdot \|h'\|$. Stąd wynika, że $m = 1$, gdyż w przeciwnym wypadku $\|\mathbf{h}\| > \|h'\|$, co przeczy minimalności wyboru wektora $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$. W przypadku, gdy q_Δ jest krytyczny oraz \mathbf{h} jest dodatni, dowód punktu 5° jest analogiczny.

(b) Na podstawie punktu (a), q_Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem. Jeśli q_Δ jest P -krytyczny i nie jest krytyczny, to wektory $\mathbf{h}, -\mathbf{h}$ są wierne, ale nie są dodatnie. Wynika to z twierdzenia Ovsienki dla krytycznych bigrafów [38] i kończy dowód implikacji (b3) \Rightarrow (b2).

(b2) \Rightarrow (b1) Ponieważ q_Δ jest P -krytyczny, więc na podstawie punktu (a) q_Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem. Jeśli ponadto wektory $\mathbf{h}, -\mathbf{h}$ nie są dodatnie, to q_Δ nie jest krytyczny na podstawie [38] oraz punktu (a).

Implikacja (b1) \Rightarrow (b3) jest oczywista i wynika z definicji krytyczności q_Δ . \square

Niech $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, gdzie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ oraz $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie bigrafem o $|\Delta_0| = n$ wierzchołkach. Definiujemy $q_\Delta * \varepsilon : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ w następujący sposób: $(q_\Delta * \varepsilon)(x_1, \dots, x_n) = q_\Delta(\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n)$. Operacja ta na bigrafie zostanie opisana w rozdziale 2.2.

Twierdzenie 2.1.2. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$, $|\Delta_0| = n \geq 2$ i $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcjonalem Grama bigrafu Δ .

1° Następujące warunki są równoważne.

(a) Bigraf Δ jest P -krytyczny.

(b) Albo Δ jest krytyczny, albo jest P -krytyczny i słabo dodatni.

(c) Istnieje $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, gdzie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ taki, że $q_\Delta * \varepsilon$ jest krytyczny.

(d) Prawdziwy jest jeden z następujących dwóch warunków:

(d1) Δ nie jest słabo dodatni, zbiór $\mathcal{R}_{q_\Delta}^+$ jest nieskończony, zaś zbiory $\mathcal{R}_{q_\Delta}^{+(1)}, \dots, \mathcal{R}_{q_\Delta}^{+(n)}$ są skończone.

(d2) Δ jest słabo dodatni, zbiór \mathcal{R}_{q_Δ} jest nieskończony, zaś zbiory $\mathcal{R}_{q_\Delta}^{(1)}, \dots, \mathcal{R}_{q_\Delta}^{(n)}$ są skończone.

2° Jeśli $n = 2$, to każdy z warunków (a)-(d) jest równoważny z następującym warunkiem:

(a1) Albo Δ nie jest słabo dodatni i $d_{12}^\Delta \leq -2$, albo Δ jest słabo dodatni i $d_{12}^\Delta \geq 2$.

3° Jeśli $n \geq 3$, to każdy z warunków (a)-(d) jest równoważny z każdym z następujących warunków:

(e) Bigraf Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem.

(e1) Bigraf Δ jest główny oraz istnieje wierny wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ oraz $s \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, $h_s \in \{-1, 1\}$ oraz $-6 \leq h_j \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$.

(e2) Bigraf Δ jest nieujemny, istnieje wierny wektor \mathbf{h} taki, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ oraz $h_1 \geq 1$. Ponadto

- bigraf Δ nie jest słabo dodatni (tzn. Δ jest krytyczny) wtedy i tylko wtedy, gdy \mathbf{h} jest dodatni i

- bigraf Δ jest słabo dodatni (tzn. Δ nie jest krytyczny) wtedy i tylko wtedy, gdy \mathbf{h} nie jest dodatni.

(f) Istnieje graf Euklidesa $\tilde{\Delta} \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ przedstawiony w tabeli 1.4.9 oraz izomorfizm grup $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ taki, że $q_{\tilde{\Delta}} \circ T$ jest funkcjonałem Grama $q_{\tilde{\Delta}} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ grafu Euklidesa $\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1)$ o $|\tilde{\Delta}_0| = n$ wierzchołkach. Ponadto T przeprowadza wierny wektor $\mathbf{h}' \in \text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$ na wektor wierny.

Dowód. Niech $n = 2$. Wtedy $q_{\Delta}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + d_{12}^{\Delta} x_1 x_2$, zaś $q_{\Delta}^{(1)}(x_2) = x_2^2$, $q_{\Delta}^{(2)}(x_1) = x_1^2$. Łatwo widać, że zbiory pierwiastków dla $q_{\Delta}^{(1)}$, $q_{\Delta}^{(2)}$ są skończone oraz $|\mathcal{R}_{q_{\Delta}^{(1)}}| = |\mathcal{R}_{q_{\Delta}^{(2)}}| = 2$ i $|\mathcal{R}_{q_{\Delta}^{(1)}}^+| = |\mathcal{R}_{q_{\Delta}^{(2)}}^+| = 1$. Ponieważ $q_{\Delta}(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2 > 0$, $q_{\Delta}(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2 = (v_1 + \frac{1}{2}v_2)^2 + \frac{3}{4}v_2^2 > 0$, $q_{\Delta}(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2 = (v_1 - \frac{1}{2}v_2)^2 + \frac{3}{4}v_2^2 > 0$ dla dowolnego $0 \neq v \in \mathbb{Z}^2$, więc funkcjonal $q_{\Delta}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + d_{12}^{\Delta} x_1 x_2$ jest dodatni dla $d_{12}^{\Delta} \in \{-1, 0, 1\}$. Ponadto jeśli $|d_{12}^{\Delta}| \geq 2$, to $q_{\Delta}(x)$ nie jest dodatni, gdyż $q_{\Delta}(-1, \frac{d_{12}^{\Delta}}{2}) = 1 - \frac{d_{12}^{\Delta 2}}{4} \leq 0$.

Stąd łatwo wynika, że

(i) q_{Δ} jest P -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $|d_{12}^{\Delta}| \geq 2$ oraz

(j) q_{Δ} jest krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $d_{12}^{\Delta} \leq -2$.

Zatem prawdziwe są następujące równoważności: (a) \iff (b) \iff (a1) \iff (c).

Udowodnimy teraz implikację (b) \implies (d) dla $n = 2$.

Założmy najpierw, że q_{Δ} jest P -krytyczny i słabo dodatni. Na podstawie punktu (i) $|d_{12}^{\Delta}| \geq 2$. Rozważmy nieskończony ciąg $w^{(0)}, \dots, w^{(m)}, \dots$ zdefiniowany za pomocą następującego wzoru rekurencyjnego:

$$w^{(m)} = \begin{cases} (1, 0) & \text{dla } m = 0 \\ (d_{12}^{\Delta}, -1) & \text{dla } m = 1. \\ d_{12}^{\Delta} w^{(m-1)} - w^{(m-2)} & \text{dla } m \geq 2 \end{cases}$$

Łatwo widać, że $q_{\Delta}(w^{(0)}) = q_{\Delta}(1, 0) = 1$, $q_{\Delta}(w^{(1)}) = q_{\Delta}(d_{12}^{\Delta}, -1) = 1$ oraz $q_{\Delta}(w^{(2)}) = 1$, bo $w^{(2)} = ((d_{12}^{\Delta})^2 - 1, -d_{12}^{\Delta})$. Korzystając z zasady indukcji matematycznej względem $m \geq 3$ można pokazać, że $q_{\Delta}(w^{(m)}) = 1$ dla dowolnego $m \geq 3$. Ponieważ wektory $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(m)}, \dots$ są parami różne oraz należą do zbioru $\mathcal{R}_{q_{\Delta}}$, więc zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{q_{\Delta}}$ jest nieskończony, co kończy dowód (d2).

Założmy teraz, że q_{Δ} jest krytyczny, nie jest więc słabo dodatni. Na podstawie punktu (j) $d_{12}^{\Delta} \leq -2$. Wówczas zbiór dodatnich Δ -pierwiastków $\mathcal{R}_{q_{\Delta}}^+$ zawiera nieskończony ciąg $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}, \dots$ zdefiniowany w następujący sposób: $u^{(m)} = w^{(2m)}$ dla dowolnego $m \geq 0$. Wtedy wektory $u^{(0)} = (1, 0)$, $u^{(1)} = w^{(2)} = ((d_{12}^{\Delta})^2 - 1, -d_{12}^{\Delta})$ są dodatnie, gdyż $d_{12}^{\Delta} \leq -2$. Stosując zasadę indukcji matematycznej dla $m \geq 2$ można pokazać, że $u^{(m)}$ jest dodatni dla dowolnego $m \geq 2$. Stąd wynika, że $\mathcal{R}_{q_{\Delta}}^+$ jest nieskończony i zachodzi (d1).

Aby udowodnić implikację (d) \implies (b) założmy, że zachodzi (d2), tzn. $\mathcal{R}_{q_{\Delta}}$ jest nieskończony, zaś zbiory $\mathcal{R}_{q_{\Delta}^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q_{\Delta}^{(n)}}$ są skończone. Ponieważ zbiór $\mathcal{R}_{q_{\Delta}}$ jest nieskończony, więc $|d_{12}^{\Delta}| \geq 2$. Zatem na podstawie (i) punkt (b) jest prawdziwy, gdyż dla $d_{12}^{\Delta} \in \{-1, 0, 1\}$ zbiory $\mathcal{R}_{q_{\Delta}}$ są skończone. Jeśli $d_{12}^{\Delta} = 0$, to $|\mathcal{R}_{q_{\Delta}}| = 4$. Jeśli $|d_{12}^{\Delta}| = 1$, to $|\mathcal{R}_{q_{\Delta}}| = 6$. Dowód implikacji (d1) \implies (b) jest analogiczny, co kończy dowód (d) \implies (b) dla $n = 2$.

Założmy, że $n \geq 3$. Aby udowodnić implikację (a) \implies (e) założmy, że q_{Δ} jest P -krytyczny. Wtedy q_{Δ} nie jest dodatni, więc istnieje niezerowy wektor \mathbf{h} taki, że $q_{\Delta}(\mathbf{h}) \leq 0$. Zatem dowód punktu (e) wynika z lematu 2.1.1.

(e) \implies (a) Założmy, że q_{Δ} jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_{\Delta} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem. Ponieważ q_{Δ} jest nieujemny, więc $q_{\Delta}^{(1)}, \dots, q_{\Delta}^{(n)}$ są nieujemne. Ponadto wiemy, że

q_Δ nie jest dodatni, gdyż $q_\Delta(\mathbf{h}) = 0$, gdzie $\mathbf{h} \neq 0$. Aby pokazać, że $q_\Delta^{(1)}, \dots, q_\Delta^{(n)}$ są dodatnie pokażemy, że $\text{Ker } q_\Delta^{(j)} = 0$ dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$.

Założmy, że $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ jest wektorem takim, że $q_\Delta^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$. Wtedy $0 = q_\Delta^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = q_\Delta(\tilde{v})$, gdzie $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \dots, v_n)$. Wówczas $\tilde{v} \in \text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Stąd wynika, że $\tilde{v} = \lambda \cdot \mathbf{h}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{Z}$. Zatem prawdziwa jest następująca równość: $0 = \lambda \cdot h_j$. Ponieważ $h_j \neq 0$, więc $\lambda = 0$. W rezultacie następujące wektory są zerowe: $\tilde{v} = 0$ i $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$. Zatem $q_\Delta^{(1)}, \dots, q_\Delta^{(n)}$ są dodatnie oraz q_Δ jest P -krytyczny.

(e) \implies (b) Założmy, że q_Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem. Ponadto niech $h_1 > 0$. Jeśli \mathbf{h} jest dodatni, to q_Δ nie jest słabo dodatni, bo $q_\Delta(\mathbf{h}) = 0$. Używając tych samych argumentów co w dowodzie implikacji (e) \implies (a) można pokazać, że $q_\Delta^{(1)}, \dots, q_\Delta^{(n)}$ są słabo dodatnie. Zatem q_Δ jest krytyczny.

Jeśli wektor \mathbf{h} nie jest dodatni, to istnieje $s \geq 2$ taka, że $h_s < 0$. Aby pokazać, że q_Δ jest słabo dodatni założmy, że istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{N}^n$ taki, że $q_\Delta(v) = 0$. Wtedy $v \in \text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ i otrzymujemy sprzeczność, gdyż $h_1 > 0$ i $h_s < 0$. Z implikacji (e) \implies (a) wynika, że q_Δ jest P -krytyczny, co kończy dowód (e) \implies (b).

(b) \implies (e) Założmy, że q_Δ jest krytyczny. Wtedy q_Δ nie jest słabo dodatni oraz istnieje dodatni wektor \mathbf{h} taki, że $q_\Delta(\mathbf{h}) \leq 0$. Wówczas (e) wynika z lematu 2.1.1. Jeśli q_Δ jest P -krytyczny, to z udowodnionej wcześniej implikacji (a) \implies (e) wynika (b) \implies (e).

(c) \implies (e) Ponieważ $q_\Delta * \varepsilon$ jest krytyczny, więc q_Δ jest P -krytyczny. Ponadto z udowodnionej wcześniej implikacji (a) \implies (e) wynika (e). Udowodnimy teraz (e) \implies (c). W tym celu założmy, że q_Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} \neq 0$ jest wiernym wektorem. Niech $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ będzie wektorem takim, że $\varepsilon_j = 1$, jeśli $h_j > 0$ oraz $\varepsilon_j = -1$, jeśli $h_j < 0$. Wtedy $q_\Delta * \varepsilon$ jest nieujemny oraz $\text{Ker } (q_\Delta * \varepsilon)$ jest generowane przez wierny i zarazem dodatni wektor $\mathbf{h} * \varepsilon = (\varepsilon_1 h_1, \dots, \varepsilon_n h_n)$. Stąd wynika, w analogiczny sposób jak w dowodzie implikacji (e) \implies (b), że $q_\Delta * \varepsilon$ jest krytyczny.

(e) \implies (e1) Na podstawie punktu (e) q_Δ jest główny oraz istnieje wierny wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ taki, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Z dowodu implikacji (e) \implies (c) wynika, że istnieje wektor $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ taki, że $q_\Delta * \varepsilon$ jest krytyczny oraz jądro $\text{Ker } (q_\Delta * \varepsilon)$ jest generowane przez wierny i zarazem dodatni wektor $\mathbf{h} * \varepsilon = (\varepsilon_1 h_1, \dots, \varepsilon_n h_n)$. Na podstawie [38, 26] współrzędne wektora $\mathbf{h} * \varepsilon$ są ograniczone przez 6, tzn. $1 \leq \varepsilon_1 h_1 \leq 6, \dots, 1 \leq \varepsilon_n h_n \leq 6$. Dodatkowo z [38, 26] (zobacz także [56, Proposition 2.10]) wynika, że istnieje $s \leq n$ takie, że $\varepsilon_s h_s = 1$. Zatem $h_s \in \{-1, 1\}$ dla pewnego $s \leq n$ oraz $-6 \leq h_j \leq 6$ dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$, co kończy dowód (e1).

Implikacja (e1) \implies (e) jest oczywista.

(e1) \implies (e2) Wynika z dowodu równoważności (b) \iff (e) \iff (e1).

(e) \iff (f) Założmy, że q_Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem. Z dowodu implikacji (e) \implies (c) wynika, że istnieje $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ taki, że $q_\Delta * \varepsilon$ jest krytyczny oraz $\text{Ker } (q_\Delta * \varepsilon)$ jest generowane przez wierny i dodatni wektor $\mathbf{h} * \varepsilon = (\varepsilon_1 h_1, \dots, \varepsilon_n h_n)$. Na podstawie [26, Theorem 1.2] oraz [38] istnieje rozszerzony diagram Dynkina $\tilde{\Delta} \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ oraz izomorfizm grup $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ takie, że $(q_\Delta * \varepsilon) \circ T$ jest funkcjonałem Grama $q_{\tilde{\Delta}} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $n = |\tilde{\Delta}_0|$ diagramu Euklidesa $\tilde{\Delta}$. Ponieważ $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$ jest generowane przez dodatni i wierny wektor \mathbf{h}' oraz $\text{Ker } (q_\Delta * \varepsilon) = \mathbb{Z} \cdot (\mathbf{h} * \varepsilon)$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem, więc automorfizm T przeprowadza wierny wektor \mathbf{h}' na wierny wektor z $\text{Ker } (q_\Delta * \varepsilon)$. Implikacja (f) \implies (e) wynika w podobny sposób.

Implikacja (e2) \implies (e) jest oczywista.

(a) \implies (d) Załóżmy, że q_Δ jest P -krytyczny. Z udowodnionej wcześniej implikacji (b) \implies (e) wynika, że q_Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem. Jeśli dodatkowo q_Δ jest krytyczny, to \mathbf{h} jest dodatni. Z [56, Proposition 2.8] wynika, że jeśli q_Δ jest nieujemny, to $\text{Ker } q_\Delta = \text{Ker } Dq$, gdzie

$$Dq : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, v \mapsto Dq(v) = \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}(v), \dots, \frac{\partial q}{\partial x_n}(v) \right).$$

Ponieważ $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$ oraz $2b_{q_\Delta}(x, e_j) = \frac{\partial q(x)}{\partial x_j}$, dla dowolnego $j = 1, \dots, n$, więc $b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, -) = 0$. Wówczas dla $\lambda \in \mathbb{Z}$ oraz $s \in \{1, \dots, n\}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} q_\Delta(e_s + \lambda \cdot \mathbf{h}) &= b_{q_\Delta}(e_s + \lambda \cdot \mathbf{h}, e_s + \lambda \cdot \mathbf{h}) = \\ &= b_{q_\Delta}(e_s, e_s) + 2\lambda \cdot b_{q_\Delta}(e_s, \mathbf{h}) + \lambda^2 \cdot b_{q_\Delta}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \\ &= b_{q_\Delta}(e_s, e_s) = q_\Delta(e_s) = 1 \end{aligned}$$

Stąd wynika, że jeśli q_Δ jest P -krytyczny, to ma nieskończenie wiele pierwiastków. Jeśli q_Δ jest krytyczny, to wektor \mathbf{h} jest dodatni oraz $q_\Delta(e_1 + \lambda \cdot \mathbf{h}) = 1$ dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że q_Δ ma nieskończenie wiele dodatnich pierwiastków. Jeśli $q_\Delta^{(j)}$ jest dodatni, to na podstawie [55, Proposition 4.1] zbiór pierwiastków \mathcal{R}_{q_Δ} jest skończony. Jeśli $q_\Delta^{(j)}$ jest słabo dodatni, to z [55] wynika, że zbiór dodatnich pierwiastków $\mathcal{R}_{q_\Delta}^+$ jest skończony, co kończy dowód implikacji (a) \implies (d).

(d) \implies (a) Załóżmy, że $|\Delta_0| = n \geq 3$, q_Δ jest funkcjonalem Grama bigrafu Δ oraz zbiór \mathcal{R}_{q_Δ} jest nieskończony, zaś zbiory $\mathcal{R}_{q_\Delta^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q_\Delta^{(n)}}$ są skończone.

Udowodnimy najpierw, że $-1 \leq d_{ij}^\Delta \leq 1$ dla dowolnego $i \leq j$. Załóżmy przez sprzeczność, że $|d_{ij}^\Delta| \geq 2$ dla pewnego $i < j$. Wtedy obcięcie $q_{\Delta[i,j]} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonala Grama q_Δ zdefiniowane przez $q_{\Delta[i,j]}(x_i, x_j) = x_i^2 + x_j^2 + d_{ij}^\Delta x_i x_j$ ma skończenie wiele pierwiastków, gdyż $n \geq 3$ oraz dla dowolnego pierwiastka (u_i, u_j) funkcjonala $q_{\Delta[i,j]}$ wektor $(0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0, u_j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ należy do skończonego zbioru $\mathcal{R}_{q_\Delta^{(1)}} \cup \dots \cup \mathcal{R}_{q_\Delta^{(n)}}$. Z drugiej strony z 2^o wynika, że $q_{\Delta[i,j]}$ ma nieskończenie wiele pierwiastków, jeśli $|d_{ij}^\Delta| \geq 2$. Otrzymujemy sprzeczność. Jeśli $n = 3$, to z wniosku 2.1.4 dla $n = 2$ wynika, że $q_\Delta^{(1)}, q_\Delta^{(2)}, q_\Delta^{(3)}$ są dodatnie. Ponieważ q_Δ jest nieskończony, więc na podstawie wniosku 2.1.4 q_Δ nie jest dodatni. Zatem q_Δ jest P -krytyczny.

Założmy teraz, że $n \geq 4$ oraz zbiór \mathcal{R}_{q_Δ} jest nieskończony, zaś zbiory $\mathcal{R}_{q_\Delta^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q_\Delta^{(n)}}$ są skończone. Załóżmy, że implikacja (d) \implies (b) jest udowodniona dla bigrafów Δ o $n-1$ wierzchołkach. Zatem $q_\Delta^{(1)}, \dots, q_\Delta^{(n)}$ są dodatnie. Ponieważ \mathcal{R}_{q_Δ} jest nieskończony, więc na mocy wniosku 2.1.4 q_Δ nie jest dodatni. Stąd wynika, że q_Δ jest P -krytyczny, co kończy dowód. \square

W pracy wykorzystujemy następujący lemat.

Lemat 2.1.3. Niech $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcjonalem kwadratowym zdefiniowanym wzorem $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + d \cdot x_1 x_2$, gdzie $d \in \mathbb{Z}$. Następujące warunki są równoważne.

- (a) Funkcjonał $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni.
- (b) $|\mathcal{R}_q| < \infty$.
- (c) $|d| \leq 1$.

Dowód. (a) \implies (c) Ponieważ $q_\Delta(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2 > 0$, $q_\Delta(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2 + v_1v_2 = (v_1 + \frac{1}{2}v_2)^2 + \frac{3}{4}v_2^2 > 0$, $q_\Delta(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2 - v_1v_2 = (v_1 - \frac{1}{2}v_2)^2 + \frac{3}{4}v_2^2 > 0$ dla dowolnego $0 \neq v \in \mathbb{Z}^2$, więc funkcjonal $q_\Delta(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + d \cdot x_1x_2$ jest dodatni dla $d \in \{-1, 0, 1\}$. Ponadto jeśli $|d| \geq 2$, to $q_\Delta(-1, \frac{d}{2}) = 1 - \frac{d^2}{4} \leq 0$. Funkcjonal q nie jest więc dodatni dla $|d| \geq 2$, co kończy dowód implikacji (a) \implies (c). Łatwo widać, że odwrotna implikacja (c) \implies (a) jest również prawdziwa.

(c) \implies (b) Niech $|d| \leq 1$ oraz $d \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$\mathcal{R}_q = \{[-1, -1], [1, 1], [-1, 0], [0, -1], [0, 1], [1, 0]\} \text{ dla } d = -1,$$

$$\mathcal{R}_q = \{[-1, 1], [1, -1], [-1, 0], [0, -1], [0, 1], [1, 0]\} \text{ dla } d = 1,$$

$$\mathcal{R}_q = \{[-1, 0], [0, -1], [0, 1], [1, 0]\} \text{ dla } d = 0, \text{ co kończy dowód implikacji (c) \implies (b).}$$

(b) \implies (c) Załóżmy, że $|\mathcal{R}_q| < \infty$. Wówczas $|d| \leq 1$, gdyż dla $|d| \geq 2$ można znaleźć nieskończony ciąg $w^{(1)}, \dots, w^{(m)}, \dots$ parami różnych wektorów należących do zbioru \mathcal{R}_q zdefiniowanych jak w dowodzie twierdzenia 2.1 dla $n = 2$. \square

Wniosek 2.1.4. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie bigrafem bez pętli o $|\Delta_0| = n \geq 2$, zaś $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcjonalem Grama bigrafu Δ .

(a) Zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{q_\Delta} = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 1\}$ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy Δ jest dodatni.

(b) Zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{q_\Delta}^+ = \{v \in \mathbb{N}^n; q_\Delta(v) = 1\}$ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy Δ jest słabo dodatni.

Dowód. (a) Jeśli Δ jest dodatni, to na mocy [17], [55, Proposition 4.1] zbiór \mathcal{R}_{q_Δ} jest skończony. Załóżmy więc, że \mathcal{R}_{q_Δ} jest skończony. Jeśli $n = 2$, to $d_{12}^\Delta \in \{-1, 0, 1\}$ gdyż w przeciwnym wypadku na mocy (b) \iff (d) z twierdzenia 2.1 zbiór \mathcal{R}_{q_Δ} jest nieskończony. Z dowodu twierdzenia dla $n = 2$ wynika, że $q_\Delta(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + d_{12}^\Delta x_1x_2$ jest dodatni dla $d_{12}^\Delta \in \{-1, 0, 1\}$.

Założmy, że $n \geq 3$ oraz $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonalem Grama bigrafu Δ takim, że \mathcal{R}_{q_Δ} jest skończony. Ponadto założmy, że wniosek 2.1.4 jest prawdziwy dla bigrafów o $n - 1$ wierzchołkach. Jeśli $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathcal{R}_{q_\Delta^{(j)}}$, to $(u_1, \dots, u_{j-1}, 0, u_{j+1}, \dots, u_{n-1}) \in \mathcal{R}_{q_\Delta}$. Ponieważ \mathcal{R}_{q_Δ} jest skończony, więc również zbiory $\mathcal{R}_{q_\Delta^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q_\Delta^{(n)}}$ są skończone. Zatem na mocy założenia indukcyjnego funkcjonały $q_\Delta^{(1)}, \dots, q_\Delta^{(n)}$ są dodatnie. Ponadto q_Δ jest dodatni, gdyż w przeciwnym wypadku q_Δ jest P -krytyczny oraz na mocy (a) \implies (d) z twierdzenia 2.1 zbiór \mathcal{R}_{q_Δ} jest nieskończony. Otrzymujemy więc sprzeczność. Dowód (b) jest analogiczny do dowodu (a). \square

Wniosek 2.1.5. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie bigrafem o $n = |\Delta_0| \geq 2$ wierzchołkach, zaś q_Δ funkcjonalem Grama bigrafu Δ .

(a) Jeśli Δ jest dodatni, to $|\Delta_1(i, j)| \leq 1$ dla dowolnego $i < j$ oraz pełne podbigrafy $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n)}$ bigrafu Δ są dodatnie.

(b) Zbiór \mathcal{R}_Δ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy Δ jest dodatni.

(c) Zbiór \mathcal{R}_Δ^+ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy Δ jest słabo dodatni, tzn. gdy $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest słabo dodatni.

Dowód. Dowód wynika z wniosku 2.1.4 oraz [17] i [55, Proposition 4.1]. \square

Wniosek 2.1.6. (a) Bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ o $|\Delta_0| = n \geq 3$ wierzchołkach jest P -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem.

(b) *Klasyfikacja P -krytycznych bigrafów Δ redukuje się do klasyfikacji krytycznych bigrafów.*

Dowód. (a) Wynika z twierdzenia 2.1 z równoważności (a) \iff (e).

(b) Ponieważ Δ jest P -krytyczny, więc na podstawie (a) jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem. Na podstawie dowodu implikacji (e) \iff (c) w twierdzeniu 2.1, istnieje wektor $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, gdzie $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ taki, że $q_\Delta * \varepsilon$ jest krytyczny oraz $\text{Ker } (q_\Delta * \varepsilon)$ jest generowany przez dodatni i wierny wektor. \square

2.2. Działanie grupy ortogonalnej na P -krytycznych bigrafach oraz konstrukcja P -krytycznych bigrafów

W rozdziale tym przypominamy strukturę grupy ortogonalnej $O(n, \mathbb{Z})$ oraz prawe działanie $*$: $\mathcal{Bigr}_n \times O(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{Bigr}_n$ tej grupy na bigrafach $\Delta \in \mathcal{Bigr}_n$ o $n \geq 1$ wierzchołkach. Szczegółowy opis struktury grupy ortogonalnej $O(n, \mathbb{Z})$ znajduje się w artykułach [56, 58].

Podajemy również konstrukcję P -krytycznych bigrafów o $n + 1 \geq 3$ wierzchołkach z dodatnich, spójnych bigrafów bez pętli o n wierzchołkach i ich wiernych pierwiastków przedstawioną w artykule [35]. Konstrukcję P -krytycznych bigrafów wykorzystujemy w algorytmach opisanych w rozdziale 4.1, które posłużyły nam do klasyfikacji P -krytycznych bigrafów z dokładnością do prawego działania.

Niech $\mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ oznacza zbiór jednolitych całkowitych funkcjonałów kwadratowych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, zaś \mathcal{UBigr}_n będzie, tak jak wcześniej, zbiorem skończonych bigrafów $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ bez pętli o $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$. Przez

$$O(n, \mathbb{Z}) := \{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}); B \cdot B^{tr} = E\}$$

oznaczamy grupę macierzy ortogonalnych, gdzie $E \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą identycznościową. Przy klasyfikacji P -krytycznych jednolitych funkcjonałów kwadratowych używamy prawego działania

$$(2.2.1) \quad * : \mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \times O(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}),$$

które dowolnemu jednolitemu funkcjonałowi kwadratowemu $q \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ oraz macierzy ortogonalnej $B \in O(n, \mathbb{Z})$ przyporządkowuje jednolity funkcjonał kwadratowy $(q * B) : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ taki, że $(q * B)(x) = q(x \cdot B^{tr})$ dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}^n$.

Na podstawie [56, Lemma 2.3], grupa ortogonalna $O(n, \mathbb{Z})$ jest generowana przez dwie podgrupy:

- grupę $\widehat{\mathbf{C}}_2^n$ wszystkich macierzy $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon \cdot E$, gdzie $E \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą identycznościową, zaś $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbf{C}_2^n$ jest dowolnym wektorem o współrzędnych $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbf{C}_2 = \{-1, 1\}$, gdzie \mathbf{C}_2 jest grupą cykliczną rzędu $|\mathbf{C}_2| = 2$ oraz
- grupę $\widehat{\mathbf{S}}_n$ wszystkich macierzy $\widehat{\sigma} = M_\sigma$ homomorfizmu grup $\sigma : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ zadanego przez permutację $\sigma \in \mathbf{S}_n$ i zdefiniowanego w następujący sposób:

$$\sigma(x) = x \cdot M_\sigma^{tr} = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

gdzie \mathbf{S}_n jest grupą permutacji rzędu $|\mathbf{S}_n| = n!$.

Twierdzenie 2.2.2 ([56]). (a) Każdą macierz ortogonalną $B \in O(n, \mathbb{Z})$ można jednoznacznie przedstawić jako

$$B = \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon},$$

gdzie $\hat{\sigma} \in \hat{\mathbf{S}}_n$ oraz $\hat{\varepsilon} \in \hat{\mathbf{C}}_2^n$.

(b) Grupa $O(n, \mathbb{Z})$ jest skończona oraz $|O(n, \mathbb{Z})| = n! \cdot 2^n$ dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$.

Zdefiniujemy teraz prawe działanie grupy ortogonalnej na bigrafach

$$(2.2.3) \quad * : \mathcal{UBigr}_n \times O(n, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{UBigr}_n.$$

Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie bigrafem bez pętli o $n \geq 2$ wierzchołkach i zbiorze wierzchołków $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$.

(i) Jeśli $\hat{\varepsilon}^{(j)}$ jest macierzą diagonalną o przekątnej $\varepsilon = \varepsilon^{(j)} = (1, \dots, 1, -1_j, 1, \dots, 1)$ oraz $1 \leq j \leq n$, to $\Delta * \hat{\varepsilon}^{(j)} \in \mathcal{UBigr}_n$ jest bigrafem powstałym z bigrafu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ przez zamianę wszystkich przerywanych krawędzi (incydentnych z j) $\bullet_i - - \bullet_j$ dla $i \neq j$ na ciągłe krawędzie $\bullet_i \text{---} \bullet_j$ oraz wszystkich ciągłych krawędzi (incydentnych z j) $\bullet_s \text{---} \bullet_j$ dla $s \neq j$ na przerywane krawędzie $\bullet_s - - \bullet_j$.

(ii) Niech $\hat{\varepsilon} \in \hat{\mathbf{C}}_2^n$ oraz $\varepsilon = \varepsilon^{(j_s)} \cdot \varepsilon^{(j_{s-1})} \cdot \dots \cdot \varepsilon^{(j_1)}$ dla pewnego $s \geq 1$. Wówczas bigraf $\Delta * \hat{\varepsilon}$ definiujemy w następujący sposób:

$$\Delta * \hat{\varepsilon} = (\Delta * \hat{\varepsilon}^{(j_s)}) * (\hat{\varepsilon}^{(j_{s-1})} \cdot \dots \cdot \hat{\varepsilon}^{(j_1)}).$$

(iii) Jeśli $\hat{\sigma} = M_\sigma$ jest macierzą permutacji zdefiniowaną przez $\sigma \in \mathbf{S}_n$, to bigraf $\Delta * \hat{\sigma} = (\Delta_0 * \hat{\sigma}, \Delta_1 * \hat{\sigma}) \in \mathcal{UBigr}_n$ powstaje z bigrafu Δ przez permutację σ^{-1} wierzchołków bigrafu Δ wraz z odpowiadającymi im krawędziami.

(iv) Jeśli $B \in O(n, \mathbb{Z})$ jest macierzą ortogonalną oraz $B = \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}$, gdzie $\hat{\sigma} \in \hat{\mathbf{S}}_n$, $\hat{\varepsilon} \in \hat{\mathbf{C}}_2^n$, to $\Delta * B = (\Delta * \hat{\varepsilon}) * \hat{\sigma}$.

Prawe działanie (2.2.3) grupy ortogonalnej na \mathcal{UBigr}_n odpowiada prawemu działaniu (2.2.1) grupy ortogonalnej na $\mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ poprzez funkcję $q_\bullet : \mathcal{UBigr}_n \xrightarrow{1-1} \mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$.

Definicja 2.2.4. (a) Niech $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Przez $A * B$ oznaczamy macierz $A * B = B^{tr} \cdot A \cdot B$.

(b) Niech $n \geq 2$ oraz $\mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ będzie zbiorem wszystkich jednolitych funkcyjałów kwadratowych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Wówczas przez

$$\mathbf{dod}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \subseteq \mathbf{nujem}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$$

$$\mathbf{kryt}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \subseteq \mathbf{P-kryt}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \subseteq \mathbf{glown}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$$

oznaczamy odpowiednio zbiór wszystkich jednolitych funkcyjałów kwadratowych dodatnich, nieujemnych, krytycznych, P -krytycznych i głównych. Przez

$$\mathbf{dod}_n^\bullet \subseteq \mathbf{dod}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$$

oznaczamy skończony zbiór parami różnych reprezentantów $p : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ wszystkich $O(n, \mathbb{Z})$ -orbit w $\mathbf{dod}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$, zaś przez

$$P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet \subseteq P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$$

skończony zbiór parami różnych reprezentantów wszystkich $O(n + 1, \mathbb{Z})$ -orbit w P -kryt($\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z}$).

(c) Niech $n \geq 2$. Przez \mathcal{Z}_n oznaczamy zbiór

$$\mathcal{Z}_n := \{(p, w); p \in \mathbf{dod}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}), w \in \mathbb{Z}^n \text{ jest wiernym pierwiastkiem } p\},$$

zaś przez \mathcal{Z}'_n zbiór

$$\mathcal{Z}'_n := \{(\Delta, w); \Delta \in \mathcal{UBigr}_n \text{ jest dodatni, } w \in \mathbb{Z}^n \text{ jest wiernym pierwiastkiem } q_\Delta\}.$$

Przedstawiamy teraz twierdzenie i lemat, z których wynika konstrukcja (2.2.9) P -krytycznych bigrafów. P -krytyczne bigrafy o $n + 1$ wierzchołkach konstruujemy z dodatnich i spójnych bigrafów (bez pętli) o n wierzchołkach oraz ich wiernych pierwiastków.

Lemat 2.2.5. *Niech $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie P -krytycznym funkcjonałem kwadratowym, $n \geq 3$ oraz $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ jest wiernym wektorem. Ponadto niech $s \in \{1, \dots, n\}$ oraz $h_s \in \{-1, 1\}$.*

(a) *Wektor $\mathbf{h}^{(s)} := (h_1, \dots, h_{s-1}, h_{s+1}, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ jest wiernym pierwiastkiem dodatniego funkcjonału kwadratowego $q^{(s)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$.*

(b) *Funkcjonał kwadratowy q można zrekonstruować z trójki $(q^{(s)}, s, h^{(s)})$ za pomocą formuły*

$$q(x) = q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 - 2 \cdot b_{q^{(s)}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot h_s \cdot x_s,$$

gdzie $x^{(s)} = (x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ oraz $b_{q^{(s)}}$ jest \mathbb{Z} -dwuliniową polaryzacją funkcjonału $q^{(s)}(x^{(s)}) = q^{(s)}(x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n)$.

Dowód. (a) Niech $s \in \{1, \dots, n\}$ oraz $h_s \in \{-1, 1\}$. Na mocy twierdzenia 2.1 q jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem. Wówczas $b_q(\mathbf{h}, -) = 0$ (zobacz [56]) oraz prawdziwe są następujące równości:

$$\begin{aligned} q(\check{\mathbf{h}}^{h_s}) &= q(\mathbf{h} - h_s e_s) = b_q(\mathbf{h} - h_s e_s, \mathbf{h} - h_s e_s) = \\ &= q(e_s) - 2 \cdot h_s \cdot b_q(\mathbf{h}, e_s) + q(\mathbf{h}) = q(e_s) = 1. \end{aligned}$$

Zatem wektor $\check{\mathbf{h}}^{h_s} := \mathbf{h} - h_s e_s$ jest pierwiastkiem P -krytycznego funkcjonału q . Stąd wynika, że $\mathbf{h}^{(s)}$ jest wiernym pierwiastkiem dodatniego funkcjonału kwadratowego $q^{(s)}$, co kończy dowód (a).

(b) Ponieważ q jest P -krytyczny oraz $n \geq 3$, więc na mocy twierdzenia 2.1 funkcjonal q jest nieujemny. Ponadto wiemy, że $\mathbf{h} \in \text{Ker } q$. Na mocy [56] prawdziwa jest następująca równość: $b_q(\mathbf{h}, -) = 0$. Zatem dla $j \neq s$ zachodzą następujące równości: $0 = b_q(e_j, \mathbf{h}) = b_q(e_j, \mathbf{h} - h_s e_s + h_s e_s) = b_q(e_j, \check{\mathbf{h}}^{h_s}) + h_s \cdot b_q(e_j, e_s)$. Stąd wynika, że $b_q(e_j, e_s) = -h_s^{-1} \cdot b_q(e_j, \check{\mathbf{h}}^{h_s}) = -h_s \cdot b_{q^{(s)}}(e_j, \mathbf{h}^{(s)})$, gdyż $h_s^{-1} = h_s$. Ponieważ

$$\begin{aligned} q(x) &= q((x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \dots, x_n) + x_s e_s) = \\ &= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 + 2 \cdot b_q((x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \dots, x_n), x_s e_s) = \\ &= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 + \sum_{j \neq s} 2 \cdot b_q(e_j, e_s) \cdot x_j \cdot x_s = \\ &= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 - \sum_{j \neq s} 2 \cdot h_s \cdot b_{q^{(s)}}(e_j, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot x_j \cdot x_s = \\ &= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 - 2 \cdot b_{q^{(s)}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot h_s \cdot x_s, \end{aligned}$$

więc dowód (b) jest kompletny. \square

Następujące twierdzenie wykorzystamy do konstrukcji P -krytycznych bigrafów o $n+1$ wierzchołkach z dodatnich bigrafów o n wierzchołkach oraz ich wiernych pierwiastków. Z dowodu twierdzenia 2.2.6 (b) wynika, że z dodatniego bigrafu Δ i wiernego pierwiastka w oraz z dodatniego bigrafu Δ i wiernego pierwiastka $-w$ otrzymamy P -krytyczne bigrafy leżące w tej samej $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbicie. Dlatego do wspomnianej konstrukcji nie bierzemy wszystkich wiernych pierwiastków. Z wspomnianego twierdzenia wynika również, że z dodatnich bigrafów leżących w tej samej $O(n, \mathbb{Z})$ -orbicie otrzymamy P -krytyczne bigrafy leżące w tej samej $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbicie. Fakt ten wykorzystamy również w algorytmie opisanym w rozdziale 4.1, który posłużył nam do znalezienia pełnej listy P -krytycznych bigrafów o liczbie wierzchołków ≤ 10 (z dokładnością do działania (2.2.3) grupy ortogonalnej na bigrafach).

Twierdzenie 2.2.6. (a) Niech $n \geq 3$, $s \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\varepsilon_s \in \{-1, 1\}$. Ponadto niech Δ będzie spójnym i dodatnim bigrafem Δ bez pętli o funkcjonałe Grama $p := q_\Delta : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $w = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ będzie wiernym pierwiastkiem $p := q_\Delta$. Ponadto niech b_p będzie \mathbb{Z} -dwuliniową polaryzacją funkcjanału Grama bigrafu Δ . Wówczas bigraf Δ' o funkcjonałe Grama $q_{\Delta'} := q_{p,s,w,\varepsilon_s} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ takim, że

$$(*) \quad q(x) := q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) = p(x^{(s)}) + x_s^2 - 2 \cdot b_p(x^{(s)}, w) \cdot \varepsilon_s \cdot x_s,$$

jest P -krytyczny oraz $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \widehat{w}^{\varepsilon_s}$, gdzie $\widehat{w}^{\varepsilon_s} = (w_1, \dots, w_{s-1}, \varepsilon_s w_s, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$.

(b) Zbiór \mathcal{Z}_{n-1} jest $O(n, \mathbb{Z})$ -niezmiennicznym podzbiorem $\mathbf{dod}(\mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^{n-1}$ względem działania $(p, w) * B := (p * B, w \cdot B)$, gdzie $B \in O(n, \mathbb{Z})$. Odwzorowanie $(p, w) \mapsto \text{ind}_{s, \varepsilon_s}(p, w) := q_{p,s,w,\varepsilon_s}$ opisane w (*) definiuje suriekcję

$$(**) \quad \text{ind} : O(n-1, \mathbb{Z})\text{-Orb}(\mathcal{Z}_{n-1}) \longrightarrow O(n, \mathbb{Z})\text{-Orb}(P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}))$$

między zbiorem $O(n-1, \mathbb{Z})$ -orbit zbioru \mathcal{Z}_{n-1} i zbiorem $O(n, \mathbb{Z})$ -orbit zbioru $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ P -krytycznych funkcjonalów.

(c) Odwrotność funkcji ind jest zadana przez odwzorowanie $q \mapsto \text{res}_s(q) := (q^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)})$ zdefiniowane w (a), między dowolnym P -krytycznym funkcjonałem $q = q_\Delta$ o $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $h_s \in \{-1, 1\}$, a $(q^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \in \mathcal{Z}_{n-1}$.

Dowód. Załóżmy, że $n \geq 3$, Δ jest spójnym oraz dodatnim bigrafem bez pętli o funkcjonałe Grama $p := q_\Delta : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ i wiernym pierwiastku $w = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Niech Δ' będzie bigrafem o funkcjonałe Grama $q := q_{\Delta'} = q_{p,s,w,\varepsilon_n} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowanym jak w (*). Stosujemy następujące oznaczenia: $p := q_\Delta$ i $q = q_{\Delta'} = q_{p,s,w,\varepsilon_s}$.

(a) Załóżmy, że $p \in \mathbf{dod}(\mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{Z})$ oraz $w \in \mathbb{Z}^{n-1}$ jest wiernym pierwiastkiem funkcjanału Grama p bigrafu Δ . Ponadto niech $s \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\varepsilon_s \in \{-1, 1\}$ oraz $q := q_{p,s,w,\varepsilon_s} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcjonałem Grama bigrafu Δ' zdefiniowanym jak w (*).

Udowodnimy, że $q = q_{\Delta'}$ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem. Wówczas na mocy twierdzenia 2.1 funkcjonał q jest P -krytyczny. Dla uproszczenia zapisu załóżmy, że $s = n$. Wówczas $q(x_1, \dots, x_n) = p(x^{(n)}) + x_n^2 - 2 \cdot b_p(x^{(n)}, w) \cdot \varepsilon_n \cdot x_n$. Stąd wynika, że $q^{(n)} = p$, $\check{G}_{q^{(n)}} = \check{G}_p$, $G_{q^{(n)}} = G_p$. Niesymetryczna oraz symetryczna macierz Grama funkcjanału q mają postać

$$\check{G}_q = \left[\begin{array}{c|c} \check{G}_p & -2\check{G}_p \cdot w^{tr} \cdot \varepsilon_n \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \text{ i } G_q = \left[\begin{array}{c|c} G_p & -G_p \cdot w^{tr} \cdot \varepsilon_n \\ \hline -w \cdot G_p \cdot \varepsilon_n & 1 \end{array} \right].$$

Dowód podzielimy na kilka części.

Krok 1.1° Pokażemy najpierw, że $\det G_q = 0$. Wówczas q nie jest dodatni. Ponieważ $q^{(n)} = p$ jest dodatni, więc $\det G_p > 0$. Macierz G_q ma następującą postać

$$G_q = \left[\begin{array}{c|c} G_p & -G_p \cdot w^{tr} \cdot \varepsilon_n \\ \hline -w \cdot G_p \cdot \varepsilon_n & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} G_p & 0 \\ \hline -w \cdot G_p \cdot \varepsilon_n & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E & -G_p^{-1} G_p \cdot w^{tr} \cdot \varepsilon_n \\ \hline 0 & 1 - (-w G_p \varepsilon_n) \cdot G_p^{-1} \cdot (-G_p w^{tr} \varepsilon_n) \end{array} \right].$$

Z twierdzenia Cauchyego oraz z faktu, że $p(w) = 1$ wynika

$$\det G_q = (\det G_p) \cdot (1 - w \cdot G_p \cdot w^{tr}) = (\det G_p) \cdot (1 - p(w)) = 0.$$

Stąd z kryterium Sylwestera (zobacz [32, str. 113]) wynika, że q nie jest dodatni.

Krok 1.2° Pokażemy teraz, że q jest nieujemny. Niech $W = \mathbb{Q}^{n-1} \times \{0\}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni \mathbb{Q}^n oraz $\dim W = n-1$. Ponieważ $q^{(n)} = p$, więc $b_{q^{(n)}} = b_p$ oraz funkcjonal dwuliniowy $b_q|_W = b_p : \mathbb{Q}^{n-1} \times \mathbb{Q}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}$ jest dodatni. Z lematu o uzupełnieniu ortogonalnym (zobacz [32]) \mathbb{Q}^n jest postaci $\mathbb{Q}^n = W \oplus W^\perp$, gdzie $W^\perp = \{v \in \mathbb{Q}^n; b_q(v, w) = 0, \text{ dla dowolnego } w \in W\}$ jest uzupełnieniem ortogonalnym W . Wówczas $W^\perp = \mathbb{Q} \cdot \eta$, dla pewnego niezerowego wektora $\eta \in W^\perp$.

(i) Pokażemy najpierw, że $b_q(\eta, \eta) = 0$. Niech $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ będzie standardową bazą przestrzeni \mathbb{Q}^n , zaś $\mathbf{e}' = \{e_1, \dots, e_{n-1}, \eta\}$ będzie inną bazą przestrzeni \mathbb{Q}^n . Wówczas macierz Grama q w bazie \mathbf{e}' ma następującą postać

$$G_q^{\mathbf{e}'} = \left[\begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} b_q(e_1, \eta) \\ \vdots \\ b_q(e_{n-1}, \eta) \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} G_p \\ \dots \\ b_q(\eta, e_1) \dots b_q(\eta, e_{n-1}) \end{array} & \begin{array}{c} b_q(\eta, \eta) \end{array} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} G_p & 0 \\ \hline 0 & b_q(\eta, \eta) \end{array} \right].$$

Jeśli $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ jest macierzą przejścia z bazy \mathbf{e} do bazy \mathbf{e}' , to $\det C \neq 0$, $G_b^{\mathbf{e}'} = C^{tr} \cdot G_b \cdot C$. Wówczas z twierdzenia Cauchyego oraz z 1.1° otrzymujemy

$$(\det G_p) \cdot b_q(\eta, \eta) = \det G_b^{\mathbf{e}'} = \det(C^{tr} \cdot G_b \cdot C) = (\det C)^2 \cdot (\det G_b) = 0.$$

Ponieważ p jest dodatni oraz $\det G_p > 0$, więc $b_q(\eta, \eta) = 0$.

(ii) Korzystając z (i) pokażemy, że $q : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ jest nieujemny, tzn. $q(v) \geq 0$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Q}^n$. Ponieważ $\mathbb{Q}^n = W \oplus \mathbb{Q} \cdot \eta$, więc wektor v ma postać $v = w + \lambda \cdot \eta$, gdzie $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$\begin{aligned} q(v) &= q(w + \lambda \cdot \eta) = b_q(w + \lambda \cdot \eta, w + \lambda \cdot \eta) = \\ &= b_q(w, w) + \lambda^2 \cdot b_q(\eta, \eta) + 2\lambda \cdot b_q(w, \eta) = \\ &= p(w) \geq 0 \end{aligned}$$

gdź $b_q(\eta, \eta) = 0$, $b_q(w, \eta) = 0$, $b_q(w, w) = q(w) = p(w) \geq 0$. Z dodatniości $p : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ wynika również dodatniość $p : \mathbb{Q}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}$.

Krok 1.3° Pokażemy, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \widehat{w}^{\varepsilon_s}$, $\widehat{w}^{\varepsilon_s} = (w_1, \dots, w_{s-1}, \varepsilon_s, w_s, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$.

Ponieważ $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny, więc na mocy [56, Proposition 2.8] $\text{Ker } q = \text{rad } q = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } b_q(e_i, -)$ oraz $\text{Ker } q$ jest równe $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ zbiorowi wszystkich całkowitych rozwiązań układu \mathbb{Z} -liniowych równań

$$(***) \quad \begin{cases} b_q(e_1, x) = 0 \\ \vdots \\ b_q(e_n, x) = 0 \end{cases}$$

Niech $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$ będzie zbiorem wszystkich $v \in \mathbb{Q}^n$ rozwiązań układu (***)

Ponieważ $\det G_q = 0$ oraz $\det G_{q^{(n)}} = \det G_p > 0$, więc rząd macierzy G_q jest równy $n - 1$, tzn. $\text{rz}(G_q) = n - 1$. Ponieważ $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{\mathbb{Q}} = n - \text{rz}(G_q) = 1$, więc układ (***) ma niezerowe rozwiązanie $\xi \in \mathbb{Q}^n$ takie, że $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cdot \xi$. Niech ξ będzie wektorem takim, że $\xi = (\frac{k_1}{r_1}, \dots, \frac{k_n}{r_n})$, gdzie $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$. Jeśli $r = \text{nww}(r_1, \dots, r_n)$, to $\xi' = r \cdot \xi \in \mathbb{Z}^n$ jest niezerowy oraz $0 = q(\xi) = q(\frac{1}{r} \cdot \xi') = \frac{1}{r^2} \cdot q(\xi')$. Zatem $\xi' \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$. Zatem grupa $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest niezerowa, wolna oraz $\text{rank} \leq n$. Ponieważ $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{U}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cdot \xi$, więc $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$ jest rangi jeden.

Pokażemy teraz, że $\text{Ker } q = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cdot \widehat{w}^{\varepsilon_s}$. Z (*) wynika $q(\widehat{w}^{\varepsilon_s}) = p(w) + \varepsilon_s^2 - 2b_p(w, w) \cdot \varepsilon_s \cdot \varepsilon_s = 1 + 1 - 2 = 0$. Zatem $\widehat{w}^{\varepsilon_s} \in \text{Ker } q$ oraz $\text{Ker } q \supseteq \mathbb{Z} \cdot \widehat{w}^{\varepsilon_s}$. Aby udowodnić przeciwną inkluzję załóżmy, że \mathbf{h} jest \mathbb{Z} -generatorem $\text{Ker } q = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$, tzn. $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Wówczas istnieje $\lambda \in \mathbb{Z}$ takie, że $\widehat{w}^{\varepsilon_s} = \lambda \cdot \mathbf{h}$. Ponieważ $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ oraz s -ta współrzędna wektora $\widehat{w}^{\varepsilon_s}$ jest równa $\varepsilon_s \in \{-1, 1\}$, więc $\varepsilon_s = \lambda \cdot h_s$. Wówczas $\varepsilon_s, \lambda, h_s \in \{-1, 1\}$ oraz $\widehat{w}^{\varepsilon_s}$ jest generatorem $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot v$.

Ponieważ q jest nieujemny, $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \widehat{w}^{\varepsilon_s}$ oraz $\widehat{w}^{\varepsilon_s}$ jest wiernym wektorem, więc na mocy twierdzenia 2.1 q jest P -krytyczny, co kończy dowód (a).

(b) Niech $\widehat{\sigma} \in \widehat{\mathbf{S}}_n$, $\widehat{\varepsilon} \in \widehat{\mathbf{C}}_2^n$, gdzie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbf{C}_2 = \{-1, +1\}$ oraz $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie jednolitym funkcjonałem kwadratowym. Z [56] (zobacz także rozdział 2.2) wynika, że

(A) funkcjonal $(q * \widehat{\sigma})(x) = q(x \cdot \widehat{\sigma}^{tr}) = q(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ jest uzyskany z $q(x)$ przez permutację $\sigma \in \mathbf{S}_n$ zmiennych wektora x oraz

(B) $(q * \widehat{\varepsilon})(x) = q(x \cdot \widehat{\varepsilon}) = q(\varepsilon_1 \cdot x_1, \dots, \varepsilon_n \cdot x_n)$,

(C) dwa funkcjonały $q_1, q_2 : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ leżą w tej samej $O(n, \mathbb{Z})$ -orbicie wtedy i tylko wtedy, gdy $G_{q_1} = B^{tr} \cdot G_{q_2} \cdot B$, dla pewnej macierzy $B \in O(n, \mathbb{Z})$.

Załóżmy, że $p : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni, $w \in \mathbb{Z}^{n-1}$ jest wiernym pierwiastkiem p oraz

$$q_1 := q_{p, s_1, w, \varepsilon_{s_1}}, \quad q_2 := q_{p, s_2, w, \varepsilon_{s_2}}$$

są P -krytycznymi funkcjonałami kwadratowymi powstałymi z (p, w) przez zastosowanie (*) dla pewnych $s_1, s_2 \leq n$ oraz $\varepsilon_{s_1}, \varepsilon_{s_2} \in \mathbf{C}_2 = \{-1, 1\}$. Podzielimy dowód (b) na kilka części.

Krok 2.1° Pokażemy, że P -krytyczne funkcjonały $q_1, q_2 : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ leżą w tej samej $O(n, \mathbb{Z})$ -orbicie.

2.1.1° Załóżmy najpierw, że $s := s_1 = s_2$ oraz $\varepsilon_{s_1} \neq \varepsilon_{s_2}$. Stąd wynika, że $q_1(x)$ powstaje z $q_2(x)$ przez $x_s \mapsto -x_s$, tzn. $q_1 = q_2 * \widehat{\varepsilon}'$, gdzie $\varepsilon'_s = -1$, oraz $\varepsilon'_j = 1$, dla dowolnego $j \neq s$, zobacz (B). Zatem $q_1, q_2 : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ leżą w tej samej $O(n, \mathbb{Z})$ -orbicie.

2.1.2° Załóżmy teraz, że $s_1 \neq s_2$ oraz $\varepsilon_{s_1} = \varepsilon_{s_2}$. Pokażemy, że istnieje macierz $B \in O(n, \mathbb{Z})$ taka, że $G_{q_1} = B^{tr} \cdot G_{q_2} \cdot B$.

W przypadku gdy $s_1 = 1$ oraz $s_2 \in \{2, \dots, n\}$, macierz B ma następującą postać: $B =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_i \\ e_1 \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \text{ gdzie } i = s_2.$$

Dla uproszczenia zapisu załóżmy, że $s_2 = n$. Wtedy $G_{q_1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -w \cdot G_p \\ \hline -G_p \cdot w^{tr} & G_p \end{array} \right]$, $G_{q_2} = \left[\begin{array}{c|c} G_p & -G_p \cdot w^{tr} \\ \hline -w \cdot G_p & 1 \end{array} \right]$ są macierzami Grama funkcjonałów q_1, q_2 . Wówczas

$$\begin{aligned}
B^{tr} \cdot G_{q_2} \cdot B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c} G_p & -G_p \cdot w^{tr} \\ \hline -w \cdot G_p & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots 0 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} -w \cdot G_p & 1 \\ \hline G_p & -G_p \cdot w^{tr} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots 0 \end{bmatrix} = G_{q_1}.
\end{aligned}$$

W przypadku, gdy $s_1 \neq s_2$ oraz $s_1, s_2 \in \{2, \dots, n\}$ macierz B ma postać

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_j \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_{j-1} \\ e_i \\ e_{j+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \hat{\tau}, \text{ gdzie } i = s_1, j = s_2,$$

τ jest transpozycją (i, j) . Dla uproszczenia zapisu załóżmy, że $s_1 = n-1, s_2 = n$. Niech $a \leq k \leq n-1$ oraz $b \leq s \leq n-1$. Wówczas przez $G_p^{[(a,k)(b,s)]}$ oznaczmy macierz $(k-a+1) \times (s-b+1)$ uzyskaną z macierzy G_p przez usunięcie wierszy o numerach $1, \dots, a-1, k+1, \dots, n-1$ oraz kolumn o numerach $1, \dots, b-1, s+1, \dots, n-1$. Niech $w \in \mathbb{Z}^n, 1 \leq k \leq s \leq n$ oraz $\tilde{w} = -G_p \cdot w^{tr}$. Przez $\tilde{w}^{(k,s)} = (w_k, \dots, w_s)$ oznaczamy wektor powstały z wektora \tilde{w} przez wzięcie współrzędnych od k do s . Wówczas

$$G_{q_1} = \left[\begin{array}{c|c|c} G_p^{[(1,n-2)(1,n-2)]} & \tilde{w}^{(1,n-2)} & G_p^{[(1,n-2)(n-1,n-1)]} \\ \hline [\tilde{w}^{(1,n-2)}]^{tr} & 1 & \tilde{w}_{n-1}^{(n-1,n-1)} \\ \hline G_p^{[(n-1,n-1)(1,n-2)]} & \tilde{w}_{n-1}^{(n-1,n-1)} & G_p^{[(n-1,n-1)(n-1,n-1)]} \end{array} \right] \text{ oraz } G_{q_2} = \left[\begin{array}{c|c} G_p & \tilde{w} \\ \hline \tilde{w}^{tr} & 1 \end{array} \right].$$

Zauważmy, że $B^{tr} = B = \hat{\tau}$ i dla danej macierzy $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ macierz $A \cdot B = A \cdot \hat{\tau}$ (odpowiednio: $B \cdot A = \hat{\tau} \cdot A$) powstaje z macierzy A przez transpozycję i -tej kolumny z j -tą kolumną (odpowiednio: i -tego wiersza z j -tym wierszem). Wówczas

$$\begin{aligned}
B^{tr} \cdot G_{q_2} \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c} G_p & \tilde{w} \\ \hline \tilde{w}^{tr} & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} G_p^{[(1,n-2)(1,n-1)]} & \tilde{w}^{(1,n-2)} \\ \hline \tilde{w}^{tr} & 1 \\ \hline G_p^{[(n-1,n-1)(1,n-1)]} & \tilde{w}_{(n-1,n-1)} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \end{bmatrix} = G_{q_1}.
\end{aligned}$$

Krok 2.2° Pokażemy, że jeśli $(p_1, w_1), (p_2, w_2) \in \mathcal{Z}_{n-1}$ leżą w tej samej $O(n-1, \mathbb{Z})$ -orbicie, to P -krytyczne funkcjonały $q_1 := q_{p_1, s_1, w_1, \varepsilon_{s_1}}, q_2 := q_{p_2, s_2, w_2, \varepsilon_{s_2}}$ skonstruowane za pomocą $(*)$ leżą w tej samej $O(n, \mathbb{Z})$ -orbicie.

Z punktu 2.1° wynika, że bez utraty ogólności rozważań możemy założyć, że $s_1 = s_2 = 1$ oraz $\varepsilon_{s_1} = \varepsilon_{s_2} = 1$. Wtedy

$$G_{q_1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -w_1 \cdot G_{p_1} \\ \hline -(w_1 \cdot G_{p_1})^{tr} & G_{p_1} \end{array} \right], \quad G_{q_2} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -w_2 \cdot G_{p_2} \\ \hline -(w_2 \cdot G_{p_2})^{tr} & G_{p_2} \end{array} \right]$$

są symetrycznymi macierzami Grama funkcjonałów kwadratowych q_1 i q_2 .

Załóżmy, że $B' \in O(n-1, \mathbb{Z})$ jest macierzą taką, że $(p_1, w_1) * B' = (p_1 * B', w_1 \cdot B') = (p_2, w_2)$, oraz niech $B = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array} \right] \in O(n, \mathbb{Z})$. Pokażemy, że $B^{tr} \cdot G_{q_1} \cdot B = G_{q_2}$. Wówczas $q_2(x) = q_1(x \cdot B^{tr})$, dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}^n$ i zachodzi (C).

Ponieważ $(B')^{tr} = (B')^{-1}$, $(B')^{tr} \cdot G_{p_1} \cdot B' = G_{p_2}$ oraz $w_2 = w_1 \cdot B'$, więc

$$\begin{aligned} G_{q_2} &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & -w_2 \cdot G_{p_2} \\ \hline -(w_2 \cdot G_{p_2})^{tr} & G_{p_2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -w_2 \cdot (B')^{tr} \cdot G_{p_1} \cdot B' \\ \hline -(w_2 \cdot (B')^{tr} \cdot G_{p_1} \cdot B')^{tr} & (B')^{tr} \cdot G_{p_1} \cdot B' \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & -w_1 \cdot B' \cdot (B')^{-1} \cdot G_{p_1} \cdot B' \\ \hline -(w_1 B' \cdot (B')^{-1} \cdot G_{p_1} \cdot B')^{tr} & (B')^{tr} \cdot G_{p_1} \cdot B' \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & -w_1 \cdot G_{p_1} \cdot B' \\ \hline -(w_1 \cdot G_{p_1} \cdot B')^{tr} & (B')^{tr} \cdot G_{p_1} \cdot B' \end{array} \right] = B^{tr} \cdot G_{q_1} \cdot B \end{aligned}$$

oraz dowód 2.2° jest kompletny. W konsekwencji mamy dobrze zdefiniowane odwzorowanie (**)

$$\text{ind} : O(n-1, \mathbb{Z})\text{-Orb}(\mathcal{Z}_{n-1}) \longrightarrow O(n, \mathbb{Z})\text{-Orb}(P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})),$$

które każdej parze (p, w) przyporządkowuje funkcjonał P -krytyczny $\text{ind}(p, w) := q_{p,s,w,\varepsilon_s}$. Ponieważ odwzorowanie (**) jest surjekcją (zobacz lemat 2.2.5), więc dowód (b) jest kompletny.

Dowód (c) wynika z lematu 2.2.5. \square

Z twierdzenia 2.2.6 wynika konstrukcja P -krytycznych funkcjonałów o $n \geq 3$ wierzchołkach z pary (p, w) , gdzie $p \in \mathbf{dod}(\mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{Z})$, zaś w jest wiernym pierwiastkiem p , dokładniej

$$(2.2.7) \quad \text{ind}_{s,\varepsilon_s} : \mathcal{Z}_{n-1} \longrightarrow P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}), \quad (p, w) \mapsto q := q_{p,s,w,\varepsilon_s}.$$

Ponieważ $q_\bullet : \mathcal{UBigr}_{n-1} \xrightarrow{1-1} \mathcal{U}(\mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{Z})$ oraz \mathcal{Z}_{n-1} identyfikujemy z \mathcal{Z}'_{n-1} , więc (2.2.7) można wyrazić w terminach bigrafów

$$(2.2.8). \quad \text{ind}_{s,\varepsilon_s} : \mathcal{Z}'_{n-1} \longrightarrow \mathcal{UBigr}_n, \quad (\Delta, w) \mapsto \Delta[[w, s, \varepsilon_s]].$$

Na podstawie twierdzenia 2.2.6 $\Delta[[w, s, \varepsilon_s]]$ jest P -krytyczny.

Konstrukcja 2.2.9. Niech $n \geq 3$ oraz $s = n$. Z twierdzenia 2.2.6 wynika, że $\text{ind}_{s,\varepsilon_s} : \mathcal{Z}'_{n-1} \longrightarrow \mathcal{UBigr}_n$ przyporządkowuje każdej parze $(\Delta, w) \in \mathcal{Z}'_{n-1}$ P -krytyczny bigraf

$$\Delta' := \Delta[[w, n, \varepsilon_s]] \in \mathcal{UBigr}_n$$

zdefiniowany w następujący sposób. Zbiór wierzchołków Δ'_0 bigrafu Δ' powstaje z $\Delta_0 = \{1, 2, \dots, n-1\}$ przez dodanie nowego wierzchołka n , tzn. $\Delta' = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$. Niech $w' := -2\check{G}_\Delta \cdot w$. Z wniosku 2.1.5 wynika, że współrzędne w'_1, \dots, w'_{n-1} wektora w' należą do $\{-1, 0, 1\}$. Zatem $d'_{1n} = w'_1, \dots, d'_{n-1n} = w'_{n-1}$,

$$\check{G}_{\Delta'} = \left[\begin{array}{c|c} \check{G}_\Delta & -2\check{G}_\Delta \cdot w^{tr} \cdot \varepsilon_n \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \check{G}_\Delta & w^{tr} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right],$$

oraz Δ' jest P -krytyczny. Liczby $d'_{1n}, \dots, d'_{n-1n}$ należą do $\{-1, 0, 1\}$, gdyż obcięcie $q^{[j,n]}(x_j, x_n) := x_j^2 + x_n^2 + d'_{jn} x_j x_n$ jednolitego funkcjonału kwadratowego $q(x)$ jest dodatnie dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n-1\}$ oraz na podstawie lematu 2.1.3, $d'_{jn} \in \{-1, 0, +1\}$. Stąd wynika, że zbiór

krawędzi bigrafu $\Delta' := \Delta[[w, n, \varepsilon_s]]$ powstaje przez dodanie do zbioru krawędzi Δ_1 bigrafu Δ nowych krawędzi łączących wierzchołek n z pewnymi wierzchołkami $j \in \Delta_0$. Dokładniej, dla dowolnego $s \in \{1, \dots, n-1\}$: jeśli $w'_s < 0$, dodajemy nową ciągłą krawędź $\bullet_s \text{---} \bullet_n$, zaś dla dowolnego $r \in \{1, \dots, n-1\}$ takiego, że $w'_r > 0$ dodajemy nową przerywaną krawędź $\bullet_r - - \bullet_n$.

Algorytm konstuuujący P -krytyczne bigrafy o $n+1 \geq 3$ wierzchołkach z dodatnich i spójnych bigrafów (bez pętli) o n wierzchołkach i ich wiernych pierwiastków, został opisany w podrozdziale 4.1.

Z twierdzenia 2.2.6 wynika, że z par (Δ, w) , $(\Delta, -w)$, gdzie Δ jest dodatnim i spójnym bigrafem, zaś $w, -w \in \mathcal{R}_\Delta$ jego wiernymi pierwiastkami, uzyskamy dwa P -krytyczne bigrafy leżące w tej samej $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbicie w zbiorze wszystkich P -krytycznych bigrafów o $n+1$ wierzchołkach. Zatem, aby uzyskać zbiór $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet \subseteq P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$, P -krytyczne bigrafy konstruujemy tylko z części wiernych pierwiastków. Ponadto z twierdzenia 2.2.6 wynika, iż z dodatnich bigrafów o funkcjonalach Grama należących do tej samej $O(n, \mathbb{Z})$ -orbity w $\mathbf{dod}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ uzyskamy P -krytyczne bigrafy o funkcjonalach Grama należących do tej samej $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbity w $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$. Dlatego też P -krytyczne bigrafy konstruujemy z dodatnich (i spójnych) bigrafów o funkcjonalach Grama należących do zbioru $\mathbf{dod}_n^\bullet \subseteq \mathbf{dod}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$.

2.3. Podstawowe informacje o E-typie dla P -krytycznych bigrafów

Z każdym P -krytycznym (głównym) bigrafem stowarzyszamy graf Euklidesa [56]. W rozdziale tym przypominamy definicję typu euklidesowego (w skrócie E-typu) oraz podajemy przykład P -krytycznego bigrafu, dla którego (stosując kolejne kroki algorytmu inflacyjnego opisanego w [58, 31], rozdział 4.1) znajdujemy jego E-typ.

Definicja 2.3.1. Niech $\tilde{D}\Delta$ będzie jednym z grafów Euklidesa, tzn. $\tilde{D}\Delta \in \{\tilde{A}_n, n \geq 1, \tilde{D}_m, m \geq 4, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$. Bigraf $\tilde{D}\Delta$ nazywamy **typem Euklidesa** (w skrócie **E-typem**) P -krytycznego bigrafu Δ , jeśli istnieje macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że

$$G_{\tilde{D}\Delta} = B \cdot G_\Delta \cdot B^{tr},$$

gdzie $G_\Delta, G_{\tilde{D}\Delta}$ są odpowiednio symetrycznymi macierzami Grama bigrafów Δ i $\tilde{D}\Delta$.

Na mocy twierdzenia 2.1 P -krytyczne bigrafy są główne. Z [58, Theorem, 3.4] wynika, że istnieje typ euklidesowy $\tilde{D}\Delta$ dla głównych bigrafów. Można go znaleźć stosując algorytm inflacyjny opisany w pracach [58, 31], patrz rozdział 4. Przypominamy teraz definicję operatorów inflacyjnych używanych w algorytmie inflacyjnym opisanym w pracach [58, 31], zobacz także rozdział 4.1.

Definicja 2.3.2 ([58]). Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie spójnym bigrafem, gdzie $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$ oraz $n \geq 2$. Ponadto niech $E = \text{diag}(1, \dots, 1, -1_a, 1, \dots, 1)$ będzie macierzą diagonalną zawierającą -1 w a -tym wierszu i a -tej kolumnie.

(a) **Inflacją bigrafu Δ w wierzchołku $a \in \Delta_0$** nazywamy bigraf $\mathbf{t}_a^- \Delta := \Delta * E_a^- \in \mathcal{UBigr}_n$ powstały z bigrafu Δ przez zastąpienie każdej krawędzi $\bullet_a \text{---} \bullet_b$ przerywaną krawędzią $\bullet_a - - \bullet_b$ oraz każdej krawędzi $\bullet_a - - \bullet_b$ ciągłą krawędzią $\bullet_a \text{---} \bullet_b$.

(b) Inflacją bigrafu Δ względem niepustego zbioru $\Delta_1^+(a, b)$ przerywanych krawędzi $\bullet_a - - \bullet_b$ nazywamy bigraf $\widehat{\Delta} := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ o zbiorze wierzchołków $\widehat{\Delta}_0 = \Delta_0$ i zbiorze krawędzi skonstruowanym w następujący sposób :

- Zastąp każdą krawędź $\bullet_a - - \bullet_b$ w $\Delta_1^+(a, b)$ ciągłą krawędzią $\bullet_a \text{---} \bullet_b$ w $\widehat{\Delta}^-(a, b)$.
- Jeśli $c \neq b$ i $\Delta_1(a, c) \neq \emptyset$, to $\widehat{\Delta}_1^-(a, c) = \Delta_1^-(a, c)$, $\widehat{\Delta}_1^+(a, c) = \Delta_1^+(a, c)$.

Ponadto niech $d_{bc}^{\widehat{\Delta}} := d_{bc}^{\Delta} - d_{ac}^{\Delta} \cdot d_{ab}^{\Delta}$, tzn. jeśli $d_{bc}^{\widehat{\Delta}} \leq 0$, to $\widehat{\Delta}_1^-(b, c)$ zawiera dokładnie $-d_{bc}^{\widehat{\Delta}}$ ciągłych krawędzi; jeśli $d_{bc}^{\widehat{\Delta}} \geq 1$, to $\widehat{\Delta}_1^+(b, c)$ zawiera dokładnie $d_{bc}^{\widehat{\Delta}}$ przerywanych krawędzi.

- Każda z pozostałych krawędzi bigrafu Δ jest również krawędzią w bigrafie $\widehat{\Delta}$.

Wówczas bigraf $\Delta := \mathbf{t}_{ab}^+ \widehat{\Delta}$ nazywamy **deflacją bigrafu $\widehat{\Delta}$ względem niepustego zbioru $\widehat{\Delta}_1^-(a, b)$ ciągłych krawędzi $\bullet_a \text{---} \bullet_b$** w $\widehat{\Delta}^-(a, b)$.

(c) Ciąg $\mathbf{t}_s, \mathbf{t}_{s-1}, \dots, \mathbf{t}_1$ nazywamy inflacyjnym ciągiem operatorów bigrafu Δ , jeśli każdy jego składnik \mathbf{t}_j ma postać \mathbf{t}_c^- lub \mathbf{t}_{ab}^- , dla pewnych $a \neq b$ takich, że $\bullet_a - - \bullet_b$ oraz $\widehat{\Delta} := \mathbf{t}_j \mathbf{t}_{j-1} \cdots \mathbf{t}_1 \Delta$ jest dobrze zdefiniowany dla dowolnego $j \in \{1, \dots, s\}$.

(d) Ciąg $\mathbf{t}_s, \mathbf{t}_{s-1}, \dots, \mathbf{t}_1$ nazywamy deflacyjnym ciągiem operatorów bigrafu Δ , jeśli każdy jego składnik \mathbf{t}_j ma postać \mathbf{t}_c^- lub \mathbf{t}_{ab}^+ , dla pewnych $a \neq b$ takich, że $\bullet_a \text{---} \bullet_b$ oraz $\widehat{\Delta} := \mathbf{t}_j \mathbf{t}_{j-1} \cdots \mathbf{t}_1 \Delta$ jest dobrze zdefiniowany dla dowolnego $j \in \{1, \dots, s\}$.

Przedstawimy teraz lemat (zobacz [58, Lemma 3.1, p. 843]) z którego wynika jak znaleźć \mathbb{Z} -odrzwalną macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ zadającą równoważność $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ dla bigrafów $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ dodatnich lub P -krytycznych. Z lematu tego wynika ponadto, że inflacja bigrafu Δ w wierzchołku oraz inflacja bigrafu względem niepustego zbioru przerywanych krawędzi $\Delta(a, b)^+$ zachowują dodatniość (nieujemność) bigrafu.

Lemat 2.3.3. Załóżmy, że $n \geq 3$, $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ jest spójnym bigrafem, $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$ zaś $\mathbf{t}_a^-, \mathbf{t}_{ab}^-$ są inflacyjnymi operatorami bigrafu Δ .

(a) Bigraf $\Delta' := \mathbf{t}_a^- \Delta$ jest spójnym bigrafem bez pętli oraz $\check{G}_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta} * E_a^-$ dla dowolnego $a \in \Delta_0$, gdzie $E_a^- = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$. Ponadto $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ oraz funkcjonal Grama $q_{\Delta'}(x)$ bigrafu Δ' powstaje z funkcjonatu Grama $q_{\Delta}(x)$ bigrafu Δ przez zastąpienie $x_a \mapsto -x_a$.

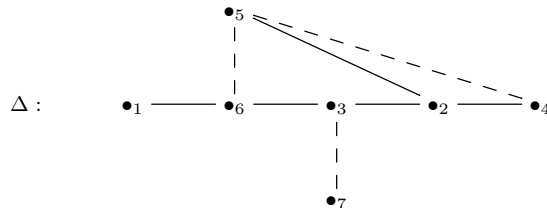
(b) Jeśli istnieje krawędź $\bullet_a - - \bullet_b$ w bigrafie Δ , to bigraf $\widehat{\Delta} := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$ jest spójnym bigrafem bez pętli $G_{\widehat{\Delta}} = G_{\Delta} * E_{ab}^-$, gdzie $E_{ab}^- = \begin{cases} E - d_{ab}^{\Delta} \cdot e_{ab} & \text{jeśli } a < b, \\ E - d_{ab}^{\Delta} \cdot e_{ba} & \text{jeśli } a > b, \end{cases}$ oraz e_{ab} jest macierzą z 1

w a -tym wierszu i b -tej kolumnie oraz 0 w pozostałych miejscach. Ponadto $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \widehat{\Delta}$, funkcjonal Grama $q_{\Delta'}(x) = x \cdot E_{ab}^{-tr} \cdot G_{\Delta} \cdot E_{ab}^- \cdot x^{tr}$ bigrafu Δ' powstaje z funkcjonatu Grama $q_{\Delta}(x)$ bigrafu Δ przez podstawienie $x_a \mapsto x_a - d_{ab}^{\Delta} \cdot x_b$. Podstawienie to przeprowadza wektor v na wektor \widehat{v} taki, że $\widehat{v}_a = v_a + v_b$ oraz $\widehat{v}_j = v_j$, dla $j \neq a$.

(c) Jeśli Δ jest dodatni (odp.: nieujemny) oraz $\Delta' := \mathbf{t}_s^- \Delta$, $\widehat{\Delta} := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$, to bigrafy $\Delta', \widehat{\Delta}$ są dodatnie (odp.: nieujemne).

Dowód. Dowód można znaleźć w artykule [58, Lemma 3.1]. □

Przykład 2.3.4. Niech Δ będzie następującym bigrafem:



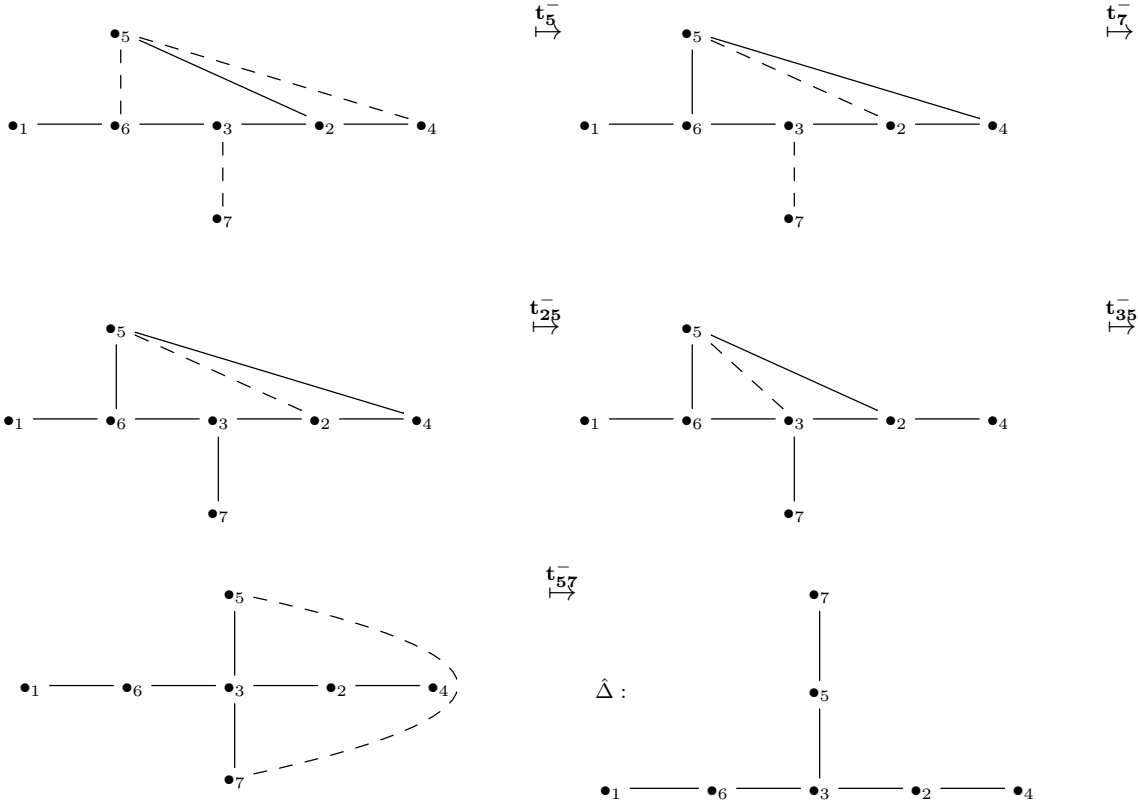
$$\text{Wtedy } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 2G_\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$q_\Delta(x) = (x_1 - \frac{1}{2}x_6)^2 + (x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5)^2 + \frac{3}{4}(x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_6 + \frac{2}{3}x_7)^2 + \\ + \frac{2}{3}(x_4 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 + \frac{1}{4}x_7)^2 + \frac{5}{8}(x_5 + \frac{3}{5}x_6 + \frac{1}{5}x_7)^2 + \frac{3}{20}(x_6 + 2x_7)^2 \geq 0,$$

dla dowolnego $x = (x_1, \dots, x_7) \in \mathbb{Z}^7$, więc Δ jest nieujemny. Ponadto z równości $q_\Delta(x) = 0$ wynika, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (1, 1, 2, 1, -1, 2, -1)$. Zatem na mocy twierdzenia 2.1, bigraf Δ jest P -krytyczny.

Za pomocą algorytmu inflacyjnego opisanego w rozdziale 4.1 redukujemy bigraf Δ do jednego z grafów Euklidesa. Dokładniej wykażemy, że bigraf Δ jest E-typu \mathbb{E}_6 . Przedstawiamy teraz kolejne kroki algorytmu inflacyjnego, które pokazują, jak zmienia się Δ oraz wektor $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$.



$\mathbf{h} = (1, 1, 2, 1, -1, 2, -1)$, $\mathbf{h} := \mathbf{t}_5^- \mathbf{h} = (1, 1, 2, 1, 1, 2, -1)$, $\mathbf{h} := \mathbf{t}_7^- \mathbf{h} = (1, 1, 2, 1, 1, 2, 1)$
 $\mathbf{h} := \mathbf{t}_{25}^- \mathbf{h} = (1, 2, 2, 1, 1, 2, 1)$, $\mathbf{h} := \mathbf{t}_{35}^- \mathbf{h} = (1, 2, 3, 1, 1, 2, 1)$, $\mathbf{h} := \mathbf{t}_{57}^- \mathbf{h} = (1, 2, 3, 1, 2, 2, 1)$.
Wówczas $B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B = G_{\mathbb{E}_6}$ (dla \mathbb{E}_6 z numeracją jak w $\hat{\Delta}$), gdzie

$$B = E_5^- \cdot E_7^- \cdot E_{25}^- \cdot E_{35}^- \cdot E_{57}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zatem $\tilde{D}\Delta = \tilde{\mathbb{E}}_6$.

2.4. Klasyfikacja P -krytycznych bigrafów z dokładnością do działania grupy ortogonalnej na bigrafach

W rozdziale przedstawiamy klasyfikację P -krytycznych bigrafów o $n+1 \geq 3$ wierzchołkach z dokładnością do działania (2.2.3) grupy ortogonalnej $O(n+1, \mathbb{Z})$ na P -krytycznych bigrafach z \mathcal{UBigr}_{n+1} . Podajemy listę P -krytycznych bigrafów \mathcal{LP}_{n+1} o funkcjonalach Grama ze zbioru $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet$, dla $n+1 \leq 10$. Lista ta została uzyskana przy pomocy obliczeń komputerowych, m.in. przez zastosowanie konstrukcji $(\Delta, w) \mapsto \Delta' := \Delta[[w, n, \varepsilon_n]]$ (2.2.9) i algorytmu 4.1.10 konstruujących P -krytyczne bigrafy $\Delta' = \Delta[[w, n, \varepsilon_n]]$ o $n+1$ wierzchołkach z par $(\Delta, w) \in \mathcal{Z}'_n$, gdzie $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ jest dodatnim i spójnym bigrafem, zaś $w \in \mathcal{R}_\Delta$ jego wiernym pierwiastkiem.

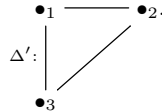
Podajemy również pełną kasyfikację ortogonalną P -krytycznych bigrafów. Dokładniej udowadniamy (w oparciu o wyniki von Höhne [26]), że jeśli Δ' jest P -krytycznym bigrafem E -typu $\tilde{\mathbb{D}}_n$, to istnieje macierz ortogonalna $B \in O(n+1, \mathbb{Z})$ taka, że $G_{\Delta_H} = B^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot B$, dla pewnego krytycznego bigrafu Δ_H z listy von Höhne (patrz [26, str. 317], a także tabela 2.4.3). Jeśli natomiast Δ' jest P -krytycznym bigrafem E -typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$, to istnieje macierz ortogonalna $\tilde{B} \in O(n+1, \mathbb{Z})$ taka, że $G_{\tilde{\mathbb{A}}_n} = \tilde{B}^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot \tilde{B}$.

Na podstawie twierdzenia 2.1, P -krytyczne bigrafy (bez pętli) o dwóch wierzchołkach to bigrafy posiadające co najmniej dwie krawędzie (ciągłe albo przerywane).

Przedstawiamy najpierw twierdzenia 2.4.1 i 2.4.2, z których wynika klasyfikacja ortogonalna P -krytycznych bigrafów o $n+1 \leq 10$ wierzchołkach. Dla każdego P -krytycznego bigrafu Δ' z \mathcal{LP}_{n+1} , podajemy jego wielomian Coxetera $\text{cox}_{\Delta'}(t)$ oraz E -typ policzony za pomocą algorytmu inflacyjnego opisanego w rozdziale 4 oraz w pracach [31, 58]. Metody obliczania $\text{cox}_{\Delta'}(t)$, E -typu $D\Delta'$ oraz wektora $0 \neq \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ takiego, że $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, zostały opisane w rozdziale 4.

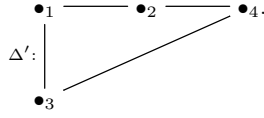
Twierdzenie 2.4.1. *Niech $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ będzie P -krytycznym bigrafem o liczbie wierzchołków $3 \leq |\Delta'_0| = n+1 \leq 5$.*

(a) *Jeśli $n+1 = 3$, to z dokładnością do działania (2.2.3) grupy $O(n+1, \mathbb{Z})$ na P -krytycznych bigrafach z \mathcal{UBigr}_{n+1} , Δ' ma następującą postać:*



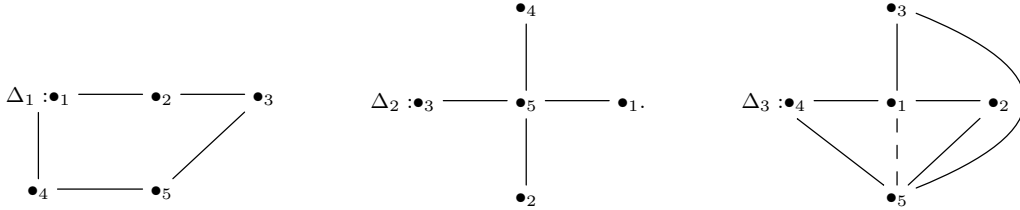
Funkcjonal Grama $q_{\Delta'}$, wielomian Coxetera $\text{cox}_{\Delta'}(t)$, E -typ, wektor $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_{\Delta'}$ oraz zredukowana liczba Coxetera $\check{c}_{\Delta'}$ bigrafu Δ' mają następującą postać: $q_{\Delta'}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$, $\text{cox}_{\Delta'}(t) = t^3 - t^2 - t + 1 = F_{\tilde{\mathbb{A}}_2}^{(1)}(t)$, $E\text{-typ} = \tilde{\mathbb{A}}_2$, $\mathbf{h} = (1, 1, 1)$, $\check{c}_{\Delta'} = 2$.

(b) Jeśli $n + 1 = 4$, to z dokładnością do działania grupy $O(n + 1, \mathbb{Z})$ na P -krytycznych bigrafach z \mathcal{UBigr}_{n+1} , Δ' ma następującą postać:



Wówczas $q_{\Delta'}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_4 - x_3x_4$, $\text{cox}_{\Delta'}(t) = t^4 - 2t^2 + 1 = F_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^{(2)}(t)$, E-typ= $\tilde{\mathbb{A}}_3$, $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1)$, $\check{c}_{\Delta'} = 2$ są odpowiednio funkcjonalem Grama $q_{\Delta'}$, wielomianem Coxetera $\text{cox}_{\Delta'}(t)$, E-typem, wektorem $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_{\Delta'}$ oraz zredukowaną liczbą Coxetera $\check{c}_{\Delta'}$ bigrafu Δ' .

(c) Jeśli $n + 1 = 5$, to z dokładnością do działania grupy $O(n + 1, \mathbb{Z})$ na P -krytycznych bigrafach z \mathcal{UBigr}_{n+1} , Δ' jest jednym z następujących trzech bigrafów:



Funkcjonały Grama $q_{\Delta'}$, wielomiany Coxetera $\text{cox}_{\Delta'}(t)$, E-typy, wektory $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_{\Delta'}$ oraz zredukowane liczby Coxetera $\check{c}_{\Delta'}$ dla $\Delta' \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ mają następującą postać:

- $q_{\Delta_1}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1x_2 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_3x_5 - x_4x_5$, $\text{cox}_{\Delta_1}(t) = t^5 - t^3 - t^2 + 1 = F_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^{(2)}(t)$, E-typ= $\tilde{\mathbb{A}}_3$, $\mathbf{h}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\check{c}_{\Delta_1} = 6$,
- $q_{\Delta_2}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_5$, $\text{cox}_{\Delta_2}(t) = t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1 = F_{\mathbb{D}_4}(t)$, E-typ= \mathbb{D}_4 , $\mathbf{h}_2 = (1, 1, 1, 1, 2)$, $\check{c}_{\Delta_2} = 2$,
- $q_{\Delta_3}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1(x_2 + x_3 + x_4 - x_5) - (x_2 + x_3 + x_4)x_5$, $\text{cox}_{\Delta_3}(t) = t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_4}(t)$, E-typ= $\tilde{\mathbb{D}}_4$, $\mathbf{h}_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\check{c}_{\Delta_3} = 2$.

Dowód. Dowód punktów (a)-(c) przeprowadzimy w czterech krokach.

1° Udowodnimy najpierw, że bigrafy przedstawione w punktach (a)-(c) są P -krytyczne. W tym celu pokażemy, że każdy ze wspomnianych bigrafów Δ' jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} \neq 0$ jest wiernym wektorem.

Rozważmy bigraf Δ' przedstawiony w punkcie (a). Wówczas

$$\begin{aligned} q_{\Delta'}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = \\ &= \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}(-x_1 + x_3)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}^3$ oraz $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (1, 1, 1)$. Zatem na mocy twierdzenia 2.1 bigraf Δ' jest P -krytyczny.

Podobnie postępujemy z bigrafami przedstawionymi w punktach (b) i (c). Rozważmy najpierw Δ' z punktu (b). Wówczas

$$\begin{aligned}
q_{\Delta'}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_4 - x_3x_4 = \\
&= \frac{1}{2}(x_1 - x_4)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}^4$ oraz $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1)$. Zatem Δ' jest P -krytyczny. Łatwo pokazać, że

$$\begin{aligned}
q_{\Delta_1}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1x_2 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_3x_5 - x_4x_5 = \\
&= \frac{2}{3}\left(x_1 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}x_1 + x_3 - \frac{2}{3}x_5\right)^2 + \\
&\quad + \frac{5}{8}(x_4 - x_5)^2 \geq 0, \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{Z}^5;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{\Delta_2}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_5 = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_5\right)^2 + \\
&\quad + \left(x_2 - \frac{1}{2}x_5\right)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_5\right)^2 + \left(x_4 - \frac{1}{2}x_5\right)^2 \geq 0, \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{Z}^5;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{\Delta_3}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1(x_2 + x_3 + x_4 - x_5) - (x_2 + x_3 + x_4)x_5 = \\
&= \frac{1}{2}(x_1 - x_4)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_5\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_5\right)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}(x_4 - x_5)^2 \geq 0, \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{Z}^5,
\end{aligned}$$

dla $\Delta' \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ przedstawionych w punkcie (c). Z równości $q_{\Delta'}(x) = 0$ wynika ponadto, że $\text{Ker } q_{\Delta_i} := \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_i$, dla $i = 1, 2, 3$, gdzie $\mathbf{h}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{h}_2 = (1, 1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{h}_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$. Zatem na mocy twierdzenia 2.1 bigrafy z punktu (c) są P -krytyczne.

2° Pokażemy, że jeśli Δ' jest P -krytycznym bigrafem o $n + 1 \geq 3$ wierzchołkach, to bigraf $\Delta' * B$ jest P -krytyczny, dla dowolnej macierzy $B \in \text{O}(n + 1, \mathbb{Z})$.

2.1° Ponieważ Δ' jest P -krytyczny, więc na mocy twierdzenia 2.1, Δ' jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $0 \neq \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ jest wiernym wektorem. Wówczas

$$q_{\Delta' * B}(x) = (q_{\Delta'} * B)(x) = q_{\Delta'}(x \cdot B^{tr}) \geq 0.$$

Zatem $\Delta' * B$ jest nieujemny.

2.2° Udowodnimy, że $\text{Ker } q_{\Delta' * B} = \mathbb{Z} \cdot (\mathbf{h} \cdot B)$, gdzie $\mathbf{h} \cdot B$ jest wiernym wektorem.

Ponieważ \mathbf{h} jest wiernym wektorem oraz $B = \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}$, dla $\hat{\sigma} \in \hat{\mathbf{S}}_{n+1}$, $\hat{\varepsilon} \in \hat{\mathbf{C}}_2^{n+1}$, więc również wektor $\mathbf{h} \cdot B = \mathbf{h} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon})$ jest wierny. Wynika to z faktu, iż wektor $\mathbf{h} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon})$ jest postaci $(h_{\sigma(1)} \cdot \varepsilon_1, \dots, h_{\sigma(n+1)} \cdot \varepsilon_{n+1})$, dla $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \hat{\mathbf{C}}_2^{n+1}$, gdzie $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ dla dowolnego $i \leq n + 1$.

Na podstawie twierdzenia 2.1, w wektorze \mathbf{h} istnieje współrzędna $1 \leq s \leq n + 1$ taka, że $h_s \in \{-1, +1\}$. Wówczas w wektorze $\mathbf{h} \cdot B = \mathbf{h} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}) = (h_{\sigma(1)} \cdot \varepsilon_1, \dots, h_{\sigma(n+1)} \cdot \varepsilon_{n+1})$ istnieje współrzędna $t = \sigma(s) \leq n + 1$ taka, że $(\mathbf{h} \cdot B)_t \in \{-1, +1\}$.

Z równości

$$q_{\Delta' * B}(\mathbf{h} \cdot B) = (q_{\Delta'} * B)(\mathbf{h} \cdot B) = q_{\Delta'}(\mathbf{h} \cdot B \cdot B^{tr}) = q_{\Delta'}(\mathbf{h}) = 0$$

wynika inkluzja $\mathbb{Z} \cdot (\mathbf{h} \cdot B) \subseteq \text{Ker } q_{\Delta' * B}$. W celu pokazania, że $\text{Ker } q_{\Delta' * B} \subseteq \mathbb{Z}(\mathbf{h} \cdot B)$ założymy, że $\tilde{\mathbf{h}} \neq 0$ jest generatorem $\text{Ker } q_{\Delta' * B}$, tzn. $\text{Ker } q_{\Delta' * B} = \mathbb{Z} \cdot \tilde{\mathbf{h}}$. Wówczas istnieje $\lambda \in \mathbb{Z}$ taka, że $\mathbf{h} \cdot B = \lambda \cdot \tilde{\mathbf{h}}$. Ponieważ w wektorze $\mathbf{h} \cdot B$ istnieje współrzędna $1 \leq t \leq n + 1$ taka, że

$(\mathbf{h} \cdot B)_t \in \{-1, 1\}$, więc otrzymujemy następującą równość $(\mathbf{h} \cdot B)_t = \lambda \cdot \tilde{h}_t$. Stąd wynika, że $\tilde{h}_t, (\mathbf{h} \cdot B)_t, \lambda \in \{-1, +1\}$ oraz $\text{Ker } q_{\Delta' * B} = \mathbb{Z} \cdot (\mathbf{h} \cdot B)$.

Ponieważ $\Delta' * B$ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_{\Delta' * B} = \mathbb{Z} \cdot (\mathbf{h} \cdot B)$, gdzie $\mathbf{h} \cdot B$ jest wiernym wektorem, więc na podstawie twierdzenia 2.1, $\Delta' * B$ jest P -krytyczny.

3° Udowodnimy, że jeśli Δ' jest P -krytycznym bigrafem o $3 \leq n+1 \leq 5$ wierzchołkach, to z dokładnością do działania (2.2.3) grupy $O(n+1, \mathbb{Z})$ na P -krytycznych bigrafach z \mathcal{UBigr}_{n+1} , Δ' jest jednym z bigrafów przedstawionych w punktach (a)-(c).

W tym celu znajdujemy wszystkie niesymetryczne macierze Grama $\check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ bigrafów Δ' o $n+1 \in \{3, 4, 5\}$ wierzchołkach takie, że:

(a1) symetryczna macierz $\hat{G}_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta'} + \check{G}_{\Delta'}^{tr}$, nie jest dodatnio określona, zaś

(a2) dla dowolnego $i \in \{1, \dots, n+1\}$ macierz $\hat{G}_{\Delta'}^{(i)}$ powstała z $\hat{G}_{\Delta'}$ przez usunięcie i -tego wiersza i i -tej kolumny jest dodatnio określona.

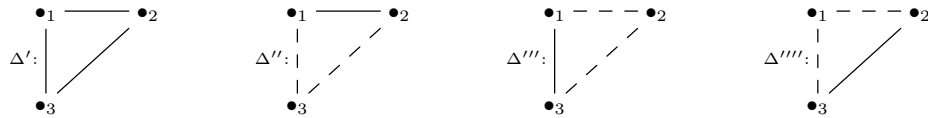
Na podstawie lematu 2.1.3 współczynniki macierzy $\check{G}_{\Delta} = [d_{ij}]$ należą do zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Czas działania naiwnego algorytmu szukającego wszystkich macierzy górnotrójkątnych $\check{G}_{\Delta} = [d_{ij}]$ spełniających (a1) i (a2) oraz takich, że

$$d_{ij} = \begin{cases} -1, 0, 1 & \text{jeśli } i < j, \\ 1 & \text{jeśli } i = j, \\ 0 & \text{jeśli } i > j, \end{cases}$$

wynosi odpowiednio 0,009 sekundy; 0,024 sekundy; 1,167 sekundy; 15 i pół minuty dla $n = 3, 4, 5, 6$.

Dla $n = 6$ naiwny algorytm przegląda 3^{15} macierzy, by na końcu zwrócić listę 19 200 niesymetrycznych macierzy Grama kodujących P -krytyczne bigrafy o 6 wierzchołkach. Większość z otrzymanych w ten sposób bigrafów należy do tych samych $O(6, \mathbb{Z})$ -orbit w zbiorze wszystkich P -krytycznych bigrafów o 6 wierzchołkach, gdyż zbiór $P\text{-kryt}_6^\bullet$ (znaleziony poprzez uruchomienie implementacji algorytmu 4.1.9 w C#), jest 5 elementowy. Dlatego, w celu znalezienia $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet$ dla $n+1 \geq 6$, stosujemy konstrukcję (2.2.9). W wyniku zastosowania algorytmu 4.1.12 otrzymujemy zbiór 10 elementowy (dla P -krytycznych bigrafów o 6 wierzchołkach), dla którego następnie uruchamiamy algorytm 4.1.9. Zatem zamiast szukać elementów zbioru $P\text{-kryt}_6^\bullet$ w zbiorze 19 200 elementowym, szukamy tych elementów w znacznie mniejszym (10 elementowym) zbiorze.

Stosując naiwny algorytm otrzymujemy odpowiednio 4, 24, 432 macierze, dla $n+1 = 3, 4, 5$ kodujące P -krytyczne bigrafy z \mathcal{UBigr}_{n+1} . Dla $n+1 = 3$ macierze te odpowiadają następującym czterem P -krytycznym bigrafom bez pętli:



Ponieważ $\Delta' = \Delta'' * \hat{\varepsilon}^{(3)}$, $\Delta' = \Delta''' * \hat{\varepsilon}^{(2)}$, $\Delta' = \Delta'''' * \hat{\varepsilon}^{(1)}$, gdzie $\hat{\varepsilon}^{(j)}$ jest macierzą diagonalną o przekątnej $\varepsilon^{(j)} = (1, \dots, 1, -1_j, 1, \dots, 1)$, więc bigrafy te należą do tej samej $O(3, \mathbb{Z})$ -orbity w zbiorze P -krytycznych bigrafów z \mathcal{UBigr}_3 . Zatem z dokładnością do działania (2.2.3) grupy $O(3, \mathbb{Z})$ na P -krytycznych bigrafach o 3 wierzchołkach Δ' jest bigrafem przedstawionym w punkcie (a). Podobnie postępujemy w przypadku 24 niesymetrycznych macierzy Grama dla P -krytycznych bigrafów o 4 wierzchołkach. Otrzymujemy w ten sposób jeden P -krytyczny bigraf przedstawiony w punkcie (b).

Dla P -krytycznych bigrafów o 5 wierzchołkach zbiór $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^5, \mathbb{Z})$ zawiera 432 funkcjonały Grama odpowiadające tym bigrafom. W celu uzyskania zbioru $P\text{-kryt}_5^\bullet$ uruchamiamy implementację algorytmu 4.1.8 w języku C#. Otrzymujemy w ten sposób trzy P -krytyczne bigrafy przedstawione w punkcie (c).

4° Dla każdego P -krytycznego bigrafu Δ' z punktów (a)-(c) obliczamy, przy pomocy implementacji algorytmu inflacyjnego w C# (zobacz [58, 31], a także rozdział 4.1), jego E-typ. Ponadto wyliczamy wielomiany Coxetera $\text{cox}_q(t)$ oraz zredukowane liczby Coxetera \check{c}_q . \square

Dla $n + 1 \geq 6$ naiwne przeszukiwanie niesymetrycznych macierzy Grama $\check{G}_{\Delta'}$, w celu znalezienia P -krytycznych bigrafów $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ jest bardzo czasochłonne, podobnie jak wyznaczenie wszystkich parami różnych reprezentantów $O(n + 1, \mathbb{Z})$ -orbit w zbiorze $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$, tzn zbioru $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet$. Dlatego w celu policzenia zbioru $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet$, dla $n + 1 \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ korzystamy z konstrukcji 2.2.9, która każdej parze $(\Delta, w) \in \mathcal{Z}'_n$ przyporządkowuje P -krytyczny bigraf $\Delta' := \Delta[[w, n, \varepsilon_n]] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$. Dzięki wspomnianej konstrukcji 2.2.9 oraz kilku obserwacjom (będącym konsekwencjami twierdzenia 2.2.6), zamiast liczyć cały zbiór $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$ dla $n + 1 \geq 6$ obliczamy pewien jego znacznie mniejszy podzbiór $P\text{-kryt}^-(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$, z którego następnie przy pomocy algorytmu 4.1.8 otrzymujemy $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet$.

Twierdzenie 2.4.2. *Niech $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ będzie P -krytycznym bigrafem o liczbie wierzchołków $6 \leq |\Delta'_0| = n + 1 \leq 10$.*

(a) *Jeśli $n + 1 = 6$, to z dokładnością do działania grupy ortogonalnej na P -krytycznych bigrafach Δ' jest jednym z pięciu bigrafów, których funkcjonały Grama $q(x)$ (wraz z wielomianami Coxetera $\text{cox}_q(t)$ oraz E-typami) zostały przedstawione w tabeli 2.4.8.*

(b) *Jeśli $n + 1 = 7$, to z dokładnością do działania grupy ortogonalnej na P -krytycznych bigrafach Δ' jest jednym z dwudziestu czterech bigrafów, których funkcjonały Grama $q(x)$ (wraz z wielomianami Coxetera $\text{cox}_q(t)$ oraz E-typami) zostały przedstawione w tabeli 2.4.10.*

(c) *Jeśli $n + 1 \in \{8, 9, 10\}$, to z dokładnością do działania grupy ortogonalnej na P -krytycznych bigrafach Δ' jest odpowiednio jednym z 152, 1730, 17 bigrafów, których niesymetryczne macierze Grama zostały zamieszczone na stronie internetowej [41].*

Idea dowodu. Dowód opiera się na konstrukcji 2.2.9, która każdej parze $(\Delta, w) \in \mathcal{Z}'_n$ przyporządkowuje P -krytyczny bigraf $\Delta' := \Delta[[w, n, \varepsilon_n]] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$. Przeprowadzimy go w kilku krokach.

1° Sprawdzamy, że każdy bigraf o funkcjonałe Grama $q : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ należącym do zbioru $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet$, dla $n + 1 \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ jest P -krytyczny.

W tym celu uruchamiamy algorytm 4.1.2 dla $n + 1 \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ oraz niesymetrycznych macierzy Grama \check{G}_q takich, że $q \in P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet$. Zbiory $P\text{-kryt}_6^\bullet$, $P\text{-kryt}_7^\bullet$ przedstawiamy w tabelach 2.4.8 i 2.4.10, zaś zbiory $P\text{-kryt}_8^\bullet$, $P\text{-kryt}_9^\bullet$, $P\text{-kryt}_{10}^\bullet$ zostały zamieszczone na stronie internetowej [41] (w postaci niesymetrycznych macierzy Grama \check{G}_q).

2° Obliczamy, przy pomocy algorytmu 4.1.13 zaimplementowanego w języku C#, zbiory dod_n^\bullet , dla $n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

3° Dla każdego dodatniego i spójnego bigrafu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ o funkcjonałe Grama należącym do dod_n^\bullet oraz dla każdego $n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ wyznaczamy, przy pomocy algorytmu (ograniczonego zliczania) 4.1.15, zbiór

$$\mathcal{SR}_{p_\Delta} = \{w \in \mathbb{Z}^n; p_\Delta(w) = w \cdot G_{p_\Delta} \cdot w^{tr} = 1, w_1 \neq 0, \dots, w_n \neq 0\},$$

z którego następnie wybieramy podzbiór $\mathcal{SR}_{p_\Delta}^- \subset \mathcal{SR}_{p_\Delta}$ o tej własności, że jeśli $w \in \mathcal{SR}_{p_\Delta}^-$, to $-w \notin \mathcal{SR}_{p_\Delta}^-$.

4° Konstruujemy zbiory par $\mathcal{Z}_n^- = \{(p_\Delta, w); p_\Delta \in \mathbf{dod}_n^\bullet, w \in \mathcal{SR}_{p_\Delta}^-\}$ dla $n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Ponieważ p_Δ są funkcjonalami Grama dodatnich bigrafów $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ posiadających wierny pierwiastek, więc Δ są spójne.

5° Przy pomocy konstrukcji 2.2.9 (zobacz także algorytm 4.1.10 i algorytm 4.1.12), dla każdej pary $(p_\Delta, w) \in \mathcal{Z}_n^-$, $n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, tworzymy P -krytyczny bigraf

$$\Delta' = [[\Delta, w, \varepsilon_n]],$$

o $n+1 \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ wierzchołkach i funkcjonałe Grama $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$, który następnie dodajemy do zbioru $P\text{-kryt}^-(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$.

Zbiór $P\text{-kryt}^-(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z}) \subseteq P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$ jest pewnym podzbiorem zbioru $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$ wszystkich P -krytycznych bigrafów z \mathcal{UBigr}_{n+1} . Powstaje on z par $(p_\Delta, w) \in \mathcal{Z}_n^-$, gdyż z twierdzenia 2.2.6 wynika, że z $(p_\Delta, w), (p_\Delta, w) \in \mathcal{Z}_n$ otrzymamy dwa P -krytyczne bigrafy o funkcjonalach Grama należących do tej samej $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbity w zbiorze $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$. Ponadto zbiór \mathcal{Z}^- tworzymy z dodatnich i spójnych bigrafów o funkcjonalach Grama należących do $p_\Delta \in \mathbf{dod}_n^\bullet$, gdyż na podstawie twierdzenia 2.2.6, z par $(p_{\Delta_1}, w_1), (p_{\Delta_2}, w_2)$ należących do tej samej $O(n, \mathbb{Z})$ -orbity w \mathcal{Z}_n otrzymamy dwa P -krytyczne bigrafy o funkcjonalach Grama $q_1, q_2 : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ należących do tej samej $O(n, \mathbb{Z})$ -orbity w $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$.

P -krytyczne bigrafy o funkcjonalach Grama należących do zbioru $P\text{-kryt}^-(\mathbb{Z}^6, \mathbb{Z})$, $P\text{-kryt}^-(\mathbb{Z}^7, \mathbb{Z})$ zostały przedstawione w tabelach 2.4.7 i 2.4.9.

6° Część z P -krytycznych bigrafów z $P\text{-kryt}^-(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$ dla $n+1 \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$ należy do tych samych $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbit w $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$. Aby znaleźć podzbiór $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet \subseteq P\text{-kryt}^-(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$, dla $6 \leq n+1 \leq 10$, uruchamiamy implementację algorytmu 4.1.8 w języku C#. Dostajemy w ten sposób szukane zbiory. Zostały one przedstawione w tabelach 2.4.8 i 2.4.10, dla $n+1 \in \{6, 7\}$ oraz na stronie internetowej [41] dla $n+1 \in \{8, 9, 10\}$.

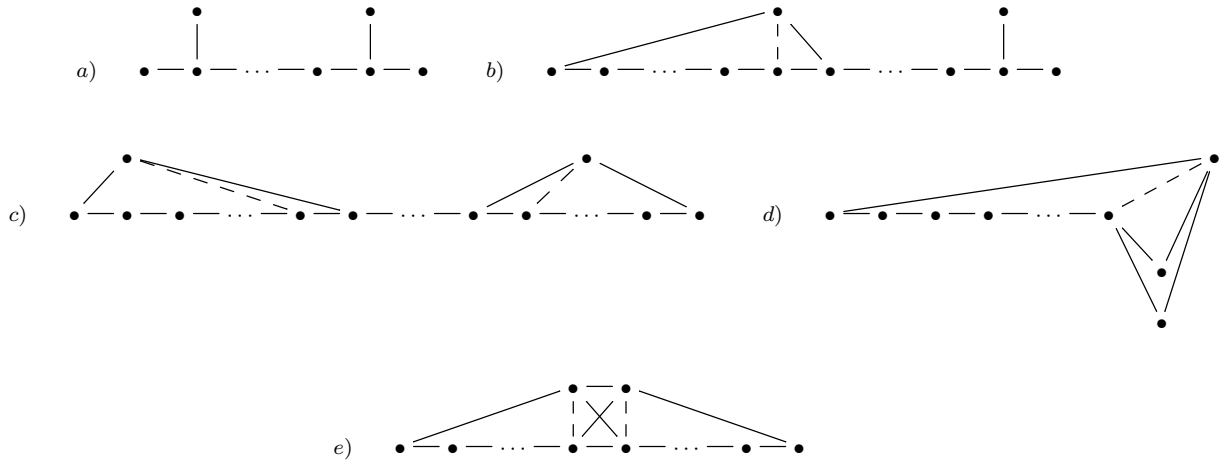
Zaprezentujemy teraz czas działania algorytmu 4.1.12, który posłużył do obliczenia zbioru $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet$, dla $n+1 \leq 10$.

Dla $n+1 = 6$ potrzebujemy zaledwie 324 milisekundy, dla $n+1 = 7$ już ponad 13 sekund, zaś dla $n+1 = 8$ potrzeba blisko 3490 sekund (czyli około 58 minut). Algorytm ten wymaga na wejściu zbioru \mathbf{dod}_n^\bullet . Wyznaczenie tego zbioru przy użyciu algorytmu 4.1.13 jest czasochłonne i zajmuje odpowiednio: 167 milisekund, 16 sekund i 963 sekund dla $n = 5, 6, 7$.

Aby obliczyć zbiór \mathbf{dod}_n^\bullet , dla $n \geq 10$ należy wcześniej policzyć zbiór $\mathbf{dod}_{n-1}^\bullet$, który dla $n-1 = 9$ ma 103 920 elementów. Dla każdego z elementów zbioru \mathbf{dod}_9^\bullet należy wykonać kroki 3°–6° algorytmu 4.1.13 (wymagające przejrzania 3^9 macierzy). Otrzymamy w ten sposób zbiór $\mathbf{dod}^-(\mathbb{Z}^{10}, \mathbb{Z}) \subset \mathbf{dod}_{10}^\bullet$, z którego następnie należy wybrać reprezentantów $\mathbf{dod}_{10}^\bullet$. Wymaga to użycia grupy ortogonalnej, a dokładniej pewnego podzbioru $\text{PMatrix} \subset O(10, \mathbb{Z})$ (zobacz algorytm i uwaga 4.1.9), który w najgorszym razie ma $10! \cdot 2^{10}$ elementów. \square

Przedstawimy teraz listę krytycznych bigrafów E-typu $\widetilde{\mathbb{D}}_n$ podanych przez H. J. von Höhne w pracy [26, str. 317].

TABELA 2.4.3. LISTA \mathcal{CH}_{n+1} KRYTYCZNYCH BIGRAFÓW VON HÖHNE E-TYPU $\tilde{\mathbb{D}}_n$



Będziemy stosować następujące oznaczenia: przez $\tilde{\mathbb{D}}_n$ oznaczamy graf Euklidesa $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ze standardową numeracją wierzchołków (patrz tabela 1.4.9), zaś przez $\tilde{\mathbb{D}}'_n$ graf Euklidesa przedstawiony w tabeli 2.4.3 w punkcie a) o pewnej numeracji wierzchołków $\{c_1, \dots, c_n, c_{n+1}\}$.

Przedstawimy teraz lemat 2.4.4, z którego wynika, że jeśli $\tilde{\mathbb{D}}_n$ jest grafem Euklidesa, to przy pomocy deflacyjnych ciągów operatorów grafu $\tilde{\mathbb{D}}_n$ uzyskamy z dokładnością do działania (2.2.3) jeden z krytycznych bigrafów z listy \mathcal{CH}_{n+1} .

Lemat 2.4.4. *Niech D będzie grafem Euklidesa $\tilde{\mathbb{D}}_n$ (patrz tabela 1.4.9). Wówczas dla każdego deflacyjnego ciągu operatorów $\hat{\mathbf{t}}^+ = \mathbf{t}_{\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k}^+ \cdot \dots \cdot \mathbf{t}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1}^+$ grafu D przeprowadzającego krytyczny graf D na krytyczny bigraf $\hat{\mathbf{t}}^+ D$ i dla każdego $k \geq 1$ istnieje bigraf $H \in \mathcal{CH}_{n+1}$ taki, że*

$$\hat{\mathbf{t}}^+ D \sim_{ort}^B H,$$

tzn. istnieje $B \in O(n+1, \mathbb{Z})$ taka, że $G_H = B^{tr} \cdot G_{\hat{\mathbf{t}}^+ D} \cdot B$.

Idea dowodu. W dowodzie postępujemy zgodnie z sugestią H. J. von Höhne zawartą w [26, str. 317].

Niech D będzie następującym grafem Euklidesa $\tilde{\mathbb{D}}_n$:

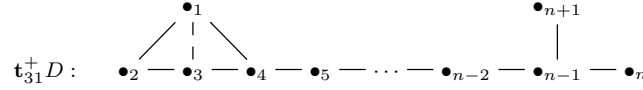


o° Ponieważ $D \in \mathcal{CH}_{n+1}$ (patrz tabela 2.4.3 punkt a)), jest więc krytyczny. Na podstawie [59, Section XIV.1] oraz [49, str. 3] jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_D = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_{n+1})$ jest dodatnim i wiernym wektorem. Łatwo sprawdzić, że $\mathbf{h} = (1, 1, 2, \dots, 2, 1, 1)$. Na podstawie [58, Lemma 3.1] bigraf $\hat{\mathbf{t}}^+ D$ powstały z D przez zastosowanie ciągu deflacyjnego $\hat{\mathbf{t}}^+$ długości $k \geq 1$ jest nieujemny. Ponieważ szukamy krytycznych bigrafów, więc rozważamy tylko takie ciągi deflacyjnych operatorów, które przeprowadzają dodatni i wierny wektor $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_D$ na dodatni i wierny wektor. Takie deflacje i ciągi deflacyjnych operatorów nazywamy dopuszczalnymi. Wówczas z twierdzenia 2.1.2 wynika, że są to krytyczne bigrafy.

1° Pokazujemy, że rozważając wszystkie dopuszczalne ciągi deflacyjnych operatorów grafu D otrzymamy (z dokładnością do działania (2.2.3)) jeden z bigrafów z listy \mathcal{CH}_{n+1} .

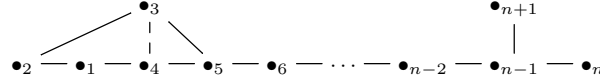
Ponieważ jądro $\text{Ker } q_D$ grafu D jest postaci $\text{Ker } q_D = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (1, 1, 2, \dots, 2, 1, 1)$, więc dopuszczalne są następujące cztery deflacje: \mathbf{t}_{31}^+ , \mathbf{t}_{32}^+ , \mathbf{t}_{n-1n}^+ , \mathbf{t}_{n-1n+1}^+ . Ponieważ są to „symetryczne” przypadki, więc rozważamy tylko jeden z nich.

1.1.° Bigraf $\mathbf{t}_{31}^+ D$ powstały z D przez zastosowanie deflacji \mathbf{t}_{31}^+ ma następującą postać:

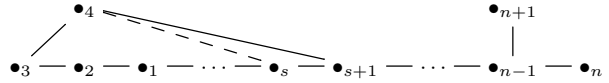


oraz $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 2, \dots, 2, 1, 1)$. Na bigrafie $\mathbf{t}_{31}^+ D$ możemy wykonać jedną z następujących dopuszczalnych deflacji: \mathbf{t}_{43}^+ , \mathbf{t}_{41}^+ lub \mathbf{t}_{n-1n}^+ , \mathbf{t}_{n-1n+1}^+ (pozostałe są zabronione, bo dają zerową współrzędną w nowym wektorze \mathbf{h} krytycznego bigrafu). Ponieważ \mathbf{t}_{43}^+ i \mathbf{t}_{41}^+ są „symetrycznymi” przypadkami, więc rozważamy jeden z nich, tzn. \mathbf{t}_{43}^+ (przypadek 1.1.1°). Przypadki \mathbf{t}_{n-1n}^+ , \mathbf{t}_{n-1n+1}^+ są również „symetryczne”, dlatego rozważamy tylko \mathbf{t}_{n-1n}^+ (przypadek 1.1.2°).

1.1.1° Bigraf $\mathbf{t}_{43}^+ \mathbf{t}_{31}^+ D$ powstały z $\mathbf{t}_{31}^+ D$ przez zastosowanie deflacji \mathbf{t}_{43}^+ ma następującą postać:



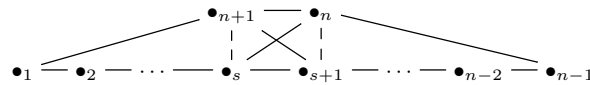
oraz $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 2, \dots, 2, 1, 1)$. Możliwe są teraz następujące dwa przypadki: \mathbf{t}_{53}^+ (\mathbf{t}_{54}^+ jest „symetryczny”) lub \mathbf{t}_{n-1n+1}^+ (\mathbf{t}_{n-1n}^+ jest „symetryczny”). Postępując w ten sposób otrzymamy:



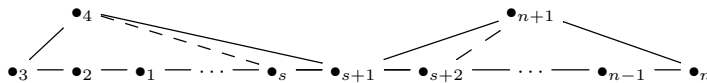
gdzie $\mathbf{h} = (1, 1, 1, \dots, 1_s, 2_{s+1}, \dots, 2_{n-1}, 1, 1)$ oraz



gdzie $\mathbf{h} = (1, 1, 1, \dots, 1_s, 2_{s+1}, \dots, 2_r, 1, \dots, 1)$, oraz bigraf



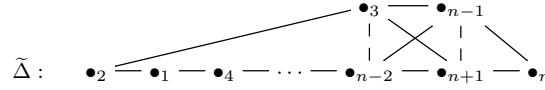
o $\mathbf{h} = (1, 1, \dots, 1)$ otrzymany z bigrafu postaci



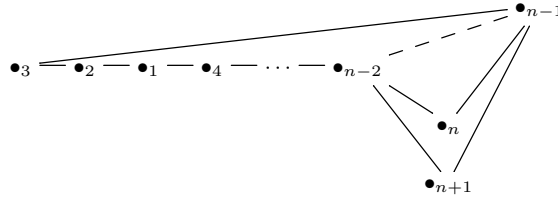
o $\mathbf{h} = (1, 1, 1, \dots, 1_s, 2_{s+1}, 1, \dots, 1)$. Ponadto z bigrafu



o $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 2, 1, 1)$ po wykonaniu $\mathbf{t}_{n-1 n+1}^+$ otrzymamy bigraf $\tilde{\Delta}$ postaci



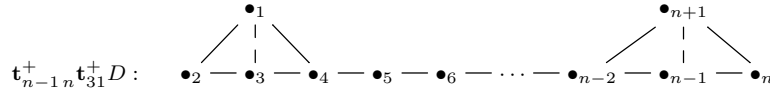
o $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 1, 1)$, zaś po wykonaniu $\mathbf{t}_{n-1 n-2}^+$ na bigrafie $\tilde{\Delta}$ otrzymamy



oraz $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 1, 1)$.

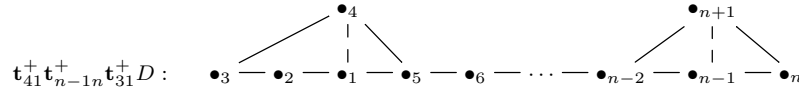
Rozważmy przypadek 1.1.2^o.

1.1.2^o Bigraf $\mathbf{t}_{n-1 n}^+ \mathbf{t}_{31}^+ D$ powstały z bigrafu $\mathbf{t}_{31}^+ D$ (przedstawionego w punkcie 1.1^o) ma następującą postać:



oraz $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 2, \dots, 2, 1, 1, 1)$.

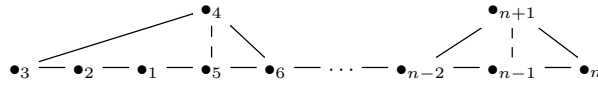
Dopuszczalne są teraz cztery deflacje: \mathbf{t}_{41}^+ , \mathbf{t}_{43}^+ , $\mathbf{t}_{n-2 n+1}^+$, $\mathbf{t}_{n-2 n-1}^+$. Ponieważ są to „symetryczne” przypadki, więc rozważamy tylko jeden z nich, tzn. \mathbf{t}_{41}^+ . Po wykonaniu deflacji \mathbf{t}_{41}^+ na bigrafie $\mathbf{t}_{n-1 n}^+ \mathbf{t}_{31}^+ D$ otrzymujemy



oraz $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 2, \dots, 2, 1, 1, 1)$.

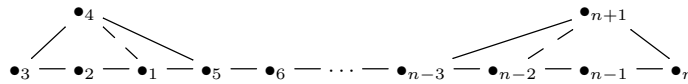
Możliwe są teraz dwa przypadki: \mathbf{t}_{51}^+ (patrz 1.1.2.1^o, \mathbf{t}_{54}^+ jest „symetryczny”) lub $\mathbf{t}_{n-2 n+1}^+$ (patrz 1.1.2.2^o, $\mathbf{t}_{n-2 n-1}^+$ jest „symetryczny”).

1.1.2.1^o Bigraf $\mathbf{t}_{51}^+ \mathbf{t}_{41}^+ \mathbf{t}_{n-1 n}^+ \mathbf{t}_{31}^+ D$ powstały z $\mathbf{t}_{41}^+ \mathbf{t}_{n-1 n}^+ \mathbf{t}_{31}^+ D$ przez wykonanie deflacji \mathbf{t}_{51}^+ ma następującą postać:



oraz $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 1, 2, \dots, 2, 1, 1, 1)$.

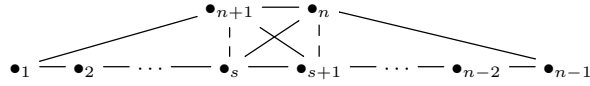
1.1.2.2^o Bigraf $\mathbf{t}_{n-2 n+1}^+ \mathbf{t}_{41}^+ \mathbf{t}_{n-1 n}^+ \mathbf{t}_{31}^+ D$ otrzymany z $\mathbf{t}_{41}^+ \mathbf{t}_{n-1 n}^+ \mathbf{t}_{31}^+ D$ przez zastosowanie deflacji $\mathbf{t}_{n-2 n+1}^+$ ma następującą postać:



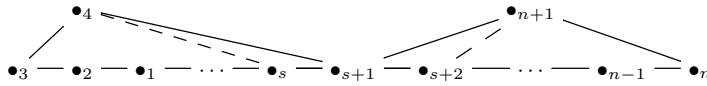
oraz $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 2, \dots, 2, 1, 1, 1, 1)$. Postępując w ten sposób otrzymamy bigrafy:



gdzie $\mathbf{h} = (1, 1, 1, \dots, 1_s, 2_{s+1}, \dots, 2_r, 1, \dots, 1)$ oraz



o $\mathbf{h} = (1, 1, \dots, 1)$ otrzymany z bigrafu postaci



o $\mathbf{h} = (1, 1, 1, \dots, 1_s, 2_{s+1}, 1, \dots, 1)$.

Uzyskaliśmy w ten sposób (z dokładnością do działania (2.2.3)) wszystkie krytyczne bigrafy E-typy $\tilde{\mathbb{D}}_n$ z listy \mathcal{CH}_{n+1} . \square

Przedstawimy teraz twierdzenie, z którego wynika, że jeśli Δ jest P -krytycznym bigrafem E-typy $\tilde{\mathbb{D}}_n$, to z dokładnością do działania (2.2.3) jest jednym z krytycznych grafów z listy von Höhne \mathcal{CH}_{n+1} .

Twierdzenie 2.4.5. *Jeśli $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ jest P -krytycznym bigrafem E-typy $\tilde{\mathbb{D}}_n$, to istnieją bigraf krytyczny $H \in \mathcal{CH}_{n+1}$ (patrz tabela 2.4.3) oraz macierz $B \in O(n+1, \mathbb{Z})$ takie, że*

$$G_\Delta = B^{tr} \cdot G_H \cdot B.$$

Dowód. Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech Δ będzie P -krytycznym bigrafem E-typy $\tilde{\mathbb{D}}_n$. Jeśli istnieje macierz $B \in O(n+1, \mathbb{Z})$ taka, że $G_\Delta = B^{tr} \cdot G_H \cdot B$ dla pewnego $H \in \mathcal{CH}_{n+1}$, to będziemy stosować następujące oznaczenie: $\Delta \sim_{ort}^B H$ (lub $\Delta \sim_{ort} H$).

Dowód przeprowadzamy w kilku krokach.

1° Pokażemy, że istnieje macierz $E \in O(n+1, \mathbb{Z})$ taka, że $\Delta \sim_{ort}^E \Delta'$, gdzie Δ' jest krytycznym bigrafem.

Ponieważ Δ jest P -krytyczny, więc na podstawie wniosku 2.1.6(a) Δ jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_{n+1})$ jest wiernym wektorem. Z dowodu wniosku 2.1.6 wynika, że istnieje macierz $E = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1})$, gdzie $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } h_i > 0 \\ -1 & \text{jeśli } h_i < 0 \end{cases}$, taka, że

$G_{\Delta'} = E^{tr} \cdot G_\Delta \cdot E$ dla bigrafu $\Delta' = \Delta * E$. Ponieważ Δ' jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$, gdzie $\mathbf{h}' = (h_1 \cdot \varepsilon_1, \dots, h_{n+1} \cdot \varepsilon_{n+1})$ jest dodatnim wektorem oraz $E \in O(n+1, \mathbb{Z})$, więc Δ' jest krytyczny (na podstawie twierdzenia 2.1.2) oraz $\Delta \sim_{ort}^E \Delta'$.

2° Krytyczny bigraf Δ' z punktu 1° jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$, gdzie $\mathbf{h}' \neq 0$, więc jest główny. Ponadto Δ' jest bigrafem E-typy $\tilde{\mathbb{D}}_n$. Zatem na podstawie [58, Theorem 3.2] istnieje $r \geq 1$ oraz istnieje ciąg inflacyjnych operatorów $\hat{\mathbf{t}}^- = \mathbf{t}_{a_r b_r}^- \cdots \mathbf{t}_{a_1 b_1}^-$ krytycznego bigrafu Δ' (dla wierzchołków $a_1, b_1, \dots, a_r, b_r \in \Delta'_0$ takich, by możliwe były inflacje) taki, że $\hat{\mathbf{t}}^- \Delta' \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{D}}'_n$, gdzie $\tilde{\mathbb{D}}'_n$ jest grafem Euklidesa typu $\tilde{\mathbb{D}}_n$ o numeracji wierzchołków $\{c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}\}$.

3° Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n & c_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{n+1}$ będzie permutacją, która przeprowadza wierzchołki $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ grafu $\widetilde{\mathbb{D}}_n$ na wierzchołki $\{c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}\}$ grafu $\widetilde{\mathbb{D}}'_n$. Ponadto niech $\tau := \sigma^{-1}$ oraz $\tau_i := \tau(i)$, dla każdego $1 \leq i \leq n+1$. Wówczas $\widetilde{\mathbb{D}}_n = \widetilde{\mathbb{D}}'_n * \widehat{\sigma}$, gdzie

$$\widehat{\sigma} = \begin{bmatrix} e_{\tau_1} \\ e_{\tau_2} \\ \vdots \\ e_{\tau_{n+1}} \end{bmatrix} \in \widehat{\mathbf{S}}_{n+1}.$$

4° Udowodnimy, że istnieje bigraf $H \in \mathcal{CH}_{n+1}$ taki, że $\Delta' \sim_{ort} H$, gdzie Δ' jest krytycznym bigrafem z punktu 1°.

Z punktu 2° wynika, że istnieje ciąg inflacyjnych operatorów $\widehat{\mathbf{t}}^- = \mathbf{t}_{a_r b_r}^- \dots \mathbf{t}_{a_1 b_1}^-$ długości $r \geq 1$ bigrafu Δ' (dla wierzchołków $a_1, b_1, \dots, a_r, b_r \in \Delta'_0$ takich, by możliwe były inflacje [58, Definition 3.1]) taki, że $\widehat{\mathbf{t}}^- \Delta' \sim_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{D}}'_n$.

Dowód istnienia bigrafu $H \in \mathcal{CH}_{n+1}$ przeprowadzamy stosując zasadę indukcji matematycznej względem długości $r \geq 1$ inflacyjnego ciągu operatorów krytycznego bigrafu Δ' .

4.1° Niech $r = 1$ oraz $\widetilde{\mathbb{D}}'_n = \mathbf{t}_{ab}^- \Delta'$, dla pewnych wierzchołków $a, b \in \Delta'_0$ takich że $\bullet_{a^-} - \bullet_b$. Pokażemy, że istnieje $H_1 \in \mathcal{CH}_{n+1}$ taki, że $\Delta' \sim_{ort} H_1$.

Niech $\widehat{\sigma} \in \widehat{\mathbf{S}}_{n+1}$ będzie macierzą permutacji z punktu 3°, tzn. $\widetilde{\mathbb{D}}_n = \widetilde{\mathbb{D}}'_n * \widehat{\sigma}$. Z [58, Lemma 3.1] wynika, że

$$G_{\widetilde{\mathbb{D}}'_n} = G_{\mathbf{t}_{ab}^- \Delta'} = (E_{ab}^-)^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot (E_{ab}^-),$$

gdzie $E_{ab}^- \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ jest macierzą jak w [58, Lemma 3.1] (zobacz także lemat 2.3.3). Rozważmy bigraf $\Delta' * \widehat{\sigma}$ powstały z Δ' przez permutację wierzchołków. Ponieważ Δ' jest krytyczny, więc $\Delta' * \widehat{\sigma}$ też jest krytyczny (argumentacja jak w dowodzie twierdzenia 2.4.1, punkt 2°). Ponadto $\tau \in \mathbf{S}_{n+1}$ z punktu 3° przeprowadza wierzchołki a, b bigrafu Δ' na wierzchołki $\tau_a := \tau(a)$, $\tau_b := \tau(b)$ bigrafu $\Delta' * \widehat{\sigma}$. Rozważmy inflację $\mathbf{t}_{\tau_a \tau_b}^-$ bigrafu $\Delta' * \widehat{\sigma}$. Wówczas łatwo widać, że $\widehat{\sigma} \cdot E_{\tau_a \tau_b}^- = E_{ab}^- \cdot \widehat{\sigma}$ (zobacz także [58, Lemma 3.1. e)]) oraz prawdziwe są następujące równości:

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{t}_{\tau_a \tau_b}^- (\Delta' * \widehat{\sigma})} &= (E_{\tau_a \tau_b}^-)^{tr} \cdot G_{\Delta' * \widehat{\sigma}} \cdot (E_{\tau_a \tau_b}^-) \\ &= (E_{\tau_a \tau_b}^-)^{tr} \cdot \widehat{\sigma}^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot \widehat{\sigma} \cdot (E_{\tau_a \tau_b}^-) = \\ &= \widehat{\sigma}^{tr} \cdot (E_{ab}^-)^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot (E_{ab}^-) \cdot \widehat{\sigma} = \\ &= \widehat{\sigma}^{tr} \cdot G_{\mathbf{t}_{ab}^- \Delta'} \cdot \widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}^{tr} \cdot G_{\widetilde{\mathbb{D}}'_n} \cdot \widehat{\sigma} = \\ &= G_{\widetilde{\mathbb{D}}'_n * \widehat{\sigma}} = G_{\widetilde{\mathbb{D}}_n}. \end{aligned}$$

Z równości tych wynika ponadto, że $G_{\mathbf{t}_{\tau_a \tau_b}^+ \widetilde{\mathbb{D}}_n} = G_{\Delta' * \widehat{\sigma}}$, gdzie $\mathbf{t}_{\tau_a \tau_b}^+$ jest deflacją grafu Euklidesa $\widetilde{\mathbb{D}}_n$. Bigraf $\mathbf{t}_{\tau_a \tau_b}^+ \widetilde{\mathbb{D}}_n$ powstały z grafu Euklidesa $\widetilde{\mathbb{D}}_n$ w wyniku deflacji $\mathbf{t}_{\tau_a \tau_b}^+$ jest krytyczny (patrz [58, Lemma 3.1]) oraz na podstawie lematu 2.4.4 istnieją macierz $B_1 \in \mathcal{O}(n+1, \mathbb{Z})$ oraz bigraf $H_1 \in \mathcal{CH}_{n+1}$ takie, że $\mathbf{t}_{\tau_a \tau_b}^+ \widetilde{\mathbb{D}}_n \sim_{ort}^{B_1} H_1$, tzn. $G_{H_1} = B_1^{tr} \cdot G_{\mathbf{t}_{\tau_a \tau_b}^+ \widetilde{\mathbb{D}}_n} \cdot B_1$. Zatem prawdziwe są następujące równości:

$$\begin{aligned} G_{H_1} &= B_1^{tr} \cdot G_{\mathbf{t}_{\tau_a \tau_b}^+ \widetilde{\mathbb{D}}_n} \cdot B_1 \\ &= B_1^{tr} \cdot G_{\Delta' * \widehat{\sigma}} \cdot B_1 \\ &= B_1^{tr} \cdot \widehat{\sigma}^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot \widehat{\sigma} \cdot B_1. \end{aligned}$$

Ponieważ $\hat{\sigma} \cdot B_1 \in O(n+1, \mathbb{Z})$, więc $\Delta' \sim_{ort} H_1$.

4.2° Załóżmy, że jeśli $r \geq 1$ oraz $\hat{\mathbf{t}}^- \Delta' = \tilde{\mathbb{D}}'_n$, to istnieje $H_2 \in \mathcal{CH}_{n+1}$ taki, że

$$(\text{założenie indukcyjne}) \quad \Delta' \sim_{ort} H_2 \text{ oraz } G_{\hat{\mathbf{t}}^- (\Delta' * \hat{\sigma})} = G_{(\hat{\mathbf{t}}^- \Delta') * \hat{\sigma}},$$

gdzie $\hat{\mathbf{t}}^- = \mathbf{t}_{a_r b_r}^- \cdots \mathbf{t}_{a_1 b_1}^-$, $\hat{\mathbf{t}}^-_\tau = \mathbf{t}_{\tau a_r \tau b_r}^- \cdots \mathbf{t}_{\tau a_1 \tau b_1}^-$ są ciągami inflacyjnych operatorów długości $r \geq 1$, zaś $\tau a_i = \tau(a_i)$, $\tau b_i = \tau(b_i)$ dla $1 \leq i \leq r$ oraz $\tau \in \mathbf{S}_{n+1}$ z punktu 3°.

Pokażemy, że jeśli $r+1 \geq 1$ i $\tilde{\mathbf{t}}^- \Delta' = \tilde{\mathbb{D}}'_n$, to istnieje $H_3 \in \mathcal{CH}_{n+1}$ taki, że

$$\Delta' \sim_{ort} H_3 \text{ oraz } G_{\tilde{\mathbf{t}}^- (\Delta' * \hat{\sigma})} = G_{(\tilde{\mathbf{t}}^- \Delta') * \hat{\sigma}},$$

gdzie $\tilde{\mathbf{t}}^- = \mathbf{t}_{a'_{r+1} b'_{r+1}}^- \cdots \mathbf{t}_{a'_1 b'_1}^-$, $\tilde{\mathbf{t}}^-_\tau = \mathbf{t}_{\tau a'_{r+1} \tau b'_{r+1}}^- \cdots \mathbf{t}_{\tau a'_1 \tau b'_1}^-$ są ciągami inflacyjnych operatorów długości $r+1 \geq 1$.

Niech $r+1 \geq 1$ oraz niech $\tilde{\mathbf{t}}^- \Delta' = \tilde{\mathbb{D}}'_n$. Rozważmy bigraf $\Delta' * \hat{\sigma}$. Wtedy permutacja $\tau \in \mathbf{S}_{n+1}$ z punktu 3° przeprowadza wierzchołki $a'_1, b'_1, \dots, a'_{r+1}, b'_{r+1}$ bigrafu Δ' (względem których wykonywane są inflacje w $\tilde{\mathbf{t}}^-$) na wierzchołki $\tau a'_1 := \tau(a'_1)$, $\tau b'_1 := \tau(b'_1), \dots, \tau a'_{r+1} := \tau(a'_{r+1})$, $\tau b'_{r+1} := \tau(b'_{r+1})$ bigrafu $\Delta' * \hat{\sigma}$.

Przez $\hat{\mathbf{t}}^-$, $\hat{\mathbf{t}}^-_\tau$ będziemy oznaczać odpowiednio ciągi inflacyjnych operatorów $\mathbf{t}_{a'_{r+1} b'_{r+1}}^- \cdots \mathbf{t}_{a'_2 b'_2}^-$ i $\mathbf{t}_{\tau a'_{r+1} \tau b'_{r+1}}^- \cdots \mathbf{t}_{\tau a'_2 \tau b'_2}^-$ długości r . Wówczas dla ciągu inflacyjnych operatorów $\tilde{\mathbf{t}}^-_\tau$ długości $r+1 \geq 1$ bigrafu $\Delta' * \hat{\sigma}$ prawdziwe są następujące równości

$$\begin{aligned} G_{\tilde{\mathbf{t}}^- (\Delta' * \hat{\sigma})} &= G_{\hat{\mathbf{t}}^- (\mathbf{t}_{\tau a'_1 \tau b'_1}^- (\Delta' * \hat{\sigma}))} = \\ &\stackrel{(\star)}{=} G_{\hat{\mathbf{t}}^- ((\mathbf{t}_{a'_1 b'_1}^- \Delta') * \hat{\sigma})} = \\ &\stackrel{\text{zał.ind.}}{=} G_{(\hat{\mathbf{t}}^- (\mathbf{t}_{a'_1 b'_1}^- \Delta')) * \hat{\sigma}} = \\ &= G_{(\tilde{\mathbf{t}}^- \Delta') * \hat{\sigma}} = G_{\tilde{\mathbb{D}}'_n * \hat{\sigma}} = G_{\tilde{\mathbb{D}}'_n}, \end{aligned}$$

gdzie (\star) wynika z punktu 4.1°. Wówczas $G_{\tilde{\mathbf{t}}^- \tilde{\mathbb{D}}'_n} = G_{\Delta' * \hat{\sigma}}$, gdzie $\tilde{\mathbf{t}}^-$ jest deflacyjnym ciągiem operatorów długości $r+1$ grafu Euklidesa $\tilde{\mathbb{D}}'_n$. Na podstawie lematu 2.4.4 istnieją macierz $B_2 \in O(n+1, \mathbb{Z})$ oraz bigraf $H_3 \in \mathcal{CH}_{n+1}$ takie, że $\tilde{\mathbf{t}}^- \tilde{\mathbb{D}}'_n = \Delta' * \hat{\sigma} \sim_{ort}^{B_2} H_3$. Stąd $\Delta' \sim_{ort}^{B_2} H_3$.

Zatem jeśli Δ jest P -krytycznym bigrafem E-typu $\tilde{\mathbb{D}}_n$, to na podstawie punktu 1°, $\Delta \sim_{ort} \Delta'$, gdzie Δ' jest krytycznym bigrafem. Ponadto z 4° wiemy, że $\Delta' \sim_{ort} H$, dla pewnego $H \in \mathcal{CH}_{n+1}$. Stąd otrzymujemy $\Delta \sim_{ort} H$, co kończy dowód. \square

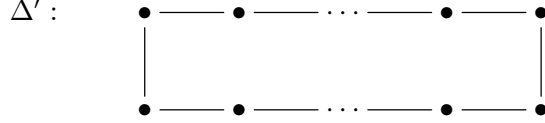
Wniosek 2.4.6. Niech $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ będzie P -krytycznym bigrafem E-typu $D\Delta' = \tilde{\mathbb{A}}_n$ o $n+1 \geq 3$ wierzchołkach. Wówczas istnieje macierz $B \in O(n+1, \mathbb{Z})$ taka, że

$$G_{D\Delta'} = B^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot B,$$

tzn. $\Delta' \sim_{ort}^B D\Delta'$.

Idea dowodu. Niech Δ' będzie P -krytycznym bigrafem E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$ o $n + 1 \geq 3$ wierzchołkach.

Pokażemy, że z dokładnością do działania grupy $O(n + 1, \mathbb{Z})$ na P -krytycznych bigrafach E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$, gdzie $n + 1 \geq 3$, bigrafy E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$ mają następującą postać:



Na podstawie wniosku 2.1.6, klasyfikacja P -krytycznych bigrafów redukuje się do klasyfikacji krytycznych bigrafów. Łatwo widać, że jedynym krytycznym bigrafem E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$ jest bigraf Δ' (patrz [26, str. 317]), o jądrze $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{\Delta'}$, gdzie $\mathbf{h}_{\Delta'} = (1, \dots, 1)$ (patrz [59, Chapter XIII.1]). Ponieważ inflacja bigrafu Δ' względem nie pustego zbioru przerywanych krawędzi zwiększa współrzędne dodatniego wektora $\mathbf{h}_{\Delta'}$, więc nie prowadzi ona do uzyskania P -krytycznego (odp.: krytycznego) bigrafu E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$. Stąd wynika, że jądro P -krytycznych bigrafów Δ' E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$ jest postaci $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot (\mathbf{h} \cdot \hat{\varepsilon})$, gdzie $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1})$, $\mathbf{h} = (1, \dots, 1)$ oraz $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ dla dowolnego $i \leq n + 1$.

Z analizy algorytmu inflacyjnego (zobacz [58, 31]) wynika ponadto, że liczba współrzędnych $h_i \cdot \varepsilon_i = -1$ w wektorze $\mathbf{h} \cdot \hat{\varepsilon} = (h_1 \cdot \varepsilon_1, \dots, h_{n+1} \cdot \varepsilon_{n+1})$ jest parzysta. Gdyby była nieparzysta, to z dokładnością do działania grupy $\hat{\mathbb{C}}_2^{n+1}$ na P -krytycznych bigrafach otrzymamy bigraf



który nie jest bigrafem typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$ (dokładniej jest dodatnim bigrafem typu \mathbb{D}_{n+1}). Zatem z dokładnością do działania (2.2.3) otrzymujemy dokładnie jeden P -krytyczny bigraf E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$, tzn. $\Delta' \sim_{ort}^B \tilde{\mathbb{A}}_n$, dla pewnej macierzy $B \in O(n + 1, \mathbb{Z})$. \square

W tabelach 2.4.7-2.4.10 zostały przedstawione P -krytyczne bigrafy Δ' w postaci funkcjonalów Grama $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$, dla $|\Delta'_0| = n+1 \in \{6, 7\}$, przy czym zbiór $P\text{-kryt}_6^\bullet$ został przedstawiony w tabeli 2.4.7, zaś zbiór $P\text{-kryt}_7^\bullet$ w tabeli 2.4.10. Tabele 2.4.7 i 2.4.9 zawierają wszystkie P -krytyczne bigrafy skonstruowane z par (p, w) należących do zbioru $\mathcal{Z}_n^- = \{(p, w); p \in \mathbf{dod}_n^\bullet, w \in \mathcal{SR}_p^-\}$, $n \in \{6, 7\}$, gdzie $\mathcal{SR}_p^- \subset \mathcal{SR}_p$ jest zbiorem wiernych pierwiastków takich, że jeśli $w \in \mathcal{SR}_p^-$, to $-w \notin \mathcal{SR}_p^-$. Pary $(p, w) \in \mathcal{Z}_n^-$, które posłużyły do skonstruowania P -krytycznych funkcjonalów kwadratowych $q : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ również zostały przedstawione w tych tabelach. Ponadto podajemy wektor $\mathbf{h} \neq 0$ taki, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, wielomian Coxetera $\text{cox}_q(t)$ dla P -krytycznego funkcjonalu kwadratowego q oraz jego E-typ znalezione przy pomocy algorytmu inflacyjnego opisanego w [58, 31] (zobacz także rozdział 4.1). Część z uzyskanych w ten sposób P -krytycznych funkcjonalów kwadratowych należy do tych samych $O(n + 1, \mathbb{Z})$ -orbit($P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$). Reprezentantów wszystkich parami różnych $O(n + 1, \mathbb{Z})$ -orbit P -krytycznych bigrafów w zbiorze $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$, dla $n + 1 \in \{6, 7\}$ przedstawiamy w tabelach 2.4.8 i 2.4.10.

**2.4.7. P -krytyczne funkcjonały Grama bigrafów skonstruowanych przez
ind: $\mathcal{Z}_5^- \longrightarrow P\text{-kryt}_6$, dla $n + 1 = 6$**

$p \in \mathbf{dod}_5^\bullet$	$w \in \mathcal{SR}_p$	$(p, w) \in P\text{-kryt}_6$	\mathbf{h}	$\text{cox}_q(t)$ oraz E-typ
$p_1(x) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - x_4x_5$	$w = (1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_1(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 - x_5x_6$	$(1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
$p_2(x) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_4 + x_3x_4$	$w = (1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_2(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 + x_1x_5 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_5 + x_4x_5$	$(1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
$p_3(x) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4$	$w_1 = (1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_3(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_5 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5$	$(1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$t^6 - t^5 - t + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}^{(1)}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
	$w_2 = (1, 2, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_4(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5$	$(1, 1, 2, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
$p_4(x) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 - x_4x_5$	$w = (1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_5(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_6 + x_4x_5 - x_5x_6$	$(1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$t^6 - t^5 - t + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}^{(1)}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
$p_5(x) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_4 + x_3x_5$	$w = (1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_6(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_5 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_5 + x_4x_6$	$(1, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$t^6 - 2t^3 + 1 = F_{\tilde{\mathbb{A}}_5}^{(3)}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{A}}_5$
$p_6(x) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_1x_5 + x_3x_4$	$w = (2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_7(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 + x_4x_5$	$(1, 2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
$p_7(x) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_5$	$w_1 = (1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_8(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_6$	$(1, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
	$w_2 = (2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_9(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_6$	$(1, 2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1 = F_{\tilde{\mathbb{A}}_5}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
	$w_3 = (2, 2, 1, 1, \hat{1})$	$q_{10}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_6$	$(1, 2, 2, 1, 1, \hat{1})$	$t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$

2.4.8. Zbiór $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet$, dla $n + 1 = 6$

$(p, w) \in \mathcal{Z}_5$	$(p, w) \in \mathcal{O}(6, \mathbb{Z})\text{-Orb}(q) \subseteq P\text{-kryt}_6^\bullet$	$\text{cox}_q(t)$ oraz E-typ
(p_5, w)	$q_6(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_5 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_5 + x_4x_6$	$t^6 - 2t^3 + 1 = F_{\tilde{\mathbb{A}}_5}^{(3)}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{A}}_5$
(p_1, w)	$q_1(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 - x_5x_6$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1 = F_{\tilde{\mathbb{A}}_5}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
(p_3, w_1)		
(p_2, w)	$q_2(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 + x_1x_5 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_5 + x_4x_5$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1 = F_{\tilde{\mathbb{A}}_5}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
(p_4, w)		
(p_7, w_1)		
(p_7, w_3)	$q_{10}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_6$	$t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
(p_3, w_2)	$q_4(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5$	$t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}(t)$, E-typ $= \tilde{\mathbb{D}}_5$
(p_6, w)		
(p_7, w_2)		

W tabeli 2.4.9 przedstawiamy oprócz P -krytycznych funkcjonałów kwadratowych $q : \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$, dodatkowo i spójne funkcjonały kwadratowe $p : \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}$ należące do zbioru \mathbf{dod}_6^\bullet oraz ich wierzni pierwiastki. Ponadto dla każdego $q \in P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^7, \mathbb{Z})$ podajemy jego wielomian Coxetera

$\text{cox}_q(t)$ oraz typ euklidesowy. Reprezentanci wszystkich parami różnych $O(7, \mathbb{Z})$ -orbit w zbiorze $P\text{-kryt}(\mathbb{Z}^7, \mathbb{Z})$ zostali przedstawieni w tabeli 2.4.10.

2.4.9. P -krytyczne funkcjonały Grama bigrafów skonstruowanych przez

$\text{ind}: \mathcal{Z}_6^- \longrightarrow P\text{-kryt}_7$, dla $n + 1 = 7$

$p \in \text{dod}_6^\bullet$	$w \in \mathcal{SR}_p$	$q = (p, w) \in P\text{-kryt}_7$	$\text{cox}_q(t)$ oraz E-typ
$p_1(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6$	$w_1 = (1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2})$	$q_1(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 - x_5x_7 - x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{E}_6$
	$w_2 = (1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$	$q_2(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_5 + x_1x_6 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 - x_5x_7 - x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{E}_6$
$p_3(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 - x_5x_6$	$w_1 = (1, 1, 1, 1, \hat{2}, \hat{1})$	$q_4(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 - x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 - x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{E}_6$
	$w_2 = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_5(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 - x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 - x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{E}_6$
	$w_3 = (2, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_6(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 - x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 - x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{E}_6$
$p_4(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_3x_5 - x_3x_6 + x_4x_5 - x_4x_6$	$w = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, 1)$	$q_7(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 - x_4x_7 + x_5x_6 - x_5x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{E}_6$
$p_5(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$	$w_1 = (1, 2, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$	$q_8(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{E}_6$
	$w_2 = (1, 2, 2, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$	$q_9(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\tilde{E}_6}^{(2)}(t)$, E-typ $= \tilde{E}_6$

2.4.9. (kontynuacja)

$p_6(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$	$w_1 = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{10}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\hat{2}}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
	$w_2 = (2, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{11}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
	$w_3 = (2, 2, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{12}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\hat{2}}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
$p_7(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$	$w_1 = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{13}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
	$w_2 = (1, 2, 1, 1, \hat{2}, \hat{1})$	$q_{14}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\hat{2}}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
	$w_3 = (1, 2, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{15}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\hat{2}}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
	$w_4 = (2, 2, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{16}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\hat{2}}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
$p_8(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5$	$w = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{17}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_5 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = \mathbb{D}_6
$p_9(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 - x_5x_6$	$w = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{18}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 - x_6x_7$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = \mathbb{D}_6
$p_{10}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4 - x_3x_6 + x_4x_5$	$w_1 = (1, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{19}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5 - x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^6 - t + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(1)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
	$w_2 = (1, 1, \hat{1}, 2, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{20}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5 - x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
$p_{11}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6$	$w = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{21}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 + x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_7$	$t^7 - t^6 - t + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(1)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
$p_{12}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_4x_5 - x_4x_6$	$w = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{22}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_5x_6 - x_5x_7$	$t^7 - t^6 - t + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(1)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
$p_{13}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_1x_6 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$	$w_1 = (1, \hat{1}, 1, 1, \hat{2}, \hat{1})$	$q_{23}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_7 - x_3x_6 - x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
	$w_2 = (1, \hat{1}, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{24}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_7 - x_3x_6 - x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
$p_{14}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_4x_6$	$w = (1, 1, \hat{1}, 2, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{25}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_5x_6 + x_5x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
$p_{15}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$	$w = (2, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{26}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_7 - x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
$p_{17}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5$	$w_1 = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{28}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
	$w_2 = (1, 1, 2, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{29}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\hat{2}}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
	$w_3 = (2, 1, 2, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{30}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_5 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6
	$w_4 = (2, 1, 2, 2, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{31}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\hat{2}}(t)$, E-typ = \mathbb{E}_6

2.4.9. (kontynuacja)

$p_{20}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4 + x_4x_5$	$w = (1, 1, 1, \hat{1}, 1, \hat{1})$	$q_{36}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_5 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_7 - x_3x_6 + x_4x_5 + x_5x_6$	$t^7 - t^6 - t + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(1)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
$p_{21}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_4x_5$	$w_1 = (1, 1, 1, \hat{1}, 1, \hat{1})$	$q_{37}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_5 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_5x_6$	$t^7 - 2t^6 + 2t^5 - t^4 - t^3 + 2t^2 - 2t + 1$, E-typ = \tilde{E}_6
	$w_2 = (1, 2, 1, \hat{1}, 1, \hat{1})$	$q_{38}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 + x_1x_5 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
	$w_3 = (1, 2, 1, \hat{1}, 2, \hat{1})$	$q_{39}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
$p_{22}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_6 + x_4x_5$	$w_1 = (1, 1, 1, \hat{1}, 1, \hat{1})$	$q_{40}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^6 - t + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(1)}(t)$, E-typ = \tilde{D}_6
	$w_2 = (1, 1, 2, \hat{1}, 1, \hat{1})$	$q_{41}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = \tilde{D}_6
$p_{23}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_6 + x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5$	$w_1 = (1, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{42}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_7 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6$	$t^7 + t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\tilde{D}_6}(t)$, E-typ = \tilde{D}_6
	$w_2 = (2, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{43}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_7 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = \tilde{D}_6
	$w_3 = (2, 2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{44}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_7 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6$	$t^7 + t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\tilde{D}_6}(t)$, E-typ = \tilde{D}_6
$p_{24}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5 + x_5x_6$	$w_1 = (1, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{45}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6 + x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
	$w_2 = (1, 1, 1, 1, 2, \hat{1})$	$q_{46}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6 + x_6x_7$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\tilde{E}_6}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
	$w_3 = (2, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{47}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6 + x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
	$w_4 = (2, 1, 1, 1, 2, \hat{1})$	$q_{48}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_1x_5 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6 + x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
	$w_5 = (2, 1, 1, 2, 2, \hat{1})$	$q_{49}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6 + x_6x_7$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\tilde{E}_6}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
	$w_6 = (2, 1, 2, 1, 2, \hat{1})$	$q_{50}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6 + x_6x_7$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\tilde{E}_6}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
$p_{25}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 - x_3x_6 + x_4x_5$	$w = (1, \hat{1}, 1, 1, \hat{1}, 1)$	$q_{51}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_3x_7 - x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^6 - t + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
$p_{27}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_6 + x_4x_5$	$w_1 = (2, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{53}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_3 - x_1x_5 - x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
	$w_2 = (2, 2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{54}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_5 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_7 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\tilde{E}_6}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
	$w_3 = (3, 2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{55}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_7 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\tilde{E}_6}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
	$w_4 = (3, 2, 2, 1, 1, \hat{1})$	$q_{56}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_7 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\tilde{E}_6}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
$p_{28}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_4x_5 + x_4x_6$	$w = (2, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{57}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_5x_6 + x_5x_7$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = \tilde{D}_6
$p_{29}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 + x_4x_5$	$w = (2, 2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{58}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_5 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_3x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6

2.4.9. (kontynuacja)

$p_{31}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 + x_3x_6$	$w_1 = (1, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{60}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_5 - x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_7$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
	$w_2 = (2, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{61}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_7$	$t^7 - t^6 - t + 1 = F_{\hat{\mathbb{A}}_6}^{(1)}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
	$w_3 = (2, 1, 2, 1, 1, \hat{1})$	$q_{62}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{\mathbb{A}}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
	$w_4 = (2, 2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{63}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\hat{\mathbb{A}}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
	$w_5 = (2, 2, 2, 1, 1, \hat{1})$	$q_{64}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_7$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
	$w_6 = (3, 2, 2, 1, 1, \hat{1})$	$q_{65}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_7$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
	$w_7 = (3, 2, 2, 2, 1, \hat{1})$	$q_{66}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_7$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
$p_{32}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 + x_5x_6$	$w_1 = (1, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{67}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_6x_7$	$t^7 + t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\mathbb{D}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = \mathbb{D}_6
	$w_2 = (2, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{68}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_6x_7$	$t^7 - 2t^5 + t^4 + t^3 - 2t^2 + 1$, E-typ = \mathbb{D}_6
	$w_3 = (2, 2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{69}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 + x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_6x_7$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\hat{\mathbb{A}}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = \mathbb{D}_6
	$w_4 = (2, 2, 1, 1, 2, \hat{1})$	$q_{70}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_6x_7$	$t^7 + t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\mathbb{D}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = \mathbb{D}_6
$p_{33}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_4 - x_3x_5 + x_4x_6$	$w = (1, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{71}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_5 - x_4x_6 + x_5x_7$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\hat{\mathbb{A}}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = $\hat{\mathbb{A}}_6$
$p_{34}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_5 + x_4x_5$	$w = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$	$q_{72}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\hat{\mathbb{A}}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = \mathbb{D}_6
$p_{16}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_5x_6$	$w = (2, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{27}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_6x_7$	$t^7 + t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\mathbb{D}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = \mathbb{D}_6
$p_{18}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_3x_5 + x_4x_5 + x_5x_6$	$w = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, 1)$	$q_{32}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_4x_6 + x_5x_6 + x_6x_7$	$t^7 - 2t^5 + t^4 + t^3 - 2t^2 + 1$, E-typ = \mathbb{D}_6
$p_{30}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4$	$w = (2, 2, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{59}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5$	$t^7 + t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\mathbb{D}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = \mathbb{D}_6
$p_2(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 - x_3x_6 + x_4x_5$	$w = (1, \hat{1}, \hat{1}, 1, 1, \hat{1})$	$q_3(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 - x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
$p_{19}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4$	$w_1 = (2, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{33}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
	$w_2 = (3, 1, 1, 1, 1, \hat{2})$	$q_{34}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
	$w_3 = (3, 1, 1, 1, 1, \hat{1})$	$q_{35}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{\zeta}(t)$, E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$
$p_{26}(x) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_6 - x_5x_6$	$w = (1, 1, \hat{1}, 1, 1, 1)$	$q_{52}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_7 - x_6x_7$	$t^7 - 2t^5 + t^4 + t^3 - 2t^2 + 1$, E-typ = \mathbb{D}_6

2.4.10. Zbiór P -kryt $_{n+1}^\bullet$, dla $n + 1 = 7$

$(p, w) \in \mathcal{Z}_6$	$(p, w) \in O(7, \mathbb{Z})\text{-Orb}(q) \subseteq P\text{-kryt}_7^\bullet$	$\text{cox}_q(t)$ oraz E-typ
(p_{33}, w)	$q_{71}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_6 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_5 - x_4x_6 + x_5x_7$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = \tilde{A}_6
(p_1, w_2)	$q_2(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_5 + x_1x_6 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 - x_5x_7 - x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
(p_3, w_2)		
(p_1, w_1)	$q_1(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 - x_5x_7 - x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
(p_5, w_1)		
(p_7, w_3)		
(p_4, w)	$q_7(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 - x_4x_7 + x_5x_6 - x_5x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
(p_7, w_1)		
(p_{13}, w_2)		
(p_{20}, w)	$q_{36}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_5 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_7 - x_3x_6 + x_4x_5 + x_5x_6$	$t^7 - t^6 - t + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(1)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
(p_{25}, w)		
(p_{31}, w_1)		
(p_{22}, w_2)	$q_{41}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = \tilde{D}_6
(p_{28}, w)		
(p_{32}, w_2)		
(p_3, w_1)	$q_4(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 - x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 - x_6x_7$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
(p_3, w_3)		
(p_6, w_2)		
(p_{19}, w_1)		
(p_8, w)	$q_{17}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_5 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^4 - t^3 + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(3)}(t)$, E-typ = \tilde{D}_6
(p_9, w)		
(p_{22}, w_1)		
(p_{23}, w_1)		
(p_{10}, w_2)	$q_{20}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5 - x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
(p_{14}, w)		
(p_{17}, w_2)		
(p_{31}, w_2)		
(p_{11}, w)	$q_{21}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 + x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_7$	$t^7 - t^6 - t + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(1)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
(p_{12}, w)		
(p_{17}, w_1)		
(p_{21}, w_1)		
(p_{21}, w_3)	$q_{39}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\tilde{A}_6}^{(2)}(t)$, E-typ = \tilde{E}_6
(p_{29}, w)		
(p_{31}, w_3)		
(p_{31}, w_4)		

2.4.10. (kontynuacja)

(p ₁₃ , w ₁)	$q_{23}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_7 - x_3x_6 - x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 - t^5 - t^2 + 1 = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$</p>
(p ₁₅ , w)		
(p ₂₁ , w ₂)		
(p ₂₄ , w ₂)		
(p ₂₄ , w ₃)		
(p ₂₇ , w ₁)		
(p ₃₂ , w ₄)	$q_{70}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_6 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_6x_7$	$t^7 + t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\mathbb{D}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = \mathbb{D}_6</p>
(p ₁₆ , w)	$q_{27}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_6x_7$	$t^7 + t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\mathbb{D}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = \mathbb{D}_6</p>
(p ₂₃ , w ₂)		
(p ₂₃ , w ₃)	$q_{44}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_7 + x_4x_5 - x_4x_6 - x_5x_6$	$t^7 + t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t + 1 = F_{\mathbb{D}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = \mathbb{D}_6</p>
(p ₃₀ , w)		
(p ₃₂ , w ₃)		
(p ₁₈ , w)	$q_{32}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_4x_6 + x_5x_6 + x_6x_7$	$t^7 - 2t^5 + t^4 + t^3 - 2t^2 + 1,$ <p style="text-align: center;">E-typ = \mathbb{D}_6</p>
(p ₂₆ , w)		
(p ₃₂ , w ₁)		
(p ₃₄ , w)		
(p ₁₉ , w ₃)	$q_{35}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = \mathbb{E}_6</p>
(p ₅ , w ₂)	$q_9(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$</p>
(p ₂₄ , w ₄)		
(p ₁₉ , w ₂)	$q_{34}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 + x_1x_7 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$</p>
(p ₂₇ , w ₃)		
(p ₂₇ , w ₄)	$q_{56}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_7 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$</p>
(p ₃₁ , w ₆)		
(p ₂ , w)	$q_3(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 - x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$</p>
(p ₆ , w ₁)		
(p ₁₀ , w ₁)		
(p ₂₄ , w ₁)		
(p ₁₇ , w ₄)	$q_{31}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = $\tilde{\mathbb{E}}_6$</p>
(p ₂₄ , w ₅)		
(p ₂₄ , w ₆)		
(p ₃₁ , w ₅)		
(p ₆ , w ₃)	$q_{12}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_2x_6 + x_2x_7 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = \mathbb{E}_6</p>
(p ₇ , w ₂)		
(p ₇ , w ₄)		
(p ₁₇ , w ₃)		
(p ₂₇ , w ₂)		
(p ₃₁ , w ₇)	$q_{66}(x) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_5 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_4x_7$	$t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}(t),$ <p style="text-align: center;">E-typ = \mathbb{E}_6</p>

Zbiory P -krytycznych funkcjonałów kwadratowych należących do $P\text{-kryt}_{n+1}^\bullet$, dla $n + 1 = 8, 9, 10$ (w postaci niesymetrycznych macierzy Grama) można znaleźć na stronie internetowej [41].

Tabela 2.4.11 przedstawia liczbę P -krytycznych bigrafów Δ' o $n = |\Delta'_0| \leq 10$ wierzchołkach należących do zbioru $P\text{-kryt}_n^\bullet$ oraz liczbę par $(p, w) \in \mathcal{Z}_{n-1}^-$ takich, że p jest dodatnim

i spójnym bigrafem bez pętli należącym do $\mathbf{dod}_{n-1}^\bullet$, zaś w jest jego wiernym pierwiastkiem. Do konstrukcji P -krytycznych bigrafów z par (p, w) używamy tylko połowy wiernych pierwiastków dodatniego funkcjonału p , tzn. jeśli $(p, w), (p, -w) \in \mathcal{Z}_{n-1}$, to dodajemy tylko (p, w) do zbioru \mathcal{Z}_{n-1}^- . W ten sposób powstaje zbiór \mathcal{Z}_{n-1}^- .

2.4.11. Liczba P -krytycznych bigrafów z P -kryt $_n^\bullet$, dla $|\Delta'_0| = n \leq 10$

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$ \mathcal{Z}_{n-1}^- $	1	2	4	10	72	639	7980	95
$ P\text{-kryt}_n^\bullet $	1	1	3	5	24	152	1730	17

2.5. Opis wielomianów Coxetera i typów Coxetera dla P -krytycznych bigrafów

W rozdziale tym przedstawiamy pełną listę wielomianów Coxetera dla P -krytycznych bigrafów o $n + 1 \leq 10$ wierzchołkach i E-typie $\Delta \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$. W przypadku P -krytycznych bigrafów Δ E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$ prezentujemy wielomiany Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ dla dowolnego $n + 1 \geq 2$. Podajemy je razem ze zredukowaną liczbą Coxetera \check{c}_Δ oraz typem tubularnym \mathbf{tub}_Δ (opisanym w podrozdziale 3.5). Wyniki te zostały uzyskane przy pomocy obliczeń komputerowych wykorzystujących algorytmy opisane w rozdziale 4, m.in. algorytm 4.1.21.

Twierdzenie 2.5.1. *Niech Δ będzie P -krytycznym bigrafem E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$, gdzie $n + 1 \geq 2$. Wówczas wielomiany Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$, zredukowane liczby Coxetera \check{c}_Δ oraz typ tubularny \mathbf{tub}_Δ dla Δ są tymi przedstawionymi w tabeli 2.5.2.*

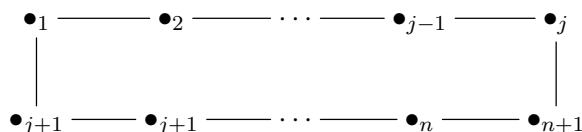
2.5.2. Wielomiany Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ dla P -krytycznych bigrafów Δ o E-typie $\tilde{\mathbb{A}}_n$ wraz ze zredukowanymi liczbami Coxetera \check{c}_Δ i typem tubularnym \mathbf{tub}_Δ

j	$F_\Delta^{(j)}(t)$	\check{c}_Δ	\mathbf{tub}_Δ
$j = 1$	$t^{n+1} - t^n - t + 1$	n	(n)
$j \in \{2, \dots, m_n\}$	$t^{n+1} - t^{n+1-j} - t^j + 1$	$\text{nww}(n - j + 1, j)$	$(j, n - j + 1)$

Przez m_n oznaczamy liczbę $m_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{jeśli } n \text{ jest parzysta,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{jeśli } n + 1 \text{ jest parzysta.} \end{cases}$

Dowód. Dowód przeprowadzimy w kilku krokach. Niech $\Delta = \tilde{\mathbb{A}}_n$, wówczas łatwo widać, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (1, \dots, 1)$, patrz również [59, Chapter XIII.1] (a także [52]).

1° Ponieważ Δ jest P -krytycznym bigrafem E-typu $\tilde{\mathbb{A}}_n$, więc na podstawie wniosku 2.4.6, z dokładnością do działania grupy $O(n + 1, \mathbb{Z})$ na P -krytycznych bigrafach w \mathcal{UBigr}_{n+1} , Δ ma następującą postać:



2° Pokażemy, że jeśli $j = 1$, to $\check{c}_\Delta = n$.

Wówczas macierz Coxetera Cox_Δ oraz macierz Cox_Δ^n bigrafu Δ mają następującą postać:

$$\text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} \end{bmatrix},$$

$$\text{Cox}_\Delta^n = \begin{bmatrix} n+2 & n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \widehat{n+1} & \widehat{n+1} & \widehat{n+1} & \widehat{n+1} & \cdots & \widehat{n+1} & \widehat{n} \end{bmatrix}.$$

Ponadto prawdziwe są następujące równości:

$$\begin{aligned} e_1 \cdot \text{Cox}^n - e_1 &= [n+1, \dots, n+1] = (n+1) \cdot \mathbf{h} \\ e_2 \cdot \text{Cox}^n - e_2 &= 0 \\ &\vdots \\ e_n \cdot \text{Cox}^n - e_n &= 0 \\ e_{n+1} \cdot \text{Cox}^n - e_{n+1} &= [\widehat{n+1}, \dots, \widehat{n+1}] = \widehat{n+1} \cdot \mathbf{h} \end{aligned}$$

Zatem $e_k \cdot \text{Cox}^n - e_k = \partial(x) \cdot \mathbf{h}$ dla dowolnego $k \in \{1, \dots, n+1\}$ oraz $\partial(x) = (n+1) \cdot (x_1 - x_{n+1})$. Łatwo widać, że $\check{c} = n$ jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $e_k \cdot \text{Cox}^{\check{c}} - e_k = \partial(x) \cdot \mathbf{h}$ dla dowolnego $k \in \{1, \dots, n+1\}$.

3° Udowodnimy, że jeśli $j = 1$, to $\text{cox}_\Delta(t) = t^{n+1} + t^n - t + 1$. Prawdziwe są następujące równości:

$$\begin{aligned} \text{cox}_\Delta(t) &= \det(t \cdot E - \text{Cox}) = \\ &= \begin{vmatrix} t-2 & \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \widehat{1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 \\ \widehat{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \widehat{1} \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & t+1 \end{vmatrix} \stackrel{W_{n+1} := \widehat{W}_1 + W_{n+1}}{=} \begin{vmatrix} t-2 & \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \widehat{1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 \\ \widehat{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \widehat{1} \\ t & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_1 := -K_{n+1} + K_1 \begin{vmatrix} t-1 & \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \widehat{1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \widehat{1} \\ 0 & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = (-1)^{n+4} \begin{vmatrix} t-1 & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ 0 & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \widehat{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \widehat{1} \end{vmatrix} + \\
& + (-1)^{2(n+1)} t \begin{vmatrix} t-1 & \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \widehat{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = (-1)^{n+4} \det A + t \cdot \det B = (*),
\end{aligned}$$

gdzie $W_{n+1} := W_1 + W_{n+1}$ jest operacją dodania 1-wszego wiersza bieżącej macierzy do $n+1$ -wszego i zapisania wyniku w $n+1$ -wszym wierszu, zaś $K_1 := -K_{n+1} + K_1$ jest operacją dodania kolumny powstałej z $n+1$ -wszej kolumny przez pomnożenie jej przez -1 do 1-wszej kolumny i zapisanie wyniku w $n+1$ -wszej kolumnie.

$$\text{Ponadto } \det A = \begin{vmatrix} t-1 & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ 0 & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \widehat{1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} t-1 & \widehat{1} \\ 0 & \widehat{1} \end{vmatrix},$$

$$\det B = \begin{vmatrix} t-1 & \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \widehat{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = (t-1) \cdot t^{n-1} = t^n - t^{n-1},$$

więc

$$(*) = (-1)^{2n+2} \cdot (-1) \cdot (t-1) + t \cdot (t^n - t^{n-1}) = t^{n+1} - t^n - t + 1.$$

4° Niech $2 \leq j \leq m_n$. Pokażemy, że $\check{c}_\Delta = \text{nww}(n+1-j, j)$. Dowód tego faktu można również znaleźć w książce [59, str. 150, Lemma 1.3].

Przyjmijmy $k := \text{nww}(n+j-1, j)$, $p := j$ oraz $q := n+1-j$. Wówczas macierz Coxetera Cox_Δ oraz macierz Cox_Δ^k mają następującą postać:

$$\text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1_{p+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{bmatrix},$$

$$\text{Cox}_\Delta^k = \begin{bmatrix} \frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)} + 1 & \frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)} & \frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)} & \cdots & \frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)} & \frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \widehat{\frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)}} & \widehat{\frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)}} & \widehat{\frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)}} & \cdots & \widehat{\frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)}} & \widehat{\frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)}} + 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $\widehat{a} = -a$, dla $a \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$\begin{aligned} e_1 \cdot \text{Cox}^k - e_1 &= \frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)} \cdot \mathbf{h} \\ e_2 \cdot \text{Cox}^k - e_2 &= 0 \\ &\vdots \\ e_n \cdot \text{Cox}^k - e_n &= 0 \\ e_{n+1} \cdot \text{Cox}^k - e_{n+1} &= \widehat{\frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)}} \cdot \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Zatem $e_l \cdot \text{Cox}^k - e_l = \partial(x) \cdot \mathbf{h}$ dla dowolnego $l \in \{1, \dots, n+1\}$ oraz $\partial(x) = \frac{p+q}{\text{nwd}(p,q)} \cdot (x_1 - x_{n+1})$. Łatwo widać, że $\check{c} = k = \text{nww}(p, q)$ jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $e_l \cdot \text{Cox}^{\check{c}} - e_l = \partial(x) \cdot \mathbf{h}$ dla dowolnego $l \in \{1, \dots, n+1\}$.

5° Pokażemy, że jeśli $j \in \{2, \dots, m_n\}$, to $\text{cox}_\Delta(t) = t^{n+1} - t^{n+1-j} - t^j + 1 = F_\Delta^{(j)}(t)$.

Niech $p := j$ oraz $q := n+1-j$. Wówczas

$$W_{n+1} := \underline{\underline{W_2 + W_{n+1}}} \quad \left| \begin{array}{cccccccc|cccccccc} t-1 & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \widehat{1}_{p+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t+1 & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1}_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \widehat{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t \end{array} \right| =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \dots \stackrel{(**)}{=} \quad \left| \begin{array}{cccccccc|cccccccc} t-1 & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \widehat{1}_{p+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} & \cdots & \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1}_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & \widehat{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t \end{array} \right| \stackrel{(**)}{=},$$

gdzie przez $W_{n+1} := W_{n+1} + W_j$, dla $j \in \{2, \dots, p-1\}$ oznaczamy operację dodania j -ego wiersza bieżącej macierzy do $n+1$ -wszego wiersza i zapisania wyniku w $n+1$ -szym wierszu, zaś przez $K_j := -K_{n+1} + K_j$ oznaczamy operację dodania $n+1$ -wszej kolumny pomnożonej przez -1 (tzn. $k_{sj} := (-1) \cdot k_{sj}$, dla dowolnego $1 \leq s \leq n+1$) do j -tej kolumny i zapisania wyniku w j -tej kolumnie. Przez $(*)$ oznaczamy ciąg operacji $K_s := -K_{n+1} + K_s$, $W_{n+1} := W_{n+1} + W_s$ dla $s = 3, \dots, p-1$. Ponadto niech A, B będą następującymi macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} t-1 & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_p(\mathbb{Z}), B = \begin{bmatrix} t & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} \\ \widehat{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_q(\mathbb{Z}).$$

Wówczas $(**) = \det A \cdot \det B$. Pokażemy, że $\det A = t^p - 1$, zaś $\det B = t^{n-p+1} - 1$. Ponieważ

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} t-1 & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1) \cdot \begin{vmatrix} t & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{vmatrix} = \\
&= (t-1) \cdot (t^{p-1} + t^{p-2} + \cdots + t + 1) = \\
&= t^p + t^{p-1} + \cdots + t^2 + t - t^{p-1} - t^{p-2} - \cdots - t - 1 = \\
&= t^p - 1,
\end{aligned}$$

więc $\det A = t^p - 1$. Z równości

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} t & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} \\ \widehat{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} t & \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t \end{vmatrix} + \\
&+ (-1)(-1)^{n+1-p+1} \cdot \begin{vmatrix} \widehat{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t & \widehat{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & \widehat{1} \end{vmatrix} = t \cdot t^{n-p} + (-1)^{n-p+3} \cdot (-1)^{n-p} \\
&= t^{n-p+1} - 1
\end{aligned}$$

wynika, że $\det B = t^{n-p+1} - 1$, Zatem

$$\begin{aligned}
\text{cox}_\Delta(t) &= (**) = \det A \cdot \det B = \\
&= (t^p - 1) \cdot (t^{n+1-p} - 1) = t^{n+1} - t^p - t^{n+1-p} + 1 \\
&= t^{n+1} - t^j - t^{n+1-j} + 1.
\end{aligned}$$

6° Dowód, że $\mathbf{tub}_\Delta = \begin{cases} n, & \text{jeśli } j = 1 \\ (j, n - j + 1), & \text{jeśli } j \in \{2, \dots, m_n\}. \end{cases}$ można znaleźć w [59, str.

59, Chapter XIII.2]. \square

Twierdzenie 2.5.3. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ będzie P -krytycznym bigrafem E-typu $D\Delta \in \{\widetilde{\mathbb{D}}_n, \widetilde{\mathbb{E}}_6, \widetilde{\mathbb{E}}_7, \widetilde{\mathbb{E}}_8\}$ oraz $5 \leq n+1 = |\Delta_0| \leq 10$. Wówczas wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ oraz zredukowana liczba Coxetera \check{c}_Δ bigrafu Δ są tymi przedstawionymi w tabeli 2.5.4.

Idea dowodu. Dowód przeprowadzimy w kilku krokach.

1° Stosując konstrukcję 2.2.9 obliczamy przy pomocy implementacji algorytmu 4.1.12 wszystkie P -krytyczne bigrafy \mathcal{LP}_{n+1} o funkcjonalach Grama należących do P -kryt $_{n+1}^\bullet$, dla $n+1 \leq 10$.

2° Przy pomocy algorytm 4.1.21 obliczamy dla każdego $\Delta \in \mathcal{LP}_{n+1}$ wszystkie wielomiany Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ bigrafu Δ . Korzystamy tu z faktu, że $\text{cox}_\Delta(t)$ zależy od numeracji wierzchołków, nie zależy natomiast od macierzy znaku $\widehat{\varepsilon} \in \widehat{\mathbf{C}}_2^{n+1}$ działających na tych bigrafach, gdyż

$$\text{cox}_{\Delta^* \hat{\varepsilon}}(t) = \det(t \cdot E - \hat{\varepsilon}^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot \hat{\varepsilon}) = \det(\hat{\varepsilon}^{tr} \cdot (t \cdot E - \check{G}_{\Delta}) \cdot \hat{\varepsilon}) = \text{cox}_{\Delta}(t).$$

□

2.5.4. Wielomiany Coxetera $\text{cox}_{\Delta}(t)$ P -krytycznych bigrafów Δ oraz $\check{\Delta}$

$D\Delta$	$CGpol_{\text{Eucl}}^+ = \{\text{cox}_{\Delta}(t)\}_{D\Delta=\text{Eucl}} = \{F_{D\Delta}^{(j)}(t)\}$	\check{c}_{Δ}
$\tilde{\mathbb{D}}_4$	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_4}^{(1)}(t) = t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 2$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_4}^{(2)}(t) = t^5 - t^4 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 4$
$\tilde{\mathbb{D}}_5$	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}^{(1)}(t) = t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 6$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}^{(2)}(t) = t^6 - t^5 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 5$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}^{(3)}(t) = t^6 - t^4 - t^2 + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 4$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}^{(4)}(t) = t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 6$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_5}^{(5)}(t) = t^6 - 2t^5 + 3t^4 - 4t^3 + 3t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 4$
$\tilde{\mathbb{D}}_6$	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_6}^{(1)}(t) = t^7 + t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 + t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 4$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_6}^{(2)}(t) = t^7 - t^6 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 6$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_6}^{(3)}(t) = t^7 - t^4 - t^3 + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 12$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_6}^{(4)}(t) = t^7 - t^6 + t^5 - t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 4$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_6}^{(5)}(t) = t^7 - t^6 - t^5 + t^4 + t^3 - t^2 + t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 8$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_6}^{(6)}(t) = t^7 - 2t^6 + 2t^5 - t^4 - t^3 + 2t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 12$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_6}^{(7)}(t) = t^7 - 2t^5 + t^4 + t^3 - 2t^2 + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 6$
$\tilde{\mathbb{D}}_7$	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_7}^{(1)}(t) = t^8 + t^7 - t^6 - t^5 - t^3 - t^2 + t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 10$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_7}^{(2)}(t) = t^8 - t^7 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 7$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_7}^{(3)}(t) = t^8 - t^6 - t^2 + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 6$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_7}^{(4)}(t) = t^8 - 2t^4 + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 4$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_7}^{(5)}(t) = t^8 - t^7 + t^5 - 2t^4 + t^3 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 12$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_7}^{(6)}(t) = t^8 - 2t^6 + 2t^4 - 2t^2 + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 8$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_7}^{(7)}(t) = t^8 - 2t^7 + 2t^6 - 2t^5 + 2t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 8$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_7}^{(8)}(t) = t^8 - 2t^7 + t^6 + 2t^5 - 4t^4 + 2t^3 + t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 6$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_7}^{(9)}(t) = t^8 - t^7 + 2t^6 - 3t^5 + 2t^4 - 3t^3 + 2t^2 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 12$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_7}^{(10)}(t) = t^8 - t^7 - t^6 + t^5 + t^3 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 10$
$\tilde{\mathbb{D}}_8$	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(1)}(t) = t^9 + t^8 - t^7 - t^6 - t^3 - t^2 + t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 6$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(2)}(t) = t^9 - t^8 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 8$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(3)}(t) = t^9 - t^5 - t^4 + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 20$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(4)}(t) = t^9 - t^8 + 2t^7 - 2t^6 - 2t^3 + 2t^2 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 4$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(5)}(t) = t^9 - t^8 + t^7 - t^6 - t^3 + t^2 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 12$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(6)}(t) = t^9 - t^8 - t^7 + t^6 + t^3 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 12$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(7)}(t) = t^9 - t^8 - t^7 + 3t^6 - 2t^5 - 2t^4 + 3t^3 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 6$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(8)}(t) = t^9 - t^7 + t^6 - t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 12$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(9)}(t) = t^9 - t^7 - t^6 + t^5 + t^4 - t^3 - t^2 + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 24$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(10)}(t) = t^9 - 2t^7 + t^5 + t^4 - 2t^2 + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 10$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(11)}(t) = t^9 - 2t^8 + t^7 + t^6 - t^5 - t^4 + t^3 + t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 24$
	$F_{\tilde{\mathbb{D}}_8}^{(12)}(t) = t^9 - 2t^8 + 2t^7 - 2t^6 + t^5 + t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_{\Delta} = 20$

2.5.4. (kontynuacja)

$D\Delta$	$CGpol_{\text{Eucl}}^+ = \{\text{cox}_\Delta(t)\}_{D\Delta=\text{Eucl}} = \{F_{D\Delta}^{(j)}(t)\}$	\check{c}_Δ
$\widetilde{\mathbb{D}}_9$	$F_{\mathbb{D}_9}^{(1)}(t) = t^{10} + t^9 - t^8 - t^7 - t^3 - t^2 + t + 1$	$\check{c}_\Delta = 14$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(2)}(t) = t^{10} - t^9 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 9$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(3)}(t) = t^{10} - t^8 - t^2 + 1$	$\check{c}_\Delta = 8$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(4)}(t) = t^{10} - t^6 - t^4 + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(5)}(t) = t^{10} - t^9 + t^8 - 2t^7 + 2t^6 - 2t^5 + 2t^4 - 2t^3 + t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 24$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(6)}(t) = t^{10} - t^9 + 2t^8 - 2t^7 + t^6 - 2t^5 + t^4 - 2t^3 + 2t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 20$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(7)}(t) = t^{10} - t^9 + t^8 - 2t^6 + 2t^5 - 2t^4 + t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(8)}(t) = t^{10} - t^9 - t^6 + 2t^5 - t^4 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 20$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(9)}(t) = t^{10} - 2t^9 + 2t^8 - 2t^7 + t^6 + t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(10)}(t) = t^{10} - 2t^9 + t^8 + t^7 - 2t^6 + 2t^5 - 2t^4 + t^3 + t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 30$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(11)}(t) = t^{10} - t^9 - t^8 + 2t^7 - 2t^5 + 2t^3 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 24$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(12)}(t) = t^{10} - t^9 + t^7 - t^6 - t^4 + t^3 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 6$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(13)}(t) = t^{10} - 2t^9 + t^8 + 2t^6 - 4t^5 + 2t^4 + t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 8$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(14)}(t) = t^{10} - t^9 - t^8 + t^7 + t^3 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 14$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(15)}(t) = t^{10} - t^8 + t^7 - 2t^5 + t^3 - t^2 + 1$	$\check{c}_\Delta = 30$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(16)}(t) = t^{10} - t^8 - t^7 + 2t^5 - t^3 - t^2 + 1$	$\check{c}_\Delta = 30$
	$F_{\mathbb{D}_9}^{(17)}(t) = t^{10} - 2t^8 + t^6 + t^4 - 2t^2 + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$
$\widetilde{\mathbb{E}}_6$	$F_{\mathbb{E}_6}^{(1)}(t) = t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1$	$\check{c}_\Delta = 6$
	$F_{\mathbb{E}_6}^{(2)}(t) = t^7 - t^6 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 6$
	$F_{\mathbb{E}_6}^{(3)}(t) = t^7 - t^5 - t^2 + 1$	$\check{c}_\Delta = 10$
	$F_{\mathbb{E}_6}^{(4)}(t) = t^7 - 2t^6 + 2t^5 - t^4 - t^3 + 2t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$
	$F_{\mathbb{E}_6}^{(5)}(t) = t^7 - t^6 - t^5 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 8$
$\widetilde{\mathbb{E}}_7$	$F_{\mathbb{E}_7}^{(1)}(t) = t^8 + t^7 - t^5 - 2t^4 - t^3 + t + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(2)}(t) = t^8 - t^7 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 7$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(3)}(t) = t^8 - t^6 - t^2 + 1$	$\check{c}_\Delta = 6$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(4)}(t) = t^8 - t^5 - t^3 + 1$	$\check{c}_\Delta = 15$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(5)}(t) = t^8 - t^7 + t^5 - 2t^4 + t^3 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(6)}(t) = t^8 - 2t^6 + 2t^4 - 2t^2 + 1$	$\check{c}_\Delta = 8$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(7)}(t) = t^8 - 2t^7 + 2t^6 - 2t^5 + 2t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 8$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(8)}(t) = t^8 - 2t^7 + t^6 + 2t^5 - 4t^4 + 2t^3 + t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 6$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(9)}(t) = t^8 - 3t^7 + 5t^6 - 6t^5 + 6t^4 - 6t^3 + 5t^2 - 3t + 1$	$\check{c}_\Delta = 6$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(10)}(t) = t^8 - 2t^7 + t^6 + t^5 - 2t^4 + t^3 + t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 9$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(11)}(t) = t^8 - t^7 - t^6 + t^5 + t^3 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 10$
	$F_{\mathbb{E}_7}^{(12)}(t) = t^8 - t^7 - t^6 + 2t^4 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$

2.5.4. (kontynuacja)

$D\Delta$	$CGpol_{\text{Eucl}}^+ = \{\text{cox}_\Delta(t)\}_{D\Delta=\text{Eucl}} = \{F_{D\Delta}^{(j)}(t)\}$	\check{c}_Δ
$\tilde{\mathbb{E}}_8$	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(1)}(t) = t^9 + t^8 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1$	$\check{c}_\Delta = 30$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(2)}(t) = t^9 - t^8 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 8$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(3)}(t) = t^9 - t^7 - t^2 + 1$	$\check{c}_\Delta = 14$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(4)}(t) = t^9 - t^5 - t^4 + 1$	$\check{c}_\Delta = 20$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(5)}(t) = t^9 - t^8 + t^7 - t^6 - t^3 + t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(6)}(t) = t^9 - t^8 - t^7 + 2t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 18$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(7)}(t) = t^9 - t^8 - t^7 + t^6 + t^3 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(8)}(t) = t^9 - t^8 - t^7 + t^5 + t^4 - t^2 - t + 1$	$\check{c}_\Delta = 18$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(9)}(t) = t^9 - 2t^8 + 2t^7 - t^6 - t^3 + 2t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 6$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(10)}(t) = t^9 - 2t^8 + 2t^7 - 2t^6 + t^5 + t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 20$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(11)}(t) = t^9 - 2t^8 + t^7 + t^6 - t^5 - t^4 + t^3 + t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 24$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(12)}(t) = t^9 - 2t^8 + t^7 + t^2 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 14$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(13)}(t) = t^9 - 2t^8 + 3t^6 - 2t^5 - 2t^4 + 3t^3 - 2t + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(14)}(t) = t^9 - 3t^8 + 4t^7 - 3t^6 + t^5 + t^4 - 3t^3 + 4t^2 - 3t + 1$	$\check{c}_\Delta = 30$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(15)}(t) = t^9 - 4t^8 + 8t^7 - 9t^6 + 4t^5 + 4t^4 - 9t^3 + 8t^2 - 4t + 1$	$\check{c}_\Delta = 6$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(16)}(t) = t^9 - t^7 - t^6 + t^5 + t^4 - t^3 - t^2 + 1$	$\check{c}_\Delta = 24$
	$F_{\tilde{\mathbb{E}}_8}^{(17)}(t) = t^9 - 2t^7 - t^6 + 2t^5 + 2t^4 - t^3 - 2t^2 + 1$	$\check{c}_\Delta = 12$

3. Klasyfikacja spektralna Coxetera prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych

Celem tego rozdziału jest podanie pełnej listy prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych uzyskanej przy pomocy obliczeń komputerowych wykorzystujących algorytm 4.2.1. Kluczem do jej podania było pokazanie, że takie posety mają co najwyżej 9 elementów. Dowód tego faktu został również zawarty w tym rozdziale. Uzyskana przez nas lista prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych pokrywa się (z dokładnością do pewnych operacji) z listą posetów krytycznych (w sensie [10, 11]) przedstawionych przez V. M. Bondarenkę i M. V. Stepochkinę w pracy [10]. Listę prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych uzyskaliśmy przez uruchomienie implementacji algorytmu 4.2.1. Wśród jednopikowych posetów prawie TP -krytycznych wyróżniamy posety TP -krytyczne oraz posety TP -wyjątkowe.

Dla każdego posetu $I \in \{\mathbb{L}_1, \dots, \mathbb{L}_{132}\}$ ze wspomnianej listy wykazujemy jego \mathbb{Z} -dwuliniową równoważność z jednym z grafów Euklidesa. W przypadku posetów wyjątkowych pokazujemy również taką równoważność dla posetów $T = I \setminus \{*\}$ powstałych z I przez usunięcie elementu maksymalnego $*$ zwanego pikiem. Ponadto dla każdego posetu z listy opisujemy jego sieciowe systemy pierwiastków. Posłużyły one do udowodnienia \mathbb{Z} -dwuliniowej równoważności między I a jednym z grafów Euklidesa Δ_I .

3.1. Podstawowe informacje o posetach i stowarzyszonych z nimi funkcjonalach kwadratowych

Celem tego podrozdziału jest przypomnienie podstawowych definicji i faktów związanych z jednopikowymi posetami i stowarzyszonymi z nimi funkcjonalami Titsa, Eulera oraz incydencji. Głównym źródłem przedstawionych tu wiadomości są [51, 54, 60, 53].

Definicja 3.1.1. (a) Skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym (w skrócie **posetem**) nazywamy parę $I = (I, \preceq)$, gdzie $I = \{a_1, \dots, a_n\}$ jest zbiorem skończonym oraz \preceq jest relacją dwuargumentową określoną na I o następujących własnościach:

- (i) $j \preceq j$, dla dowolnego $j \in I$ (zwrotność);
- (ii) jeśli $i \preceq j$ oraz $j \preceq k$, to $i \preceq k$ (przechodność);
- (iii) jeśli $i \preceq j$ oraz $j \preceq i$, to $i = j$ (antysymetria).

(b) **Elementem maksymalnym** w posecie (I, \preceq) względem relacji \preceq częściowego porządku, nazywamy każdy element $a \in I$ o tej własności, że jeśli $t \in I$ jest elementem spełniającym $a \preceq t$, to $t = a$.

W rozdziale tym rozważamy posety **jednopikowe**, tzn. o jednym elemencie maksymalnym $*$.

W artykułach [53, 54, 60] wprowadzono następujące definicje.

Definicja 3.1.2. Niech $I = \{1, 2, \dots, n, n + 1 = *\}$ będzie posetem jednopikowym z elementem maksymalnym $*$.

(a) **Macierzą incydencji** C_I posetu I , **macierzą Eulera** \bar{C}_I posetu I oraz **macierzą Titsa** \hat{C}_I posetu I nazywamy macierze

$$C_I = [c_{ij}]_{i,j \in I} \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i \preceq j, \\ 0 & \text{jeśli } i \not\preceq j, \end{cases}$$

$$\bar{C}_I = C_I^{-1},$$

$$\hat{C}_I = \left[\begin{array}{c|c} C_I^{tr} & -u \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z}), u = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $n + 1 = |I|$, $\mathbb{M}_I(\mathbb{Z}) = \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ i $T = I \setminus \{*\}$ jest podposetem posetu I .

(b) **Symetryczną macierzą incydencji** G_I posetu I , **symetryczną macierzą Eulera** \bar{G}_I posetu I oraz **symetryczną macierzą Titsa** \hat{G}_I posetu I nazywamy odpowiednio macierze

$$G_I = [C_I + C_I^{tr}], \bar{G}_I = [\bar{C}_I + \bar{C}_I^{tr}], \hat{G}_I = [\hat{C}_I + \hat{C}_I^{tr}].$$

(c) **Funkcjonałem incydencji** posetu I nazywamy funkcję $q_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowaną wzorem

$$q_I(x) = x \cdot C_I \cdot x^{tr},$$

zaś **dwuliniowym funkcjonałem incydencji** posetu I nazywamy funkcję $b_I : \mathbb{Z}^I \times \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ taką, że

$$b_I(x, y) = x \cdot C_I \cdot y^{tr}.$$

(d) **Funkcjonałem Titsa** posetu I nazywamy funkcję $\hat{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowaną wzorem

$$\hat{q}_I(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 + \sum_{i < j \leq n} x_i x_j - (x_1 + \cdots + x_n) x_{n+1} = x \cdot \hat{C}_I \cdot x^{tr},$$

zaś **dwuliniowym funkcjonałem Titsa** posetu I nazywamy funkcję $\hat{b}_I : \mathbb{Z}^I \times \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowaną wzorem

$$\hat{b}_I(x, y) = x \cdot \hat{C}_I \cdot y^{tr}.$$

(e) **Funkcjonałem Eulera** posetu I nazywamy funkcję $\bar{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowaną wzorem

$$\bar{q}_I(x) = x \cdot C_I^{-1} \cdot x^{tr},$$

zaś **dwuliniowym funkcjonałem Eulera** posetu I nazywamy funkcję $\bar{b}_I : \mathbb{Z}^I \times \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowaną wzorem

$$\bar{b}_I(x, y) = x \cdot C_I^{-1} \cdot y^{tr}.$$

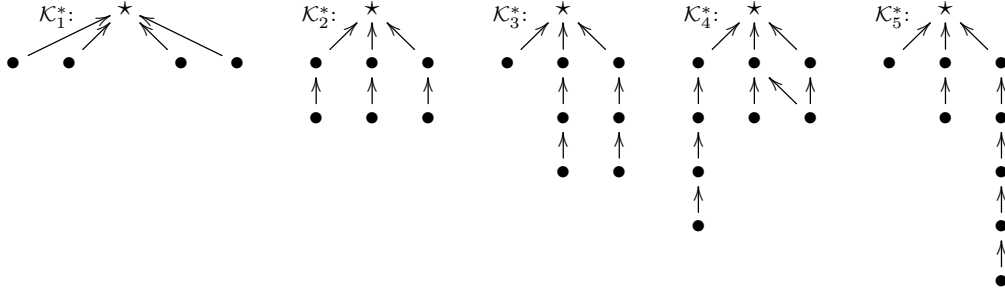
Definicja 3.1.3. Niech $I = \{1, 2, \dots, n, n+1 = *\}$ będzie skończonym posetem jednopikowym z elementem maksymalnym $n+1 = *$. Poset I nazywamy **dodatnim** (odpowiednio: **nieujemnym**), gdy jego symetryczna macierz incydencji $G_I = \frac{1}{2}[C_I + C_I^{tr}]$ jest dodatnio określona (odpowiednio: dodatnio półokreślona); równoważnie, gdy funkcjonał incydencji posetu I jest dodatni, tzn. $q_I(v) = v \cdot C_I \cdot v^{tr} > 0$ dla dowolnego $0 \neq v \in \mathbb{Z}^n$ (odpowiednio: funkcjonał incydencji posetu I jest nieujemny, tzn. $q_I(v) = v \cdot C_I \cdot v^{tr} \geq 0$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$).

Definicja 3.1.4. Niech I będzie skończonym posetem. Poset I nazywamy **głównym**, jeśli q_I jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_I$, gdzie $0 \neq \mathbf{h}_I \in \mathbb{Z}^I$.

Przedstawiamy teraz twierdzenie charakteryzujące jednopikowe posety słabo dodatnie [28, 17] (a także [51]).

Twierdzenie 3.1.5 (Kleiner, 1972, [28]). *Niech $I = \{1, \dots, n, *\}$ będzie posetem posiadającym dokładnie jeden element maksymalny $*$. Funkcjonał Titsa posetu I jest słabo dodatni,*

ozn. $\hat{q}_I(v) > 0$ dla dowolnego $0 \neq v \in \mathbb{N}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy poset I nie zawiera podposetów o następujących pięciu kształtach:



W artykule [54] (zobacz także [60]) wprowadzono następujące definicje.

Definicja 3.1.6. Niech $I = \{1, \dots, n, n+1 = *\}$ będzie skończonym posetem jednopikowym o elemencie maksymalnym $*$.

(a) **Macierzą Coxetera** Cox_I posetu I , **macierzą Coxetera-Eulera** $\bar{\text{Cox}}_I$ posetu I , **macierzą Coxetera-Titsa** $\hat{\text{Cox}}_I$ posetu I nazywamy macierze

$$\text{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr} \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z}) = \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}), \bar{\text{Cox}}_I := -\bar{C}_I \cdot \bar{C}_I^{-tr} \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z}), \hat{\text{Cox}}_I := -\hat{C}_I \cdot \hat{C}_I^{-tr}.$$

(b) **Wielomianem Coxetera** $\text{cox}_I(t)$ posetu I nazywamy wielomian

$$\text{cox}_I(t) = \det(t \cdot E - \text{Cox}_I) = \det(t \cdot E - \bar{\text{Cox}}_I) = \det(t \cdot E - \hat{\text{Cox}}_I) \in \mathbb{Z}[t],$$

patrz [60, Proposition 2.6].

(c) **Transformacją Coxetera** Φ_I posetu I , **transformacją Coxetera-Eulera** $\bar{\Phi}_I$ posetu I , **transformacją Coxetera-Titsa** $\hat{\Phi}_I$ posetu I nazywamy funkcje $\Phi_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$, $\bar{\Phi}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$, $\hat{\Phi}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$ zdefiniowane w następujący sposób:

$$\Phi_I(x) = x \cdot \text{Cox}_I, \bar{\Phi}_I(x) = x \cdot \bar{\text{Cox}}_I, \hat{\Phi}_I(x) = x \cdot \hat{\text{Cox}}_I$$

dla dowolnego $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^I = \mathbb{Z}^{n+1}$.

(d) **Liczba Coxetera** \mathbf{c}_I posetu I nazywamy minimalną liczbę całkowitą $r_1 \geq 1$ taką, że $\text{Cox}_I^{r_1} = E$. Jeśli $\text{Cox}_I^{r_1} \neq E$ dla dowolnego $r_1 \geq 1$, to $\mathbf{c}_I = \infty$.

Twierdzenie 3.1.7 ([53, 54, 60]). Niech $J = \{1, \dots, n, n+1 = *\}$ będzie skończonym posetem jednopikowym o elemencie maksymalnym $n+1 = *$. Ponadto niech $q_J, \hat{q}_J, \bar{q}_J : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ będą funkcjonalami incydencji, Titsa i Eulera posetu J , zaś $\Phi_J, \hat{\Phi}_J, \bar{\Phi}_J : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$ będą odpowiadającymi im transformacjami Coxetera.

(a) Wówczas zachodzą następujące równości: $\hat{C}_J = B \cdot \bar{C}_J \cdot B^{tr}$, $C_J^{tr} = B' \cdot \bar{C}_J \cdot B'^{tr}$ oraz przemienne są następujące diagramy:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{\hat{q}_J} & \mathbb{Z}^m \\ h_B \downarrow \simeq & \nearrow \bar{q}_J & \uparrow q_J \\ \mathbb{Z}^m & \xleftarrow{h_{B'}} & \mathbb{Z}^m \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{Z}^m & \xleftarrow{h_{B'}} & \mathbb{Z}^m \\ \hat{\Phi}_J \downarrow \simeq & & \bar{\Phi}_J \downarrow \simeq & & \Phi_J^{-1} \downarrow \simeq \\ \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{Z}^m & \xleftarrow{h_{B'}} & \mathbb{Z}^m \end{array}$$

gdzie $B' = C_J^{tr}$, $B = \begin{bmatrix} C_J & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$, $\check{J} = J \setminus \{*\}$ oraz $h_B, h_{B'} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$ są izomorfizmami grup zdefiniowanymi w następujący sposób: $h_B(x) = x \cdot B$, $h_{B'}(x) = x \cdot B'$ dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

(b) $\widehat{\text{Cox}}_J = B \cdot \overline{\text{Cox}}_J \cdot B^{-1}$, $\text{Cox}_J^{-1} = \text{Cox}_{J^{op}} = B' \cdot \overline{\text{Cox}}_J \cdot B'^{-1}$ oraz $\Phi_{J^{op}} = \Phi_J^{-1}$, gdzie J^{op} jest posetem przeciwnym do J zdefiniowanym w 3.4.1.

(c) Liczba Coxetera $\mathbf{c}_J = \text{rz}(\Phi_J)$ posetu J jest równa liczbie Coxetera posetu J^{op} . Dodatkowo $\mathbf{c}_J = \text{rz}(\widehat{\Phi}_J) = \text{rz}(\overline{\Phi}_J)$ oraz $\text{cox}_{J^{op}}(t) = \text{cox}_J(t)$.

W artykule [47] wprowadzono następujące definicje (patrz również [52, 60]).

Definicja 3.1.8. Niech $I = \{1, 2, \dots, n, n+1 = *\}$ będzie posetem jednopikowym z elementem maksymalnym $*$, zaś $T = I \setminus \{*\}$ będzie podposetem posetu I . Ponadto niech \widehat{G}_I będzie symetryczną macierzą Titsa posetu I , zaś G_T będzie symetryczną macierzą incydencji posetu T .

(a) Funkcjonał Titsa $\widehat{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu I nazywamy **prawie P -krytycznym**, jeśli \widehat{q}_I nie jest dodatni, zaś niepikowe obcięcia $\widehat{q}_I^{(1)}, \dots, \widehat{q}_I^{(n)} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonału \widehat{q}_I są dodatnie.

(b) Funkcjonał Titsa $\widehat{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu I nazywamy **P -krytycznym**, jeśli \widehat{q}_I nie jest dodatni, zaś obcięcia $\widehat{q}_I^{(1)}, \dots, \widehat{q}_I^{(n)}, \widehat{q}_I^{(n+1)} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonału \widehat{q}_I są dodatnie. Funkcjonał incydencji $q_T : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu T nazywamy **P -krytycznym**, jeśli q_T nie jest dodatni, zaś obcięcia $q_T^{(1)}, \dots, q_T^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonału q_T są dodatnie.

(c) Jednopikowy poset I nazywamy **TP -krytycznym**, jeśli funkcjonał Titsa $\widehat{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu I jest P -krytyczny.

(d) Jednopikowy poset I nazywamy **prawie TP -krytycznym**, jeśli funkcjonał Titsa $\widehat{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu I jest prawie P -krytyczny.

(e) Jednopikowy poset I nazywamy **TP -wyjątkowym**, jeśli I jest prawie TP -krytyczny, ale nie jest TP -krytyczny.

(f) **Typem Coxetera-Euklidesa** prawie TP -krytycznego posetu I z $T = I \setminus \{*\}$ nazywamy:

(f1) graf Euklidesa $DI \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_n, \widetilde{\mathbb{D}}_n, \widetilde{\mathbb{E}}_6, \widetilde{\mathbb{E}}_7, \widetilde{\mathbb{E}}_8\}$ taki, że

$$\widehat{G}_I \sim_{\mathbb{Z}} \widehat{G}_{DI}, \text{ jeśli } q_T : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z} \text{ jest dodatni,}$$

tzn. istnieje macierz $B \in \text{Gl}(n+1, \mathbb{Z})$ taka, że $\widehat{G}_{DI} = B \cdot \widehat{G}_I \cdot B^{tr}$, gdzie $\widehat{G}_{DI} = \check{G}_{DI} + \check{G}_{DI}^{tr}$ oraz \check{G}_{DI} jest niesymetryczną macierzą Grama bigrafu DI ,

(f2) parę grafów Euklidesa $DI, DT \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_n, \widetilde{\mathbb{D}}_n, \widetilde{\mathbb{E}}_6, \widetilde{\mathbb{E}}_7, \widetilde{\mathbb{E}}_8\}$ taką, że

$$\widehat{G}_I \sim_{\mathbb{Z}} \widehat{G}_{DI}, G_T \sim_{\mathbb{Z}} \widehat{G}_{DT}, \text{ jeśli } q_T : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z} \text{ nie jest dodatni,}$$

tzn. istnieją macierze $B \in \text{Gl}(n+1, \mathbb{Z})$, $B' \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ takie, że $\widehat{G}_{DI} = B \cdot \widehat{G}_I \cdot B^{tr}$, $\widehat{G}_{DT} = B' \cdot G_T \cdot B'^{tr}$, gdzie $\widehat{G}_{DI} = \check{G}_{DI} + \check{G}_{DI}^{tr}$, $\widehat{G}_{DT} = \check{G}_{DT} + \check{G}_{DT}^{tr}$ są symetrycznymi macierzami grafów Euklidesa DI, DT .

(h) Wektor $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^T$ nazywamy **nil-wektorem**, jeśli $w \neq 0$ oraz $w_1 + \dots + w_n = 0$.

(i) Wektor $v = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{Z}^I$ nazywamy **wiernym**, jeśli $v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0, v_{n+1} \neq 0$.

(j) Wektor $v = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{Z}^I$ nazywamy **prawie wiernym**, jeśli $v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0$.

3.2. Charakteryzacja prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych

Celem tego podrozdziału jest charakteryzacja jednopikowych posetów prawie TP -krytycznych. W szczególności pokazujemy, że jednopikowy poset I jest prawie TP -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $5 \leq |I| \leq 9$ oraz $\hat{q}_I : \mathbb{Z}^I = \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny i $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_*)$ jest prawie wiernym wektorem, tj. $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$. Jeśli dodatkowo $h_* \neq 0$, to I jest TP -krytyczny.

Wśród posetów jednopikowych prawie TP -krytycznych wyróżniamy posety TP -krytyczne oraz posety TP -wyjątkowe, czyli prawie TP -krytyczne posety, które nie są TP -krytyczne. Rozdział ten zawiera opis własności takich posetów, które posłużyły nam do podania pełnej listy jednopikowych posetów prawie TP -krytycznych.

Niech $I = \{1, \dots, n, n+1 = *\}$ będzie posetem jednopikowym z elementem maksymalnym $* = n+1$, zaś $\hat{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonalem Titsa posetu I . Przez $q_T = \hat{q}_I^{(*)} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ oznaczamy $*$ -obcięcie funkcjonału Titsa \hat{q}_I posetu I zdefiniowane wzorem

$$\hat{q}_I^{(*)} = q_T(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j \leq n} x_i x_j = x \cdot C_T \cdot x^{tr},$$

gdzie $T = I \setminus \{*\}$.

Uowodnimy teraz twierdzenie charakteryzujące jednopikowe posety prawie TP -krytyczne (patrz [47, Theorem 3.3]).

Twierdzenie 3.2.1. *Niech I będzie skończonym posetem jednopikowym, $T = I \setminus \{*\}$ oraz $* = n+1$. Załóżmy, że funkcjonal Titsa $\hat{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu I jest prawie P -krytyczny i $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_*) \in \mathbb{Z}^I = \mathbb{Z}^{n+1}$ jest ustalonym niezerowym wektorem takim, że $\hat{q}_I(\mathbf{h}) \leq 0$ i norma $\|\mathbf{h}\|$ wektora \mathbf{h} jest minimalna. Niech $\mathbf{h}^- := (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^T = \mathbb{Z}^n$ i niech $b_{\hat{q}} = b_{\hat{q}_I} : \mathbb{Z}^I \times \mathbb{Z}^I \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ będzie \mathbb{Z} -dwuliniową polaryzacją funkcjonału \hat{q}_I .*

(a) $n \geq 4$ oraz obcięcia $q_T^{(1)}, \dots, q_T^{(n)}$ funkcjonału incydencji $q_T = \hat{q}_I^{(*)} : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu T są dodatnie.

(b) $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$, $\hat{q}_I(\mathbf{h}) = 0$, $b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_n) = 0$, \hat{q}_I jest nieujemny, $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ oraz następujące cztery warunki są równoważne:

(b1) $h_* \neq 0$,

(b2) $\mathbf{h}^- = (h_1, \dots, h_n)$ nie jest nil-wektorem,

(b3) $b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_*) = 0$,

(b4) funkcjonal Titsa \hat{q}_I posetu I jest P -krytyczny.

(c) Następujące cztery warunki są równoważne:

(c1) funkcjonal Titsa posetu I nie jest P -krytyczny,

(c2) $h_* = 0$,

(c3) $\mathbf{h}^- = (h_1, \dots, h_n)$ jest nil-wektorem, tzn. $h_1 + \dots + h_n = 0$,

(c4) funkcjonal incydencji $q_T = \hat{q}_I^{(*)}$ posetu T jest nieujemny, P -krytyczny,

$\text{Ker } q_T = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$, gdzie \mathbf{h}^- jest wiernym wektorem.

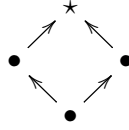
Dowód. Idea dowodu jest podobna do dowodu twierdzenia 2.1 dla P -krytycznych bigrafów.

Stosujemy następujące oznaczenia: $\hat{q} := \hat{q}_I$ oraz $* = n + 1$. Przez v oznaczamy wektor $v = (v_1, \dots, v_n, v_*) \in \mathbb{Z}^I = \mathbb{Z}^{n+1}$. Dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n, * = n + 1\}$, przez $v^{(j)}$ oznaczamy wektor

$$v^{(j)} = (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, v_*) \in \mathbb{Z}^n.$$

Ponadto niech $b_{\hat{q}} : \mathbb{Z}^I \times \mathbb{Z}^I \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ będzie \mathbb{Z} -dwuliniową polaryzacją funkcjonułu \hat{q} . Załóżmy, że funkcjonal Titsa \hat{q}_I posetu I jest prawie P -krytyczny. Zatem \hat{q} nie jest dodatni, więc istnieje niezerowy wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_*) \in \mathbb{Z}^I$ taki, że $\hat{q}(\mathbf{h}) \leq 0$ oraz norma $\|\mathbf{h}\|$ wektora \mathbf{h} jest minimalna.

(a) Ponieważ funkcjonal Titsa \hat{q} posetu I jest prawie P -krytyczny, więc niepikowe obciążenia $\hat{q}^{(1)}, \dots, \hat{q}^{(n)}$ są dodatnie. Wówczas również funkcjonuły $q_T^{(1)} = \hat{q}^{(1)}|_{x_*=0}, \dots, q_T^{(n)} = \hat{q}^{(n)}|_{x_*=0}$ są dodatnie. Rozważmy posety jednopikowe I , dla których $|I| \leq 4$ (tzn. $n = |I| \leq 3$). Jeśli dodatkowo nieorientowany diagram Hasse $\Delta = \overline{\mathcal{H}}(I)$ posetu I jest drzewem, to $\hat{q}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{q}_I = q_{\Delta}$ (zobacz twierdzenie 3.4.6 (a)) oraz $\Delta \in \{\mathbb{A}_k, \mathbb{D}_k\}$, dla $k \leq 4$. Wówczas na mocy twierdzenia 1.19 funkcjonal q_{Δ} jest dodatni. Zatem \hat{q}_I też jest dodatni, więc nie jest prawie P -krytyczny. Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $|I| \leq 4$ oraz nieorientowany diagram Hasse $\Delta = \overline{\mathcal{H}}(I)$ posetu jednopikowego I nie jest drzewem. Wówczas $\mathcal{H}(I)$ wygląda następująco:



Łatwo widać, że funkcjonal Titsa \hat{q} tego posetu jest dodatni, zatem \hat{q} nie jest prawie P -krytyczny. Stąd wynika, że jeśli I jest jednopikowym posetem prawie TP -krytycznym, to $|I| = n + 1 \geq 5$ oraz $|T| = n \geq 4$.

(b) Pokażemy najpierw, że $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$. Wiemy, że $\mathbf{h} \neq 0$, $\hat{q}(\mathbf{h}) \leq 0$. Z udowodnionego punktu (a) wynika, że $n \geq 4$. Ponieważ poset I jest prawie TP -krytyczny, więc funkcjonuły $\hat{q}^{(1)}, \dots, \hat{q}^{(n)}$ są dodatnie. Stąd $\hat{q}^{(j)}(h^{(j)}) > 0$. Zatem $h_t \neq 0$ dla dowolnego $t \leq n$, gdyż w przeciwnym wypadku $0 < \hat{q}^{(t)}(h^{(t)}) = \hat{q}(\mathbf{h}) \leq 0$ i otrzymujemy sprzeczność. Pokazaliśmy więc, że $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$. Dla uproszczenia zapisu załóżmy, że $h_1 > 0, \dots, h_s > 0, h_{s+1} < 0, \dots, h_n < 0$ i $h_* \leq 0$ dla pewnego $s \leq n$.

1° Udowodnimy najpierw, że $\hat{q}(\mathbf{h}) = 0$.

1.1° Pokażemy, że $\hat{q}(\mathbf{h} - e_i) \geq 1$ i $\hat{q}(\mathbf{h} + e_j) \geq 1$ dla $i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{s + 1, \dots, n\}$ (dodatkowo dla $j = * = n + 1$, jeśli $h_* < 0$).

Jeśli $h_i = 1$ lub $h_j = -1$, to wektory $\mathbf{h} - e_i$ i $\mathbf{h} + e_j$ są niezerowe oraz $\hat{q}(\mathbf{h} - e_i) = \hat{q}(h_1, \dots, h_{i-1}, 0, h_{i+1}, \dots, h_n, h_*) = \hat{q}^{(i)}(h^{(i)}) > 0$ i $\hat{q}(\mathbf{h} + e_j) = \hat{q}^{(j)}(h^{(j)}) > 0$ dla $i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{s + 1, \dots, n\}$, gdyż $\hat{q}_I^{(1)}, \dots, \hat{q}_I^{(n)}$ są dodatnie. Jeśli $h_* < 0$, to $\|\mathbf{h} + e_*\| < \|\mathbf{h}\|$ i z minimalności normy $\|\mathbf{h}\|$ otrzymujemy $\hat{q}(\mathbf{h} + e_*) > 0$.

Jeśli $h_i > 1$ lub $h_j < -1$, to $\|\mathbf{h} - e_i\| < \|\mathbf{h}\|$, $\|\mathbf{h} + e_j\| < \|\mathbf{h}\|$ i z minimalności normy $\|\mathbf{h}\|$ otrzymujemy nierówności $\hat{q}(\mathbf{h} - e_i) > 0$ oraz $\hat{q}(\mathbf{h} + e_j) > 0$, dla $i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{s + 1, \dots, n\}$. Jeśli $h_* < 0$, to $\|\mathbf{h} + e_*\| < \|\mathbf{h}\|$. Stąd wynika, że $\hat{q}(\mathbf{h} + e_*) > 0$.

1.2° Pokażemy teraz, że $\mathbf{h} \in \text{Ker } \hat{q}$, tzn. $\hat{q}(\mathbf{h}) = 0$. Z punktu 1.1° oraz z faktu, że $\hat{q}(\mathbf{h}), 2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_1), \dots, 2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_n)$ są liczbami całkowitymi wynikają następujące nierówności:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \hat{q}(\mathbf{h} - e_i) = \hat{q}(\mathbf{h}) + \hat{q}(e_i) - 2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_i), \\ 1 &\leq \hat{q}(\mathbf{h} + e_j) = \hat{q}(\mathbf{h}) + \hat{q}(e_j) + 2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_j), \end{aligned}$$

dla $i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{s+1, \dots, n\}$ (dodatkowo dla $j = n+1 = *$, jeśli $h_* < 0$). Korzystając z faktu, że $\hat{q}(e_i) = 1$ oraz $\hat{q}(\mathbf{h}) \leq 0$ otrzymujemy: $2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_i) \leq \hat{q}(\mathbf{h}) \leq 0$, $-2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_j) \leq \hat{q}(\mathbf{h}) \leq 0$. Ponieważ $h_1 > 0, \dots, h_s > 0, h_{s+1} < 0, \dots, h_n < 0$, więc

$$\begin{aligned} 2h_i \cdot b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_i) &\leq h_i \cdot \hat{q}(\mathbf{h}), \text{ jeśli } h_i > 0, \\ 2h_j \cdot b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_j) &\leq -h_j \cdot \hat{q}(\mathbf{h}), \text{ jeśli } h_j < 0, \end{aligned}$$

dla $i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{s+1, \dots, n\}$ (dodatkowo dla $j = n+1 = *$, jeśli $h_* < 0$). Zatem jeśli $h_* < 0$, to

$$\begin{aligned} 2\hat{q}(\mathbf{h}) &= 2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, \sum_{j=1}^{n+1} h_j e_j) = \sum_{j=1}^{n+1} 2h_j \cdot b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_j) \leq \\ &\leq h_1 \hat{q}(\mathbf{h}) + \dots + h_s \hat{q}(\mathbf{h}) - h_{s+1} \hat{q}(\mathbf{h}) - \dots - h_n \hat{q}(\mathbf{h}) - h_{n+1} \hat{q}(\mathbf{h}) = \\ &= \|\mathbf{h}\| \cdot \hat{q}(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

zaś jeśli $h_* = 0$, to

$$\begin{aligned} 2\hat{q}(\mathbf{h}) &= 2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, \sum_{j=1}^{n+1} h_j e_j) = \sum_{j=1}^{n+1} 2h_j b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_j) = \sum_{j=1}^n 2h_j b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_j) \leq \\ &\leq h_1 \hat{q}(\mathbf{h}) + \dots + h_s \hat{q}(\mathbf{h}) - h_{s+1} \hat{q}(\mathbf{h}) - \dots - h_n \hat{q}(\mathbf{h}) = \\ &= \|\mathbf{h}\| \cdot \hat{q}(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy nierówność $2\hat{q}(\mathbf{h}) \leq \|\mathbf{h}\| \cdot \hat{q}(\mathbf{h})$. Ponieważ $\hat{q}(\mathbf{h}) \leq 0$, więc aby udowodnić równość $\hat{q}(\mathbf{h}) = 0$ przypuśćmy przez sprzeczność, że $\hat{q}(\mathbf{h}) < 0$. Wówczas dzieląc obustronnie nierówność $2\hat{q}(\mathbf{h}) \leq \|\mathbf{h}\| \cdot \hat{q}(\mathbf{h})$ przez $\hat{q}(\mathbf{h})$ i uwzględniając fakt, że $\|\mathbf{h}\| \geq n \geq 4$, otrzymujemy sprzeczność $2 \geq \|\mathbf{h}\| \geq 4$. Zatem $\hat{q}(\mathbf{h}) = 0$.

1.3° Udowodnimy teraz, że $b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_n) = 0$. Wiemy, że

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{q}(\mathbf{h}) = b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \\ &= h_1 b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_1) + \dots + h_n b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_n) + h_* b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_*). \end{aligned}$$

Ponadto z punktu 1.2° wynika nierówność $h_i \cdot b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_j) \leq 0$, dla $j \leq n$ (dodatkowo dla $j \leq n+1$, jeśli $h_* < 0$). Zatem $b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_n) = 0$.

1.4° Pokażemy teraz, że \hat{q}_I jest nieujemny oraz $\text{Ker } \hat{q} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Niech $w \in \mathbb{Z}^{n+1}$ będzie wektorem takim, że $\hat{q}(w) \leq 0$. Rozważmy wektor $v = h_1 w - w_1 \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^I$, w którym $v_1 = 0$. Z udowodnionego punktu 1.2° wynika, że $\hat{q}(\mathbf{h}) = 0$. Ponadto z punktu 1.3° wynika, że $b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, -) = 0$, jeśli $h_* < 0$. Jeśli $h_* = 0$, to $b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, -) = b_{q_T}(\mathbf{h}^{(*)}, -) = 0$. Zatem

$$\begin{aligned} 0 &\leq \hat{q}^{(1)}(v^{(1)}) = \hat{q}(v) = \hat{q}(h_1 w - w_1 \mathbf{h}) = \\ &= \hat{q}(h_1 w) + \hat{q}(w_1 \mathbf{h}) - 2h_1 w_1 b_{\hat{q}}(w, \mathbf{h}) = \\ &= h_1^2 \hat{q}(w) \leq 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $h_1 \neq 0$, więc $\hat{q}(w) = 0$. Stąd wynika, że \hat{q} jest nieujemny.

Z powyższej nierówności wynika również, że $\hat{q}^{(1)}(v^{(1)}) = 0$, $v^{(1)} = 0$ (gdyż $\hat{q}^{(1)}$ jest dodatni). Ponadto wiemy, że $v_1 = 0$. Zatem wektor v jest zerowy. Ponieważ $v = 0$, więc $w = \frac{w_1}{h_1} \cdot \mathbf{h}$.

Pokażemy, że $\frac{w_1}{h_1} \in \mathbb{Z}$. W tym celu przedstawmy $\frac{w_1}{h_1}$ w nieskracalnej postaci, tzn. $\frac{w_1}{h_1} = \frac{p}{m}$, gdzie $p, m \in \mathbb{Z}$, $\text{nwd}(p, m) = 1$ i $m \geq 1$. Zatem $w \cdot m = p \cdot \mathbf{h}$ oraz wszystkie współczynniki wektora \mathbf{h} są podzielne przez $m \geq 1$. Istnieje więc wektor $\mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^{n+1}$ taki, że $\mathbf{h} = m \cdot \mathbf{h}'$. Wówczas $0 = \hat{q}(\mathbf{h}) = \hat{q}(m \cdot \mathbf{h}') = m^2 \hat{q}(\mathbf{h}')$ oraz $\|\mathbf{h}\| = m \cdot \|\mathbf{h}'\|$. Stąd wynika, że $m = 1$, $\frac{w_1}{h_1} = p \in \mathbb{Z}$, gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy sprzeczność z minimalnością normy $\|\mathbf{h}\|$. Zatem $w = \frac{w_1}{h_1} \cdot \mathbf{h} = p \cdot \mathbf{h}$ oraz $\text{Ker } \hat{q} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

(b1) \iff (b2) Z punktu (b) wynika, że funkcjonal \hat{q}_I jest nieujemny oraz $b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_n) = 0$. Na podstawie [56, Proposition 2.8(b)], $\text{Ker } \hat{q} = \text{Ker } Dq \subseteq \mathbb{Z}^I$, gdzie $Dq = (\frac{\partial \hat{q}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_n}, \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_*}) : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$ jest gradientem homomorfizmu grup. Ponadto z równości $2b_{\hat{q}}(x, e_j) = \frac{\partial \hat{q}(x)}{\partial x_j}$ zastosowanej dla $x = \mathbf{h}$, $j = 1, \dots, n, n+1 = *$ oraz z faktu, że $b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_n) = 0$ otrzymujemy: $\frac{\partial \hat{q}(\mathbf{h})}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial \hat{q}(\mathbf{h})}{\partial x_n} = 0$ oraz $\frac{\partial \hat{q}(\mathbf{h})}{\partial x_*} = 2b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_*) = \mathbf{h} \cdot 2G_{\hat{q}} \cdot e_*^{tr} = 2h_* - (h_1 + \dots + h_n)$. Ponieważ $\mathbf{h} \in \text{Ker } \hat{q}_I$, więc $Dq(\mathbf{h}) = 0$ oraz $2h_* = (h_1 + \dots + h_n)$. Stąd wynika (b1) \iff (b2).

(b1) \iff (b3) Z równości

$$0 = \hat{q}(\mathbf{h}) = b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = h_1 b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_1) + \dots + h_n b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_n) + h_* b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_*)$$

oraz z faktu, że $b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_n) = 0$ wynika równość $0 = \hat{q}_I(\mathbf{h}) = h_* \cdot b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_*)$. Zatem $b_{\hat{q}}(\mathbf{h}, e_*) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h_* \neq 0$.

(b1) \iff (b4) Z założenia wiemy, że \hat{q} nie jest dodatni, zaś niepikowe obcięcia $\hat{q}^{(1)}, \dots, \hat{q}^{(n)}$ funkcjonału \hat{q} są dodatnie. Jeśli $h_* = 0$ i $0 \neq \mathbf{h}^- = \mathbf{h}^{(*)}$, to $0 = \hat{q}(\mathbf{h}) = \hat{q}^{(*)}(\mathbf{h}^-)$. Zatem $\hat{q}^{(*)}$ nie jest dodatni i \hat{q} nie jest P -krytyczny.

Założmy teraz, że $h_* \neq 0$. Aby \hat{q} był P -krytyczny trzeba pokazać, że $\hat{q}^{(*)}$ jest dodatni. Ponieważ \hat{q} jest nieujemny, więc $\hat{q}^{(*)}$ jest nieujemny. Aby udowodnić, że $\hat{q}^{(*)}$ jest dodatni należy pokazać, że $\text{Ker } \hat{q}^{(*)} = 0$. Jeśli $v = (v_1, \dots, v_n) \in \text{Ker } \hat{q}^{(*)}$, to wektor $(v_1, \dots, v_n, 0)$ należy do $\text{Ker } \hat{q} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Zatem $(v_1, \dots, v_n, 0) = \lambda \cdot \mathbf{h}$, dla pewnego $\lambda \in \mathbb{Z}$. Stąd wynika, że $0 = \lambda \cdot h_*$, gdzie $h_* \neq 0$. Zatem $\lambda = 0$, $v = 0$ oraz $\hat{q}^{(*)}$ jest dodatni i \hat{q} jest P -krytyczny, co kończy dowód (b1) \iff (b4).

(c) Z (b) wynikają następujące równoważności: (c1) \iff (c2) \iff (c3). Udowodnimy najpierw implikację (c4) \implies (c1). Ponieważ \hat{q} jest nieujemny, $\mathbf{h}^- \neq 0$ jest wektorem takim, że $\hat{q}^{(*)}(\mathbf{h}^-) = 0$, więc $\hat{q}^{(*)}$ nie jest dodatni, toteż nie jest P -krytyczny.

(c2) \implies (c4) Załóżmy, że $h_* = 0$. Z punktu (b) wynika, że \mathbf{h}^- jest wiernym wektorem, \hat{q} jest nieujemny oraz $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Stąd $q_T = \hat{q}^{(*)}$ jest nieujemny oraz $q_T(\mathbf{h}^-) = \hat{q}(\mathbf{h}) = 0$. Zatem $q_T = \hat{q}^{(*)}$ nie jest dodatni. Z punktu (a) wynika, że obcięcia $q_T^{(1)}, \dots, q_T^{(n)}$ funkcjonału q_T są dodatnie. Zatem q_T jest P -krytyczny. Ponieważ $q_T(\mathbf{h}^-) = 0$, pozostaje więc pokazać, że $\text{Ker } q_T \subseteq \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$. Jeśli $v = (v_1, \dots, v_n) \in \text{Ker } q_T = \text{Ker } \hat{q}^{(*)}$, to wektor $\hat{v} = (v_1, \dots, v_n, 0)$ należy do $\text{Ker } \hat{q} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Stąd wynika, że $\hat{v} = \lambda \cdot \mathbf{h}$, dla pewnego $\lambda \in \mathbb{Z}$. Zatem $v = \lambda \cdot \mathbf{h}^- \in \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$, co kończy dowód. \square

Definicja 3.2.2. Niech $I = \{1, \dots, n, n+1\}$ będzie posetem jednopikowym. **Typem Coxetera-Dynkina** dodatniego posetu jednopikowego I nazywamy diagram Dynkina $\Delta_I \in \{\mathbb{A}_{n+1}, \mathbb{D}_{n+1}, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ (przedstawiony w tabeli 1.4.8) taki, że

$$G_{\Delta_I} \sim_{\mathbb{Z}} \hat{G}_I,$$

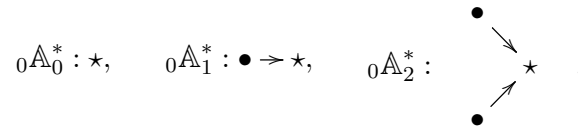
tzn. istnieje macierz $B \in \text{Gl}(n+1, \mathbb{Z})$ taka, że $G_{\Delta_I} = B \cdot \hat{G}_I \cdot B^{tr}$, gdzie $\hat{G}_I = \frac{1}{2} \cdot [\hat{C}_I + \hat{C}_I^{tr}]$.

W pracy [20] pokazano, że dla dowolnego dodatniego posetu jednopikowego I istnieje typ Coxetera-Dynkina.

Przedstawiamy teraz twierdzenia, które wraz z dowodami można znaleźć w artykule [21]. Wykorzystamy je w dowodzie twierdzenia 3.2.6 ograniczającego liczbę elementów prawie TP -krytycznego posetu jednopikowego.

Twierdzenie 3.2.3. *Niech $I = \{1, \dots, n, n+1 = *\}$ będzie skończonym dodatnim posetem jednopikowym, zaś \hat{q}_I funkcjonałem Titsa posetu I posiadającym wierny pierwiastek. Ponadto niech Δ_I będzie typem Coxetera-Dynkina posetu I .*

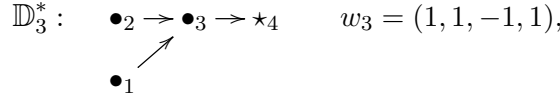
- (a) $|I| \leq 8$.
(b) Jeśli $\Delta_I = \mathbb{A}_{n+1}$, to $|I| = n + 1 \leq 3$ oraz I jest jednym z następujących posetów:



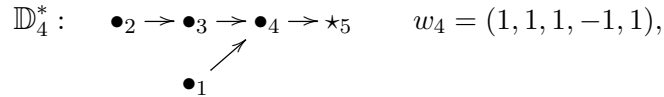
Ponadto z dokładnością do mnożenia przez -1 wektory ${}_0w_0 = (1)$, ${}_0w_1 = (1, 1)$, ${}_0w_2 = (1, 1, 1)$ są odpowiednio jedynymi wiernymi pierwiastkami funkcjonału Titsa posetów ${}_0\mathbb{A}_0^*$, ${}_0\mathbb{A}_1^*$, ${}_0\mathbb{A}_2^*$.

(c) Jeśli $\Delta_I = \mathbb{D}_{n+1}$, to $|I| = n + 1 \leq 5$ oraz I jest jednym z posetów przedstawionych w (c1)-(c8). Podajemy również wiernie pierwiastki funkcjonałów Titsa prezentowanych posetów (z dokładnością do mnożenia przez -1):

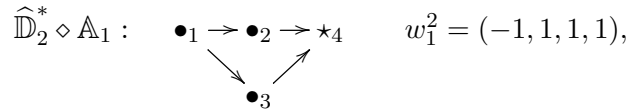
(c1)



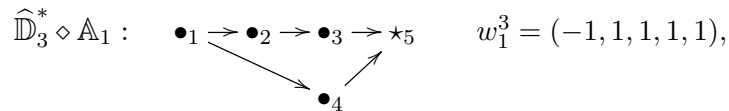
(c2)



(c3)



(c4)



(c5)

$$\begin{array}{ccc}
& \bullet_1 & \\
& \searrow & \\
{}_0\mathbb{D}_2^* \diamond \mathbb{A}_1 : & \bullet_2 \rightarrow \star_4 & {}_0w_1^2 = (1, 1, 1, 1), \\
& \nearrow & \\
& \bullet_3 & \\
& & {}_0\bar{w}_1^2 = (1, 1, 1, 2),
\end{array}$$

(c6)

$$\begin{array}{ccc}
& \bullet_1 & \\
& \searrow & \\
{}_0\mathbb{D}_2^* \diamond \mathbb{A}_2 : & \bullet_2 \rightarrow \star_5 & {}_0w_2^2 = (1, 1, 1, 1, 2), \\
& \nearrow & \\
\bullet_3 \longrightarrow \bullet_4 & &
\end{array}$$

(c7)

$$\begin{array}{ccc}
{}_1\mathbb{D}_3^* \diamond \mathbb{A}_1 : & \bullet_1 \rightarrow \bullet_3 \rightarrow \star_5 & {}_1w_1^3 = (1, 1, -1, 1, 1), \\
& \nearrow \quad \nearrow & \\
& \bullet_2 \quad \bullet_4 &
\end{array}$$

(c7)

$$\begin{array}{ccc}
{}_0\mathbb{D}_3^* \diamond \mathbb{A}_1 : & \bullet_1 \rightarrow \bullet_2 \rightarrow \star_5 & {}_0w_1^3 = (-1, 1, 1, 1, 1). \\
& \searrow \quad \nearrow & \\
& \bullet_3 \quad \bullet_4 &
\end{array}$$

(d) Jeśli $\Delta_I = \mathbb{E}_6$, to I jest jednym z posetów $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_8, \mathbb{P}_{10}, \dots, \mathbb{P}_{13}$ przedstawionych w [21, Table 1.8]. Jeśli $\Delta_I \in \{\mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, to I jest jednym z 154 posetów $\mathbb{P}_{17}, \dots, \mathbb{P}_{193}$ przedstawionych w tabelach 6.2-6.3 w pracy [20] razem z wyróżnionym symbolem \mathfrak{S}_I , gdzie $\mathfrak{s}_I \geq 1$ jest liczbą wiernych pierwiastków funkcjonału Titsa \hat{q}_I posetu I .

(e) Liczba dodatnich posetów jednopikowych I , dla których funkcjonal \hat{q}_I ma wierny pierwiastek, jest równa 177.

(f) Załóżmy, że $v = (v_1, \dots, v_n, v_*) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ jest pierwiastkiem funkcjonału Titsa \hat{q}_I dodatniego posetu jednopikowego I takim, że $\hat{q}_I(v) = 1$ oraz $v_* \neq 0$. Wtedy

$$\max\{|v_1|, \dots, |v_n|, |v_*|\} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \Delta_I = \mathbb{A}_{n+1}, n \geq 0, \\ 2 & \text{jeśli } \Delta_I = \mathbb{D}_{n+1}, n \geq 3, \\ 3 & \text{jeśli } \Delta_I = \mathbb{E}_6, \\ 4 & \text{jeśli } \Delta_I = \mathbb{E}_7, \\ 5 & \text{jeśli } \Delta_I = \mathbb{E}_8. \end{cases}$$

Dowód. Dowód można znaleźć w pracy [21, Theorem 1.7]. □

Wniosek 3.2.4. Jeśli $m \geq 3$ oraz $q : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnim jednolitym funkcjonalem kwadratowym posiadającym wierny pierwiastek, to istnieje wierny pierwiastek $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{Z}^m$ funkcjonału q oraz $j \in \{1, \dots, m\}$ takie, że

- $v_j \in \{-1, 1\}$ i $\frac{\partial q}{\partial x_j}(v) = v_j$, oraz

- wektor $v^{(j)} = (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m) \in \mathbb{Z}^{m-1}$ jest wiernym pierwiastkiem funkcjonu $q^{(j)} : \mathbb{Z}^{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ będącego j -tym obciążeniem funkcjonu kwadratowego q .

Dowód. Dowód można znaleźć w pracy [21, Corollary 3.2]. \square

Twierdzenie 3.2.5. *Nie istnieje poset jednopikowy $I = \{1, \dots, n, * = n + 1\}$ spełniający następujące trzy warunki:*

- (i) funkcjonal Titsa $\hat{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu I jest dodatni,
- (ii) $|I| \geq 9$, oraz
- (iii) istnieje prawie wierny pierwiastek funkcjonu Titsa \hat{q}_I posetu I , tzn. wektor $u = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) \in \mathbb{Z}^I$ taki, że $u_1 \neq 0, \dots, u_n \neq 0$ oraz $\hat{q}_I(u) = 1$.

Dowód. Dowód można znaleźć w pracy [21, Proposition 3.3]. Wykorzystano w nim istotnie ideę dowodu [30, Corollary 4.7] \square

Przedstawimy teraz twierdzenie ograniczające liczbę elementów jednopikowego posetu prawie TP -krytycznego. Korzystamy z niego przy wyliczaniu wszystkich posetów jednopikowych, które są prawie TP -krytyczne (algorytm 4.2.1). Twierdzenie to wraz z dowodem zostało zamieszczone w artykule [47, Theorem 3.5].

Twierdzenie 3.2.6. *Jeśli I jest posetem jednopikowym, który jest prawie TP -krytyczny (tzn. funkcjonal Titsa posetu I jest prawie P -krytyczny), to $5 \leq |I| \leq 9$.*

Dowód. Nierówność $5 \leq |I|$ wynika z twierdzenia 3.2.1 (a). Aby udowodnić nierówność $|I| \leq 9$ założmy przez sprzeczność, że I jest posetem jednopikowym takim, że $|I| = n + 1 \geq 10$ oraz funkcjonal Titsa $\hat{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu I jest prawie P -krytyczny. Wtedy \hat{q}_I nie jest dodatni oraz istnieje niezerowy wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_*) \in \mathbb{Z}^I = \mathbb{Z}^{n+1}$ taki, że $\hat{q}_I(\mathbf{h}) \leq 0$ i norma $\|\mathbf{h}\|$ wektora \mathbf{h} jest minimalna. Z twierdzenia 3.2.1 wynika, że \hat{q}_I jest nieujemny, $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_*)$ jest wektorem takim, że $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$.

Rozważmy następujące dwa przypadki:

1° $h_* \neq 0$ oraz funkcjonal Titsa \hat{q}_I posetu I jest P -krytyczny, lub

2° $h_* = 0$, funkcjonal Titsa \hat{q}_I posetu I nie jest P -krytyczny, funkcjonal incydencji $q_T = q_I^{(*)} : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu $T = I \setminus \{*\}$ jest P -krytyczny oraz $\text{Ker } q_T = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$, gdzie $\mathbf{h}^- := (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^T = \mathbb{Z}^n$ jest wiernym wektorem (tzn. $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$).

Przypadek 1° Załóżmy najpierw, że $h_* \in \{-1, 1\}$. Wtedy na podstawie lematu 2.2.4 (a), wektor $\mathbf{h}' = \mathbf{h} - h_* \cdot e_* = (h_1, \dots, h_n, 0)$ jest pierwiastkiem funkcjonu Titsa \hat{q}_I posetu I , zaś wektor $\mathbf{h}^- := (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^T = \mathbb{Z}^n$ jest wiernym pierwiastkiem dodatniego funkcjonu $q_T = \hat{q}_I^{(*)} : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z}$. Na mocy wniosku 3.2.4, istnieje wierny pierwiastek $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ funkcjonu q_T taki, że $v_j \in \{-1, 1\}$, dla pewnego $j \leq n$. Wtedy wektor $v^{(j)} = (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ jest wiernym pierwiastkiem j -tego obciążenia $q_T^{(j)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonu q_T .

Niech v będzie wektorem postaci $\hat{v}^{(j)} = (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, 0) \in \mathbb{Z}^n$. Wtedy $\hat{q}_I^{(j)}(\hat{v}^{(j)}) = q_T^{(j)}(v^{(j)}) = 1$, tzn. $\hat{v}^{(j)}$ jest pierwiastkiem (prawie wiernym) dodatniego funkcjonu Titsa $\hat{q}_{I'}^{(j)} = \hat{q}_{I'}$ posetu jednopikowego $I' = I \setminus \{j\}$ o mocy $|I'| = n \geq 9$. Na mocy twierdzenia 3.2.5, nie istnieje taki poset I' . Otrzymujemy więc sprzeczność.

Założmy teraz, że $|h_*| \geq 2$. Z wniosku 3.2.7 wynika, że istnieje $j \leq n$ taki, że $h_j \in \{-1, 1\}$. Wtedy wektor $\mathbf{h}' = \mathbf{h} - h_j \cdot e_j = (h_1, \dots, h_{j-1}, 0, h_{j+1}, \dots, h_*)$ jest pierwiastkiem funkcjonu \hat{q}_I

(dowód jak w lemacie 2.2.4 (a)) oraz $\mathbf{h}^{(j)} = (h_1, \dots, h_{j-1}, h_{j+1}, \dots, h_*) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ jest wiernym pierwiastkiem dodatniego funkcjonału $\widehat{q}_I^{(j)}$. Z twierdzenia 3.2.3 wynika, że $n \leq 8$. Zatem $|I| = n + 1 \leq 9$ i otrzymujemy sprzeczność z $|I| \geq 10$.

Przypadek 2° Ponieważ q_T jest P -krytyczny oraz $\text{Ker } q_T = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$, gdzie $\mathbf{h}^- := (h_1, \dots, h_n)$ jest wiernym wektorem, więc z wniosku 3.2.7 wynika, że istnieje $j \leq n$ takie, że $h_j \in \{-1, 1\}$. Wówczas wektor postaci $\mathbf{h}' = \mathbf{h} - h_j \cdot e_j$, tzn. $\mathbf{h}' = (h_1, \dots, h_{j-1}, 0, h_{j+1}, \dots, h_n, 0)$ jest pierwiastkiem \widehat{q}_I (zobacz rozdział 2). Stąd wynika, że $\mathbf{h}^{(j)} := (h_1, \dots, h_{j-1}, h_{j+1}, \dots, h_n, 0) \in \mathbb{Z}^n$, gdzie $h_1 \neq 0, \dots, h_{j-1} \neq 0, h_{j+1} \neq 0, \dots, h_n \neq 0$, jest prawie wiernym pierwiastkiem dodatniego funkcjonału Titsa $\widehat{q}_I^{(j)}$ posetu $I' = I \setminus \{j\} = n \geq 9$. Z twierdzenia 3.2.5 wynika, że nie istnieje taki poset I' , co kończy dowód. \square

Wniosek 3.2.7. Niech $I = T \cup \{*\} = \{1, \dots, n, n+1 = *\}$ będzie posetem jednopikowym z elementem maksymalnym $*$, zaś $\widehat{q}_I : \mathbb{Z}^I = \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcjonałem Titsa posetu I .

(a) Poset I jest TP -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $5 \leq |I| \leq 9$, \widehat{q}_I jest nieujemny oraz $\text{Ker } \widehat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_*)$ jest wiernym wektorem.

(b) Poset I jest prawie TP -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $5 \leq |I| \leq 9$, \widehat{q}_I jest nieujemny oraz $\text{Ker } \widehat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_*)$ jest wektorem takim, że $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$. W tym wypadku $h_1, \dots, h_n, h_* \in [-6, 6]$ oraz istnieje $j \in I$ takie, że $h_j \in \{-1, 1\}$.

(c) Prawie TP -krytyczny poset I jest TP -wyjątkowy wtedy i tylko wtedy, gdy $5 \leq |I| \leq 9$, funkcjonal Titsa \widehat{q}_I posetu I oraz funkcjonal incydencji $q_T = \widehat{q}_I^{(*)}$ posetu T są nieujemne, $\text{Ker } \widehat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ i $\text{Ker } q_T = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$, gdzie $\mathbf{h}^- = (h_1, \dots, h_n)$ jest wiernym nil-wektorem, zaś $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^-, 0) = (h_1, \dots, h_n, 0)$ jest prawie wiernym wektorem.

Dowód. Aby udowodnić (a)-(c) założmy, że funkcjonal Titsa \widehat{q}_I posetu I jest prawie P -krytyczny. Zatem \widehat{q}_I nie jest dodatni oraz istnieje niezerowy wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^I$ taki, że $\widehat{q}_I(\mathbf{h}) \leq 0$ i norma $\|\mathbf{h}\|$ jest minimalna. Wtedy (a), (b), (c) wynikają z twierdzenia 3.2.1 oraz z twierdzenia 3.2.6. W dowodzie punktu (b) fakt, że $h_1, \dots, h_n, h_* \in [-6, 6]$ oraz istnienie $j \in I$ takiego, że $h_j \in \{-1, 1\}$, wynikają z pracy [56]. \square

Twierdzenie 3.2.8. Niech I będzie skończonym posetem jednopikowym, zaś $T = I \setminus \{*\} = \{1, \dots, n\}$. Ponadto niech $\widehat{q}_I : \mathbb{Z}^I = \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcjonałem Titsa posetu I , zaś $q_T = \widehat{q}_I^{(*)} : \mathbb{Z}^T = \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcjonałem incydencji posetu T . Następujących pięć warunków jest równoważnych.

(a) Poset I jest TP -wyjątkowy, tzn. \widehat{q}_I jest prawie P -krytyczny, ale nie jest P -krytyczny.

(b) Funkcjonał incydencji $q_T = \widehat{q}_I^{(*)} : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu T jest P -krytyczny oraz funkcjonal Titsa \widehat{q}_I posetu I jest prawie P -krytyczny.

(c) Funkcjonał q_T jest P -krytyczny oraz niepikowe obciążenia $\widehat{q}_I^{(1)}, \dots, \widehat{q}_I^{(n)} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonału \widehat{q}_I są dodatnie.

(d) $5 \leq |I| \leq 9$ oraz funkcjonały $\widehat{q}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ i $q_T = \widehat{q}_I^{(*)} : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z}$ są nieujemne, $\text{Ker } q_T = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$ i $\text{Ker } \widehat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h}^- = (h_1, \dots, h_n)$ jest wiernym nil-wektorem, zaś $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^-, 0) = (h_1, \dots, h_n, 0)$.

(e) I jest izomorficzny z jednym z posetów TP -wyjątkowych $\mathbb{L}_{116}, \dots, \mathbb{L}_{132}$ przedstawionych w tabeli 3.3.2.

Dowód. Aby pokazać, że z punktu (a) wynikają (b) i (c), założmy, że \hat{q}_I jest prawie P -krytyczny, ale nie jest P -krytyczny. Ponieważ \hat{q}_I jest prawie P -krytyczny, więc można stosować twierdzenie 3.2.1.

(a) \implies (b) Ponieważ \hat{q}_I nie jest P -krytyczny, więc na mocy twierdzenia 3.2.1 (c) funkcjonal incydencji $q_T = \hat{q}_I^{(*)}$ posetu T jest P -krytyczny.

(a) \implies (c) Ponieważ \hat{q}_I jest prawie P -krytyczny, więc niepikowe obciążenia $\hat{q}_I^{(1)}, \dots, \hat{q}_I^{(n)}$ funkcjonału \hat{q}_I są dodatnie. Ponadto \hat{q}_I nie jest P -krytyczny, więc na podstawie twierdzenia 3.2.1 (c) funkcjonal incydencji $q_T = \hat{q}_I^{(*)}$ posetu T jest P -krytyczny.

(b) \implies (a) Ponieważ $q_T = \hat{q}_I$ jest P -krytyczny, więc nie jest dodatni. Stąd wynika, że funkcjonal \hat{q}_I nie jest P -krytyczny.

(c) \implies (a) Funkcjonały $\hat{q}_I^{(1)}, \dots, \hat{q}_I^{(n)}$ są dodatnie. Ponadto $q_T = \hat{q}_I^{(*)}$ nie jest dodatni, bo jest P -krytyczny. Stąd wynika, że \hat{q}_I jest prawie P -krytyczny. Z faktu, że $\hat{q}_I^{(*)}$ jest P -krytyczny wynika, że $\hat{q}_I^{(*)}$ nie jest dodatni. Zatem \hat{q}_I nie jest P -krytyczny, co kończy dowód (a).

Równoważność (a) \iff (d) wynika z wniosku 3.2.7 (c).

Implikacja (e) \implies (d) wynika z obliczeń komputerowych wykonanych dla każdego z posetów $\mathbb{L}_{116}, \dots, \mathbb{L}_{132}$ (opisanych w rozdziale 3.3) oraz sprawdzenia, że każdy z tych posetów spełnia własności opisane w (d).

(a) \implies (e) Załóżmy, że I jest jednopikowym posetem, który jest TP -wyjątkowy. Z równoważności (a) \iff (d) wynika, że $5 \leq |I| = n + 1 \leq 9$. Stosując algorytm opisany w rozdziale 4.2 (algorytm 4.2.1) dla $4 \leq n \leq 8$ znajdujemy posety I , dla których \hat{q}_I jest nieujemny, $q_T = \hat{q}_I^{(*)}$ nie jest dodatni oraz $\text{Ker } \hat{q}_I$ jest generowane przez jeden wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, 0)$ taki, że $\mathbf{h}^- = (h_1, \dots, h_n)$ jest wiernym nil-wektorem. Otrzymujemy wówczas posety $\mathbb{L}_{116}, \dots, \mathbb{L}_{132}$ przedstawione w rozdziale 3.3. \square

Twierdzenie 3.2.9. Niech $I = \{1, \dots, n, n + 1 = *\}$ będzie skończonym posetem jednopikowym o elemencie maksymalnym $*$, zaś $\hat{q}_I : \mathbb{Z}^I = \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonałem Titsa posetu I . Następujące warunki są równoważne.

(a) Poset I jest prawie TP -krytyczny.

(b) $5 \leq |I| \leq 9$, funkcjonal Titsa \hat{q}_I posetu I jest nieujemny oraz istnieje wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_*) \in \mathbb{Z}^I = \mathbb{Z}^{n+1}$, $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$ taki, że $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

(c) Zbiór $\mathcal{R}_{\hat{q}_I} := \{v \in \mathbb{Z}^{n+1}; \hat{q}_I(v) = 1\}$ pierwiastków funkcjonału \hat{q}_I jest nieskończony, zaś zbiory $\mathcal{R}_{\hat{q}_I^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{\hat{q}_I^{(n)}}$ są skończone.

(d) Albo I jest TP -krytyczny, albo I jest izomorficzny z jednym z 17-tu TP -wyjątkowych posetów $\mathbb{L}_{116}, \dots, \mathbb{L}_{132}$ przedstawionych w tabeli 3.3.2 w rozdziale 3.3.

(e) Poset I jest izomorficzny z jednym z posetów $\mathbb{L}_1, \dots, \mathbb{L}_{132}$ przedstawionych w tabelach 3.3.1-3.3.2 w rozdziale 3.3.

(f) Poset I lub jego odbicie dualne \tilde{I} (patrz definicja 3.4.2, a także [21, 59]) jest izomorficzny z jednym z posetów $C_i^* = C_i \cup \{*\}$, gdzie $i \in \{1, \dots, 75\}$ oraz C_i jest jednym z posetów przedstawionych przez Bondarenko-Stepochkinę w pracy [10].

Dowód. Dowód równoważności (a) \iff (b) \iff (d) wynika z twierdzenia 3.2.8 oraz z wniosku 3.2.7(b). Na podstawie wniosku 2.1.5 zbiór $\mathcal{R}_{\hat{q}_I}$ jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy \hat{q}_I nie jest dodatni, zaś $\mathcal{R}_{\hat{q}_I^{(j)}}$ dla $1 \leq j \leq n$ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{q}_I^{(j)}$ jest dodatni, co kończy dowód (a) \iff (c).

Implikacja (e) \implies (b) jest konsekwencją obliczeń komputerowych opisanych w rozdziale 4.2 i wykonanych dla każdego z posetów $\mathbb{L}_1, \dots, \mathbb{L}_{132}$. Każdy ze wspomnianych posetów I spełnia własności opisane w (b). Dla każdego I , wektor $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^I$ taki, że $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ został przedstawiony w tabelach 3.3.1–3.3.2.

(a) \implies (e) Załóżmy, że I jest jednopikowym posetem prawie TP -krytycznym. Z równoważności (a) \iff (b) wynika, że $5 \leq |I| \leq 9$. Przy pomocy implementacji algorytmu PRAWIETPKRYTYCZNEPOSETYJEDNOPIKOWE opisanego w rozdziale 4.2 znajdujemy wszystkie posety jednopikowe I takie, że \hat{q}_I jest nieujemny, nie jest dodatni oraz $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_*)$ jest wektorem takim, że $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$.

Dowód (e) \iff (f) wynika z porównania listy posetów przedstawionych w tabelach 3.3.1–3.3.2 z listą posetów $C_i^* = C_i \cup \{*\}$ dla $i = 1, \dots, 75$, gdzie C_i jest posetem przedstawionym w pracy [10, str. 38–39].

□

3.3. Lista prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych

W rozdziale tym podajemy pełną listę posetów jednopikowych prawie TP -krytycznych, na którą składają się posety TP -krytyczne $\mathbb{L}_1, \dots, \mathbb{L}_{115}$ oraz 17 posetów TP -wyjątkowych $\mathbb{L}_{116}, \dots, \mathbb{L}_{132}$. Lista ta została uzyskana przy pomocy obliczeń komputerowych m.in. przez wykonanie algorytmu 4.2.1. Przy wyliczaniu prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych I korzystamy z twierdzenia 3.2.6 dającego ograniczenie na liczbę elementów posetu I , tzn $5 \leq |I| \leq 9$. Przedstawimy teraz idę obliczeń:

1° Dla $4 \leq n = |I| - 1 \leq 8$ znajdujemy wszystkie macierze Titsa $\hat{C}_I = \left[\begin{array}{c|c} C_T^{tr} & -u \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ posetu I takie, że:

- macierz incydencji $C_T = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ posetu $T = I \setminus \{*\}$ jest macierzą taką, że $c_{ij} \in \{0, 1\}$ dla dowolnego $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $c_{11} = \dots = c_{nn} = 1$ oraz jeśli $c_{kl} = 1$ i $c_{ls} = 1$, to $c_{ks} = 1$ dla $1 \leq k < l < s \leq n$;
- poset I nie jest dodatni (tzn. $\hat{C}_I + \hat{C}_I^{tr}$ nie jest dodatnio określona);
- dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ poset $I \setminus \{i\}$ jest dodatni.

Są to macierze Titsa prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych. Zapisujemy je na liście PrawieKryt $_{n+1}$. Jeśli dodatkowo poset $T = I \setminus \{n+1\}$ jest dodatni, to dodajemy macierz \hat{C}_I również do listy Kryt $_{n+1}$ posetów TP -krytycznych.

2° Dla każdego prawie TP -krytycznego posetu I z listy PrawieKryt $_{n+1}$ obliczamy, przy pomocy implementacji algorytmu 4.2.3, zredukowaną liczbę Coxetera \check{c}_I oraz defekt $\hat{\partial}_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ ([60], zobacz rozdział 3.5). Ponadto znajdujemy wektor $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ taki, że $\mathbf{h} \cdot [\hat{C}_I + \hat{C}_I^{tr}] = 0$. Ponieważ na mocy wniosku 3.2.7, prawie TP -krytyczne posety I są głównie więc istnieje \check{c}_I oraz $\hat{\partial}_I$. Ponadto $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ jest prawie wiernym wektorem. W przypadku posetów TP -wyjątkowych I (tzn. będących na liście PrawieKryt $_{n+1}$ oraz nie będących na liście Kryt $_{n+1}$) obliczmy również \check{c}_T oraz $\partial_T : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z}$ dla $T = I \setminus \{*\}$.

TABELA 3.3.1. JEDNOPIKOWE TP -KRYTYCZNE POSETY $\mathbb{L}_1, \dots, \mathbb{L}_{115}$

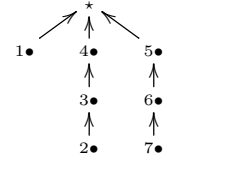
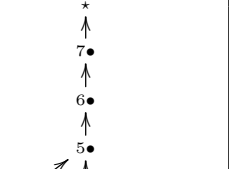
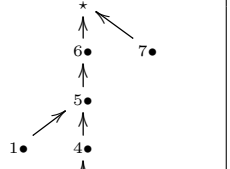
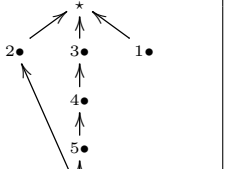
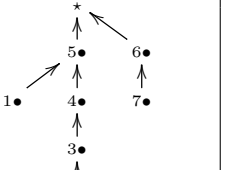
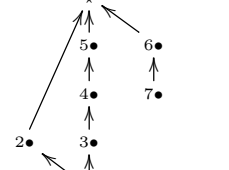
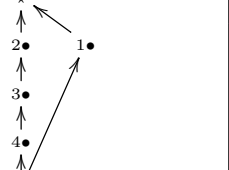
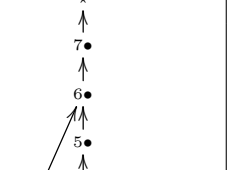
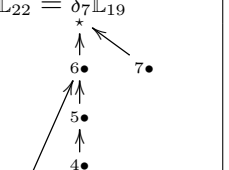
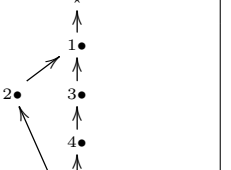
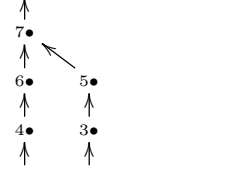
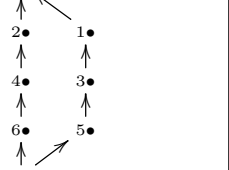
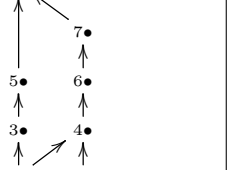
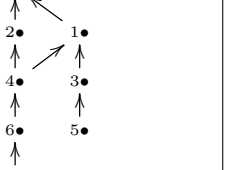
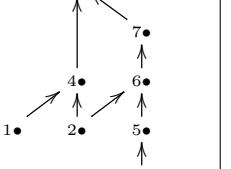
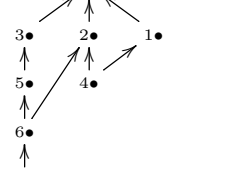
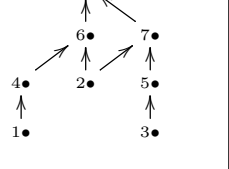
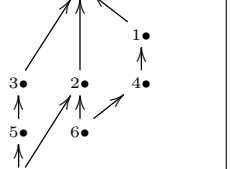
3.3.1a. TP -krytyczne posety $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3$ typu $\widetilde{\mathbb{D}}_4$, $\check{c}_I = 2$

$\mathbb{L}_1 = \widetilde{\mathbb{L}}_1 = \delta_4 \mathbb{L}_2$ $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 2)$ $\widehat{\partial}_I = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_*$	\mathbb{L}_2 $\mathbf{h} = (1, 1, 1, -1, 1)$ $\widehat{\partial}_I = x_4 + x_*$	$\mathbb{L}_3 = \widetilde{\mathbb{L}}_2$ $\mathbf{h} = (1, 1, 1, -1, 1)$ $\widehat{\partial}_I = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_*$	$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\check{G}_{\widetilde{\mathbb{D}}_4} = B_3 \cdot \widehat{C}_{\mathbb{L}_3} \cdot B_3^{tr}$
--	---	---	--

3.3.1b. TP -krytyczne posety $\mathbb{L}_4, \dots, \mathbb{L}_{11}$ typu $\widetilde{\mathbb{E}}_6$, $\check{c}_I = 6$

$\mathbb{L}_4 = \widetilde{\mathbb{L}}_4 = \delta_5 \mathbb{L}_5$ $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 3)$ $\widehat{\partial}_I = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 - 3x_*$	\mathbb{L}_5 $\mathbf{h} = (1, \hat{1}, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\widehat{\partial}_I = x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_*$	$\mathbb{L}_6 = \delta_6 \mathbb{L}_5$ $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\widehat{\partial}_I = x_1 + x_2 - x_5 + x_6 - 2x_*$	$\mathbb{L}_7 = \widetilde{\mathbb{L}}_6 = \delta_6 \mathbb{L}_8$ $\mathbf{h} = (1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2})$ $\widehat{\partial}_I = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - 2x_*$
$\mathbb{L}_8 = \widetilde{\mathbb{L}}_8$ $\mathbf{h} = (1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, \hat{1})$ $\widehat{\partial}_I = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_6 - x_*$	$\mathbb{L}_9 = \mathbb{L}_8^{\text{op}}$ $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\widehat{\partial}_I = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 - x_*$	\mathbb{L}_{10} $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\widehat{\partial}_I = x_4 + x_5 + x_6 + x_*$	$\mathbb{L}_{11} = \widetilde{\mathbb{L}}_{10}$ $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\widehat{\partial}_I = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 - x_*$

3.3.1c. TP -krytyczne posety $\mathbb{L}_{12}, \dots, \mathbb{L}_{29}$ typu $\tilde{\mathbb{E}}_7$, $\check{c}_I = 12$

$\mathbb{L}_{12} = \tilde{\mathbb{L}}_{12} =$ $\delta_5 \mathbb{L}_{13} = \delta_7 \mathbb{L}_{22}$  $\mathbf{h} = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 - 4x_*$	\mathbb{L}_{13}  $\mathbf{h} = (2, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 + x_*$	$\mathbb{L}_{14} = \delta_7 \mathbb{L}_{13}$  $\mathbf{h} = (2, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 1, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_2 - x_4 - 2x_5 - x_6 + x_7 - 2x_*$	$\mathbb{L}_{15} = \tilde{\mathbb{L}}_{14} =$ $\delta_1 \mathbb{L}_{21}$  $\mathbf{h} = (1, 2, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 3x_7 - 2x_*$	$\mathbb{L}_{16} = \delta_6 \mathbb{L}_{12}$  $\mathbf{h} = (2, 1, 1, 1, \hat{1}, 1, 1, 3)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + x_6 + 2x_7 - 3x_*$
$\mathbb{L}_{17} = \tilde{\mathbb{L}}_{16}$  $\mathbf{h} = (1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{3})$ $\hat{\partial}_I = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 - 3x_*$	$\mathbb{L}_{18} = \tilde{\mathbb{L}}_{13}$  $\mathbf{h} = (2, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_*$	$\mathbb{L}_{19} = \mathbb{L}_{19}^{\circ P}$  $\mathbf{h} = (1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 2x_1 + x_3 - x_5 - 2x_6 - x_7 - x_*$	$\mathbb{L}_{20} = \tilde{\mathbb{L}}_{20} =$ $\tilde{\mathbb{L}}_{22} = \delta_7 \mathbb{L}_{19}$  $\mathbf{h} = (1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{2})$ $\hat{\partial}_I = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 + x_7 - 2x_*$	$\mathbb{L}_{21} = \tilde{\mathbb{L}}_{19}$  $\mathbf{h} = (1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = x_1 - x_2 - x_4 - 2x_5 - 3x_6 - 2x_7 + x_*$
\mathbb{L}_{22}  $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \hat{2}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + x_2 - x_5 - x_6 - 2x_7 - 2x_*$	$\mathbb{L}_{23} = \tilde{\mathbb{L}}_{22}$  $\mathbf{h} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \hat{2}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 - 2x_*$	\mathbb{L}_{24}  $\mathbf{h} = (2, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 + x_7 - x_*$	$\mathbb{L}_{25} = \tilde{\mathbb{L}}_{24}$  $\mathbf{h} = (2, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 + x_*$	\mathbb{L}_{26}  $\mathbf{h} = (1, 2, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = x_2 + x_4 + x_5 + 2x_6 + x_7 + x_*$
$\mathbb{L}_{27} = \tilde{\mathbb{L}}_{26}$  $\mathbf{h} = (1, 2, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 2x_7 - x_*$	\mathbb{L}_{28}  $\mathbf{h} = (1, 2, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + x_3 - x_6 - x_7 - 2x_*$	$\mathbb{L}_{29} = \tilde{\mathbb{L}}_{28}$  $\mathbf{h} = (1, 2, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 3x_7 - 2x_*$	$B_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\check{C}_{\tilde{\mathbb{E}}_7} = B_{29} \cdot \hat{C}_{\mathbb{L}_{29}} \cdot B_{29}^{tr}$	

3.3.1d. TP-krytyczne posety L_{30}, \dots, L_{115} typu \tilde{E}_8 , $\check{c}_I = 30$

<p>$L_{30} = L_{30} = \delta L_{31} = \delta L_{48}$</p> <p>$\mathbf{h} = (3, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 6)$ $\hat{\partial}_I = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 - 6x_*$</p>	<p>L_{31}</p> <p>$\mathbf{h} = (3, 2, 2, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, 1)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 + x_*$</p>	<p>$L_{32} = \delta L_{31}$</p> <p>$\mathbf{h} = (3, 2, 2, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 - x_8 + 2x_*$</p>	<p>$L_{33} = L_{32}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, 2, 3, 2, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 - 2x_*$</p>	<p>$L_{34} = \delta L_{31}$</p> <p>$\mathbf{h} = (3, 2, 2, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, 1, 3)$ $\hat{\partial}_I = x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 - x_6 + x_7 + 2x_8 - 3x_*$</p>
<p>$L_{35} = L_{34}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, 1, \hat{3}, 2, 2, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 3)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 6x_6 + 5x_7 + 4x_8 - 3x_*$</p>	<p>$L_{36} = \delta L_{31}$</p> <p>$\mathbf{h} = (3, 2, 2, \hat{1}, \hat{1}, 1, 1, 4)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + 2x_2 - 2x_4 - x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 - 4x_*$</p>	<p>$L_{37} = L_{36}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, 1, \hat{3}, \hat{2}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 4)$ $\hat{\partial}_I = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 - 4x_*$</p>	<p>$L_{38} = \delta L_{31}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, 3, 2, 1, 2, 1, \hat{1}, 1, 5)$ $\hat{\partial}_I = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 - x_7 + x_8 - 5x_*$</p>	<p>$L_{39} = L_{38}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, \hat{2}, \hat{3}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{5})$ $\hat{\partial}_I = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 - 5x_*$</p>
<p>$L_{40} = L_{30}$</p> <p>$\mathbf{h} = (3, 2, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 3x_7 + 2x_8 - x_*$</p>	<p>$L_{41} = L_{40}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, \hat{2}, \hat{3}, \hat{2}, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 2x_1 - x_3 - 2x_4 - 4x_5 - 3x_6 - 2x_7 - x_8 - x_*$</p>	<p>$L_{42} = \delta L_{41}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, \hat{2}, \hat{3}, \hat{2}, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{2})$ $\hat{\partial}_I = 3x_1 + x_2 - x_4 - 3x_5 - 2x_6 - x_7 + x_8 - 2x_*$</p>	<p>$L_{43} = L_{41}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, \hat{2}, \hat{3}, \hat{2}, 1, 1, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 - 4x_6 - 3x_7 - 2x_8 + x_*$</p>	<p>$L_{44} = \delta L_{41}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, \hat{2}, \hat{3}, \hat{2}, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{3})$ $\hat{\partial}_I = 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 - x_6 + x_7 + 2x_8 - 3x_*$</p>
<p>$L_{45} = L_{44}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, 1, \hat{3}, \hat{2}, \hat{2}, 1, \hat{1}, \hat{1}, 3)$ $\hat{\partial}_I = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 + x_7 + 2x_8 - 3x_*$</p>	<p>$L_{46} = L_{46} = \delta L_{41}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, \hat{2}, \hat{3}, \hat{2}, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 4)$ $\hat{\partial}_I = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 - 4x_*$</p>	<p>$L_{47} = L_{42}$</p> <p>$\mathbf{h} = (1, \hat{1}, \hat{3}, \hat{2}, 2, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 - 2x_*$</p>	<p>L_{48}</p> <p>$\mathbf{h} = (2, 1, \hat{2}, 1, 1, 1, 1, \hat{3}, 3)$ $\hat{\partial}_I = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_6 - 2x_7 - 3x_8 - 3x_*$</p>	<p>$L_{49} = L_{48}$</p> <p>$\mathbf{h} = (2, 1, \hat{2}, 1, 1, 1, 1, \hat{3}, 3)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 5x_7 + 6x_8 - 3x_*$</p>

3.3.1d. (kontynuacja)

<p>$L_{50} = L_{43}^{op}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, 1, 3, \hat{2}, \hat{2}, 1, 1, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+3x_2+x_4-x_5-3x_6-2x_7-x_8-x_*$</p>	<p>$L_{51} = L_{51} = \delta L_{50}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, 1, \hat{3}, \hat{2}, \hat{2}, 1, 1, \hat{1}, \hat{2})$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+4x_2+x_3+2x_4-2x_6-x_7+x_8-2x_*$</p>	<p>$L_{52} = L_{50}$</p> <p>$\mathbf{h}^s=(1, 1, \hat{3}, \hat{2}, \hat{2}, 1, 1, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = x_1+2x_2-x_3-2x_5-4x_6-3x_7-2x_8+x_*$</p>	<p>L_{53}</p> <p>$\mathbf{h}=(3, 1, 2, 1, 1, 1, \hat{2}, \hat{2}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1-x_2+x_4+2x_5+3x_6+4x_7+2x_8+2x_*$</p>	<p>$L_{54} = \delta L_{53}$</p> <p>$\mathbf{h}=(2, 1, 3, 1, 1, 1, 1, \hat{2}, 4)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+3x_2+x_3+2x_4+x_5-x_7-2x_8-4x_*$</p>
<p>$L_{55} = L_{54}$</p> <p>$\mathbf{h}=(2, \hat{1}, \hat{3}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4})$ $\hat{\partial}_I = 6x_1+5x_2+3x_3+4x_4+3x_5+2x_6+x_7+2x_8-4x_*$</p>	<p>$L_{56} = L_{53}$</p> <p>$\mathbf{h}=(3, 1, \hat{3}, 1, 1, 1, \hat{2}, \hat{2}, 2)$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5+5x_6+6x_7+4x_8-2x_*$</p>	<p>$L_{57} = L_{56}^{op}$</p> <p>$\mathbf{h}=(2, \hat{1}, \hat{3}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{2})$ $\hat{\partial}_I = 4x_1+3x_2+x_3+2x_4+x_5-x_7-2x_8-2x_*$</p>	<p>$L_{58} = L_{58} = \delta L_{59}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 5)$ $\hat{\partial}_I = 4x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5+2x_6+3x_7+4x_8-5x_*$</p>	<p>L_{59}</p> <p>$\mathbf{h}=(1, 2, 2, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = x_2+2x_3+3x_4+4x_5+3x_6+2x_7+x_8+x_*$</p>
<p>$L_{60} = \delta L_{59}$</p> <p>$\mathbf{h}^s=(1, 2, \hat{2}, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1-x_3-2x_4-3x_5-2x_6-x_7+x_8-2x_*$</p>	<p>L_{61}</p> <p>$\mathbf{h}^s=(1, 2, 1, 1, 2, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1+2x_2+x_3+4x_4+3x_5+5x_6+4x_7+3x_8-2x_*$</p>	<p>$L_{62} = \delta L_{59}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, 2, 2, 1, \hat{1}, \hat{1}, 1, 1, 3)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+x_2-x_4-2x_5-x_6+x_7+2x_8-3x_*$</p>	<p>$L_{63} = L_{62}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, 1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{3})$ $\hat{\partial}_I = 4x_1+5x_2+3x_3+4x_4+x_5+2x_6+x_7+2x_8-3x_*$</p>	<p>$L_{64} = \delta L_{59}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, 2, 2, 1, \hat{1}, 1, 1, 1, 4)$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+2x_2+x_3-x_5+x_6+2x_7+3x_8-4x_*$</p>
<p>$L_{65} = L_{64}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{4})$ $\hat{\partial}_I = 5x_1+3x_2+4x_3+x_4+2x_5+x_6+2x_7+3x_8-4x_*$</p>	<p>$L_{66} = L_{59}$</p> <p>$\mathbf{h}^s=(1, 2, 2, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+4x_6+3x_7+2x_8-x_*$</p>	<p>$L_{67} = \delta L_{66}^{op}$</p> <p>$\mathbf{h}^s=(1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, 1, 1, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+x_3-2x_4-x_5-3x_6-2x_7-x_8-x_*$</p>	<p>$L_{68} = \delta L_{67}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, 1, 1, \hat{1}, \hat{2})$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+x_2+2x_3-x_4-2x_6-x_7+x_8-2x_*$</p>	<p>$L_{69} = L_{68}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, 1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, 1, \hat{1}, \hat{2})$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+4x_2+2x_3+3x_4+x_6-x_7+x_8-2x_*$</p>

3.3.1d. (kontynuacja)

<p>$L_{70} = \bar{L}_{70}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{3})$ $\hat{\partial}_I = 4x_1+2x_2+3x_3+x_5-x_6+x_7+2x_8-3x_*$</p>	<p>$L_{71} = \bar{L}_{67}$</p> <p>$\mathbf{h}^{\bullet}=(1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, 1, 1, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = x_1-x_2-3x_4-2x_5-4x_6-3x_7-2x_8+x_*$</p>	<p>$L_{72} = \bar{L}_{72} = L_{71}^{op}$</p> <p>$\mathbf{h}^{\bullet}=(1, 1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, 1, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+3x_2+x_3+2x_4-x_5-2x_7-x_8-x_*$</p>	<p>$L_{73} = L_{67}^{op}$</p> <p>$\mathbf{h}=(2, 1, 1, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{2}, 1)$ $\hat{\partial}_I = x_1+2x_3+x_4+x_5+2x_6+3x_7+2x_8+x_*$</p>	<p>$L_{74} = \bar{L}_{73}$</p> <p>$\mathbf{h}=(2, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+4x_2+3x_3+3x_4+2x_5+2x_6+x_7+2x_8-x_*$</p>
<p>$L_{75} = L_{59}^{op}$</p> <p>$\mathbf{h}=(2, 1, \hat{2}, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{2}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_2-x_3-x_5-2x_6-3x_7-2x_8-2x_*$</p>	<p>$L_{76} = \delta L_{73}$</p> <p>$\mathbf{h}=(2, 1, 1, 1, 1, 1, \hat{1}, 2, 4)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+3x_2+x_3+2x_4+x_5-x_7+2x_8-4x_*$</p>	<p>$L_{77} = L_{76} = \delta L_{80}$</p> <p>$\mathbf{h}=(2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, \hat{1}, 4)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+2x_5+3x_6+4x_7+5x_8-4x_*$</p>	<p>$L_{78} = L_{75}$</p> <p>$\mathbf{h}^{\bullet}=(2, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2})$ $\hat{\partial}_I = 4x_1+5x_2+3x_3+4x_4+2x_5+3x_6+2x_7+x_8-2x_*$</p>	<p>$L_{79} = L_{80}$</p> <p>$\mathbf{h}^{\bullet}=(2, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, \hat{2})$ $\hat{\partial}_I = 4x_1+3x_2+2x_3+2x_4+x_5+x_6-x_8-2x_*$</p>
<p>L_{80}</p> <p>$\mathbf{h}=(2, \hat{2}, \hat{1}, 1, 1, 1, 1, \hat{1}, 2)$ $\hat{\partial}_I = 2x_2+x_3-x_4-x_6-2x_7-3x_8+2x_*$</p>	<p>$L_{81} = \delta L_{82}$</p> <p>$\mathbf{h}=(2, 1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2})$ $\hat{\partial}_I = 4x_1+3x_2+2x_3+4x_4+3x_5+2x_6+x_7+x_8-2x_*$</p>	<p>L_{82}</p> <p>$\mathbf{h}^{\bullet}=(2, 1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+2x_5+x_6-x_8-x_*$</p>	<p>$L_{83} = L_{81} = \delta L_{84}$</p> <p>$\mathbf{h}=(1, \hat{1}, \hat{2}, 1, 2, 1, 1, 1, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1-x_2-2x_3-2x_4-x_6+x_8-2x_*$</p>	<p>L_{84}</p> <p>$\mathbf{h}^{\bullet}=(1, 1, 2, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = x_1+2x_2+3x_3+3x_4+x_5+2x_6+x_7+x_*$</p>
<p>$L_{85} = L_{84}$</p> <p>$\mathbf{h}^{\bullet}=(1, 1, 2, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+3x_2+4x_3+4x_4+2x_5+3x_6+2x_7+2x_8-x_*$</p>	<p>$L_{86} = L_{85}^{op}$</p> <p>$\mathbf{h}^{\bullet}=(2, 1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+x_2+2x_4+x_5-x_7-2x_8+x_*$</p>	<p>L_{87}</p> <p>$\mathbf{h}=(2, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{3}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{2})$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+x_2+x_3+2x_4+x_6-x_7+2x_*$</p>	<p>$L_{88} = L_{87}$</p> <p>$\mathbf{h}=(2, 3, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, 1, \hat{2}, 2)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+3x_2+x_3+4x_4+2x_5+3x_6+3x_7+4x_8-2x_*$</p>	<p>L_{89}</p> <p>$\mathbf{h}=(1, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3})$ $\hat{\partial}_I = x_1+x_2-x_5-x_6-2x_7-x_8+3x_*$</p>

$L_{90} = L_{89}$ $h=(2, 2, 1, 1, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, 3)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+2x_5+4x_6+3x_7+4x_8-3x_*$	L_{91} $h=(1, \hat{2}, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 3)$ $\hat{\partial}_I = x_1-2x_2-x_3+2x_6+x_7+2x_8-3x_*$	$L_{92} = L_{91}$ $h=(1, 1, 2, 1, 1, 1, \hat{2}, 1, 3)$ $\hat{\partial}_I = x_1+x_2+3x_3+2x_4+3x_5+4x_6+5x_7+2x_8-3x_*$	L_{93} $h^{\hat{8}}=(1, 2, \hat{1}, 2, \hat{1}, \hat{3}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = x_1+2x_2+3x_3+4x_4+2x_5+2x_6+x_7+x_*$	$L_{94} = L_{93}$ $h=(3, \hat{2}, 1, \hat{1}, \hat{2}, 1, 1, \hat{2}, 1)$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+3x_2+x_3+2x_4+2x_5+3x_6+4x_7+5x_8-x_*$
L_{95} $h^{\hat{1}}=(2, \hat{3}, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = x_1+2x_2+3x_4+x_5+2x_6+2x_7+x_8+x_*$	$L_{96} = L_{95}$ $h=(2, 3, \hat{1}, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+3x_2+x_3+4x_4+2x_5+3x_6+3x_7+2x_8-x_*$	L_{97} $h=(2, 2, \hat{2}, 1, 1, 1, \hat{3}, \hat{1}, \hat{1}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_3-x_4-2x_6-x_7-x_8-2x_*$	$L_{98} = L_{97}$ $h=(2, \hat{2}, 1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 2)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+2x_5+4x_6+3x_7+3x_8-2x_*$	L_{99} $h^{\hat{1}}=(1, 2, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5+3x_6+2x_7+x_8-x_*$
$L_{100} = L_{99}$ $h=(1, 2, 1, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = x_1+2x_2+x_3+x_5+2x_6+x_7+x_*$	L_{101} $h=(3, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1, \hat{2}, 2, 3)$ $\hat{\partial}_I = 2x_2-x_3+x_4-x_6-2x_7+x_8-3x_*$	$L_{102} = L_{101}$ $h=(2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, \hat{1}, 4)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+2x_5+3x_6+4x_7+5x_8-4x_*$	L_{103} $h=(1, \hat{2}, 1, \hat{1}, 1, 1, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = x_1+x_2+x_3+2x_5+3x_6+2x_7+x_8+x_*$	$L_{104} = L_{103}$ $h=(2, 2, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+2x_5+4x_6+3x_7+2x_8-x_*$
L_{105} $h^{\hat{1}}=(1, \hat{1}, 1, 2, 1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = x_3+2x_4+x_5+2x_6+2x_7+x_8+x_*$	$L_{106} = L_{105}$ $h^{\hat{8}}=(1, 1, 1, 2, 1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, 1)$ $\hat{\partial}_I = x_1+x_2+2x_3+3x_4+2x_5+3x_6+3x_7+2x_8-x_*$	L_{107} $h=(1, 1, \hat{1}, 2, 1, 1, \hat{1}, \hat{2}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1+x_2+2x_3+3x_4+2x_5+3x_6+3x_7+4x_8-2x_*$	$L_{108} = L_{107}$ $h=(1, 1, 1, 2, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{2}, 2)$ $\hat{\partial}_I = x_1+x_2-x_4-x_6-x_7-2x_8-2x_*$	L_{109} $h^{\hat{2}}=(3, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 4x_1+2x_2+3x_3+3x_4+2x_5+4x_6+x_7+2x_8-x_*$
$L_{110} = L_{109}$ $h=(3, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+x_2+2x_3+2x_4+x_5+3x_6+x_8+x_*$	L_{111} $h=(2, 1, \hat{1}, 1, 1, 1, \hat{3}, 2, 2)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1-x_2+x_3+x_5+2x_6+3x_7+2x_8$	$L_{112} = L_{111}$ $h=(2, 1, 1, 1, 1, 1, \hat{3}, 3)$ $\hat{\partial}_I = 2x_1+x_2+4x_3+2x_4+3x_5+4x_6+5x_7+6x_8-3x_*$	L_{113} $h^{\hat{2}}=(2, 1, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+2x_5+x_6-x_8-x_*$	$L_{114} = L_{113}$ $h=(3, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, 1)$ $\hat{\partial}_I = 3x_1+x_3+x_4+2x_5+3x_6+4x_7+2x_8+x_*$

3.3.1d. (kontynuacja)

	$B_{115} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$B_{114} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{h}=(2, \hat{1}, 1, 2, 1, 1, 1, \hat{1}, 3)$ $\hat{\partial}_I = x_1+4x_2+3x_3+2x_4$ $+2x_5+x_6-x_8-3x_*$	$\check{C}_{\tilde{\mathbb{E}}_8} = B_{115} \cdot \hat{C}_{L_{115}} \cdot B_{115}^{tr}$	$\check{C}_{\tilde{\mathbb{E}}_8} = B_{114} \cdot \hat{C}_{L_{114}} \cdot B_{114}^{tr}$

TABELA 3.3.2. *TP*-WYJĄTKOWE POSETY L_{116}, \dots, L_{132}

3.3.2a. Posety o typie Coxetera-Euclidesa ($\tilde{\mathbb{D}}_4, \tilde{\mathbb{A}}_3$)

L_{116} $n = 4$ 	$\text{cox}_T(t)=F^{(2)}(t),$ $\mathbf{h}=(1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 0),$ $\check{c}_I=2 \quad \partial_I(x)=x_1+x_2+x_3+x_4$ $\check{c}_T=2 \quad \partial_T(x)=2 \cdot \hat{\partial}_I(x),$
--	---

3.3.2b. Posety o typie Coxetera-Euclidesa ($\tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{A}}_5$)

L_{117} $n = 6$ 	$\text{cox}_T(t)=F^{(3)}(t),$ $\mathbf{h}=(1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 0),$ $\check{c}_I=6 \quad \partial_I(x)=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$ $\check{c}_T=3 \quad \partial_T(x)=2 \cdot \hat{\partial}_I(x),$
--	--

3.3.2c. Posety o typie Coxetera-Euclidesa ($\tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_5$)

L_{118} $n = 6$ 	$\mathbf{h}=(1, 1, 1, \hat{1}, \hat{1}, 0),$ $\check{c}_I=6 \quad \partial_I(x)=x_1+x_2+2x_3+2x_4+x_5+x_6$ $\check{c}_T=6 \quad \partial_T(x)=2 \cdot \hat{\partial}_I(x),$
--	---

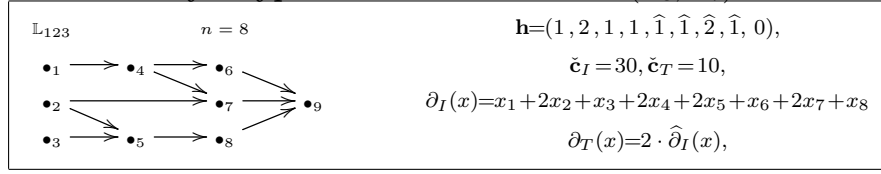
3.3.2d. Posety o typie Coxetera-Euclidesa ($\tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{D}}_6$)

L_{119} $n = 7$ $\mathbf{h}=(1, 2, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 0),$ 	L_{120} $n = 7$
$\check{c}_I=12 \quad \partial_I(x)=x_1+2x_2+x_3+2x_4+2x_5+x_6+x_7$ $\check{c}_T=4 \quad \partial_T(x)=\hat{\partial}_I(x),$	

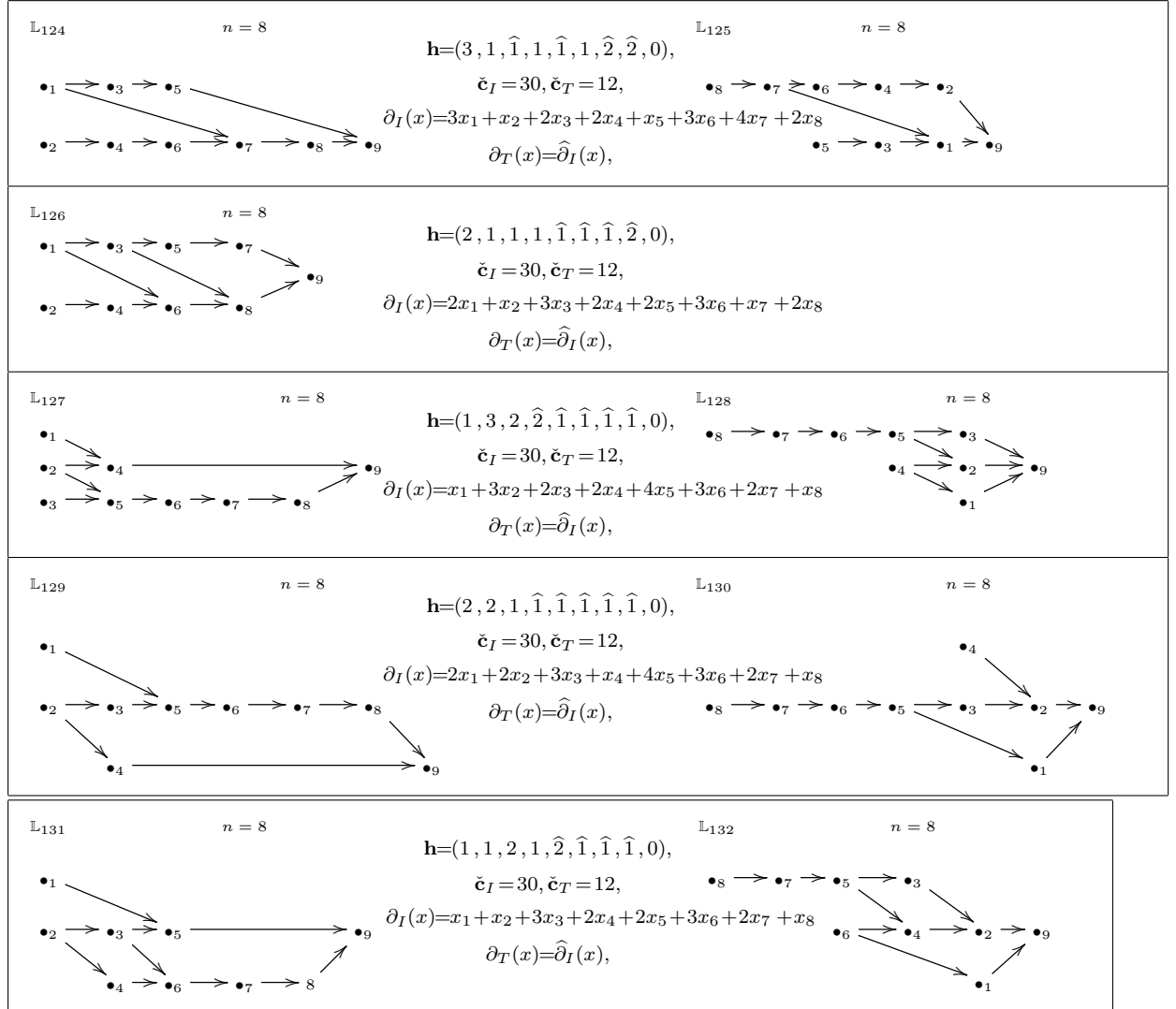
3.3.2e. Posety o typie Coxetera-Euclidesa ($\tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_6$)

L_{121} $n = 7$ 	L_{122} $n = 7$
$\mathbf{h}=(2, 1, \hat{1}, 1, \hat{1}, \hat{1}, 0),$ $\check{c}_I=12, \check{c}_T=6,$ $\partial_I(x)=2x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5+2x_6+x_7$ $\partial_T(x)=\hat{\partial}_I(x),$	

3.3.2f. Posety o typie Coxetera-Euclidesa ($\tilde{\mathbb{E}}_8, \tilde{\mathbb{D}}_7$)



3.3.2g. Posety o typie Coxetera-Euclidesa ($\tilde{\mathbb{E}}_8, \tilde{\mathbb{E}}_7$)



3.4. Informacje o posetach I^{op} , \tilde{I} , $\delta_a I$ powstałych z posetu I

W podrozdziale tym przypominamy definicję posetu przeciwnego I^{op} do posetu I , odbicia dualnego (ang. reflection-dual) \tilde{I} posetu I , oraz odbicia w talii (ang. waist reflection) $\delta_a I$ posetu I , zobacz [21, 50]. Pokazujemy, że funkcjonał Titsa prawie TP -krytycznego posetu jednopikowego I jest \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważny z funkcjonałem Titsa posetów I^{op} , \tilde{I} , $\delta_a I$. Fakt ten wykorzystujemy w podrozdziale 3.5 przy opisie sieciowych systemów pierwiastków dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych. Dokładniej jeśli I , J są prawie TP -krytycznymi

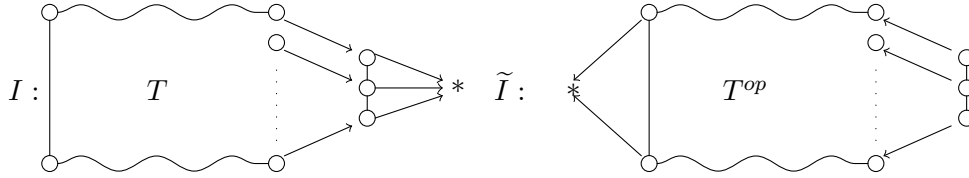
posetami jednopikowymi (przedstawionymi w rozdziale 3.3) oraz J jest jednym z posetów I^{op} , \tilde{I} , $\delta_a I$, to wystarczy opisać zbiór sieciowych systemów pierwaistków dla posetu I .

Definicja 3.4.1. Niech $I = (I, \preceq)$ będzie skończonym posetem. Posetem **przeciwnym** (ang. opposite) do posetu I nazywamy poset $I^{op} = (I, \preceq_{\bullet})$ taki, że $a \preceq_{\bullet} b$, jeśli $b \preceq a$ dla dowolnych $a, b \in I$.

Definicja 3.4.2. Niech $I = (I, \preceq)$ będzie posetem jednopikowym z elementem maksymalnym $*$, zaś $T = I \setminus \{*\} = \{1, 2, \dots, n\}$. **Odbiciem dualnym** (ang. reflection-dual, [50]) posetu I nazywamy jednopikowy poset $\tilde{I} = (I, \preceq_{\bullet})$ taki, że

- $a \preceq_{\bullet} *$ dla dowolnego $a \in T$,
- $a \preceq_{\bullet} b$, jeśli $b \preceq a$ dla dowolnych $a, b \in T$.

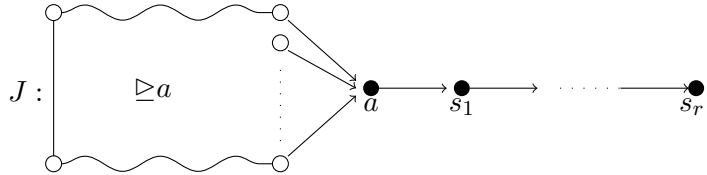
Innymi słowy $\tilde{I} = T^{op} \cup \{*\} = (\tilde{I}, \preceq_{\bullet})$ powstaje z I przez zamianę T na T^{op} . Przejście I na \tilde{I} można zobrazować w następujący sposób:



Definicja 3.4.3. Niech J będzie skończonym posetem jednopikowym oraz $a \in J$.

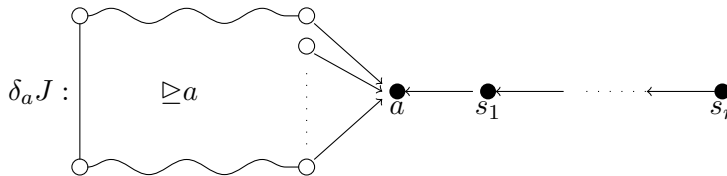
(a) Lewym podposetem $\supseteq a$ posetu J względem elementu a i prawym podposetem $a \trianglelefteq$ posetu J względem elementu a nazywamy podposety posetu J zdefiniowane w następujący sposób: $\supseteq a = \{j \in J; j \preceq a\}$, $a \trianglelefteq = \{j \in J; a \preceq j\}$.

(b) Element a posetu J nazywamy **prawym punktem talii** (ang. right waist point) posetu J , jeśli $J = \supseteq a \cup a \trianglelefteq$ oraz poset $C := a \trianglelefteq$ jest łańcuchem, tzn. poset J ma postać



gdzie $r \geq 1$.

(c) Niech a będzie prawym punktem talii posetu J . **Odbiciem w talii** (ang. waist reflection, [50]) posetu J w punkcie a nazywamy jednopikowy poset $\delta_a J = \supseteq a \cup (a \trianglelefteq)^{op}$ powstały z posetu J przez odwrócenie wszystkich strzałek w diagramie Hasse prawego podposetu $C := \supseteq a$ posetu J i uczynienie wszystkich elementów \bullet_s w $C^{op} \setminus \{a\} \subseteq \delta_a J$ nieporównywalnymi z wszystkimi elementami \circ_j w $\supseteq a \setminus \{a\} \subseteq \delta_a J$. Innymi słowy, poset $\delta_a J$ ma następującą postać:



gdzie elementy $\bullet_{s_1}, \dots, \bullet_{s_r}$ są nieporównywalne z wszystkimi elementami \circ_j w $\supseteq a \setminus \{a\} \subseteq \delta_a J$ oraz \bullet_a jest jedynym elementem maksymalnym posetu $\delta_a J$.

Przedstawimy teraz lematy 3.4.4-3.4.6 oraz twierdzenie 3.4.7, z których wynika, że jeśli I, I' są prawie TP -krytycznymi jednopikowymi posetami oraz I' jest jednym z posetów $I^{\text{op}}, \tilde{I}, \delta_a I$, to I, I' są \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważne. Ponieważ niektóre z prawie TP -krytycznych posetów I , przedstawionych w tabelach 3.3.1-3.3.2, są postaci $I^{\text{op}}, \tilde{I}, \delta_a I$, więc w celu wykazania żądanej równoważności (tzn. $I \approx_{\mathbb{Z}} I'$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_{I'}(t)$, dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych I, I') można ograniczyć się do posetów I, I' takich, że I' nie jest jednym z posetów $I^{\text{op}}, \tilde{I}, \delta_a I$.

Lemat 3.4.4. *Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie jednym z grafów Euklidesa przedstawionych w tabeli 1.4.9 takim, że $\text{cox}_{\Delta}(t) = \begin{cases} F_{\Delta}^{(2)}(t) = t^4 - 2t^2 + 1, & \text{jeśli } \Delta = \tilde{\mathbb{A}}_3, \\ F_{\Delta}^{(3)}(t) = t^6 - 2t^3 + 1, & \text{jeśli } \Delta = \tilde{\mathbb{A}}_5, \\ F_{\Delta}(t), & \text{jeśli } \Delta \in \{\tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7\}. \end{cases}$ Wówczas istnieje macierz $B \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$, gdzie $|\Delta_0| = n + 1$ taka, że*

$$\check{G}_{\Delta}^{\text{tr}} = B \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B^{\text{tr}}$$

oraz $B^2 = E$.

Dowód. Niesymetryczne macierze Grama odpowiadające grafom Euklidesa $\Delta \in \{\tilde{\mathbb{A}}_3, \tilde{\mathbb{A}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ takim, że

$$\text{cox}_{\Delta}(t) = \begin{cases} F_{\Delta}^{(2)}(t) = t^4 - 2t^2 + 1, & \text{jeśli } \Delta = \tilde{\mathbb{A}}_3, \\ F_{\Delta}^{(3)}(t) = t^6 - 2t^3 + 1, & \text{jeśli } \Delta = \tilde{\mathbb{A}}_5, \\ F_{\Delta}(t), & \text{jeśli } \Delta \in \{\tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7\} \end{cases} \quad \text{mają następujące postaci:}$$

ci:

$$\check{G}_1 := \check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}), \quad \check{G}_2 := \check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_5} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}),$$

$$\check{G}_3 := \check{G}_{\tilde{\mathbb{D}}_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \check{G}_4 := \check{G}_{\tilde{\mathbb{E}}_6} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\check{G}_5 := \check{G}_{\tilde{\mathbb{E}}_7} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \check{G}_6 := \check{G}_{\tilde{\mathbb{E}}_8} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas macierze $B_i \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ takie, że $\check{G}_i^{tr} = B_i \cdot \check{G}_i \cdot B_i^{tr}$ oraz $B_i^2 = E$ mają następującą postać:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 0 & -1 & & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

W szczególności $B_3 \cdot \check{G}_3 \cdot B_3^{tr} =$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 0 & -1 & & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot B_3^{tr} =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 0 & -1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \check{G}_3^{tr}.$$

Macierze te zostały znalezione przy pomocy procedury 3.5.7 zastosowanej dla posetów I^{op} , gdzie I jest posetem powstałym z jednego z grafów Euklidesa $\Delta_I \in \{\mathbb{D}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ przez zastąpienie $\bullet_i \text{---} \bullet_j$, dla $i < j$ strzałką $\bullet_i \rightarrow \bullet_j$. Wówczas $\overline{C}_I^{tr} = \overline{C}_{I^{op}}$, gdzie \overline{C}_I jest macierzą Eulera posetu I . \square

Lemat 3.4.5. Niech I będzie skończonym posetem, zaś I^{op} będzie posetem przeciwnym do posetu I . Ponadto niech $\hat{b}_I, \bar{b}_I, b_I : \mathbb{Z}^I \times \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$ będą odpowiednio funkcjonalami dwuliniowymi Titsa, Eulera i incydencji posetu I . Jeśli $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$, gdzie $\Delta_I \in \{\tilde{\mathbb{A}}_3, \tilde{\mathbb{A}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$

$$\text{oraz } \text{cox}_{\Delta_I}(t) = \begin{cases} F_{\Delta_I}^{(2)}(t) = t^4 - 2t^2 + 1, & \text{jeśli } \Delta_I = \tilde{\mathbb{A}}_3, \\ F_{\Delta_I}^{(3)}(t) = t^6 - 2t^3 + 1, & \text{jeśli } \Delta_I = \tilde{\mathbb{A}}_5, \\ F_{\Delta_I}(t), & \text{jeśli } \Delta_I \in \{\tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7\} \end{cases}, \text{ to}$$

$$\widehat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \widehat{b}_{I^{op}} \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}.$$

Dowód. Z lematu 3.4.4 wynika, że jeśli $\Delta_I \in \{\tilde{\mathbb{A}}_3, \tilde{\mathbb{A}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$, $n \geq 4$, to istnieje macierz o współczynnikach całkowitych B taka, że $B^2 = E$ oraz $\check{G}_{\Delta_I}^{tr} = B \cdot \check{G}_{\Delta_I} \cdot B^{tr}$. Ponadto wiemy, że $\widehat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$, więc istnieje $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det A \in \{-1, +1\}$ taka, że $\check{G}_{\Delta_I} = A \cdot \widehat{C}_I \cdot A^{tr}$. Wówczas $\check{G}_{\Delta_I}^{tr} = B \cdot \check{G}_{\Delta_I} \cdot B^{tr} = A \cdot \widehat{C}_I^{tr} \cdot A^{tr}$. Stąd wynika, że $\check{G}_{\Delta_I} = (B^{-1}A) \cdot \widehat{C}_I^{tr} \cdot (A^{tr}B^{-tr})$ oraz $\det(B^{-1}A) \in \{-1, +1\}$. Zatem $\bar{b}_{\Delta_I} \sim_{\mathbb{Z}} \widehat{b}_{I^{op}}$, gdyż $\widehat{C}_{I^{op}} = \widehat{C}_I^{tr}$. Ponadto z $\check{G}_{\Delta_I} = A \cdot \widehat{C}_I \cdot A^{tr}$ oraz z $\check{G}_{\Delta_I} = (B^{-1}A) \cdot \widehat{C}_I^{tr} \cdot (A^{tr}B^{-tr})$ wynika, że $\widehat{C}_I = (A^{-1}B^{-1}A) \cdot \widehat{C}_I^{tr} \cdot (A^{-1}B^{-1}A)^{tr}$, gdzie $\det(A^{-1}B^{-1}A) \in \{-1, +1\}$. Zatem $\widehat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \widehat{b}_{I^{op}}$. \square

Twierdzenie 3.4.6. Niech I będzie skończonym posetem, zaś I^{op} będzie posetem przeciwnym do posetu I . Ponadto niech $\widehat{b}_I, \bar{b}_I, b_I : \mathbb{Z}^I \times \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$ będą odpowiednio funkcjonalami dwuliniowymi Titsa, Eulera i incydencji posetu I .

(a) Istnieją dwie \mathbb{Z} -dwuliniowe równoważności

$$\widehat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} b_{I^{op}}.$$

(b) Funkcjonały kwadratowe $\widehat{q}_I, \bar{q}_I, q_I : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ Titsa, Eulera i incydencji posetu I są \mathbb{Z} -równoważne. Funkcjonał Titsa \widehat{q}_I posetu I jest dodatni (odpowiednio: nieujemny) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonal kwadratowy incydencji posetu I i funkcjonal kwadratowy Eulera posetu I są dodatnie (odpowiednio: nieujemne).

Dowód. Udowodnimy najpierw, że $\bar{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} b_{I^{op}}$. Ponieważ $C_{I^{op}} = C_I^{tr}$ oraz $C_I^{tr} = C_I^{tr} \cdot C_I^{-1} \cdot C_I$, więc $\bar{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} b_{I^{op}}$.

Pokażemy, że $\widehat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_I$. Niech $C_I^\bullet = \left[\begin{array}{c|c} C_I & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right]$ będzie zredukowaną macierzą incydencji posetu $I = \check{I} \cup \max I$, gdzie $\max I$ jest zbiorem wszystkich elementów maksymalnych w posecie I , zaś $\bar{C}_I = C_I^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} C_I^{-1} & -C_I^{-1} \cdot U \\ \hline 0 & E \end{array} \right]$ macierzą Eulera posetu I , gdzie

$$U = \begin{bmatrix} c_{1*s_1} & \cdots & c_{1*s_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n*s_1} & \cdots & c_{n*s_r} \end{bmatrix} \text{ oraz } c_{i*s} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i \preceq *s \in \max I \\ 0, & \text{jeśli } i \not\preceq *s \in \max I \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Wtedy } C_I^\bullet \cdot C_I^{-1} \cdot (C_I^\bullet)^{tr} &= \left[\begin{array}{c|c} C_I & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} C_I^{-1} & -C_I^{-1} \cdot U \\ \hline 0 & E \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} C_I^{tr} & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} C_I \cdot C_I^{-1} & C_I \cdot (-C_I^{-1} \cdot U) \\ \hline 0 & E \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} C_I^{tr} & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} E & -U \\ \hline 0 & E \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} C_I^{tr} & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} C_I^{tr} & -U \\ \hline 0 & E \end{array} \right] = \widehat{C}_I. \end{aligned}$$

Zatem $\bar{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \widehat{b}_I$.

(b) Dowód (b) wynika z punktu (a) oraz z przemienności diagramu pokazanego w definicji 1.3.5 (a). \square

Twierdzenie 3.4.7. Niech I i $\tilde{I} = \delta_a I$ będą posetami jak w definicji 3.4.3, tzn. poset \tilde{I} jest odbiciem w talii posetu I względem punktu $a \in I$.

(a) Macierz Eulera \bar{C}_I posetu I i macierz Eulera $\bar{C}_{\tilde{I}}$ posetu \tilde{I} są \mathbb{Z} -kongruentne, tzn. istnieje macierz $B \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ spełniająca $\det B \in \{-1, +1\}$ taka, że $B \cdot \bar{C}_I \cdot B^{tr} = \bar{C}_{\tilde{I}}$ oraz $\text{cox}_{\tilde{I}}(t) = \text{cox}_I(t)$.

(b) Poset I jest dodatni (odpowiednio: nieujemny) wtedy i tylko wtedy, gdy poset $\tilde{I} = \delta_a I$ jest dodatni (odpowiednio: nieujemny).

Dowód. (a) Zauważmy, że macierz Eulera posetu I oraz macierz Eulera posetu $\tilde{I} = \delta_a I$ mają następującą postać:

$$\bar{C}_I = \left[\begin{array}{ccc|c|cccc} \bar{c}_{11} & \dots & \bar{c}_{1a-1} & \bar{c}_{1a} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{c}_{a-11} & \dots & \bar{c}_{a-1a-1} & \bar{c}_{a-1a} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline \bar{c}_{a1} & \dots & \bar{c}_{aa-1} & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right],$$

$$\bar{C}_{\tilde{I}} = \left[\begin{array}{ccc|c|cccc} \bar{c}_{11} & \dots & \bar{c}_{1a-1} & \bar{c}_{1a} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{c}_{a-11} & \dots & \bar{c}_{a-1a-1} & \bar{c}_{a-1a} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline \bar{c}_{a1} & \dots & \bar{c}_{aa-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array} \right], \text{ gdyż } C_I \cdot \bar{C}_I = E \text{ oraz } C_{\tilde{I}} \cdot \bar{C}_{\tilde{I}} = E.$$

Niech

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & & 0 \end{array} \right] \text{ i } B^{tr} = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & & 0 \end{array} \right].$$

$$\text{Wówczas } B^2 = E, B \cdot \bar{C}_I = \left[\begin{array}{ccc|c|cccc} \bar{c}_{11} & \dots & \bar{c}_{1a-1} & \bar{c}_{1a} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{c}_{a-11} & \dots & \bar{c}_{a-1a-1} & \bar{c}_{a-1a} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline \bar{c}_{a1} & \dots & \bar{c}_{aa-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & -1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & -1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & & 0 \end{array} \right].$$

Stąd wynika, że $B \cdot \bar{C}_I \cdot B^{tr} = \bar{C}_{\tilde{I}}$, $\bar{\text{Cox}}_{\tilde{I}} = B \cdot \bar{\text{Cox}}_I \cdot B^{-1}$, $\text{cox}_{\tilde{I}}(t) = \text{cox}_I(t)$, co kończy dowód (a).

(b) Z punktu (a) wynika, że $B \cdot \bar{C}_I \cdot B^{tr} = \bar{C}_{\tilde{I}}$, gdzie $B^2 = E$. Ponadto na podstawie twierdzenia 3.4.6 zachodzą następujące równości: $\hat{C}_{\tilde{I}} = A_1 \cdot \bar{C}_{\tilde{I}} \cdot A_1^{tr}$ oraz $\bar{C}_I = A_2^{-1} \cdot \hat{C}_I \cdot A_2^{-tr}$, gdzie $A_1 = C_{\tilde{I}}^{\bullet}$, $A_2 = C_I^{\bullet}$ i $\det A_1 = 1$, $\det A_2 = 1$. Stąd

$$\begin{aligned} \hat{C}_{\tilde{I}} &= A_1 \cdot \bar{C}_{\tilde{I}} \cdot A_1^{tr} = A_1 B \cdot \bar{C}_I \cdot B^{tr} A_1^{tr} = (A_1 B A_2^{-1}) \cdot \hat{C}_I \cdot (A_2^{-tr} B^{tr} A_1^{tr}) = \\ &= (A_1 B A_2^{-1}) \cdot \hat{C}_I \cdot (A_1 B A_2^{-1})^{tr} \text{ oraz } \det(A_1 B A_2^{-1}) = -1. \end{aligned}$$

Ponieważ $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \hat{b}_{\tilde{I}}$, więc \hat{q}_I jest dodatni (odp.: nieujemny) wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{q}_{\tilde{I}}$ jest dodatni (odp.: nieujemny).

Dowód punktu (a) tego twierdzenia można również znaleźć w pracy [21, Proposition 2.2]. \square

Twierdzenie 3.4.8. Niech $I = T \cup \{*\}$ będzie skończonym posetem jednopikowym, zaś \tilde{I} będzie odbiciem dualnym posetu I (zobacz definicję 3.4.2). Niech Δ_I będzie jednym z grafów Euklidesa $\Delta_I \in \{\tilde{\mathbb{A}}_3, \tilde{\mathbb{A}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$, takim, że

$$\text{cox}_{\Delta_I}(t) = \begin{cases} F_{\Delta_I}^{(2)}(t) = t^4 - 2t^2 + 1, & \text{jeśli } \Delta_I = \tilde{\mathbb{A}}_3, \\ F_{\Delta_I}^{(3)}(t) = t^6 - 2t^3 + 1, & \text{jeśli } \Delta_I = \tilde{\mathbb{A}}_5, \\ F_{\Delta_I}(t), & \text{jeśli } \Delta_I \in \{\tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7\} \end{cases},$$

zaś $\hat{b}_I, \bar{b}_I, b_I : \mathbb{Z}^I \times \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$ będą odpowiednio: funkcjonalami dwuliniowymi Titsa, Eulera i incydencji posetu I .

(a) $\hat{b}_I^{tr} \sim_{\mathbb{Z}} \hat{b}_I$,

(b) Jeśli $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$, to

$$\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \hat{b}_{\tilde{I}} \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}.$$

Dowód. (a) Niech $\hat{S}_* = \left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -U^{tr} & -1 \end{array} \right]$, gdzie $U = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, $\det \hat{S}_* = -1$. Wtedy

$$\hat{S}_*^{tr} \cdot \hat{C}_I \cdot \hat{S}_* = \left[\begin{array}{c|c} E & U \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} C_I^{tr} & -U \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -U^{tr} & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} C_I^{tr} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -U^{tr} & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} C_I^{tr} & 0 \\ \hline -U^{tr} & 1 \end{array} \right] = \hat{C}_{\tilde{I}}^{tr}.$$

Zatem $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \hat{b}_{\tilde{I}}^{tr}$.

(b) Z punktu (a) wynika, że $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \hat{b}_{\tilde{I}}^{tr}$. Zatem istnieje macierz $D \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$, $\det D = \{-1, +1\}$ taka, że $\hat{C}_{\tilde{I}}^{tr} = D \cdot \hat{C}_I \cdot D^{tr}$. Ponadto wiemy, że $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$, gdzie Δ_I jest jednym z grafów Euklidesa $\Delta_I \in \{\tilde{\mathbb{A}}_3, \tilde{\mathbb{A}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$. Istnieje więc macierz $C \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$, $\det C = \{-1, +1\}$ taka, że $\hat{C}_I = C \cdot \check{G}_{\Delta_I} \cdot C^{tr}$. Stąd $\hat{C}_{\tilde{I}}^{tr} = (DC) \cdot \check{G}_{\Delta_I} \cdot (C^{tr} D^{tr})$, gdzie $\det(CD) = \{-1, +1\}$. Otrzymujemy więc $\hat{b}_{\tilde{I}}^{tr} \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$. Ponadto na podstawie lematu 3.4.4 zachodzi następująca \mathbb{Z} -dwuliniowa równoważność: $\bar{b}_{\Delta_I} \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}^{tr}$. Stąd wynika, że istnieje macierz $E \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$, $\det E = \{-1, +1\}$ taka, że $\check{G}_{\Delta_I}^{tr} = E \cdot \check{G}_{\Delta_I} \cdot E^{tr}$. Ponadto wiemy, że $\check{G}_{\Delta_I} = (C^{-1} D^{-1}) \cdot \hat{C}_{\tilde{I}}^{tr} \cdot (D^{-tr} C^{-tr})$. Z obu tych faktów wynikają następujące równości:

$$\begin{aligned} \check{G}_{\Delta_I}^{tr} &= (E^{-1} C^{-1} D^{-1}) \cdot \hat{C}_{\tilde{I}}^{tr} \cdot (D^{-tr} C^{-tr} E^{-tr}), \\ (C^{-1} D^{-1}) \cdot \hat{C}_{\tilde{I}}^{tr} \cdot (D^{-tr} C^{-tr}) &= (E^{-1} C^{-1} D^{-1}) \cdot \hat{C}_{\tilde{I}}^{tr} \cdot (D^{-tr} C^{-tr} E^{-tr}). \end{aligned}$$

Zatem $\hat{C}_{\tilde{I}} = (DCE^{-1}C^{-1}D^{-1}) \cdot \hat{C}_{\tilde{I}}^{tr} \cdot (DCE^{-1}C^{-1}D^{-1})^{tr}$ oraz $\hat{b}_{\tilde{I}} \sim_{\mathbb{Z}} \hat{b}_{\tilde{I}}^{tr}$.

Z $\hat{b}_{\tilde{I}} \sim_{\mathbb{Z}} \hat{b}_{\tilde{I}}^{tr}$ oraz z $\hat{b}_{\tilde{I}}^{tr} \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$ wynika $\hat{b}_{\tilde{I}} \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$. Z $\hat{b}_{\tilde{I}}^{tr} \sim_{\mathbb{Z}} \hat{b}_I$ oraz z $\hat{b}_{\tilde{I}}^{tr} \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\tilde{I}}$ wynika $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\tilde{I}}$. \square

3.5. Opis sieciowych systemów pierwiastków dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych

Celem tego rozdziału jest wykazanie, że dwa posety jednopikowe I, I' są \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_{I'}(t)$. W przypadku jednopikowych posetów TP -wyjątkowych I, I' pokazujemy ponadto, że posety $T = I \setminus \{*\}$, $T' = I' \setminus \{*\}$ są \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{cox}_T(t) = \text{cox}_{T'}(t)$.

W rozdziale przypominamy definicję defektu Titsa, incydencyjnego defektu oraz zredukowanej liczby Coxetera dla głównych posetów, tzn. posetów nieujemnych takich, że $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_I$, gdzie $\mathbf{h}_I \neq 0$, zobacz [60, 54, 22]. Wspomniane defekty wykorzystujemy do opisu sieciowych systemów pierwiastków dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych przedstawionych w rozdziale 3.3.

Pokazujemy, że jeśli I, I' są prawie TP -krytycznymi posetami jednopikowymi oraz mają równe wielomiany Coxetera, to $\widehat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \widehat{b}_{I'}$ (patrz definicja 1.3.5). W tym celu udowadniamy, przy pomocy sieciowych systemów pierwiastków, że $\widehat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta}$ oraz $\widehat{b}_{I'} \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta}$, gdzie Δ jest jednym z grafów Euklidesa przedstawionych w tabeli 1.4.9.

Przedstawiamy teraz twierdzenie, z którego wynika istnienie defektu Titsa oraz incydencyjnego defektu, a także zredukowanej liczby Coxetera dla głównych posetów. Ponieważ prawie TP -krytyczne posety są główne (zobacz twierdzenie 3.2.9), więc istnieją dla nich wspomniane defekty oraz zredukowana liczba Coxetera. Wykorzystujemy je przy opisie sieciowych systemów pierwiastków dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych.

Twierdzenie 3.5.1. *Niech J będzie skończonym i głównym posetem, zaś $0 \neq \mathbf{h}_J \in \mathbb{Z}^J$ będzie ustalonym wektorem takim, że $\text{Ker } q_J = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_J$.*

(a) *Istnieje minimalna liczba całkowita $\check{c}_J \geq 2$ (zwana **zredukowaną liczbą Coxetera** posetu J) oraz homomorfizm grup $\partial_J : \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}$ (zwany **incydencyjnym defektem** posetu J) takie, że*

$$\Phi_J^{\check{c}_J}(v) = v + \partial_J(v) \cdot \mathbf{h}_J, \quad \partial_J(\Phi_J(v)) = \partial_J(v) \text{ dla dowolnego } v \in \mathbb{Z}^J \text{ oraz } \partial_J(\mathbf{h}_J) = 0.$$

(b) *Załóżmy, że $\check{c}_J \geq 1$ i $\partial_J : \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}$ są takie jak w (a), ponadto niech $\bar{\mathbf{h}}_J = \mathbf{h}_J \cdot B'$, $\widehat{\mathbf{h}}_J = \mathbf{h}_J \cdot B' \cdot B^{-1}$, gdzie $B', B \in \mathbb{M}_J(\mathbb{Z})$ są macierzami takimi, jak w twierdzeniu 3.1.7.*

(b1) *Istnieje homomorfizm grup $\bar{\partial}_J : \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}$ (zwany **defektem Eulera** posetu J) taki, że $\bar{\Phi}_J^{\check{c}_J}(v) = v + \bar{\partial}_J(v) \cdot \bar{\mathbf{h}}_J$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^J$ oraz $\bar{\partial}_J \circ \Phi_J = \bar{\partial}_J$, $\partial_J = \bar{\partial}_J \circ h_{B'}$ i $\bar{\partial}_J(\bar{\mathbf{h}}_J) = 0$.*

(b2) *Istnieje homomorfizm grup $\widehat{\partial}_J : \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}$ (zwany **defektem Titsa** posetu J) taki, że $\widehat{\Phi}_J^{\check{c}_J}(v) = v + \widehat{\partial}_J(v) \cdot \widehat{\mathbf{h}}_J$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^J$ oraz $\widehat{\partial}_J \circ \Phi_J = \widehat{\partial}_J$, $\widehat{\partial}_J = \bar{\partial}_J \circ h_B = \partial_J \circ h_{B'}^{-1} \circ h_B$ oraz $\widehat{\partial}_J(\widehat{\mathbf{h}}_J) = 0$.*

(c) *Liczba Coxetera \mathbf{c}_J posetu J jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy incydencyjny defekt ∂_J jest zerowy. W tym wypadku $\check{c}_J = \mathbf{c}_J$.*

(d) *Dla $v \in \mathbb{Z}^m$ Φ_J -orbita wektora v jest skończona (tzn. $\mathbf{s}_v := |\mathcal{O} - \Phi_J(v)| < \infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\partial_J(v) = 0$. Jeśli $\mathbf{s}_v = |\mathcal{O} - \Phi_J(v)|$ jest skończona, to \mathbf{s}_v dzieli \check{c}_J oraz istnieje dokładnie jedna liczba całkowita m_v taka, że*

$$m_v \cdot \mathbf{h} = v + \Phi_J(v) + \Phi_J^2(v) + \cdots + \Phi_J^{\mathbf{s}_v-1}(v).$$

Dowód. Twierdzenie to wraz z dowodem można znaleźć w [56, Theorem 4.7], [60, Theorem 3.3]. \square

Przedstawiamy teraz podstawowe informacje potrzebne do opisu zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_{\widehat{q}_I}$ dla jednopikowego prawie TP -krytycznego posetu I . W przypadku, gdy I jest TP -wyjątkowym posetem opisujemy dodatkowo zbiór pierwiastków \mathcal{R}_{q_T} dla posetu $T = I \setminus \{*\}$ powstałego z I przez usunięcie $*$. Na mocy wniosku 3.2.7 jednopikowe posety prawie TP -krytyczne I są główne. Jeśli I jest TP -wyjątkowy, to również $T = I \setminus \{*\}$ jest główny. Ponadto z twierdzenia 3.2.9 wynika, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{\widehat{q}_I}$ jest nieskończony.

Jeśli J jest główny, to zbiory pierwiastków $\mathcal{R}_{q_J} = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_J(v) = 1\}$, $\mathcal{R}_{\hat{q}_J} = \{v \in \mathbb{Z}^m; \hat{q}_J(v) = 1\}$, $\mathcal{R}_{\bar{q}_J} = \{v \in \mathbb{Z}^m; \bar{q}_J(v) = 1\}$ funkcjonałów $q_J, \hat{q}_J, \bar{q}_J$ są rozłączną sumą

$$\mathcal{R}_{q_J} = \partial_J^- \mathcal{R}_{q_J} \cup \partial_J^0 \mathcal{R}_{q_J} \cup \partial_J^+ \mathcal{R}_{q_J},$$

$$\mathcal{R}_{\bar{q}_J} = \bar{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\bar{q}_J} \cup \bar{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{\bar{q}_J} \cup \bar{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\bar{q}_J},$$

$$\mathcal{R}_{\hat{q}_J} = \hat{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\hat{q}_J} \cup \hat{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{\hat{q}_J} \cup \hat{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_J},$$

gdzie

$$\partial_J^- \mathcal{R}_{q_J} = \{v \in \mathcal{R}_{q_J}; \partial_J(v) < 0\}, \quad \partial_J^0 \mathcal{R}_{q_J} = \{v \in \mathcal{R}_{q_J}; \partial_J(v) = 0\},$$

$$\partial_J^+ \mathcal{R}_{q_J} = \{v \in \mathcal{R}_{q_J}; \partial_J(v) > 0\};$$

$$\bar{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\bar{q}_J} = \{v \in \mathcal{R}_{\bar{q}_J}; \bar{\partial}_J(v) < 0\}, \quad \bar{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{\bar{q}_J} = \{v \in \mathcal{R}_{\bar{q}_J}; \bar{\partial}_J(v) = 0\},$$

$$\bar{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\bar{q}_J} = \{v \in \mathcal{R}_{\bar{q}_J}; \bar{\partial}_J(v) > 0\}; (*)$$

$$\hat{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\hat{q}_J} = \{v \in \mathcal{R}_{\hat{q}_J}; \hat{\partial}_J(v) < 0\}, \quad \hat{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{\hat{q}_J} = \{v \in \mathcal{R}_{\hat{q}_J}; \hat{\partial}_J(v) = 0\},$$

$$\hat{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_J} = \{v \in \mathcal{R}_{\hat{q}_J}; \hat{\partial}_J(v) > 0\}$$
 są zbiorami pierwiastków o **defekcie ujemnym, zerowym i dodatnim**. Ponadto

$$\partial_J^- \mathcal{R}_{q_J} = -\partial_J^+ \mathcal{R}_{q_J}, \quad \bar{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\bar{q}_J} = -\bar{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\bar{q}_J}, \quad \hat{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\hat{q}_J} = -\hat{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_J}.$$

Stosując algorytmy opisane w [56, 55] (zobacz rozdział 4.2) budujemy z Φ_J -orbit w \mathcal{R}_{q_J} (odpowiednio: $\bar{\Phi}_J$ -orbit w $\mathcal{R}_{\bar{q}_J}$, $\hat{\Phi}_J$ -orbit w $\mathcal{R}_{\hat{q}_J}$) kołczany Φ_J -oczkowe (odpowiednio: kołczany $\bar{\Phi}_J$ -oczkowe, kołczany $\hat{\Phi}_J$ -oczkowe) osobno dla zbioru pierwiastków o defekcie zerowym, dodatnim i ujemnym. W praktyce, ponieważ $-\partial_J^- \mathcal{R}_{q_J} = \partial_J^+ \mathcal{R}_{q_J}$ (odpowiednio: $-\bar{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\bar{q}_J} = \bar{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\bar{q}_J}$, $-\hat{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\hat{q}_J} = \hat{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_J}$), więc budujemy kołczany Φ_J -oczkowe dla jednego ze zbiorów $\partial_J^- \mathcal{R}_{q_J}$ albo $\partial_J^+ \mathcal{R}_{q_J}$ (odpowiednio: $-\bar{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\bar{q}_J}$ albo $-\bar{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\bar{q}_J}$; $-\hat{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\hat{q}_J}$ albo $-\hat{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_J}$) oraz dla zbioru $\partial_J^0 \mathcal{R}_{q_J}$ (odpowiednio: $\bar{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{\bar{q}_J}$, $\hat{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{\hat{q}_J}$). Dla głównego posetu J zbiory $\partial_J^- \mathcal{R}_{q_J}$, $\partial_J^0 \mathcal{R}_{q_J}$, $\partial_J^+ \mathcal{R}_{q_J}$ (odp.: $\bar{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\bar{q}_J}$, $\bar{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{\bar{q}_J}$, $\bar{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\bar{q}_J}$; $\hat{\partial}_J^- \mathcal{R}_{\hat{q}_J}$, $\hat{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{\hat{q}_J}$, $\hat{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_J}$) są nieskończone. O tym jak wybrać z nich pewne skończone podzbiory mówi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.5.2. *Niech J będzie skończonym i głównym posetem takim, że $|J| = m$ oraz $\bar{q}_J : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcjonałem Eulera posetu J , $\text{Ker } \bar{q}_J = \mathbb{Z} \cdot \bar{\mathbf{h}}_J$, gdzie $\mathbf{h}_J \neq 0$.*

(a) *Dla dowolnego $v \in \mathcal{R}_{\bar{q}_J}$ zachodzi $\bar{q}_J(v + \bar{\mathbf{h}}_J) = q(v) = 1$.*

(b) *Istnieje zbiór $\mathcal{R}_{\bar{q}_J}^{\text{red}} \subseteq \mathcal{R}_{\bar{q}_J}$ zwany **reduktem** taki, że*

(b1) *dowolny wektor $v \in \mathcal{R}_{\bar{q}_J}$ możemy jednoznacznie przedstawić w postaci $v = \check{v} + \bar{\mathbf{h}}_J$, gdzie $\check{v} \in \mathcal{R}_{\bar{q}_J}^{\text{red}}$. Ponadto*

$$\mathcal{R}_{\bar{q}_J} = \mathcal{R}_{\bar{q}_J}^{\text{red}} + \text{Ker } \bar{q}_J.$$

(b2) *Zbiór $\mathcal{R}_{\bar{q}_J}^{\text{red}}$ jest skończony oraz przekrój $\mathcal{R}_{\bar{q}_J}^{\text{red}} \cap \text{Ker } \bar{q}_J$ jest pusty.*

Dowód. Można znaleźć w pracy [56, Theorem 3.2]. Twierdzenie pozostaje prawdziwe również dla funkcjonału incydencji $q_J : \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}$ (z $\text{Ker } q_J = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_J$) oraz funkcjonału Titsa $\hat{q}_J : \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}$ (z $\text{Ker } \hat{q}_J = \mathbb{Z} \cdot \hat{\mathbf{h}}_J$) posetu J . \square

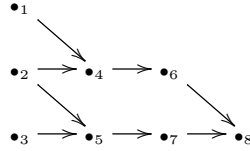
Skończone zbiory $\partial_J^- \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$ lub $\partial_J^+ \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$ (odp.: $\bar{\partial}_J^- \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$ lub $\bar{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$; $\hat{\partial}_J^- \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$ lub $\hat{\partial}_J^+ \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$) oraz $\partial_J^0 \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$ (odp.: $\bar{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$, $\hat{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$) ustawiamy w Φ_{q_I} -orbitę (odp.: $\bar{\Phi}_{q_I}$ -orbitę, $\hat{\Phi}_{q_I}$ -orbitę), a następnie budujemy z nich fragmenty kołczanów (digrafów) Φ_{q_J} -oczkowych (odp.: $\bar{\Phi}_{q_J}$ -oczkowych, $\hat{\Phi}_{q_J}$ -oczkowych), zobacz [56, 60, 55] oraz rozdział 1.5.

Na podstawie twierdzenia 3.5.1, zbiory pierwiastków o defekcie zerowym $\partial_J^0 \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$ (odp.: $\bar{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$, $\hat{\partial}_J^0 \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$) Φ_{q_J} -orbitę (odp.: $\bar{\Phi}_{q_J}$ -orbitę, $\hat{\Phi}_{q_J}$ -orbitę) są skończone oraz $\mathbf{s}_v = |\mathcal{O} - \Phi_{q_J}(v)| < \infty$ (odp.: $\mathbf{s}_v = |\mathcal{O} - \bar{\Phi}_{q_J}(v)| < \infty$, $\mathbf{s}_v = |\mathcal{O} - \hat{\Phi}_{q_J}(v)| < \infty$) jest dzielnikiem zredukowanej liczby Coxetera \check{c}_J , patrz [56]. Zbiór $\partial^0 \mathcal{R}_{q_J} \cup \text{Ker } q_J$ (odp.: $\bar{\partial}^0 \mathcal{R}_{q_J} \cup \text{Ker } \bar{q}_J$, $\hat{\partial}^0 \mathcal{R}_{q_J} \cup \text{Ker } \hat{q}_J$) można ustawić w nieskończone pionowe tuby. Wybieramy minimalny zbiór tub klebsydralnych τ_J tak, by każdy pierwiastek $v \in \partial^0 \mathcal{R}_{q_J}$ (odpowiednio: $v \in \bar{\partial}^0 \mathcal{R}_{q_J}$, $v \in \hat{\partial}^0 \mathcal{R}_{q_J}$) o randze $\mathbf{s}_v = |\mathcal{O} - \Phi_J(v)|$ należał do τ_J . Rangi tub z τ_J tworzą **typ tubularny** \mathbf{tub}_{q_J} (odp.: $\mathbf{tub}_{\bar{q}_J}$, $\mathbf{tub}_{\hat{q}_J}$), zobacz także [55, 59].

Z twierdzenia 3.5.1 wynika ponadto, że zbiory pierwiastków o defekcie ujemnym $\partial_J^- \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$ (odp.: $\bar{\partial}_J^- \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$, $\hat{\partial}_J^- \mathcal{R}_{q_J}^{\text{red}}$) Φ_{q_I} -orbitę (odp.: $\bar{\Phi}_{q_I}$ -orbitę, $\hat{\Phi}_{q_I}$ -orbitę) są nieskończone. Ponadto można z nich zbudować nieskończony poziomy kołczan (digraf) Φ_J -oczkowy (odp.: $\bar{\Phi}_J$ -oczkowy, $\hat{\Phi}_J$ -oczkowy), patrz [56, Theorem 5.3].

W przykładzie 3.5.3 pokazujemy, jak przy pomocy sieciowych systemów pierwiastków zweryfikować \mathbb{Z} -dwuliniową równoważność $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$, gdzie Δ_I jest jednym z grafów Euklidesa przedstawionych w tabeli 1.4.9.

Przykład 3.5.3. Niech $I = \mathbb{L}_{119}$ będzie następującym posetem:



Poset I jest TP -wyjątkowy i znajduje się na liście posetów TP -wyjątkowych przedstawionej w podrozdziale 3.3.

(a) Pokażemy, że $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\mathbb{E}_7}$

0° Za pomocą algorytmów opisanych w rozdziale 4 obliczamy jądro $\text{Ker } \hat{q}_I$ funkcjonału Titsa posetu I oraz defekt $\hat{\partial}_I : \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}^8$ i zredukowaną liczbę Coxetera \check{c}_I . Otrzymujemy: $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (1, 2, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 0)$, $\check{c}_I = 12$, $\partial_I(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7$.

1° Znajdujemy zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}^{\text{red}}$ w następujący sposób: stosując algorytm ograniczonego zliczania opisany w rozdziale 4, wyznaczamy zbiór pierwiastków \mathcal{R}_{q_J} dla dodatniego posetu $J = I \setminus \{1\}$. Zbiór ten jest skończony ($|\mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}^{\text{red}}| = 126$), gdyż J jest dodatnim posetem. Pierwiastki $v \in \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}^{\text{red}}$ uzupełniamy zerem na pierwszej pozycji, tzn. $(0, v)$. Dostajemy w ten sposób skończony zbiór $\mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}^{\text{red}} \subseteq \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}$.

2° Ze zbioru $\mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}^{\text{red}}$ wybieramy te pierwiastki, v dla których $\hat{\partial}_{\mathbb{L}_{119}}(v) > 0$. Otrzymujemy w ten sposób 53 pierwiastki z $\hat{\partial}_{\mathbb{L}_{119}}^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}^{\text{red}}$:

$[0, -2, -1, 1, 1, 1, 0]$, $[0, -2, -1, 1, 1, 1, 1]$, $[0, -2, -1, 1, 1, 1, 2, 1]$, $[0, -2, -1, 1, 2, 1, 1, 1]$, $[0, -2, 0, 1, 1, 1, 1, 1]$, $[0, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 0]$, $[0, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 1]$, $[0, -1, -1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $[0, -1, -1, 1, 1, 0, 1, 0]$, $[0, -1, -1, 1, 1, 0, 1, 1]$,

[0, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, -1, 0, 0, 1, 1, 0, 0], [0, -1, 0, 0, 1, 1, 0, 1], [0, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 1], [0, -1, 0, 1, 0, 0, 1, 0], [0, -1, 0, 1, 0, 0, 1, 1], [0, -1, 0, 1, 0, 1, 1, 1], [0, -1, 0, 1, 1, 0, 0, 0], [0, -1, 0, 1, 1, 0, 0, 1], [0, -1, 0, 1, 1, 1, 1, 1], [0, -1, 0, 1, 1, 1, 2], [0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0, 0, -1, -1, 0], [0, 1, 1, 0, 0, 0, -1, 0], [0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 2, 1, 0, -1, -1, -1, 0].

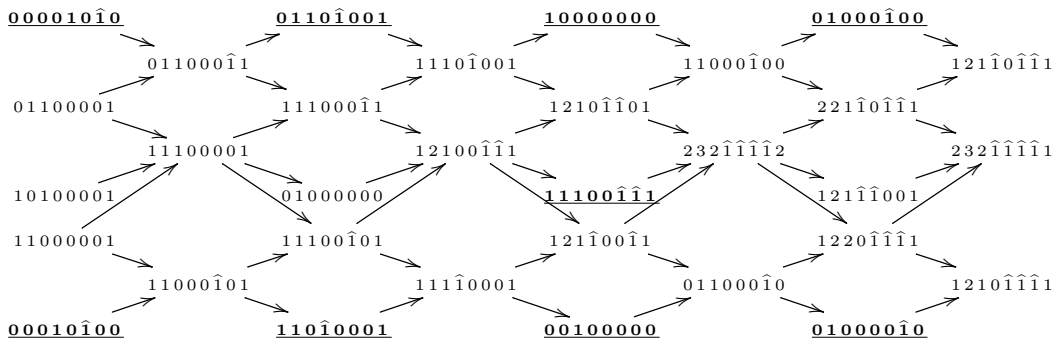
3° Przy pomocy algorytmu opisanego w rozdziale 4.2 ustawiamy zbiór $\hat{\partial}_{L_{119}}^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_{L_{119}}}^{red}$ w $\hat{\Phi}_{L_{119}}$ -orbity. Otrzymujemy w ten sposób fragmenty 8 $\hat{\Phi}_{L_{119}}$ -orbit:

I	II	III	IV
⋮	⋮	⋮	⋮
1,2,1,0,0,-1,-1,1	1,2,1,-1,0,0,-1,1	1,1,1,0,0,-1,-1,1	1,1,1,0,-1,-1,0,1
1,1,1,0,0,0,0,1	1,1,1,0,0,-1,0,1	0,1,0,0,0,0,0,0	0,1,0,0,0,0,-1,0
1,1,1,0,0,0,0,2	1,1,0,0,0,0,0,1	1,0,1,0,0,0,0,1	0,0,1,0,0,0,0,0
0,0,0,1,1,0,0,1	0,0,1,1,0,0,0,1	0,1,0,0,0,0,0,1	1,1,0,-1,0,0,0,1
0,-1,0,1,1,1,1,1	0,0,0,0,1,1,0,1	0,-1,0,1,1,0,0,0	0,0,0,1,0,-1,0,0
0,-1,0,1,1,1,1,2	0,-1,0,1,1,0,1,1	0,0,0,0,0,1,1,1	0,0,0,0,0,1,0,0
-1,-2,-1,2,2,1,1,1	0,-1,-1,1,1,1,1,1	0,-1,0,1,1,0,0,1	0,0,1,0,0,0,0,1
-1,-3,-1,2,2,2,2,1	-1,-2,0,2,1,1,1,1	-1,-1,-1,1,1,1,1,0	
⋮	⋮	⋮	⋮
V	VI	VII	VIII
⋮	⋮	⋮	⋮
1,2, 1,-1,0,-1,-1,0	1,2,1,-1,0,-1,-1,1	2,2,1,-1,0,-1,-1,1	1,1,0,0,0,-1,-1,0
2,2,1,-1,-1,-1,0,1	1,1,0,0,0,-1,0,0	1,2,1,0,-1,-1,0,1	0,1,1,0,-1,0,0,0
1,2,1,0,-1,-1,-1,1	1,1,1,0,-1,0,0,1	1,1,1,0,0,0,-1,1	1,1,1,-1,0,0,-1,1
0,1,1,0,0,0,-1,0	0,1,1,0,0,0,-1,1	0,1,1,0,0,0,0,1	0,1,0,0,0,-1,0,0
1,1,1,-1,0,0,0,1	0,0,0,0,1,0,0,0	1,0,0,0,1,0,0,1	1,0,0,0,0,0,0,0
1,1,0,0,0,-1,0,1	1,0,0,0,0,0,1,1	0,0,0,1,0,0,1,1	0,1,1,0,-1,0,0,1
0,0,0,1,0,0,0,0	0,0,0,1,0,0,0,1	0,-1,0,1,1,1,0,1	0,0,0,0,1,0,-1,0
0,0,1,0,0,1,0,1	-1,-1,0,1,1,1,0,0	-1,-1,0,1,1,1,1,1	0,0,0,0,0,0,1,0
⋮	⋮	⋮	⋮

4° Z $\hat{\Phi}_{\hat{q}_I}$ -orbit przedstawionych w punkcie 3° budujemy fragment kołczanu (digrafu) oczkowego dla pierwiastków $\hat{\partial}_{L_{119}}^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_{L_{119}}}$. Algorytm konstruujący kołczan (digraf) oczkowy można znaleźć w [55, 56, 57] (patrz rozdział 4.2 (algorytm 4.2.11)).

Przedstawiamy fragment kołczanu $\hat{\Phi}_I$ -oczkowego dla zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_{\hat{q}_I} = \{v \in \mathbb{Z}^8; \hat{q}_I(v) = 1\}$ o defekcie dodatnim $\hat{\partial}_I^+$.

$$\Gamma(\partial_{L_{119}}^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_{L_{119}}}, \hat{\Phi}_{L_{119}}) :$$



Przez $\hat{a} \in \mathbb{Z}$ oznaczamy $-a$.

5° Obliczamy $\text{cox}_I(t)$ dla posetu I . Ponieważ wielomian Coxetera $\text{cox}_I(t)$ dla posetu I jest równy wielomianowi Coxetera dla $\tilde{\mathbb{E}}_7$ przedstawionemu w lemacie 1.4.10, stąd zachodzi przypuszczenie, że \hat{b}_I jest \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważny (zobacz definicja 1.3.5) z \bar{b}_{Δ_I} , gdzie Δ_I jest grafem Euklidesa $\tilde{\mathbb{E}}_7$

6° Korzystając z przedstawionego wyżej fragmentu $\hat{\Phi}$ -oczkowego kołczanu wykazujemy, że $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$. Do tego celu używamy podstawowej konfiguracji pierwiastków dla $\tilde{\mathbb{E}}_7$ przedstawionej w tabeli 3.5.4.

Znajdujemy wektory $h(e_1), \dots, h(e_8)$ w $\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{119}}^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}, \hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{119}})$ odpowiadające wektorom bazowym $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4, e_5, e_6, e_7, e_8$ z podstawowej konfiguracji pierwiastków dla $\tilde{\mathbb{E}}_7$. Zostały one podkreślone w $\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{119}}^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}, \hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{119}})$. Wówczas macierz $B \in \mathbb{M}_8(\mathbb{Z})$ o $\det B \in \{-1, +1\}$ zadająca \mathbb{Z} -dwuliniową równoważność, tzn. spełniająca $B \cdot \hat{C}_I \cdot B^{tr} = \check{G}_{\tilde{\mathbb{E}}_7}$, ma następującą postać:

$$B = \begin{bmatrix} h(e_1) \\ h(e_2) \\ h(e_3) \\ h(e_4) \\ h(e_5) \\ h(e_6) \\ h(e_7) \\ h(e_8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Łatwo widać, że}$$

$$B \cdot \hat{C}_{\mathbb{L}_{119}} \cdot B^{tr} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \check{G}_{\tilde{\mathbb{E}}_7},$$

co kończy dowód $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$, gdzie $\Delta_I = \tilde{\mathbb{E}}_7$.

7° Opisujemy teraz zbiór pierwiastków $\hat{\partial}_{\mathbb{L}_{119}}^0 \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}$.

7.1° Wybieramy ze zbioru $\mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}^{\text{red}}$, znalezionej w 1°, te pierwiastki v , dla których $\hat{\partial}_{\mathbb{L}_{119}}(v) = 0$. Otrzymujemy w ten sposób 20 pierwiastków z $\hat{\partial}_{\mathbb{L}_{119}}^0 \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}^{\text{red}}$:

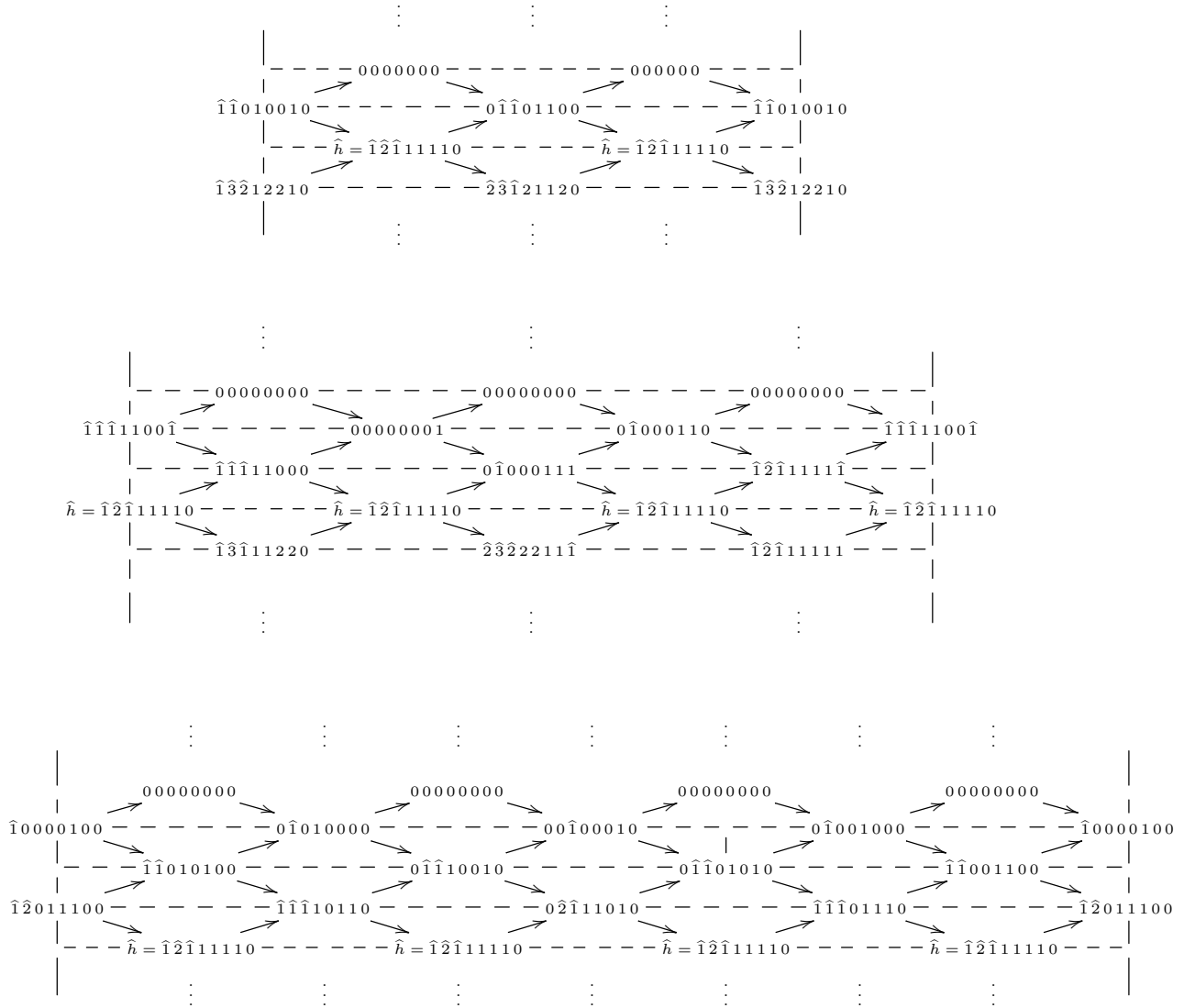
$$\begin{aligned} & [0, -2, -1, 1, 1, 0, 1, 0], [0, -1, -1, 0, 1, 0, 1, 0], [0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, 0], [0, -1, -1, 1, 0, 0, 1, 0], \\ & [0, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 0], [0, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1], [0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0], \\ & [0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, -1], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0], \\ & [0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, -1, -1, -1], [0, 1, 0, 0, 0, -1, -1, 0], \\ & [0, 1, 1, -1, 0, 0, -1, 0], [0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 0], [0, 1, 1, 0, -1, 0, -1, 0], [0, 2, 1, -1, -1, 0, -1, 0]. \end{aligned}$$

7.2° Z $\hat{\partial}_{\mathbb{L}_{119}}^0 \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}^{\text{red}}$ można utworzyć 12 $\hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{119}}$ -orbit. Przedstawiamy teraz 6 $\hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{119}}$ -orbit, pozostałych 6 powstaje z poniższych przez zastąpienie każdego wektora v pierwiastkiem $-v$.

I	II	III	IV	V	VI
-1,-1,0,1,0,0,1,0	-1,-1,-1,1,1,0,0,-1	-1,-2,-1,1,1,1,-1	-1,-1,-1,0,1,1,1,0	-1,-1,0,0,1,1,0,0	-1,0,0,0,0,1,0,0
0,-1,-1,0,1,1,0,0	0,0,0,0,0,0,0,1	-1,-1,-1,1,1,0,0,0	-1,-2,0,1,1,1,0,0	-1,-1,0,1,0,1,0,0	0,-1,0,1,0,0,0,0
	0,-1,0,0,0,1,1,0	0,-1,0,0,0,1,1,0	-1,-1,-1,0,1,1,1,0	0,-1,-1,1,0,0,1,0	0,0,-1,0,0,0,1,0
			0,-2,-1,1,1,0,1,0	0,-1,-1,0,1,0,1,0	0,-1,0,0,1,0,0,0

7.3° Przy pomocy implementacji algorytmu opisanego w rozdziale 4.2 (algorytm 4.2.7) budujemy z $\widehat{\Phi}_{\mathbb{L}_{119}}$ -orbit opisanych w punkcie 7.2° następujące tuby klepsydralne rangi 2, 3 oraz 4:

Tuby klepsydralne $\Gamma(\widehat{\partial}_{\mathbb{L}_{119}}^0 \mathcal{R}_{\widehat{q}_{\mathbb{L}_{119}}} \cup \text{Ker}_{\widehat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}, \widehat{\Phi}_{\mathbb{L}_{119}})$:



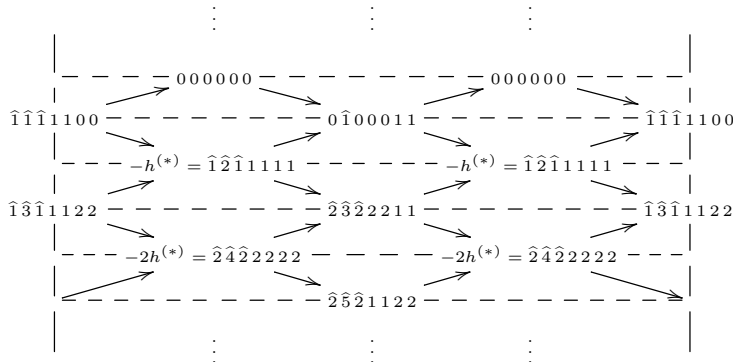
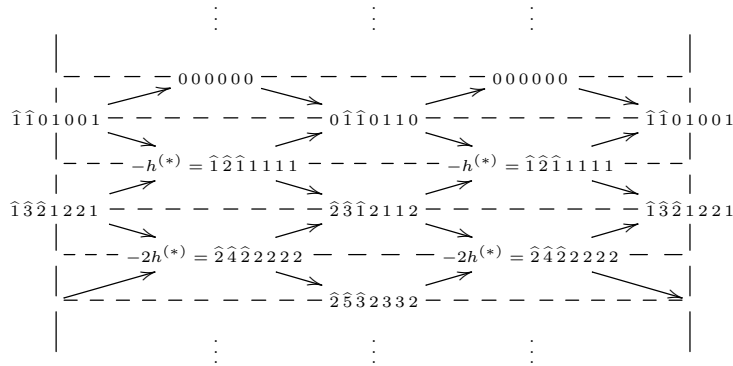
Zatem $\mathbf{tub}_{\widehat{q}_{\mathbb{L}_{119}}} = (2, 3, 4)$. W przypadku posetu $I = \mathbb{L}_{119}$ do wykazania $\widehat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} b_{\Delta_I}$, gdzie $\Delta_I = \widetilde{\mathbb{E}}_7$, nie potrzebowaliśmy zbioru $\widehat{\partial}_I^0 \mathcal{R}_{\widehat{q}_I}$ (punkt 7°). Do wykazania $b_T \sim_{\mathbb{Z}} b_{\Delta_T}$, gdzie $\Delta_T = \widetilde{\mathbb{D}}_6$, potrzebujemy również zbioru pierwiastków $\widehat{\partial}_I^0 \mathcal{R}_{q_T}$, gdzie $T = I \setminus \{*\}$.

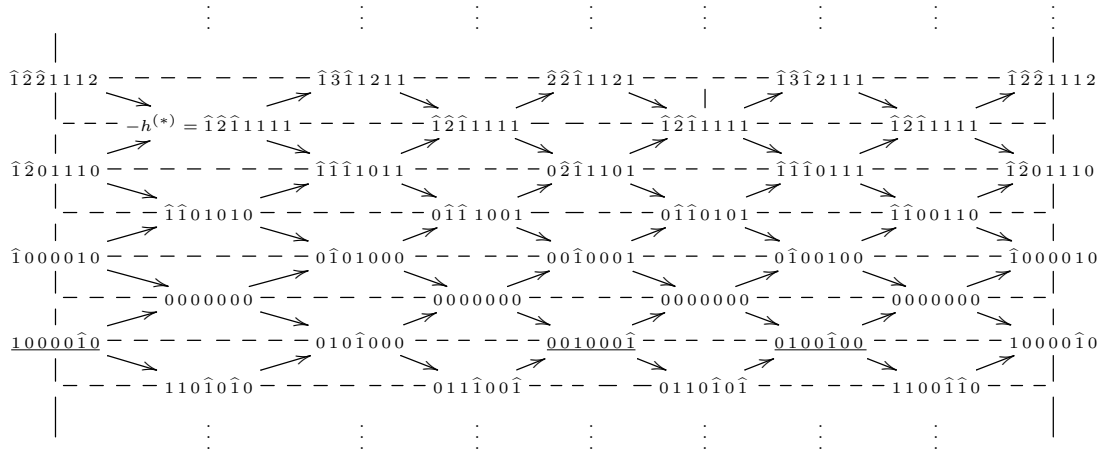
(b) Ponieważ I jest TP -wyjątkowy, więc funkcjonal incydencji q_T posetu T powstałego z posetu $I = \mathbb{L}_{119}$ przez usunięcie pika $*$ jest P -krytyczny. Wielomian Coxetera $\text{cox}_T(t)$ posetu $T = \mathbb{T}_{119}$ jest równy wielomianowi Coxetera dla $\widetilde{\mathbb{D}}_6$ przedstawionemu w lemacie 1.4.10. Wykażemy, że b_T jest \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważny z \bar{b}_{Δ_T} , gdzie $\Delta_T = \widetilde{\mathbb{D}}_6$.

Wektor $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_T$, defekt ∂_T oraz zredukowana liczba Coxetera \check{c}_T dla posetu T mają następującą postać: $\mathbf{h}=(1, 2, 1, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$, $\partial_T(x)=\partial_I(x)$, $\check{c}_T=4$.

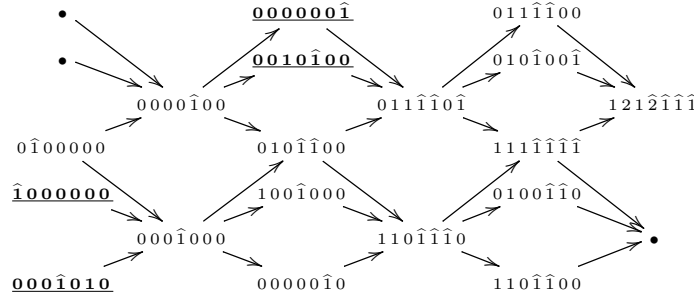
Podstawowa konfiguracja pierwiastków dla $\widetilde{\mathbb{D}}_6$ została przedstawiona w tabeli 3.5.4. Nie występują w niej wektory bazowe $\hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_5$, które mają defekt zerowy. Podstawowa konfiguracja pierwiastków o defekcie zerowym dla $\widetilde{\mathbb{D}}_6$ została przedstawiona w tabeli 3.5.5. Poniżej przedstawiamy kołczany (digrafy) Φ_T -oczkowe oraz tuby klepsydralne dla $T = \mathbb{T}_{119}$, zarówno dla pierwiastków o defekcie $\partial_T : \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}^7$ zerowym ∂_T^0 , jak i o defekcie ujemnym ∂_T^- . Zostały one znalezione w analogiczny sposób jak w (a).

Tuby klepsydralne $\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{119}}^0 \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{119}}} \cup \widetilde{\text{Ker}} q_{\mathbb{T}_{119}}, \Phi_{\mathbb{T}_{119}})$:





$\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{119}}^- \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{119}}}, \Phi_{\mathbb{T}_{119}}) :$



Znajdujemy wektory $h(e_1), h(e_2), h(e_6), h(e_7)$ w $\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{119}}^- \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{T}_{119}}}, \hat{\Phi}_{\mathbb{T}_{119}})$ oraz wektory $h(e_3), h(e_4), h(e_5)$ w $\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{119}}^0 \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{119}}} \cup \text{Ker } q_{\mathbb{T}_{119}}, \Phi_{\mathbb{T}_{119}})$ odpowiadające wektorom bazowym $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_5, e_6, e_7$ z podstawowej konfiguracji pierwiastków dla $\tilde{\mathbb{D}}_6$. Zostały one podkreślone we fragmentach kołczanów Φ_T -oczkowych $\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{119}}^- \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{119}}}, \Phi_{\mathbb{T}_{119}})$ oraz $\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{119}}^0 \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{119}}}, \Phi_{\mathbb{T}_{119}})$. Wówczas macierz $\tilde{B} \in \mathbb{M}_7(\mathbb{Z})$ o wyznaczniku $\det \tilde{B} \in \{-1, +1\}$ zadająca \mathbb{Z} -dwuliniową równoważność, tzn. spełniająca $\tilde{B} \cdot C_T \cdot \tilde{B}^{tr} = \tilde{G}_{\tilde{\mathbb{D}}_6}$, ma następującą postać:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} h(e_1) \\ h(e_2) \\ h(e_3) \\ h(e_4) \\ h(e_5) \\ h(e_6) \\ h(e_7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Łatwo widać, że

$$\tilde{B} \cdot C_{\mathbb{T}_{119}} \cdot \tilde{B}^{tr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \check{G}_{\widetilde{\mathbb{D}}_6},$$

co kończy dowód $b_T \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\widetilde{\mathbb{D}}_6}$.

W tabeli 3.5.4 przedstawiamy fragmenty kołczanów $\overline{\Phi}_{\Delta}$ -oczkowych dla grafów Euklidesa $\Delta \in \{\widetilde{\mathbb{D}}_4, \widetilde{\mathbb{D}}_5, \widetilde{\mathbb{D}}_6, \widetilde{\mathbb{D}}_7, \widetilde{\mathbb{E}}_6, \widetilde{\mathbb{E}}_7, \widetilde{\mathbb{E}}_8\}$ zawierające wektory bazowe znajdujące się „blisko siebie”. Wykorzystujemy je do znalezienia macierzy zadających \mathbb{Z} -dwuliniowe równoważności między prawie TP -krytycznymi posetami jednopikowymi przedstawionymi w rozdziale 3.3 a grafami Euklidesa Δ . Przez \hat{e}_i dla $i \leq n$ oznaczamy wektor $-e_i$.

Tabela 3.5.4. Podstawowa konfiguracja pierwiastków dla wybranych grafów Euklidesa

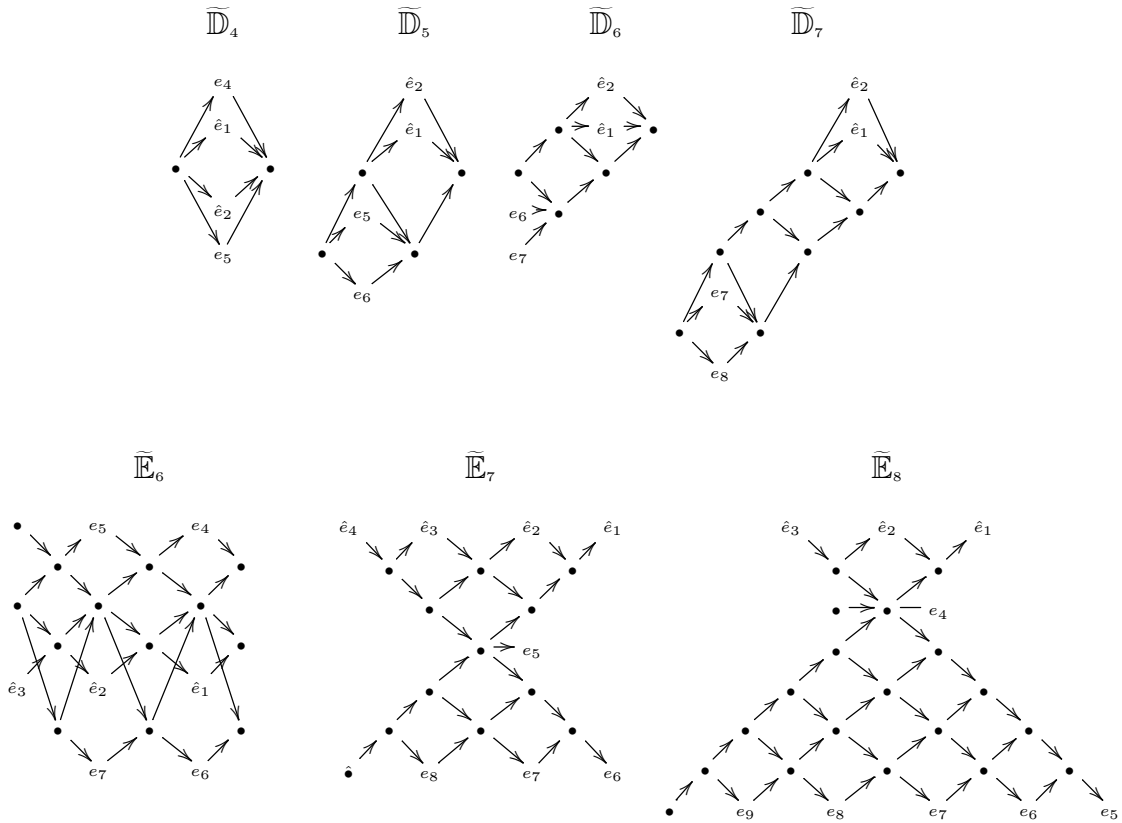
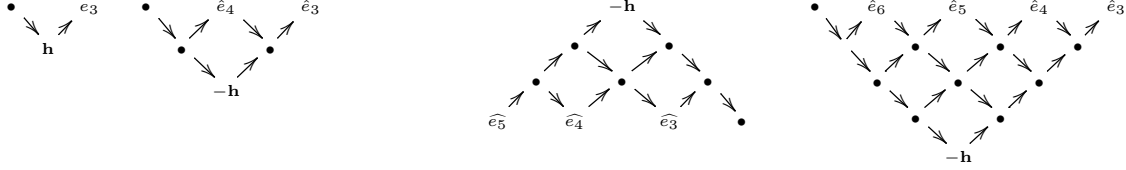


Tabela 3.5.5. Podstawowa konfiguracja pierwiastków o defekcie zerowym dla grafów Euklidesa $\tilde{\mathbb{D}}_4, \tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7$



Przedstawiamy teraz twierdzenie, z którego wynika \mathbb{Z} -dwuliniowa równoważność $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_I}$, gdzie I jest prawie TP -krytycznym posetem jednopikowym, zaś Δ_I jednym z grafów Euklidesa przedstawionych w tabeli 1.4.9. Jeśli dodatkowo I jest TP -wyjątkowy, to $b_T \sim_{\mathbb{Z}} \bar{b}_{\Delta_T}$, gdzie $T = I \setminus \{*\}$ zaś Δ_T jest jednym z grafów Euklidesa.

Z twierdzenia 3.5.6 wynika, że jeśli I, I' są prawie TP -krytycznymi posetami oraz $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_{I'}(t)$, to $\hat{b}_I \sim_{\mathbb{Z}} \hat{b}_{I'}$. Jeśli I, I' są TP -wyjątkowymi posetami oraz $\text{cox}_T(t) = \text{cox}_{T'}(t)$, to dodatkowo $b_T \sim_{\mathbb{Z}} b_{T'}$, gdzie $T = I \setminus \{*\}, T' = I' \setminus \{*\}$.

Twierdzenie 3.5.6. Niech $I = \{1, \dots, n, n+1 = *\}$ będzie skończonym posetem jednopikowym o elemencie maksymalnym $*$, zaś $\hat{q}_I : \mathbb{Z}^I = \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ prawie P -krytycznym funkcjonałem Titsa posetu I . Ponadto niech $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ będzie ustalonym wektorem takim, że $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

(a) Istnieją minimalna liczba całkowita $\check{c}_I \geq 2$ oraz homomorfizm grup $\hat{\partial}_I : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ takie, że $\hat{\Phi}^{\check{c}_I}(v) = v + \hat{\partial}_I(v) \cdot \mathbf{h}$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Jeśli I nie jest TP -krytyczny, to funkcjonal incydencji $q_T : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z}$ posetu $T = I \setminus \{*\}$ jest P -krytyczny, $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$, gdzie $\mathbf{h}^- = (h_1, \dots, h_n)$ oraz istnieją minimalna liczba całkowita $\check{c}_T \geq 2$ i homomorfizm grup $\partial_T : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z}$ takie, że $\Phi^{\check{c}_T}(v) = v + \partial_T(v) \cdot \mathbf{h}^-$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$.

(b) $5 \leq |I| \leq 9$, liczba Coxetera \mathbf{c}_I posetu I jest nieskończona, defekt Titsa $\hat{\partial}_I$ posetu I jest niezerowy oraz istnieje graf Euklidesa $\Delta_I \in \{\tilde{\mathbb{D}}_4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ (przedstawiony w 1.4.9) taki, że $\text{cox}_I(t) = F_{\Delta_I}(t)$ (gdzie F_{Δ_I} jest jednym z wielomianów Coxetera przedstawionych w 1.4.10) oraz $\check{c}_I = \check{c}_{\Delta_I}$. Ponadto istnieją \mathbb{Z} -odwracalne macierze $B, C \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ takie, że $\check{G}_{\Delta_I} = B \cdot \hat{C}_I \cdot B^{\text{tr}}, \hat{C}_I^{\text{tr}} = C^{\text{tr}} \cdot \hat{C}_I \cdot C$ oraz $C^2 = E$.

(c) Jeśli dodatkowo I jest prawie TP -krytyczny, ale nie jest TP -krytyczny, to liczba Coxetera \mathbf{c}_T posetu T jest nieskończona, defekt ∂_T posetu T jest niezerowy, $4 \leq |T| \leq 8$ oraz istnieje graf Euklidesa $\Delta_T \in \{\tilde{\mathbb{A}}_3, \tilde{\mathbb{A}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7\}$ taki, że

$$\text{cox}_T(t) = \begin{cases} F_{\Delta_T}^{(2)}(t) = t^4 - 2t^2 + 1, & \text{jeśli } \Delta_T = \tilde{\mathbb{A}}_3, \\ F_{\Delta_T}^{(3)}(t) = t^6 - 2t^3 + 1, & \text{jeśli } \Delta_T = \tilde{\mathbb{A}}_5, \\ F_{\Delta_T}(t), & \text{jeśli } \Delta_T \in \{\tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7\}, \end{cases}$$

oraz $\check{c}_T = \check{c}_{\Delta_T}$. Dodatkowo istnieją \mathbb{Z} -odwracalne macierze $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ takie, że $\check{G}_{\Delta_T} = B \cdot C_T \cdot B^{\text{tr}}, C_T^{\text{tr}} = C^{\text{tr}} \cdot C_T \cdot C$ oraz $C^2 = E$, gdzie C_T jest macierzą incydencji posetu T .

Dowód. (a) Z wniosku 3.2.7 wynika, że prawie TP -krytyczny poset I jest nieujemny oraz $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1})$, $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$. Zatem I jest główny i na

mocy twierdzenia 3.5.1 istnieje $\check{c}_I \geq 2$ oraz $\hat{\partial}_I : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ takie, że $\hat{\Phi}^{\check{c}_I}(v) = v + \hat{\partial}_I(v) \cdot \mathbf{h}$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Jeśli poset I jest prawie TP -krytyczny, ale nie jest TP -krytyczny, to na podstawie wniosku 3.2.7 funkcjonal incydencji q_T posetu T jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_T = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$, gdzie $\mathbf{h}^- = (h_1, \dots, h_n)$. Zatem q_T jest główny i na mocy twierdzenia 3.5.1 istnieją $\check{c}_T \geq 2$ oraz $\partial_T : \mathbb{Z}^T \rightarrow \mathbb{Z}$ takie, że $\Phi_T^{\check{c}_T}(v) = v + \partial_T(v) \cdot \mathbf{h}^-$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$. Zredukowane liczby Coxetera \check{c}_I , \check{c}_T oraz defekty $\hat{\partial}_I$, ∂_T zostały przedstawione w rozdziale 3.3 razem z rysunkami posetów prawie TP -krytycznych.

(b) Z twierdzenia 3.2.6 wynika, że $5 \leq |I| \leq 9$, zaś z twierdzenia 3.2.9 wynika, że I jest izomorficzny z jednym z posetów $\mathbb{L}_1, \dots, \mathbb{L}_{132}$ przedstawionych w podrozdziale 3.3. Korzystając z algorytmu opisanego w rozdziale 4.2 pokazujemy że jeśli $I \in \{\mathbb{L}_1, \dots, \mathbb{L}_{132}\}$, to $\partial_I \neq 0$. Stąd wynika (zobacz [56, Corollary 4.15]), że liczba Coxetera \mathbf{c}_I jest nieskończona. Przy pomocy procedury 3.5.7 znajdujemy macierz $B \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ taką, że $\check{G}_{\Delta_I} = B \cdot \hat{C}_I \cdot B^{tr}$, $\det B \in \{-1, +1\}$ oraz $\text{cox}_I(t) = F_{\Delta_I}(t)$, gdzie $\Delta_I \in \{\tilde{\mathbb{D}}_4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$. Ponieważ $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3$ są \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważne na mocy twierdzenia 3.4.7 oraz twierdzenia 3.4.8, więc podajemy macierz B tylko dla jednego ze wspomnianych posetów. Podobnie postępujemy z pozostałymi posetami, które są \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważne na mocy twierdzenia 3.4.7 oraz twierdzenia 3.4.8. Istnienie macierzy $C \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ takiej, że $\hat{C}_I^{tr} = C^{tr} \cdot \hat{C}_I \cdot C$ oraz $C^2 = E$ wynika z lematu 3.4.5.

Dowód (c) jest analogiczny do dowodu (b). □

Poniżej przedstawiamy macierze \mathbb{Z} -odwracalne B_i takie, że $\check{G}_{\Delta_I} = B_i \cdot \hat{C}_I \cdot B_i^{tr}$, dla $I = \mathbb{L}_i$, $i \leq 132$, oraz macierze \mathbb{Z} -odwracalne \tilde{B}_j takie, że $\check{G}_{\Delta_T} = \tilde{B}_j \cdot C_T \cdot \tilde{B}_j^{tr}$ (lub $\check{G}_{\Delta_T} = \tilde{B}_j \cdot C_T^{tr} \cdot \tilde{B}_j^{tr}$), dla $T = \mathbb{T}_j = \mathbb{L}_j \setminus \{*\}$, $116 \leq j \leq 132$. Nie są to macierze dla wszystkich posetów, gdyż jeśli poset J jest posetm $I^{op}, \delta_a I$ lub \tilde{I} , to jest on \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważny z I (patrz rozdział 3.4).

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{24} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{26} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{116} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \tilde{B}_{117} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \tilde{B}_{118} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\tilde{B}_{119} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{B}_{121} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\tilde{B}_{123} &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} & \tilde{B}_{124} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\tilde{B}_{126} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{B}_{127} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -6 & -3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\tilde{B}_{129} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{B}_{131} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Przedstawiamy teraz procedurę, która posłużyła do znalezienia macierzy \mathbb{Z} -odwracalnej B zadającej \mathbb{Z} -duliniową równoważność między prawie TP -krytycznym posetem I (odp.: posetem $T = I \setminus \{*\}$, gdy I jest TP -wyjątkowy) a $\Delta_I \in \{\tilde{\mathbb{D}}_4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ (odp.: $\Delta_T \in \{\tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7\}$).

Następująca procedura wykorzystuje [57, Lemma 4.3, Lemma 4.6] i jest modyfikacją [57, Algorithm 4.8.2], patrz również [52].

Procedura 3.5.7

Wejście: Prawie TP -krytyczny poset jednopikowy I (lub poset $T = I \setminus \{*\}$ w przypadku, gdy I jest TP -wyjątkowy).

Wyjście: Macierz \mathbb{Z} -odwracalna B taka, że $B \cdot \hat{C}_I \cdot B^{tr} = \check{G}_{DI}$ dla $DI \in \{\tilde{\mathbb{D}}_4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ (lub $B \cdot C_T \cdot B^{tr} = \check{G}_{DT}$ dla $DT \in \{\tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7\}$ i TP -wyjątkowego posetu I).

1° Oblicz wielomian Coxetera $\text{cox}_I(t)$ dla posetu I (odp.: $\text{cox}_T(t)$). Sprawdź, czy $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_{DI}(t)$ dla $DI \in \{\tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ (odp.: $\text{cox}_T(t) = \text{cox}_{DT}(t)$ dla $DT \in \{\tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7\}$).

2° Przy pomocy algorytmu 4.2.11 skonstruuj fragment $\hat{\Phi}_I$ -oczkowego (odp.: Φ_T -oczkowego) kołczanu dla pierwiastków $\mathcal{R}_{\hat{q}_I}$ (odp.: \mathcal{R}_{q_T}) o defekcie dodatnim lub ujemnym. Jeśli $DI = \tilde{\mathbb{D}}_4$ (odp.: $DT \in \{\tilde{\mathbb{D}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_6, \tilde{\mathbb{D}}_7\}$), to dodatkowo zbuduj fragment kołczanu $\hat{\Phi}_I$ -oczkowego (odp.: Φ_T -oczkowego) dla pierwiastków $\mathcal{R}_{\hat{q}_I}$ (odp.: \mathcal{R}_{q_T}) o defekcie zerowym (algorytm 4.2.7).

3° Odczytaj z tabeli 3.5.4 tabeli 3.5.5 podstawową konfigurację pierwiastków dla DI (odp.: DT) z kroku 1°.

4° Znajdź w kołczanach $\widehat{\Phi}_I$ -oczkowych posetu I (odp.: Φ_T -oczkowych posetu T) wektory $h(e_1), \dots, h(e_n), h(e_{n+1})$ odpowiadające wektorom e_1, \dots, e_n, e_{n+1} z podstawowej konfiguracji pierwiastków dla DI (odp.: DT), gdzie $|I| = n + 1$. Wówczas B jest macierzą taką,

$$\text{że } B = \begin{bmatrix} h(e_1) \\ h(e_2) \\ \vdots \\ h(e_n) \\ h(e_{n+1}) \end{bmatrix}.$$

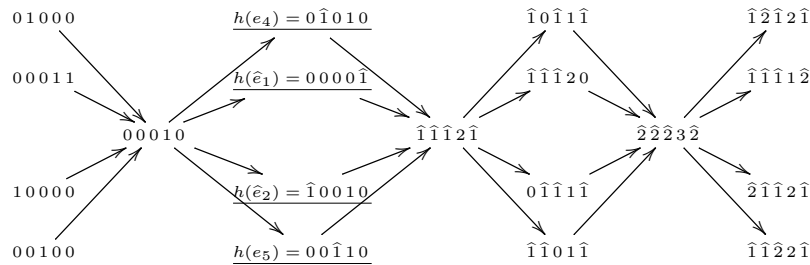
Przedstawiamy teraz fragmenty niektórych kołczanów oczkowych, które posłużyły do znalezienia macierzy B (z dowodu twierdzenia 3.5.6) zadających \mathbb{Z} -dwuliniowe równoważności między prawie TP -krytycznymi posetami I i odpowiadającymi im grafami Euklidesa DI . W przypadku posetów TP -wyjątkowych przedstawiamy również kołczany oczkowe dla posetów $T = I \setminus \{*\}$. Ponieważ część z tych posetów jest \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważna na mocy twierdzenia 3.4.7 i twierdzenia 3.4.8, więc przedstawiamy kołczany oczkowe tylko dla tych posetów prawie TP -krytycznych, które nie są postaci $J, J^{op}, \delta_a J$ dla pewnego prawie TP -krytycznego posetu J . Kołczany oczkowe dla wspomnianych posetów znajdują się na stronie internetowej [42].

W przypadku tych posetów I, T , które są \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważne z grafami Euklidesa $\widetilde{\mathbb{D}}_4, \widetilde{\mathbb{D}}_5, \widetilde{\mathbb{D}}_6, \widetilde{\mathbb{D}}_8$ do napisania macierzy B zadających \mathbb{Z} -dwuliniową równoważność potrzebne są również kołczany oczkowe złożone z pierwiastków o defekcie zerowym (algorytm 4.2.7).

Aby wykazać, że prawie TP -krytyczny poset jednopikowy I jest \mathbb{Z} -duliniowo równoważny z jendym z grafów Euklidesa $DI \in \{\mathbb{D}_4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ stosujemy procedurę 3.5.7. Dokładniej, znajdujemy macierz \mathbb{Z} -odwracalną $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ taką, że $B \cdot \widehat{C}_I \cdot B^{tr} = \check{G}_{DI}$. W celu znalezienia takiej macierzy budujemy fragmenty kołczanów $\widehat{\Phi}_I$ -oczkowych dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych I . Podkreślone w nich wektory, odpowiadają wektorom z kroku 4° procedury 3.5.7 i posłużyły one do utworzenia macierzy B zadającej wspomnianą równoważność. W przypadku posetów TP -wyjątkowych I stosujemy procedurę 3.5.7 również dla posetów $T = I \setminus \{*\}$.

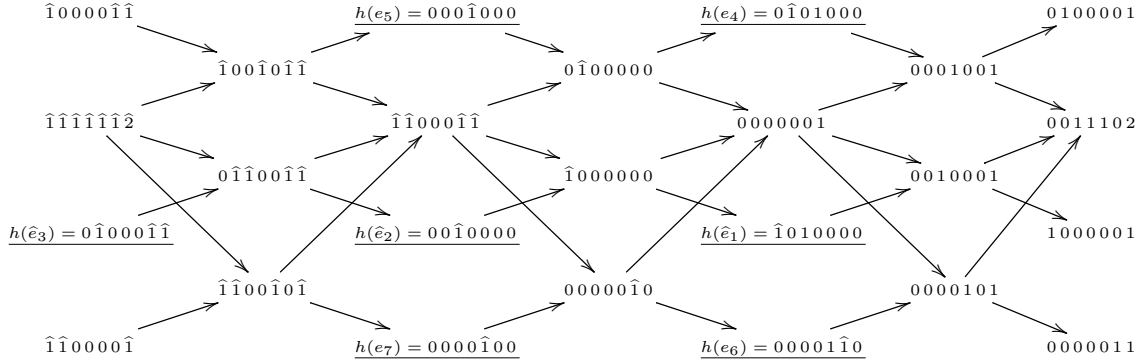
Dla \mathbb{L}_3 :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_3}^+ \mathcal{R}_{q_{\mathbb{L}_3}}, \widehat{\Phi}_{\mathbb{L}_3}) :$$



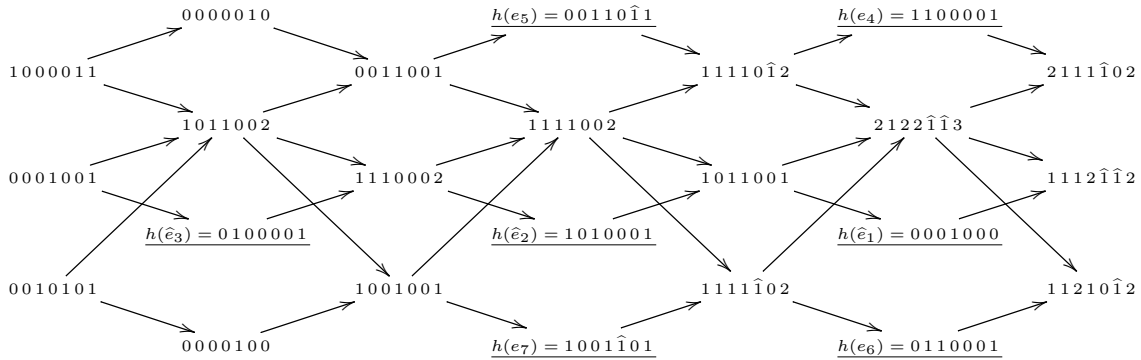
Dla \mathbb{L}_4 :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_4}^- \mathcal{R}_{q_{\mathbb{L}_4}}, \widehat{\Phi}_{\mathbb{L}_4}) :$$



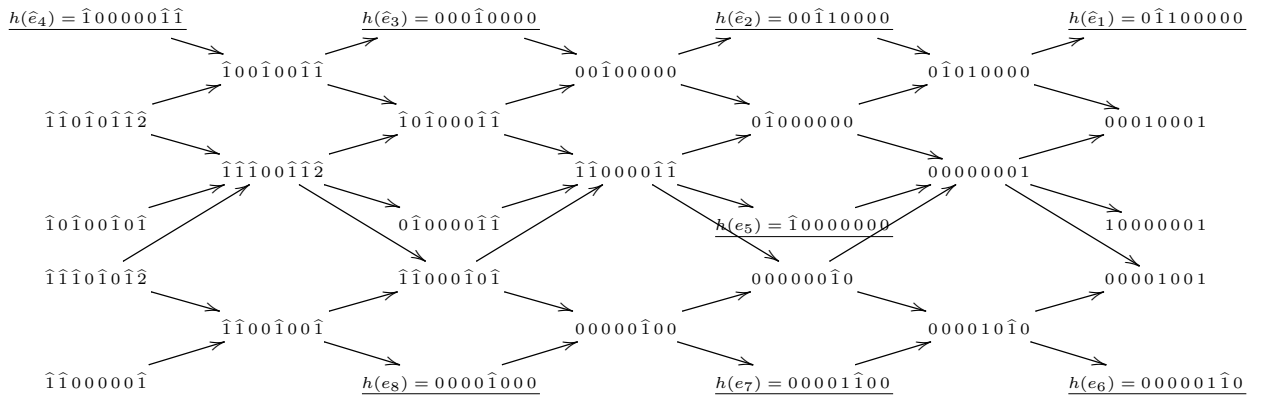
Dla \mathbb{L}_{10} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{10}}^+ \mathcal{R}_{q_{\mathbb{L}_{10}}}, \widehat{\Phi}_{\mathbb{L}_{10}}) :$$



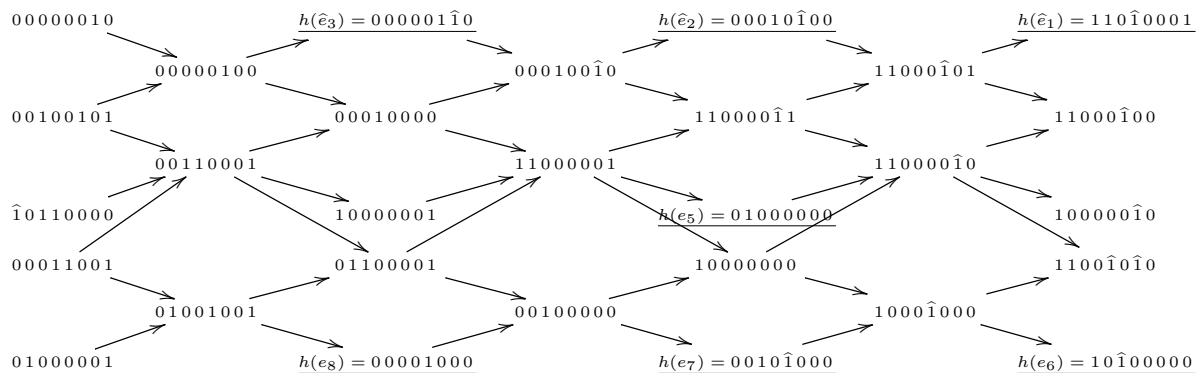
Dla \mathbb{L}_{12} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{12}}^- \mathcal{R}_{q_{\mathbb{L}_{12}}}, \widehat{\Phi}_{\mathbb{L}_{12}}) :$$



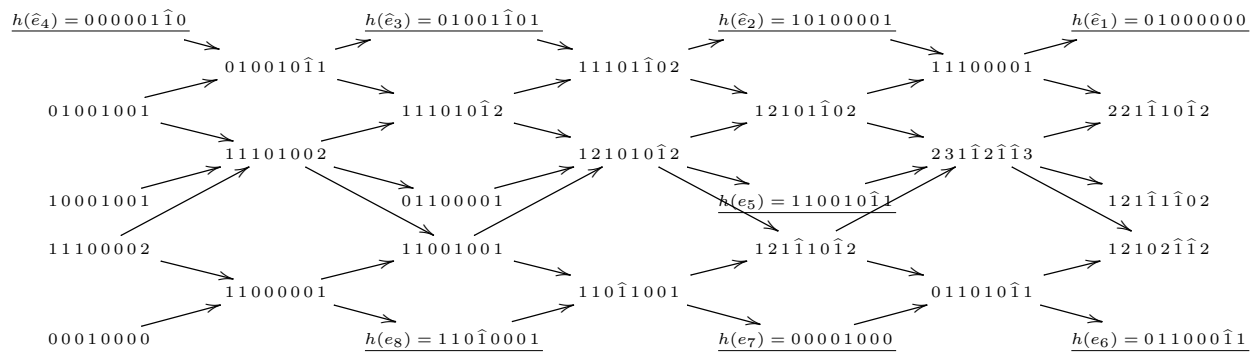
Dla \mathbb{L}_{24} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{24}}^+ \mathcal{R}_{q_{\mathbb{L}_{24}}}, \widehat{\Phi}_{\mathbb{L}_{24}}) :$$



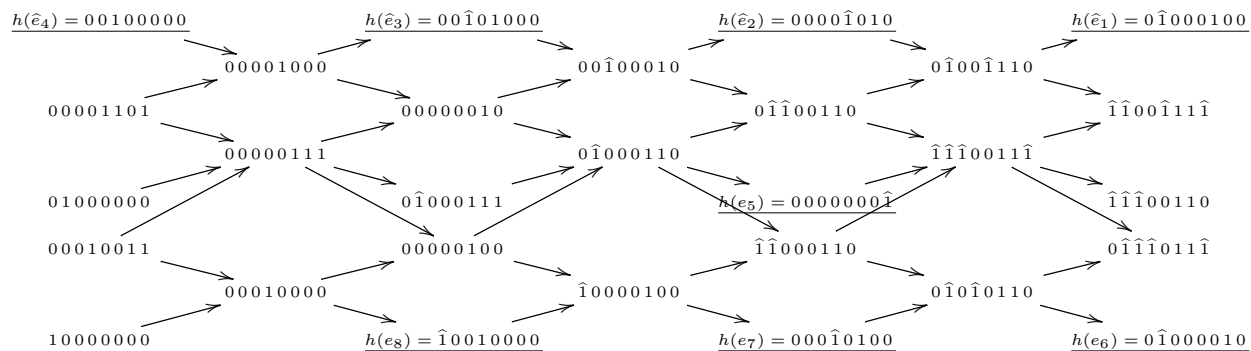
Dla \mathbb{L}_{26} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{26}}^+ \mathcal{R}_{q_{\mathbb{L}_{26}}}, \widehat{\Phi}_{\mathbb{L}_{26}}) :$$



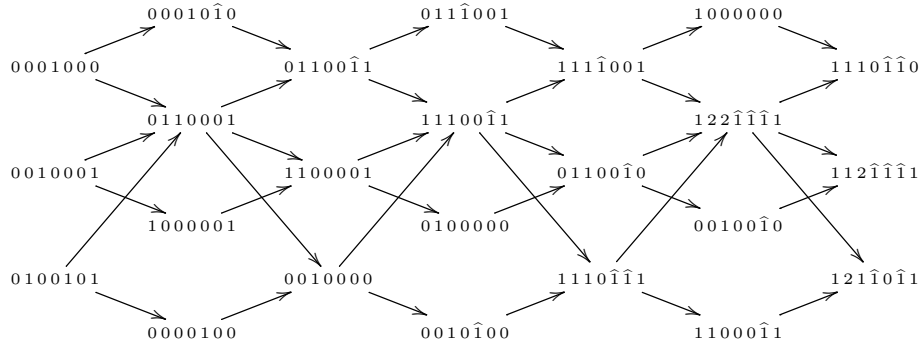
Dla \mathbb{L}_{29} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{29}}^+ \mathcal{R}_{q_{\mathbb{L}_{29}}}, \widehat{\Phi}_{\mathbb{L}_{29}}) :$$



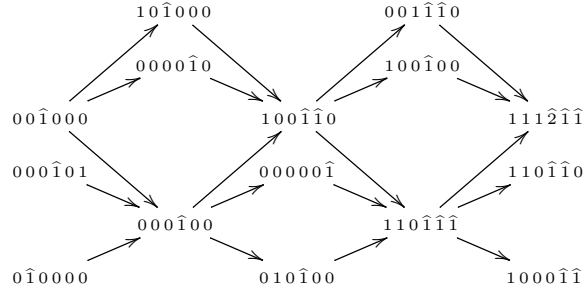
Dla \mathbb{L}_{118} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{118}}^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{118}}}, \hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{118}}) :$$

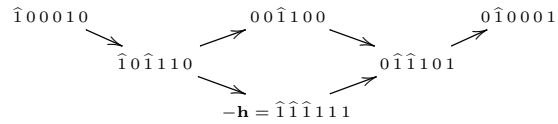


Dla \mathbb{T}_{118} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{118}}^- \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{118}}}, \Phi_{\mathbb{T}_{118}}) :$$



$$\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{118}}^0 \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{118}}} \cup \text{Ker } q_{\mathbb{T}_{118}}, \Phi_{\mathbb{T}_{118}}) :$$



Dla \mathbb{L}_{119} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{119}}^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{119}}}, \hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{119}}) :$$

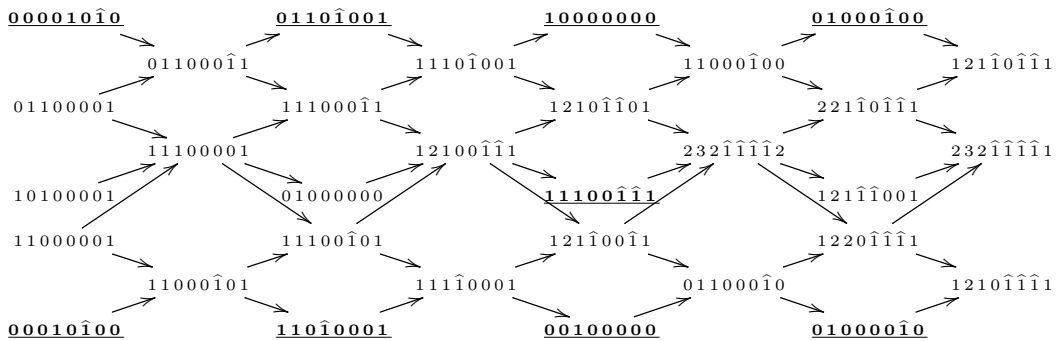
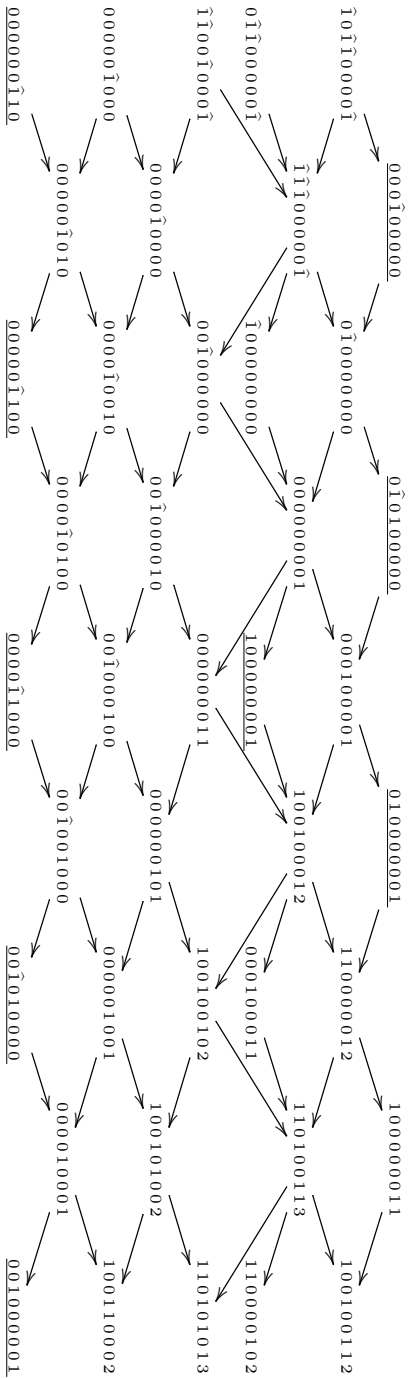


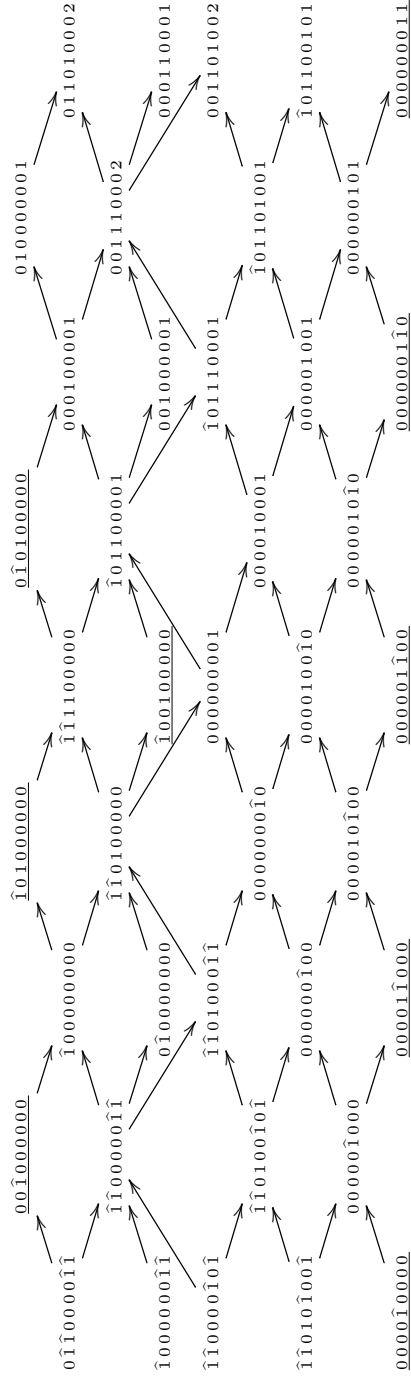
Diagram \mathbb{L}_{30} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{30}}^- \mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\mathbb{L}_{30}}}, \hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{30}}) :$$



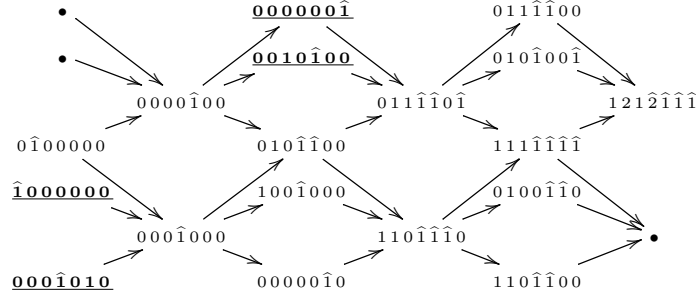
Dla \mathbb{L}_{58} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{58}}^-, \mathcal{R}_{\mathcal{Q}_{\mathbb{L}_{58}}}, \hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{58}}) :$$

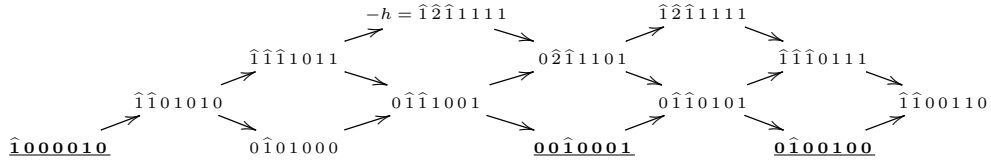


Dla \mathbb{T}_{119} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{119}}^- \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{119}}}, \Phi_{\mathbb{T}_{119}}) :$$

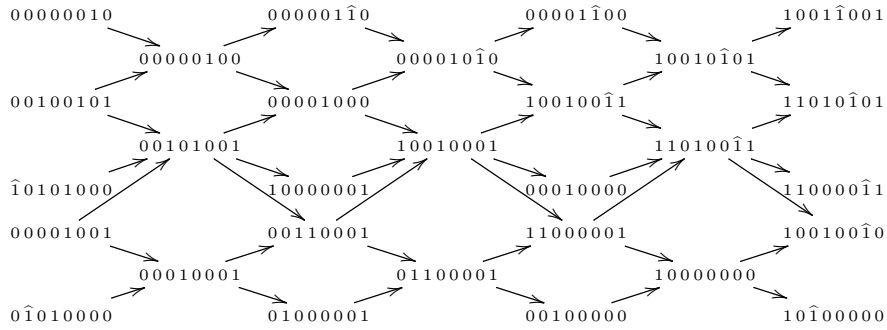


$$\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{119}}^0 \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{119}}} \cup \text{Ker } q_{\mathbb{T}_{119}}, \Phi_{\mathbb{T}_{119}}) :$$



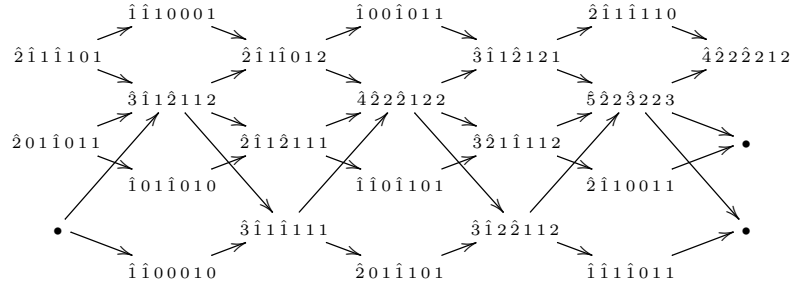
Dla \mathbb{L}_{121} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{121}}^+ \mathcal{R}_{q_{\mathbb{L}_{121}}}, \hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{121}}) :$$



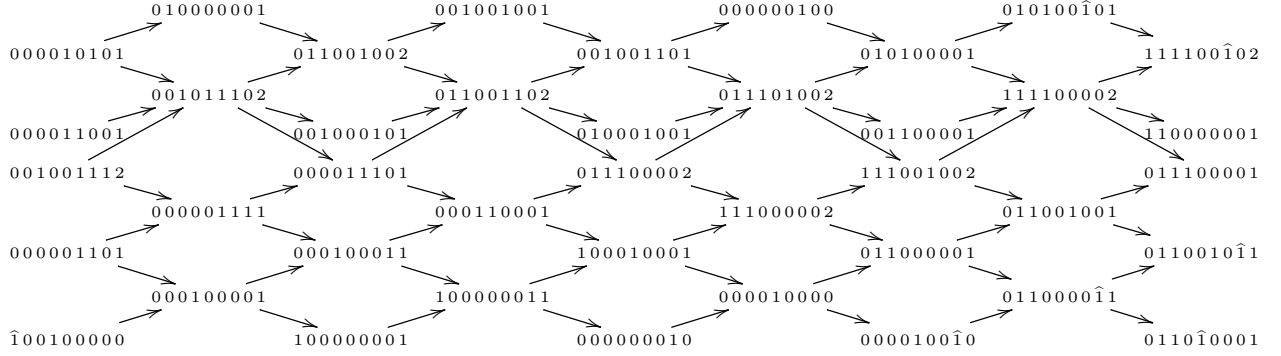
Dla \mathbb{T}_{121} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{121}}^- \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{121}}}, \Phi_{\mathbb{T}_{121}}) :$$



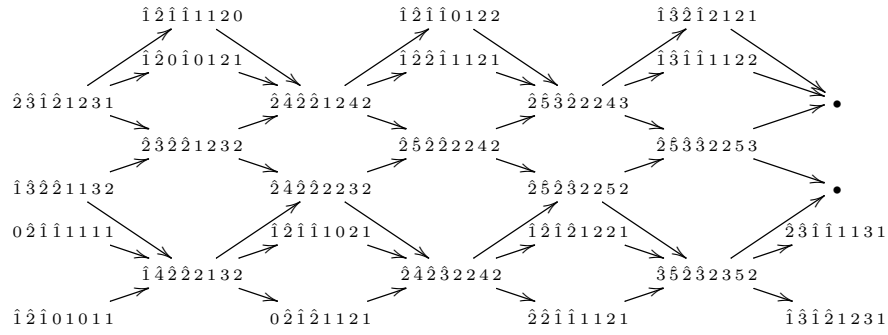
Dla \mathbb{L}_{123} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{123}}^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{123}}}, \hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{123}}) :$$



Dla \mathbb{T}_{123} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{123}}^- \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{123}}}, \Phi_{\mathbb{T}_{123}}) :$$



$$\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{123}}^0 \mathcal{R}_{q_{\mathbb{T}_{123}} \cup \text{Ker } q_{\mathbb{T}_{123}}}, \Phi_{\mathbb{T}_{123}}) :$$

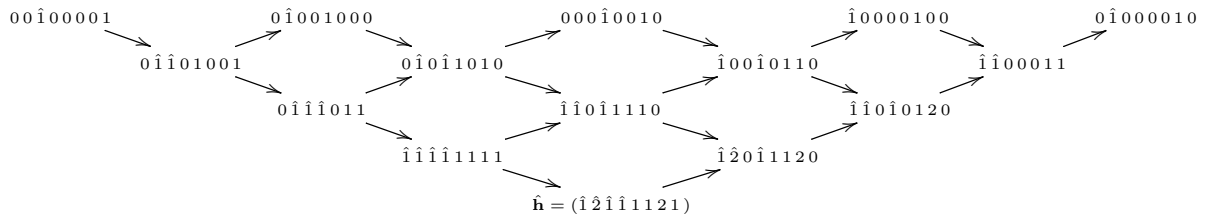
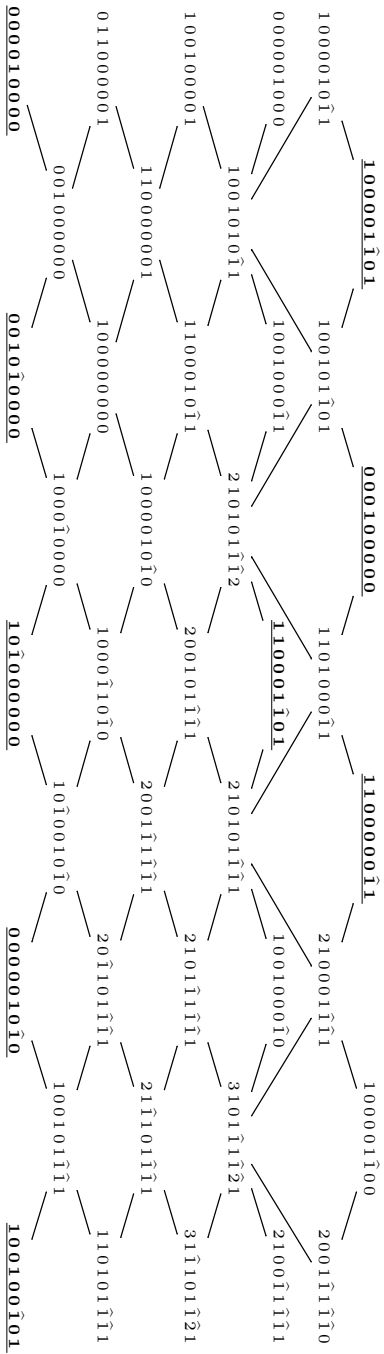


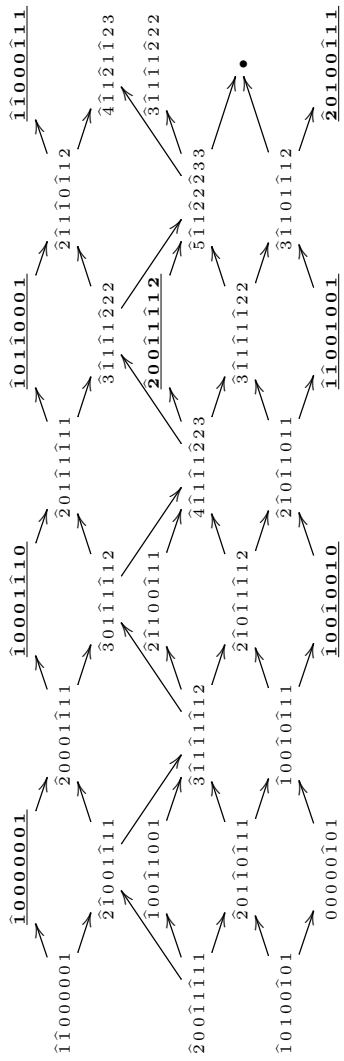
Diagram \mathbb{L}_{124} :

$$\Gamma(\partial_{\mathbb{L}_{124}}^+ \mathcal{R}_{\hat{q}_{\mathbb{L}_{124}}}, \hat{\Phi}_{\mathbb{L}_{124}}) :$$



Dla \mathbb{T}_{124} :

$\Gamma(\partial_{\mathbb{T}_{124}}^{\bar{}} \mathcal{R}^{q_{\mathbb{T}_{124}}, \Phi_{\mathbb{T}_{124}}}) :$



4. Pakiet algorytmów

W niniejszym rozdziale przedstawiamy pakiet algorytmów, które posłużyły do klasyfikacji spektralnej Coxetera P -krytycznych bigrafów oraz prawie TP -krytycznych posetów jednopi-
kowych wraz z oszacowaniem ich pesymistycznej złożoności czasowej. Zostały one zaimple-
mentowane w języku C#, a także w systemie algebry komputerowej Maple.

4.1. Algorytmy dla P -krytycznych bigrafów

W rozdziale tym przedstawiamy algorytmy, których używamy przy klasyfikacji spektralnej
Coxetera P -krytycznych bigrafów. Rozdział ten zawiera m.in. implementację grupy ortogo-
nalnej, na którą składa się macierzowa grupa permutacji oraz grupa macierzy znaku, tzn.
macierzy diagonalnych o współczynnikach $\{-1, +1\}$ na przekątnej. Opisujemy metodę, która
pozwala wyznaczyć reprezentantów parami różnych $O(n, \mathbb{Z})$ -orbit zarówno dla P -krytycznych
bigrafów o n wierzchołkach, jak i dla dodatnich bigrafów o n wierzchołkach. W rozdziale
tym przedstawiamy również algorytm konstruujący P -krytyczne bigrafy o $n + 1$ wierzchoł-
kach z dodatnich bigrafów o n wierzchołkach oraz ich wiernych pierwiastków. Do konstrukcji
 P -krytycznych bigrafów używamy dodatnich bigrafów uzyskanych za pomocą algorytmu opi-
sanego w tym rozdziale. Rozdział ten zawiera również opis algorytmu inflacyjnego [58, 31].
Posłużył on do wyznaczenia typu Euklidesa P -krytycznych bigrafów.

Tabele przedstawione w rozdziale 2.3 i rozdziale 2.4 zostały uzyskane przy pomocy obliczeń
komputerowych wykonanych według algorytmów przedstawionych w tym rozdziale.

Algorytm 4.1.1. (KRYTERIUMSYLVESTERA).

Wejście: Niesymetryczna macierz Grama \check{G}_Δ bigrafu Δ oraz $n = |\Delta_0| \geq 2$.

Wyjście: 1 jeśli Δ jest dodatni, 0 w przeciwnym wypadku.

1° Niech \hat{G}_Δ będzie podwojoną symetryczną macierzą Grama $\hat{G}_\Delta = \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}$ bigrafu
 Δ .

2° $k = 0$; $N = n$;

3° **if** ($\det \hat{G}_\Delta > 0$) $k = k + 1$;

4° $i = n$;

5° **while** ($i > 1$) {

6° Niech W będzie macierzą skonstruowaną z macierzy \hat{G}_Δ przez wybór pierwszych
 N wierszy i N kolumn;

7° Niech W będzie macierzą o $N - 1$ wierszach i $N - 1$ kolumnach skonstruowaną
z macierzy W przez usunięcie i -tego wiersza i i -tej kolumny;

8° **if** ($\det W > 0$) $k = k + 1$;

9° $i = i - 1$; $N = N - 1$;

10° }

11° **if** $n == k$ **return** 1;

12° **return** 0;

Uwaga . Ponieważ wyznacznik macierzy można policzyć w czasie $\mathcal{O}(n^3)$ i liczymy go n
razy, więc algorytm 4.1.1 ma złożoność czasową rzędu $\mathcal{O}(n^4)$.

Algorytm 4.1.2. JESTPKRYTYCZNY

Wejście: Niesymetryczna macierz Grama \check{G}_Δ bigrafu Δ oraz $n = |\Delta_0| \geq 2$.

Wyjście: 1 jeśli Δ is P -krytyczny, 0 w przeciwnym wypadku.

Δ .
 $\underline{1^\circ}$ Niech \widehat{G}_Δ będzie podwojoną symetryczną macierzą Grama $\widehat{G}_\Delta = \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}$ bigrafu
 $\underline{2^\circ}$ **if** (KRYTERIUMSYLVESTERA(\widehat{G}_Δ, n))==0){
 $\underline{3^\circ}$ **for**($i = 1; i \leq n; ++i$){
 $\underline{4^\circ}$ Niech L będzie macierzą powstałą z macierzy \widehat{G}_Δ przez usunięcie i -tego wiersza
i i -tej kolumny;
 $\underline{5^\circ}$ **if**(KRYTERIUMSYLVESTERA($L, n - 1$))==0)
 $\underline{6^\circ}$ **return** 0;}
 $\underline{7^\circ}$ **return** 1; }
 $\underline{8^\circ}$ **else return** 0;

Uwaga . Algorytm 4.1.2 ma złożoność czasową rzędu $\mathcal{O}(n^5)$, gdyż co najwyżej $n + 1$ razy wywołamy KRYTERIUMSYLVESTERA.

Przedstawiamy teraz implementację algorytmu Johnsona-Trottera [27, 61] opartego na transpozycji elementów sąsiednich, który posłużył nam do wygenerowania macierzowej grupy permutacji $\widehat{\mathbf{S}}_n$. Algorytm wraz z analizą można znaleźć w książce [34]. Ma on złożoność czasową rzędu $\Omega(n!)$.

Algorytm 4.1.3. GENERUJMACIERZOWAGRUPEPERMUTACJI

Wejście: Liczba całkowita $n \geq 2$.

Wyjście: Macierzowa grupa permutacji $\widehat{\mathbf{S}}_n \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

$\underline{1^\circ}$ **for**($i = 1; i \leq n; ++i$){
 $\underline{2^\circ}$ $P[i] = i$; // P jest wektorem o współczynnikach całkowitych
 $\underline{3^\circ}$ $C[i] = 1$; // C jest całkowitoliczbowym wektorem
 $\underline{4^\circ}$ $PR[i] = true$;} // PR jest wektorem boolowskim
 $\underline{5^\circ}$ $C[n] = 0$;
 $\underline{6^\circ}$ **for**($t = 1; t \leq n; ++t$)
 $\underline{7^\circ}$ $M[t, P[t]] = 1$; // M jest macierzą całkowitoliczbową
 $\underline{8^\circ}$ PMatrix.Add(M); // PMatrix jest listą macierzy permutacji
 $\underline{9^\circ}$ $i = 1$;
 $\underline{10^\circ}$ **while**($i < n$){
 $\underline{11^\circ}$ $i = 1; x = 0$;
 $\underline{12^\circ}$ **while**($C[i] == n - i + 1$){
 $\underline{13^\circ}$ $PR[i] = (PR[i] == true) ? false : true$;
 $\underline{14^\circ}$ $C[i] = 1$;
 $\underline{15^\circ}$ **if**($PR[i]$) $x ++$;
 $\underline{16^\circ}$ $i ++$; }
 $\underline{17^\circ}$ **if** ($i < n$){
 $\underline{18^\circ}$ **if** ($PR[i]$) $k = C[i] + x$;
 $\underline{19^\circ}$ **else** $k = n - i + 1 - C[i] + x$;
 $\underline{20^\circ}$ $P[k] \leftrightarrow P[k + 1]$
 $\underline{21^\circ}$ **for**($t = 1; t \leq n; ++t$)
 $\underline{22^\circ}$ $M[t, P[t]] = 1$;
 $\underline{23^\circ}$ PMatrix.Add(M);
 $\underline{24^\circ}$ $C[i] = C[i] + 1$;}
 $\underline{25^\circ}$ }
 $\underline{26^\circ}$ **return** PMatrix;

Przedstawimy teraz implementację grupy $\widehat{\mathbf{C}}_2^n \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ przy użyciu kodów Graya [29, 34]. Algorytm ten działa w czasie $\Omega(2^n)$.

Algorytm 4.1.4. GENERUJMACIERZEZNAKU**Wejście:** Liczba całkowita $n \geq 2$.**Wyjście:** Grupa $\widehat{\mathbf{C}}_2^n \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ macierzy diagonalnych o współczynnikach $\{-1, +1\}$ na przekątnej.

```

1° for( $t = 1; t \leq n; ++t$ )
2°    $B[t] = -1$ ;
3°    $i = 0; p = 1$ ;
4°   do{
5°     for( $t = 1; t \leq n; ++t$ ){
6°        $C[t-1] = B[t]$ ; //  $C$  jest całkowitoliczbowym wektorem
7°        $M[t, t] = C[t-1]$ ; //  $M$  jest macierzą o współczynnikach całkowitych
8°        $\text{SMatrix.Add}(M)$ ; //  $\text{SMatrix}$  jest listą macierzy diagonalnych
9°        $i++$ ;
10°       $j = i$ ;
11°       $p = 1$ ;
12°      while( $j \% 2 == 0$ ){
13°         $j = j/2$ ;
14°         $p++$ ;
15°        if ( $p \leq n$ ){
16°          if ( $B[p] == -1$ )  $B[p] = 1$ ;
17°          else  $B[p] = -1$ ;
18°        }while( $p \leq n$ );
19°      return  $\text{SMatrix}$ ;

```

Algorytm 4.1.5 (GENERUJFRAGMENTGRUPYORTOGONALNEJ).**Wejście:** Liczba całkowita $n \geq 2$, lista macierzy permutacji PMatrix oraz lista wszystkich macierzy znaku SMatrix o n -wierszach i n -kolumnach.**Wyjście:** Lista macierzy ortogonalnych $B \in \text{O}(n, \mathbb{Z})$ dla macierzy permutacji z PMatrix .

```

1° Utwórz pustą listę macierzy  $\text{AMatrix}$ ; //  $\text{SMatrix} = \text{GENERUJMACIERZEZNAKU}(n)$ ;
2° foreach(int[, ]  $P$  in  $\text{PMatrix}$ )
3°   foreach(int[, ]  $S$  in  $\text{SMatrix}$ ){
4°     Dodaj iloczyn macierzy  $P \cdot S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  do listy macierzy  $\text{AMatrix}$ , tzn.
 $\text{AMatrix.Add}(P \cdot S)$ ; }
5° return  $\text{AMatrix}$ ;

```

Uwaga 4.1.6. Korzystamy tu z [56, Lemma 2.3] (zobacz także twierdzenie 2.2.2) orzekającego, że każdą macierz ortogonalną $B \in \text{O}(n, \mathbb{Z})$ można jednoznacznie przedstawić jako iloczyn macierzy $B = \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}$, gdzie $\hat{\sigma} \in \widehat{\mathbf{S}}_n$ oraz $\hat{\varepsilon} \in \widehat{\mathbf{C}}_2^n$. W praktyce generujemy tylko podzbiór grupy ortogonalnej, dlatego jednym z parametrów jest PMatrix – lista macierzy permutacji (zwykle nie będą to wszystkie macierze permutacji z $\widehat{\mathbf{S}}_n$). Algorytm 4.1.5 ma złożoność czasową rzędu $\Theta(|\text{PMatrix}| \cdot 2^n)$.

W przedstawionych poniżej algorytmach z bigrafem Δ stowarzyszamy graf $\tilde{\Delta}$, który powstaje z bigrafu Δ przez zastąpienie wszystkich przerywanych krawędzi $\bullet - - \bullet$ ciągłymi krawędziami $\bullet \text{---} \bullet$. Przez $\check{G}_\Delta^\bullet = \text{NIESYMETRYCZNAMACIERZDLAGRAFU}(\check{G}_\Delta)$ oznaczamy niesymetryczną macierz Grama grafu $\tilde{\Delta}$ powstałego z bigrafu Δ o niesymetrycznej macierzy Grama \check{G}_Δ , zaś przez $\hat{G}_\Delta^\bullet = \text{SYMETRYCZNAMACIERZDLAGRAFU}(\hat{G}_\Delta)$ oznaczamy symetryczną macierz $\hat{G}_\Delta^\bullet = \check{G}_\Delta^\bullet + \check{G}_\Delta^{\bullet tr}$ dla grafu $\tilde{\Delta}$ o niesymetrycznej macierzy Grama \check{G}_Δ^\bullet , powstałego z bigrafu Δ o symetrycznej macierzy $\hat{G}_\Delta = \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}$.

Algorytm 4.1.7. (CZYNALEZADOTEJSAMEJORBITY).

Wejście: Niesymetryczne macierze Grama $\check{G}_{\Delta_1}, \check{G}_{\Delta_2} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ dwóch P -krytycznych (lub dwóch dodatnich) bigrafów Δ_1, Δ_2 oraz $n \geq 2$.

Wyjście: 1 jeśli Δ_1 i Δ_2 leżą w tej samej orbicie, 0 w przeciwnym wypadku.

1° Jeśli liczba zerowych współczynników w \check{G}_{Δ_1} i \check{G}_{Δ_2} jest różna, to **return** 0; w przeciwnym wypadku idź do 2°;

2° Utwórz podwojone symetryczne macierze Grama dla bigrafów Δ_1 i Δ_2 , tzn. $\widehat{G}_{\Delta_1} = \check{G}_{\Delta_1} + \check{G}_{\Delta_1}^{tr}$, $\widehat{G}_{\Delta_2} = \check{G}_{\Delta_2} + \check{G}_{\Delta_2}^{tr}$; utwórz pustą listę macierzy PMatrix.

3° Niech $\widehat{G}_{\Delta_1}^\bullet = \text{SYMETRYCZNAMACIERZDLAGRAFU}(\widehat{G}_{\Delta_1})$,
zaś $\widehat{G}_{\Delta_2}^\bullet = \text{SYMETRYCZNAMACIERZDLAGRAFU}(\widehat{G}_{\Delta_2})$.

4° Znajdź wszystkie macierze permutacji $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ takie, że $P^{tr} \cdot \widehat{G}_{\Delta_1}^\bullet \cdot P = \widehat{G}_{\Delta_2}^\bullet$ i dodaj je do listy macierzy PMatrix.

5° Jeśli lista PMatrix jest pusta, to **return** 0; w przeciwnym wypadku idź do 6°;

6° Niech OMatrix będzie fragmentem grupy ortogonalnej utworzonym z macierzy permutacji należących do PMatrix,
tzn. $\text{OMatrix} = \text{GENERUJFRAGMENTGRUPYORTOGONALNEJ}(n, \text{PMatrix}, \text{SMatrix})$, gdzie SMatrix jest listą macierzy znaku uzyskaną za pomocą $\text{GENERUJMACIERZEZNAKU}(n)$;

7° Sprawdź, czy istnieje macierz $B \in \text{OMatrix}$ taka, że $B^{tr} \cdot \widehat{G}_{\Delta_1}^\bullet \cdot B = \widehat{G}_{\Delta_2}^\bullet$. Jeśli nie istnieje, to **return** 0; w przeciwnym wypadku **return** 1;

Uwaga . Czynnikiem dominującym tego algorytmu jest wygenerowanie części grupy ortogonalnej, zawierającej w najgorszym razie $n! \cdot 2^n$ macierzy. To jak duży fragemnt grupy ortogonalnej jest generowany, zależy od liczby macierzy permutacji znajdujących się na liście PMatrix. W celu praktycznej poprawy złożoności obliczeniowej stosujemy w kroku 3° heurystyczną zasadę: bigrafy leżące w jednej orbicie są izomorficzne jako grafy. Dlatego po przejrzaniu co najwyżej $n!$ macierzy permutacji generujemy elementy macierzy ortogonalnej tylko dla pasujących permutacji. Przeważnie jest ich znacznie mniej niż $n!$, co istotnie redukuje czas działania algorytmu.

Algorytm 4.1.7 korzysta ze sprawdzenia, czy dwa grafy są izomorficzne. Jak dotąd nie udało się odpowiedzieć na pytanie, czy problem rozstrzygania izomorfizmu grafów należy do P, czy jest NP-zupełny.

Algorytm 4.1.8. (ROZNEORBITYBIGRAFOWOROWNEJLICZBIEZER)

Wejście: Niepusta lista H niesymetrycznych macierzy Grama P -krytycznych (lub dodatnich) bigrafów o n wierzchołkach i o tej samej liczbie zerowych współczynników oraz $n \geq 3$.

Wyjście: Lista niesymetrycznych macierzy Grama P -krytycznych (lub dodatnich) bigrafów będących reprezentantami parami różnych $O(n, \mathbb{Z})$ -orbit w P -kryt(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) (lub w $\text{dod}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$) oraz posiadających taką samą liczbę zerowych współczynników.

1° Utwórz puste listy macierzy AMatrix, AMatrix[•], SMatrix;

2° Dodaj pierwszą macierz z listy macierzy H do AMatrix, tzn. $\text{AMatrix.Add}(H[0])$;
Niech $H^\bullet[0] = \text{NIESYMETRYCZNAMACIERZDLAGRAFU}(H[0])$; dodaj macierz $H^\bullet[0]$ do listy macierzy AMatrix[•], tzn. $\text{AMatrix}^\bullet.\text{Add}(H^\bullet[0])$;

3° Wygeneruj listę macierzy permutacji $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ i dodaj do SMatrix, tzn. $\text{SMatrix} = \text{GENERUJMACIERZOWAGRUPEPERMUTACJI}(n)$;

4° **for**($i = 1; i < |H|; i++$) {

$\underline{5^\circ}$ Utwórz listę macierzy $WMatrix^\bullet$ postaci $P^{tr} \cdot \widehat{G}_\Delta^\bullet \cdot P$, gdzie $P \in SMatrix$, zaś $\widehat{G}_\Delta^\bullet = SYMETRYCZNAMACIERZDLAGRAFU(\widehat{H}[i])$, gdzie $\widehat{H}[i] = H[i] + H[i]^{tr}$;
 $\underline{6^\circ}$ Dla każdej macierzy $A^\bullet \in AMatrix^\bullet$ wykonaj 7° - 11° ;
 $\underline{7^\circ}$ Dla każdej macierzy $W^\bullet \in WMatrix^\bullet$ {
 $\underline{8^\circ}$ Utwórz pustą listę macierzy $PMatrix$;
 $\underline{9^\circ}$ Znajdź wszystkie macierze permutacji P takie, że $P^{tr} \cdot W^\bullet \cdot P = \widehat{A}^\bullet$, gdzie $\widehat{A}^\bullet = A^\bullet + A^{\bullet tr}$ i dodaj je do listy $PMatrix$; }
 $\underline{10^\circ}$ Jeśli lista $PMatrix$ jest niepusta, to

- wygeneruj fragment grupy ortogonalnej z macierzy permutacji zapisanych w $PMatrix$, tzn.

 $Ort = GENERUJFRAGMENTGRUPYORTOGONALNEJ(n, PMatrix, GENERUJMACIERZEZNAKU(n))$;

- wygeneruj listę macierzy $W1$ postaci $B^{tr} \cdot \widehat{H}[i] \cdot B$, gdzie $B \in Ort$, zaś $\widehat{H}[i] = H[i] + H[i]^{tr}$;
- sprawdź, czy któraś z macierzy znajdujących się na liście $W1$ jest równa macierzy $\widehat{A} = A + A^{tr}$ (tu sprawdzamy dla macierzy kodujących bigrafy), jeśli tak, to znaczy że leżą w tej samej orbicie i idź do kroku 4° ; jeśli nie, to idź do kroku 6° (tzn. wykonaj go dla kolejnej macierzy z listy $AMatrix^\bullet$);

 $\underline{11^\circ}$ Jeśli lista $PMatrix$ jest pusta, to idź do kroku 6° ;
 $\underline{12^\circ}$ Jeśli w krokach 7° - 11° dla żadnej macierzy z punktu 6° i nie znaleziono macierzy ortogonalnej świadczącej o przynależności do jednej z orbit których reprezentanci są zapisani w $AMatrix$, to dodaj $H[i]$ do listy $AMatrix$, tzn. $AMatrix.Add(H[i])$ oraz dodaj $H^\bullet[i]$ do $AMatrix^\bullet$, gdzie $H^\bullet[i] = NIESYMETRYCZNAMACIERZDLAGRAFU(H[i])$;
 $\underline{13^\circ}$ }
 $\underline{14^\circ}$ **return** $AMatrix$;

Uwaga . Algorytm jest rozszerzeniem algorytmu 4.1.7 dla przypadku większego zbioru wejściowych bigrafów. Ponownie testujemy najpierw izomorfizm grafów, czyli przeliczamy macierze permutacji zamiast macierzy ortogonalnych. W efekcie czas działania jest kilkukrotnie mniejszy od powtarzania testu (w pesymistycznym czasie $n! \cdot 2^n$) dla każdej spośród $|H|^2$ par bigrafów.

Algorytm 4.1.9. (ROZNEORBITYBIGRAFOW)

Wejście: Niepusta lista H niesymetrycznych macierzy Grama P -krytycznych (lub dodatnich) bigrafów o n wierzchołkach oraz $n \geq 3$.

Wyjście: Lista niesymetrycznych macierzy Grama P -krytycznych (lub dodatnich) bigrafów należących do parami różnych $O(n, \mathbb{Z})$ -orbit w P -**kryt** $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ (lub w **dod** $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$).

$\underline{1^\circ}$ Utwórz pustą listę macierzy $AMatrix$;
 $\underline{2^\circ}$ **for** ($i = 0; i \leq \frac{n \cdot (n-1)}{2}; i++$) {
 $\underline{3^\circ}$ Utwórz pustą listę macierzy $All[i]$;
 $\underline{4^\circ}$ Niech $L[i]$ będzie listą niesymetrycznych macierzy Grama wybranych z H i posiadających dokładnie i zerowych współczynników;
 $\underline{5^\circ}$ Wybierz parami różnych reprezentantów z listy $L[i]$ i dodaj do $All[i]$, tzn. $All[i] = ROZNEORBITYBIGRAFOWOROWNEJLICZBIEZER(L[i], n)$;
 $\underline{6^\circ}$ }
 $\underline{7^\circ}$ Dodaj macierze z listy $All[i]$ do listy $AMatrix$;
 $\underline{8^\circ}$ **return** $AMatrix$;

Uwaga . Dla ilustracji prezentujemy pomiar czasu działania algorytmu 4.1.9 zarówno na zbiorze dodatnich bigrafów, jak i na zbiorze P -krytycznych bigrafów. Dla dodatnich bigrafów

o $n = 5$ wierzchołkach wyznaczenie zbioru reprezentantów trwa zaledwie 99 milisekund, dla dodatnich bigrafów o $n = 6$ wierzchołkach zajmuje to 14 sekund, zaś dla dodatnich bigrafów o $n = 7$ wierzchołkach wyznaczenie zbioru reprezentantów trwa ponad 1027 sekund. Dla P -krytycznych bigrafów o $n = 6$ wierzchołkach wyznaczenie zbioru reprezentantów trwa zaledwie 67 milisekund, dla P -krytycznych bigrafów o $n = 7$ wierzchołka trwa to mniej niż 3 sekundy, zaś dla P -krytycznych bigrafów o $n = 8$ wierzchołkach potrzeba około 332 sekund.

Algorytm 4.1.10. (PKRYTYCZNEBIGRAFYZDODATNIEGOBIGRAFU)

Wejście: Niesymetryczna macierz Grama \check{G}_Δ dodatniego bigrafu Δ , lista W_Δ wiernych pierwiastków bigrafu Δ oraz $n = |\Delta_0| \geq 2$.

Wyjście: Lista niesymetrycznych macierzy Grama P -krytycznych bigrafów Δ' o $|\Delta'_0| = n + 1$ wierzchołkach utworzonych przy pomocy konstrukcji 2.2.8.

1° Utwórz podwojoną symetryczną macierz Grama $\widehat{G}_p = \check{G}_p + \check{G}_p^{tr}$ oraz pustą listę macierzy NMatrix;

2° **foreach**(int[] w in W_Δ) {

3° Utwórz niesymetryczną macierz Grama bigrafu Δ' w następujący sposób:

$$\check{G}_{\Delta'} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -w \cdot \check{G}_\Delta \\ \hline 0 & \check{G}_\Delta \end{array} \right];$$

4° **if**(JESTPKRYTYCZNY($\check{G}_{\Delta'}, n + 1$)) == 1)

5° Dodaj $\check{G}_{\Delta'}$ do listy NMatrix, tzn. NMatrix.Add($\check{G}_{\Delta'}$);

6° }

7° **return** NMatrix;

Uwaga 4.1.11. (a) Algorytm 4.1.10 ma złożoność czasową rzędu $\mathcal{O}(n^5 \cdot |W_\Delta|)$.

(b) W praktyce zamiast brać cały zbiór W_Δ wiernych pierwiastków bierzemy tylko jego połowę, tzn. jeśli wzięliśmy wektor wierny w taki, że $q_\Delta(w) = 1$, to nie bierzemy już wiernego pierwiastka $-w$. Korzystamy tu z obserwacji: P -krytyczny bigraf Δ' utworzony z dodatniego bigrafu Δ i jego wiernego pierwiastka w leży w tej samej orbicie, co P -krytyczny bigraf utworzony z dodatniego bigrafu Δ oraz wiernego pierwiastka $-w$.

Algorytm 4.1.12. (PKRYTYCZNEBIGRAFYZDODATNICHBIGRAFOW)

Wejście: GP – lista niesymetrycznych macierzy Grama dodatnich bigrafów o n wierzchołkach takich, że każde dwa bigrafy z GP należą do różnych $O(n, \mathbb{Z})$ -orbit w $\mathbf{dod}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ oraz $n \geq 3$.

Wyjście: Lista niesymetrycznych macierzy Grama P -krytycznych bigrafów o $n + 1$ wierzchołkach takich, że każde dwa bigrafy z tej listy należą do różnych $O(n, \mathbb{Z})$ -orbit w $\mathbf{Pkryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$.

1° Utwórz puste listy macierzy AMatrix, AMatrix• i M ;

2° **foreach**(int[,] P in GP) {

3° $W_p =$ lista wiernych pierwiastków dodatniego bigrafu o niesymetrycznej macierzy Grama P . Jest to tylko połowa wiernych pierwiastków, tzn. jeśli w jest w liście W_p , to $-w$ nie dodajemy do tej listy, gdyż dadzą one P -krytyczne bigrafy należące do tej samej $O(n + 1, \mathbb{Z})$ -orbity;

4° Utwórz P -krytyczne bigrafy z dodatniego bigrafu o niesymetrycznej macierzy Grama P i wiernych pierwiastków należących do listy W_p i dodaj je do listy M , tzn. $M = \mathbf{Pkryt}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})(P, W_p, n)$;

5° Dodaj listę M niesymetrycznych macierzy Grama P -krytycznych bigrafów do AMatrix i wyczyść listę M , tzn. $\text{AMatrix.Add}(M)$; $M = []$;

6° }

7° Wybierz z listy AMatrix niesymetryczne macierze Grama P -krytycznych bigrafów takich, że każde dwa bigrafy należą do różnych $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbit w P -**kryt** $(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$ i dodaj je do listy AMatrix^\bullet ; do wyboru reprezentantów użyj $\text{ROZNEORBITYBIGRAFOW}(\text{AMatrix}, n+1)$;

8° **return** AMatrix^\bullet ;

Uwaga . Złożoność algorytmu 4.1.12 jest zdominowana przez wyznaczanie różnych $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbit (krok 7°) dla zbioru bigrafów otrzymanego w poprzednich punktach. Moc tego zbioru bigrafów jest ograniczona przez $\sum_{p \in \text{GP}} \frac{|W_p|}{2}$, gdzie W_p jest zbiorem wiernych pierwiastków dodatniego bigrafu p . Dla ilustracji prezentujemy pomiar czasu działania algorytmu 4.1.12. Dla $n = 6$ czas działania to zaledwie 324 milisekundy, dla $n = 7$ już ponad 13 sekund, zaś dla $n = 8$ potrzeba blisko 3490 sekund. Jak widać w opisie algorytmu, potrzebne są szczególnie dane wejściowe, uzyskiwane algorytmem 4.1.13. Ich wyznaczenie w tych trzech przypadkach trwa odpowiednio: 167 milisekund, 16 sekund oraz 963 sekund.

Algorytm 4.1.13. (DODATNEBIGRAFYZDODATNICHBIGRAFOW)

Wejście: GP - lista niesymetrycznych macierzy Grama dodatnich bigrafów o n wierzchołkach takich, że każde dwa bigrafy z GP należą do różnych $O(n, \mathbb{Z})$ -orbit w $\text{dod}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ oraz $n \geq 3$.

Wyjście: Lista niesymetrycznych macierzy Grama dodatnich bigrafów o $n+1$ wierzchołkach takich, że każde dwa bigrafy z tej listy należą do różnych $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbit w $\text{dod}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$.

1° Utwórz puste listy macierzy PMatrix , PMatrix^\bullet ;

2° **foreach**(int[,] P in GP){

3° Utwórz podwojoną symetryczną macierz Grama $\hat{P} = P + P^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$;

4° Dla każdego wektora $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ o współczynnikach $\mu_i \in \{-1, 0, +1\}$ sprawdź, czy $\det \left[\begin{array}{c|c} \hat{P} & \mu^{tr} \\ \hline \mu & 1 \end{array} \right] > 0$. Jeśli tak, to dodaj niesymetryczną macierz Grama $\left[\begin{array}{c|c} P & \mu^{tr} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$ do listy macierzy PMatrix ;

5° Wybierz z listy PMatrix niesymetrycznych macierzy Grama dodatnich bigrafów o $n+1$ wierzchołkach parami różnych reprezentantów $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbit w $\text{dod}(\mathbb{Z}^{n+1}, \mathbb{Z})$ i dodaj ich do listy PMatrix^\bullet , tzn. $\text{PMatrix}^\bullet = \text{ROZNEORBITYBIGRAFOW}(\text{PMatrix}, n+1)$;

6° **return** PMatrix^\bullet ;

Uwaga . Złożoność algorytmu jest zdominowana przez wyznaczanie różnych $O(n+1, \mathbb{Z})$ -orbit (krok 5°) dla zbioru bigrafów wyznaczonego w poprzednich punktach. Moc tego zbioru jest ograniczona przez 3^n .

Algorytm 4.1.14. (WIELOMIANCOXETERA)

Wejście: Niesymetryczna macierz Grama \check{G}_Δ bigrafu Δ .

Wyjście: Wielomian Coxetera bigrafu Δ .

1° Utwórz macierz Coxetera bigrafu Δ , tzn. $\text{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr}$;

2° Policz wielomian charakterystyczny z macierzy Coxetera za pomocą funkcji maplowej **charpoly** znajdującej się w pakiecie **with(linalg)**, tzn. $\text{det} := \text{charpoly}(\text{Cox}_\Delta)$;

3° **return** det ;

Uwaga . Wyznaczenie wielomianu Coxetera sprowadza się do użycia funkcji **charpoly** w Maple, która ma złożoność rzędu $\mathcal{O}(n^4)$.

Następujący algorytm sformułowano w [56, Algorithm 3.7] (zobacz także [52, Algorytm 1.61]) w oparciu o dowód [55, Proposition 4.1] (patrz [52, Twierdzenie 1.60]).

Algorytm 4.1.15. (OGRANICZONEZLICZANIE)

Wejście: Niesymetryczna macierz Grama \check{G}_Δ dodatniego bigrafu Δ .

Wyjście: Lista wektorów $v \in \mathbb{Z}^n$ takich, że $q_\Delta(v) = v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} = 1$.

1° Utwórz symetryczną macierz Grama bigrafu Δ , tzn. $G_\Delta := \frac{1}{2}[\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}]$ oraz pustą listę L ;

2° Policz wartości własne d_1, \dots, d_n z macierzy G_Δ . Ponieważ Δ jest dodatni, więc wszystkie wartości własne z G_Δ są rzeczywiste i dodatnie. Do liczenia wartości własnych używamy maplowej funkcji **Eigenvalues** dostępnej w pakiecie **with(LinearAlgebra)**;

3° Niech $m_q := \min\{d_1, \dots, d_n\}$;

4° Znajdź największą liczbę całkowitą (dodatnią) \widehat{M}_q taką, że $\widehat{M}_q \leq \sqrt{\frac{1}{m_q}}$; Jeśli $\widehat{M}_q > 6$, to $\widehat{M}_q = 6$;

5° Znajdź wszystkie wektory $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ takie, że $v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} = 1$ oraz $-\widehat{M}_q \leq v_j \leq \widehat{M}_q$ dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$ i dodaj je do listy L ;

6° **return** L ;

Uwaga . Algorytm 4.1.15 jest realizacją przeszukiwania wyczerpującego. W praktyce dla niedużych bigrafów wyznaczane ograniczenie \widehat{M}_q na współrzędną wektora jest na tyle niskie, że znajdowanie wszystkich poszukiwanych wektorów trwa krótko.

W powyższym algorytmie (krok 4°) korzystamy z faktu, że jeśli Δ jest dodatnim bigrafem bez pętli o n wierzchołkach, zaś v jest jego Δ -pierwiastkiem (z jedyńki), to $-6 \leq v_i \leq 6$, zobacz [58, str. 834, Lemma 2.1] (a także [38, 39]).

Uwaga 4.1.16. (a) W 1976 roku L. Adleman i K. Manders [1] wykazali, że problem decyzyjny, czy kwadratowe równanie diofantyczne $q(x) = d$ ma całkowite rozwiązanie, czy nie, jest NP-zupełny.

(b) Rozważane przez nas równania diofantyczne mają kilka ograniczeń. Są to kwadratowe równania diofantyczne następującej postaci: $q_\Delta(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j} d_{ij}^\Delta x_i x_j = 1$, gdzie q_Δ jest dodatnim funkcjonałem Grama bigrafu Δ (bez pętli). Wówczas wektory bazowe e_i , dla dowolnego $i \in \{1, \dots, n\}$, są pierwiastkami tego typu równań diofantycznych z jedyńkami przy x_i^2 . Ponieważ q_Δ jest dodatni, więc na mocy wniosku 2.1.5, $-1 \leq d_{ij}^\Delta \leq 1$. Do rozważanych przez nas problemów zwykle potrzebny jest cały zbiór pierwiastków \mathcal{R}_{q_Δ} dla bigrafu Δ (bez pętli). Z pracy Ovsienki [39] wynika następujące ograniczenie na pierwiastki $v \in \mathcal{R}_{q_\Delta}$ dodatniego funkcjonału Grama bigrafu Δ (bez pętli): $-6 \leq v_i \leq 6$, przy czym liczba 6 jest osiągnięta np. dla dodatniego bigrafu $\Delta = \mathbb{E}_8$. W praktyce dla niedużych dodatnich bigrafów ograniczenie to jest znacznie mniejsze.

(c) Ograniczenie na pierwiastki dodatniego bigrafu (z pewnymi dodatkowymi założeniami) można również znaleźć przy pomocy algorytmu Lagrange'a opisanego w [56, Remark 3.8]. Algorytm ten sprowadza q_Δ do postaci kanonicznej, a następnie znajduje osobne ograniczenie na każdą ze współrzędnych wektora v będącego potencjalnym pierwiastkiem q_Δ , patrz [52] oraz [21, Algorithm 5.5].

W algorytmie 4.1.15 wykorzystujemy następujący fakt.

Lemat 4.1.17. Jeśli Δ jest dodatni, to zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} = 1\}$ jest skończony.

Dowód Patrz [52] oraz [55, Proposition 4.1].

Algorytm 4.1.18. (ALGORYTMINFLACYJNY)

Wejście: Niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ P -krytycznego bigrafu $\tilde{\Delta}$ o $|\tilde{\Delta}_0| = n \geq 3$ wierzchołkach oraz wierny wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \neq 0$ taki, że $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

Wyjście: E-typ $D\tilde{\Delta}$ P -krytycznego bigrafu $\tilde{\Delta}$.

1° Podstaw $\Delta := \tilde{\Delta}$ oraz utwórz symetryczną macierz Grama $G_\Delta = \frac{1}{2}[\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}]$ dla bigrafu Δ .

2° Dla każdego wierzchołka $c \in \{1, \dots, n\}$ takiego, że $h_c < 0$ wykonaj następujące operacje:

$$\Delta := \mathbf{t}_c^- \Delta \text{ (tzn. } G_\Delta := (E_c^-)^{tr} \cdot G_\Delta \cdot E_c^-, \text{ dla } E_c^- = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1));$$

$$\mathbf{h} := \mathbf{t}_c^+ \mathbf{h} \text{ (tzn. } (\mathbf{t}_c^+ \mathbf{h})_c := -h_c);$$

3° Dopóki żadna współrzędna wektora \mathbf{h} nie przekroczyła 6 oraz zbiór przerywanych krawędzi Δ^+ jest niepusty wykonuj następujące operacje:

Wybierz dowolną przerywaną krawędź $\bullet_a - -\bullet_b$;

$$\Delta := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta \text{ (tzn. } G_\Delta := (E_{ab}^-)^{tr} \cdot G_\Delta \cdot E_{ab}^-, \text{ dla } E_{ab}^- \text{ jak w lemacie 2.3.3);}$$

$$\mathbf{h} := \mathbf{t}_{ab}^+ (\mathbf{h}) \text{ (tzn. } \mathbf{t}_{ab}^+ (\mathbf{h})_a := h_a + h_b);$$

4° Sprawdź któremu z grafów $D\Delta \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ (przy pewnej numeracji wierzchołków) odpowiada macierz G_Δ ;

5° Zwróć $D\Delta$;

Uwaga 4.1.19. Bigrafy $\mathbf{t}_c^- \Delta$, $\mathbf{t}_{ab}^- \Delta$ będące odpowiednio inflacją Δ w wierzchołku $c \in \Delta_0$ oraz inflacją Δ względem niepustego zbioru krawędzi $\Delta_1^+(a, b)$ zostały opisane w pracy [58, Definition 3.1] (a także w definicji 2.3.2).

Uwaga 4.1.20. (a) Opis algorytmu inflacyjnego można znaleźć w [58, Algorithm 3.1] (zobacz także [31, Algorithm 5.4]). Z udowodnionego tam twierdzenia (zobacz [58, Theorem 3.2] oraz [31, Theorem 5.2]) wynika, że istnieje E-typ $D\Delta$ dla głównych bigrafów. Ponieważ P -krytyczne bigrafy są główne (patrz twierdzenie 2.1), więc istnieje dla nich E-typ.

(b) W algorytmie 4.1.18 korzystamy z następującego faktu: jeśli $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie Δ jest P -krytycznym bigrafem o $|\Delta_0| = n \geq 3$ oraz $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \neq 0$, to $-6 \leq h_i \leq 6$ dla dowolnego $i \in \{1, \dots, n\}$ (zobacz rozdział 2.1).

(c) Ponieważ po zakończeniu kroku 2° wektor \mathbf{h} jest dodatni (tzn. $h_i > 0$ dla dowolnego $i \in \{1, \dots, n\}$), zaś operacje z kroku 3° zwiększają współrzędne wektora \mathbf{h} , więc algorytm się zakończy po skończonej liczbie kroków.

(d) Pętla z kroku 3° algorytmu 4.1.18 wykona się co najwyżej $5n$ razy. W każdym przebiegu pętli wykonujemy mnożenie macierzy $G_{\tilde{\Delta}} = E_{ab}^{-tr} \cdot G_\Delta \cdot E_{ab}^-$ dla wybranych wierzchołków $a, b \in \Delta_0$ takich, że $\bullet_a - -\bullet_b$. Ponieważ algorytm mnożenia macierzy działa w czasie $\mathcal{O}(n^3)$, zatem krok 3° można wykonać w czasie $\mathcal{O}(n^4)$.

(e) W kroku 4° w celu znalezienia grafu Euklidesa $D\Delta \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ takiego, że $G_{D\Delta} = P^{tr} \cdot G_\Delta \cdot P$, dla pewnej macierzy permutacji $P \in \tilde{\mathbb{S}}_n$, można przejrzeć cały zbiór macierzy $\tilde{\mathbb{S}}_n$. Jest to jednak bardzo czasochłonne, dlatego postępujemy w następujący sposób: obliczamy ciąg stopni $s = (s_1, \dots, s_n)$ wierzchołków grafu Δ (otrzymanego po skończeniu kroku 3°). Następnie sprawdzamy, czy $s_i = 2$ dla każdego $1 \leq i \leq n$. Jeśli tak, to $D\Delta$ z kroku 4°, to $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$. W przeciwnym wypadku sprawdzamy, czy w ciągu stopni s występują dwa

wierzchołki stopnia 3 lub jeden wierzchołek stopnia 4. W przypadku pozytywnej odpowiedzi, $D\Delta = \tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$, zaś w przypadku negatywnej $D\Delta \in \{\tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$. Zatem krok 4° można wykonać w czasie $\mathcal{O}(n^2)$, zaś cały algorytm 4.1.18 działa w czasie $\mathcal{O}(n^4)$.

Algorytm 4.1.18 można poprawić stosując algorytm mnożenia macierzy wykorzystujący szczególne własności macierzy E_{ab}^- , E_c^- z kroków 2° i 3°.

Algorytm 4.1.21. (WIELOMIANYCOXETERADLAPKRYTYCZNYCHBIGRAFOW)

Wejście: Lista NG niesymetrycznych macierzy Grama P -krytycznych bigrafów Δ o funkcjonalach Grama należących do P -**kryt** $_n^\bullet$ oraz $3 \leq n = |\Delta_0| \leq 10$.

Wyjście: Lista All_{cox} wielomianów Coxetera dla P -krytycznych bigrafów o niesymetrycznych macierzach Grama należących do NG .

```

1° Niech  $\hat{\mathbf{S}}_n = \text{GENERUJMACIERZOWAGRUPEPERMUTACJI}(n)$ ;
2° Niech  $All_{\text{cox}}$  będzie pustą listą;
3° foreach (int[ , ]  $\check{G}_\Delta$  in  $NG$ ) {
4°   foreach (int[ , ]  $P$  in  $\hat{\mathbf{S}}_n$ ) {
5°      $G_1 := P^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot P$ ;
6°     Niech  $G_2$  będzie macierzą górnotrójkątną skonstruowaną z macierzy  $G_1 = [g_{ij}]$ 
(tzn. if  $((i > j) \&\&(g_{ij} \neq 0))$  then  $\{g_{ji} := g_{ji} + g_{ij}; g_{ij} := 0\}$ );
7°      $\text{Cox}_\Delta := -G_2 \cdot G_1^{-tr}$ ;
8°      $\text{cox}_\Delta(t) = \det(t \cdot E - \text{Cox}_\Delta)$ , gdzie  $E$  jest macierzą identycznościową;
9°     if  $(\text{cox}_\Delta(t) \notin All_{\text{cox}})$  then dodaj wielomian  $\text{cox}_\Delta(t)$  do listy  $All_{\text{cox}}$ ;
10° }
11° return  $All_{\text{cox}}$ ;

```

Uwaga 4.1.22. W algorytmie 4.1.21 korzystamy z faktu, że wielomian $\text{cox}_\Delta(t)$ bigrafu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ zależy od numeracji wierzchołków, nie zależy natomiast od macierzy znaku $\hat{\varepsilon} \in \hat{\mathbf{C}}_2^n$ działających na tych bigrafach, patrz [58]. Dlatego w kroku 1° zamiast generować całą grupę ortogonalną $O(n, \mathbb{Z})$ generujemy tylko grupę macierzy permutacji $\hat{\mathbf{S}}_n$.

4.2. Algorytmy dla prawie TP -krytycznych posetów

W rozdziale tym przedstawimy algorytmy, który posłużyły do znalezienia pełnej listy prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych oraz opisu sieciowych systemów pierwiastków dla tych posetów. Przy znalezienia pełnej listy prawie TP -krytycznych posetów korzystamy z faktu (udowodnionego w twierdzeniu 3.2.6), że takie posety mają co najwyżej 9 elementów. Opiszemy również metodę, która posłużyła nam do znalezienia defektu oraz zredukowanej liczby Coxetera dla posetów z rozdziału 3.3. Podamy także metodę znajdowania macierzy $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ zadającej \mathbb{Z} -dwuliniową równoważność między posetem I a grafem Euklidesa Δ_I , gdzie $\Delta_I \in \{\hat{\mathbb{A}}_3, \hat{\mathbb{A}}_5, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$.

Dla posetu $I = \{1, \dots, n\}$ macierz Eulera (niesymetryczna) \overline{C}_I kodująca poset I jest jednocześnie niesymetryczną macierzą Grama pewnego bigrafu $\Delta_I = (\Delta_0, \Delta_1)$. Bigraf ten można opisać w następujący sposób:

- $\Delta_0 = \{1, \dots, n, n+1\}$,
- jeśli $c_{ij} > 0$ oraz $i \neq j$, to w bigrafie Δ_I mamy c_{ij} przerywanych krawędzi $\bullet_i - \dots - \bullet_j$,
- jeśli $c_{ij} < 0$ oraz $i \neq j$, to w bigrafie Δ_I mamy $|c_{ij}|$ ciągłych krawędzi $\bullet_i \text{---} \bullet_j$.

Zatem algorytmy opisane w podrozdziale 4.1 dla bigrafów można stosować dla posetów jednopikowych I , jak i dla posetów $T = I \setminus \{*\}$.

Algorytm 4.2.1. (PRAWIETPKRYTYCZNEPOSETYJEDNOPIKOWE)

Wejście: Liczba całkowita $n \geq 4$;

Wyjście: Lista PrawieKryt macierzy Titsa prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych oraz lista Kryt macierzy Titsa TP -krytycznych posetów jednopikowych.

1° Utwórz puste listy PrawieKryt oraz Kryt;

2° Utwórz macierze górnotrójkątne $C_T = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ o współczynnikach $c_{ij} \in \{0, 1\}$ spełniające następujące warunki:

- $c_{11} = \dots = c_{nn} = 1$;
- jeśli $c_{ij} = 1$ oraz $c_{js} = 1$, to $c_{is} = 1$ dla dowolnych $1 \leq i < j < s \leq n$;

3° Dla każdej macierzy z punktu 2° utwórz macierz Titsa $\tilde{C}_T = \left[\begin{array}{c|c} C_T^{tr} & -U \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$,

gdzie $U = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$;

4° Wybierz spośród macierzy z punktu 3° te, dla których $\hat{C}_T = \tilde{C}_T + \tilde{C}_T^{tr}$ spełnia każdy z następujących warunków:

- $\det \hat{C}_T = 0$;
- dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$ macierz $\hat{C}_T[j]$ powstała z \hat{C}_T przez usunięcie j -tego wiersza i j -tej kolumny jest dodatnio określona, tzn. spełnia kryterium Sylwestera opisane w podrozdziale 4.1;

i dodaj je do listy PrawieKryt. Jeśli dodatkowo macierz $\hat{C}_T[n+1]$ powstała z \hat{C}_T przez usunięcie wiersza $n+1$ i kolumny $n+1$ jest dodatnio określona, tzn. spełnia warunki kryterium Sylwestera, to dodaj \tilde{C}_T do listy Kryt;

5° return PrawieKryt, Kryt;

Uwaga 4.2.2. Ponieważ dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych I liczbę elementów tego posetu jest ograniczona, tzn. $5 \leq |I| = n+1 \leq 9$, więc algorytm 4.2.1 wykonujemy dla $n = 4, 5, 6, 7, 8$.

Algorytm 4.2.3. (DEFEKTORAZZREDUKOWANALICZBACOXETERA)

Wejście: Macierz Titsa \hat{C}_I głównego posetu I o $|I| = n$ oraz wektor $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ taki, że $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

Wyjście: Defekt $\hat{\partial}_I : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz zredukowana liczba Coxetera \check{c}_I .

1° Utwórz macierz Coxetera $\widehat{\text{Cox}}_I = -\hat{C}_I \cdot \hat{C}_I^{-tr}$;

2° Ustaw $c := 1$ oraz $W := \widehat{\text{Cox}}_I$;

3° Niech $T = [T_1, \dots, T_n]$ będzie wektorem takim, że $T := x \cdot \widehat{\text{Cox}}_I - x$, gdzie $x := [x_1, \dots, x_n]$;

4° Niech $\partial = \text{nwd}(T_1, \dots, T_n) \in \mathbb{Z}[x]$;

5° if(∂ jest liczbą){ $c := c + 1$; oraz $\widehat{\text{Cox}}_I := \widehat{\text{Cox}}_I \cdot W$; i idź do kroku 3°;}

6° **else** { $T := [\frac{T_1}{\partial}, \dots, \frac{T_n}{\partial}]$; Sprawdź, czy $T = \mathbf{h}$ lub $T = -\mathbf{h}$. Jeśli tak, to **return** (∂, c) , jeśli nie to $\{c = c + 1; \widehat{\text{Cox}}_I = \widehat{\text{Cox}}_I \cdot W$ i idź do kroku 3°};

Uwaga 4.2.4. Z [56, Theorem 4.7] (a także twierdzenia 3.5.1), wynika, że jeśli I jest główny, to istnieje liczba $\check{c}_I \geq 1$ oraz $\hat{\partial}_I : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ takie, że $\widehat{\Phi}^{\check{c}_I}(x) = x + \hat{\partial}_I(x) \cdot \mathbf{h}$. Całkowity wektor $\mathbf{h} \neq 0$ taki, że $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ znajdujemy rozwiązując układ \mathbb{Z} -równań liniowych $\tilde{C}_I \cdot x^{tr} = 0$, gdzie $\tilde{C}_I = \widehat{C}_I + \widehat{C}_I^{tr}$. Do rozwiązania tego układu używamy funkcji **isolve** w Maple dostępnej w pakiecie **LinearAlgebra**. Na podstawie twierdzenia 3.5.1, algorytm 4.2.3 zastosowany dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych zwraca zredukowaną liczbę Coxetera \check{c}_I oraz defekt $\hat{\partial} : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$. Ponadto z obliczeń komputerowych dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych wynika, że $\check{c}_I \leq 30$.

Algorytm 4.2.5. (USTAWIANIEPIERWIASTKÓWWORBITY)

Wejście: Macierz Titsa \widehat{C}_I dodatniego posetu I o $|I| = n$ oraz lista L_I wszystkich pierwiastków posetu I , tzn. wektorów $v \in \mathbb{Z}^n$ takich, że $v \cdot \widehat{C}_I \cdot v^{tr} = 1$.

Wyjście: Tablica list Orb zawierająca pierwiastki posetu I poustawiane w $\widehat{\Phi}_I$ -orbity, tzn. pierwiastki z i -tej $\widehat{\Phi}_I$ -orbity znajdują się na liście Orb[i].

- 1° Utwórz macierz Coxetera $\widehat{\text{Cox}}_I = -\widehat{C}_I \cdot \widehat{C}_I^{-tr}$;
- 2° $i := 1$; Utwórz pustą listę Orb[i];
- 3° **while**(lista L_I jest niepusta) {
- 4° Weź pierwiastek v z listy L_I i zapamiętaj go jako v_0 ;
- 5° Usuń pierwiastek v z listy L_I ;
- 6° Dodaj v_0 do listy Orb[i];
- 7° Utwórz wektor $v_1 = v \cdot \widehat{\text{Cox}}_I$;
- 8° **while**($v_1 \langle \rangle v_0$) {
- 9° Dodaj v_1 do Orb[i];
- 10° Usuń v_1 z L_I ;
- 11° $v_1 = v_1 \cdot \widehat{\text{Cox}}_I$;
- 12° Utwórz nową orbitę Orb[$i + +$];
- 13° }
- 14° **return** Orb;

Uwaga 4.2.6. Listę wszystkich pierwiastków dodatniego posetu I (ze strukturą Titsa) znajdujemy stosując algorytm OGRANICZONEZLICZANIE opisany w podrozdziale 4.1.

Operację usuń pierwiastek z listy rozumiemy jako oznaczenie pierwiastka jako usunięty, tzn. $\text{usuniety}[i] = \text{true}$. Zatem algorytm 4.2.5 można zaimplementować w czasie $\mathcal{O}(|L_I| \cdot n^2)$, gdzie n^2 jest złożonością pomnożenia wektora przez macierz o n -wierszach i kolumnach.

Algorytm 4.2.7. (TUBYDLAPIERWIASTKOWODEFEKCIEZEROWYM)

Wejście: Macierz Titsa \widehat{C}_I prawie TP -krytycznego posetu jednopikowego I o $|I| = n \geq 5$ oraz wektor $0 \neq \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ taki, że $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

Wyjście: T - tablica list zawierających wektory tworzące tuby, tzn. na liście $T[i]$ znajdują się wektory $w, u[1], \dots, u[2 \cdot s_r]$ (rysunek 4.2.10) będące fragmentem i -tej tuby klepsydralnej rangi s_r .

- 1° Znajdź $s \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $h_s \in \{-1, +1\}$;
- 2° Utwórz macierz Coxetera-Titsa, tzn. $\widehat{\text{Cox}}_I = -\widehat{C}_I \cdot \widehat{C}_I^{-tr}$;

3° Niech $\widehat{C}_I^{(s)}$ będzie macierzą powstałą z macierzy \widehat{C}_I przez wyzerowanie wszystkich współczynników z s -tej kolumny oraz wszystkich współczynników z s -tego wiersza za wyjątkiem współczynnika $c_{ss} = 1$;

4° Niech L_I będzie listą wszystkich pierwiastków dla funkcjonału zakodowanego przez $\widehat{C}_I^{(s)}$. Lista ta jest skończona, bo macierz $\widehat{C}_I^{(s)} + \widehat{C}_I^{(s)tr}$ jest dodatnio określona. Lista L_I jest uzyskana za pomocą algorytmu OGRANICZONEZLICZANIE;

5° Niech $\widehat{\partial}_I$ będzie defektem prawie TP -krytycznego posetu I policzonym za pomocą algorytmu DEFEKTORAZZREDUKOWANALICZBACOXETERA;

6° Wybierz z listy L_I pierwiastków te pierwiastki $v \in L_I$, dla których defekt jest zerowy, tzn. $\widehat{\partial}_I(v) = 0$ i dodaj je do listy RL_I ;

7° Ustaw pierwiastki z listy RL_I w orbity w anlogiczny sposób, jak w USTAWIANIEPIERWIASTKOWORBITY i zapisz wynik do tablicy list Orb, tzn. w liście $\text{Orb}[i]$ znajdują się pierwiastki z i -tej $\widehat{\Phi}_I$ -orbity poustawiane tak, że $\text{Orb}[i][j+1] = \text{Orb}[i][j] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I$;

8° Zapisz w tablicy TS długości różnych $\widehat{\Phi}_I$ -orbit Orb, gdzie przez długość i -tej $\widehat{\Phi}_I$ -orbity Orb rozumiemy liczbę różnych pierwiastków z tej $\widehat{\Phi}_I$ -orbity (tzn. $|\text{Orb}[i]|$);

9° **foreach**(int s in TS) {

10° Wybierz z tablicy $\widehat{\Phi}_I$ -orbit Orb te orbity, które mają długość s i zapamiętaj je jako OP, tzn.

$k = 0; il = 0;$

for(int $i = 1; i \leq |\text{Orb}|; i++$) {
 if($|\text{Orb}[i]| == s$) { $k = k + 1; \text{OP}[k] = \text{Orb}[i];$ }
 }

11° Dla każdego $p < q, p, q \in \{1, \dots, |\text{OP}|\}$ oraz $s \geq 2$ wykonaj:

for($i = 1; i \leq |\text{OP}[p]|; i++$) {

for($j = 1; j \leq |\text{OP}[q]|; j++$) {

$w = \text{OP}[p][i]$ (tzn. weź i -ty pierwiastek z p -tej $\widehat{\Phi}_I$ -orbity i zapisz go jako w);

$u[1] = \text{OP}[q][j]; \widetilde{w}[1] = u[1] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I$;

$u[2] = u[1] + u[1] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I - w; \widetilde{w}[2] = u[2] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I$;

for($k = 3; k \leq 2 \cdot s; k++$) {

$u[k] = u[k-1] + u[k-1] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I - u[k-2] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I$;

$\widetilde{w}[k] = u[k] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I$;

 Sprawdź, czy dla każdego $l \in \{1, \dots, s\}$

 • wektory $u[1+s] - u[1], u[2+s] - u[2], \dots, u[l+s] - u[l]$ są postaci $\lambda \cdot \mathbf{h}$

dla jakiegoś $\lambda \in \mathbb{Z}$ oraz

 • wektory $u[l], \widetilde{w}[l], \widetilde{w}[l-1], u[l+1]$ tworzą $\widehat{\Phi}_I$ -oczko, tzn. $u[l] + \widetilde{w}[l] =$

$\widetilde{w}[l-1] + u[l+1]$.

 Jeśli tak, to dodaj wektory $w, u[1], \dots, u[2 \cdot s]$ do listy $T[i]$ oraz $il = il + 1$;

 }
 }

W przypadku, gdy $s = 2$ krok 11° należy odrobinę poprawić. Jako w bierzemy wektor zerowy, zaś jako $u[1] = \text{OP}[p][i]$ (tzn. i -ty wektor z p -tej $\widehat{\Phi}_I$ -orbity). Pozostałe operacje pozostają bez zmian.

12° **return** T ;

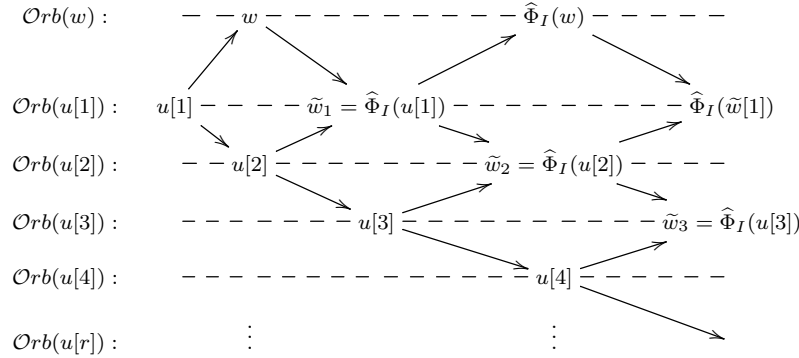
Uwaga 4.2.8. Opis tego algorytmu można znaleźć w artykule [56]. Złożoność algorytmu 4.2.7 jest zdominowana przez wyznaczenie (w kroku 4°) zbioru pierwiastków dla $\hat{q}_I^{(s)}$ za pomocą algorytmu OGRANICZONEZLICZANIE.

Ponieważ I jest prawie TP -krytycznym posetem jednopikowym, więc na mocy wniosku 3.2.7 zachodzi nierówność $5 \leq |I| = n \leq 9$. Ponadto dla dowolnego $j \leq n - 1$ współrzędne h_j wektora \mathbf{h} są niezerowe oraz istnieje $s \leq n$ takie, że $h_s \in \{-1, +1\}$.

Z dodatniości funkcjonału Titsa $\hat{q}_I^{(s)}$, dla $s \leq n$ wynika, że zbiór pierwiastków z kroku 4° jest skończony. W szczególności wybrany z tego zbioru podzbiór pierwiastków o defekcie zerowym jest skończony (krok 6°) oraz skończone są $\hat{\Phi}_I$ -orbity dla tych pierwiastków (krok 7°). Na podstawie [56, Theorem 4.7] długości $\hat{\Phi}_I$ -orbit pierwiastków o defekcie zerowym są skończone i dzielą zredukowaną liczbę Coxetera $\check{c}_I \geq 1$. Obliczyliśmy, że dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych $\check{c}_I \leq 30$. Z [56, Theorem 5.3] wynika, że $\hat{\Phi}_I$ -oczkowy kołczan dla pierwiastków $v \in \partial^0 \mathcal{R}_{\hat{q}_I}$ ma kształt tuby klepsydralnej rangi s_v , gdzie $s_v = |\hat{\Phi}_I\text{-Orb}(v)|$.

Uwaga 4.2.9. Algorytm 4.2.7 stosujemy również dla posetów $T = I \setminus \{*\}$ powstałych z posetów TP -wyjątkowych I przez usunięcie pika $*$. Wówczas wejściem dla tego algorytmu jest macierz incydencji C_T posetu T oraz wektor $0 \neq \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^T$ taki, że $\text{Ker } q_T = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

RYSUNEK 4.2.10. FRAGMENT KOŁCZANU $\hat{\Phi}_I$ -OCZKOWEGO



Algorytm 4.2.11. (KOŁCZANOCZKOWYZPIERWIASTKOWODEFEKCIEDODATNIM)

Wejście: Macierz Titsa \hat{C}_I prawie TP -krytycznego posetu jednopikowego I o $|I| = n \geq 5$ oraz wektor $0 \neq \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ taki, że $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

Wyjście: T - lista zawierająca wektory tworzące fragment kołczanów oczkowych, tzn. na liście T znajdują się wektory $u[1], \dots, u[s_r], w[1], \dots, w[s_r]$ (rysunek 4.2.14) tworzące fragment kołczanu $\hat{\Phi}_I$ -oczkowego.

1° Znajdź $s \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $h_s \in \{-1, +1\}$;

2° Utwórz macierz Coxetera-Titsa, tzn. $\widehat{\text{Cox}}_I = -\hat{C}_I \cdot \hat{C}_I^{-tr}$;

3° Niech $\hat{C}_I^{(s)}$ będzie macierzą powstałą z macierzy \hat{C}_I przez wyzerowanie wszystkich współczynników z s -tej kolumny oraz wszystkich współczynników z s -tego wiersza za wyjątkiem współczynnika $c_{ss} = 1$;

4° Niech L_I będzie listą wszystkich pierwiastków dla funkcjonału zakodowanego przez $\hat{C}_I^{(s)}$. Lista ta jest skończona, bo macierz $\hat{C}_I^{(s)} + \hat{C}_I^{(s)tr}$ jest dodatnio określona. Lista L_I jest uzyskana za pomocą algorytmu OGRANICZONEZLICZANIE;

5° Niech $\widehat{\partial}_I$ będzie defektem prawie TP -krytycznego posetu I policzonym za pomocą algorytmu DEFEKTORAZZREDUKOWANALICZBACOXETERA;

6° Wybierz z listy L_I pierwiastków te pierwiastki $v \in L_I$, dla których defekt jest dodatni, tzn. $\widehat{\partial}_I(v) > 0$, i dodaj je do listy RL_I ;

7° Przy pomocy pierwiastków z listy RL_I oraz macierzy Coxetera-Titsa utwórz fragmenty $\widehat{\Phi}_\Delta$ -orbit dla pierwiastków o defekcie dodatnim (tzn. niech liczba pierwiastków w $\widehat{\Phi}_I$ -orbitach będzie $\leq M$). Zapisz je w tablicy list Orb, tzn na liście Orb[i] znajdują się pierwiastki z i -tej $\widehat{\Phi}_I$ -orbity poustawiane tak, że Orb[i][$j + 1$] = Orb[i][j] · $\widehat{\text{Cox}}_I$;

8° Znajdź wśród Orb skrajne orbity, tzn. $p, q \in \{1, \dots, |\text{Orb}|\}$, $p \neq q$ takie, że Orb[p][i] = Orb[q][j] + Orb[q][j] · $\widehat{\text{Cox}}_I$ dla pewnych $i \in \{1, \dots, |\text{Orb}[p]|\}$, $j \in \{1, \dots, |\text{Orb}[q]|\}$. Zapisz skrajne orbity w tablicy Sk wraz z i i j (tzn. Sk[k , 1] = p , Sk[k , 2] = q , Sk[k , 3] = i , Sk[k , 4] = j , gdzie k jest k -tą skrajną $\widehat{\Phi}_I$ -orbitą).

9° **for**(int $i = 1$; $\leq |\text{Sk}|$; $i++$) {

10° $p = s[i, 1]$; $i1 = s[i, 3]$; $q = s[i, 2]$; $i2 = s[i, 4]$;

11° $u[1] = \text{Orb}[p][i1]$; $u[2] = \text{Orb}[q][i2]$;

12° **for**(int $k = 2$; $k \leq |\text{Orb}| - 1$; $k++$) {

13° $u[k + 1] = u[k] + u[k] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I - u[k - 1] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I$;

14° Sprawdź, czy $u[k + 1]$ należy do którejś orbity oraz nie jest to ta sama orbita, do której należy $u[k]$. Jeśli nie, to sprawdź, czy istnieje orbita j taka, że wektory Orb[j][$i3$] + Orb[j][$i3$] · $\widehat{\text{Cox}}_I$ oraz $u[k]$ są równe, dla pewnego $i3$.

• Jeśli istnieje taka orbita, to zapamiętaj $w[k] = \text{Orb}[j][i3]$ oraz popraw $u[k + 1]$ tak, że $u[k + 1] = u[k] + u[k] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I - u[k - 1] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I - w[k] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I$.

• Jeśli nie istnieje taka orbita, to znajdź orbity $r \neq l$ takie, że wektory $u[k]$, Orb[r][$r1$] + Orb[r][$r1$] · $\widehat{\text{Cox}}_I - \text{Orb}[l][l1]$ są równe; zapisz $w[k] = \text{Orb}[r][r1]$ oraz zmień $u[k + 1]$ tak, że $u[k + 1] = u[k] + u[k] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I - u[k - 1] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I - w[k] \cdot \widehat{\text{Cox}}_I$. }

15° Dodaj wektory $u[1], \dots, u[|\text{Orb}|]$, $w[1], \dots, w[|\text{Orb}|]$ do T ;

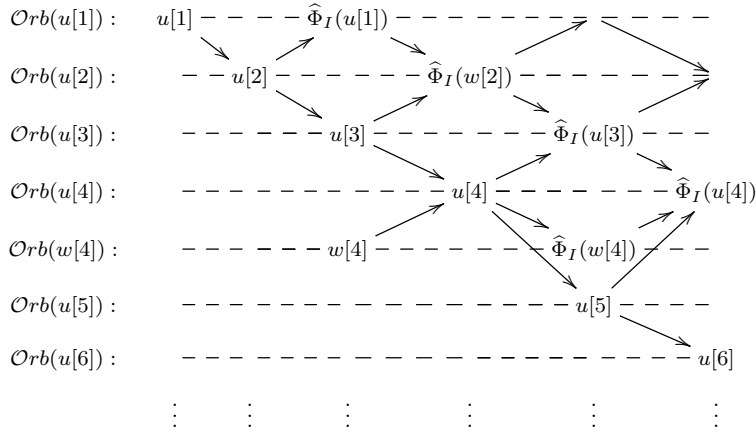
16° **return** T ;

Uwaga 4.2.12. Złożoność tego algorytmu jest zdominowana przez wyznaczenie zbioru pierwiastków dla dodatniego funkcjonału Titsa $\widehat{q}_I^{(s)}$, gdzie $s \leq n + 1$, takie, że $h_s \in \{-1, +1\}$. Ponieważ I jest prawie TP -krytycznym posetem, więc na mocy wniosku 3.2.7 jądro jest postaci $\text{Ker } \widehat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1})$, $h_i \neq 0$ dla dowolnego $i \leq n$. Ponadto istnieje $s \leq n + 1$ takie, że $h_s \in \{-1, +1\}$. Liczba $\widehat{\Phi}_I$ -orbit dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych nie przekracza 9.

W celu uzyskania kołczanu $\widehat{\Phi}_I$ -oczkowego dla pierwiastków o defekcie ujemnym należy zmodyfikować krok 6° tak, by wybierać z listy L_I pierwiastki o defekcie ujemnym.

Uwaga 4.2.13. W przypadku P -krytycznych posetów $T = I \setminus \{*\}$ (gdzie I jest TP -wyjątkowym posetem jednopikowym), które są \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważne z $\widehat{\mathbb{A}}_3$ lub $\widehat{\mathbb{A}}_5$ należy poprawić krok 8° algorytmu 4.2.11. Dokładniej, zamiast zacząć od orbit skrajnych należy zacząć od $\widehat{\Phi}_I$ -oczka rzędu 2.

RYSUNEK 4.2.14. FRAGMENT KOŁCZANU $\widehat{\Phi}_I$ -OCZKOWEGO DLA PIERWIASTKÓW O $\widehat{\partial}_I > 0$



5. Podsumowanie

Zasadniczym celem rozprawy doktorskiej była klasyfikacja spektralna Coxetera P -krytycznych bigrafów oraz prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych a także opisanie, sieciowych systemów pierwiastków dla prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych.

Przedstawiliśmy konstrukcję P -krytycznych bigrafów o $n + 1$ wierzchołkach z dodatnich bigrafów o $n \geq 2$ wierzchołkach i ich wiernych pierwiastków. Zdefiniowaliśmy działanie grupy ortogonalnej $O(n, \mathbb{Z})$ na bigrafach. Stosując wspomnianą konstrukcję podaliśmy pełną listę P -krytycznych bigrafów o liczbie wierzchołków nie przekraczającej 10, z dokładnością do działania grupy ortogonalnej $O(n, \mathbb{Z})$ na tych bigrafach. Udowodniliśmy twierdzenia charakteryzujące P -krytyczne bigrafy. W szczególności pokazaliśmy, że bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ o liczbie wierzchołków $|\Delta_0| \geq 3$ jest P -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieujemny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ jest wiernym wektorem. Zatem klasyfikacja P -krytycznych bigrafów (spójnych i bez pętli) redukuje się do klasyfikacji krytycznych bigrafów [26]. Udowodniliśmy, że zbiór pierwiastków dla P -krytycznych bigrafów jest nieskończony. Pokazaliśmy, że bigraf bez pętli jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór pierwiastków (z jedyńki) tego bigrafu jest skończony. Ponadto podaliśmy pełną listę wielomianów Coxetera dla P -krytycznych bigrafów o liczbie wierzchołków nie przekraczającej dziesięciu.

Ciekawym problemem, którego nie poruszyliśmy w rozprawie, jest opisanie kołczanów Φ_Δ -oczkowych dla P -krytycznych bigrafów Δ , w szczególności zbadanie typu tubularnego \mathbf{tub}_Δ dla rozważanych bigrafów. Innym problemem, nad którym warto się pochylić jest opisanie jak zmieniają się wielomiany Coxetera dla P -krytycznych lub dodatnich bigrafów wraz ze zmianą numeracji wierzchołków.

W rozprawie scharakteryzowaliśmy prawie TP -krytyczne posety jednopikowe. Składają się na nie posety TP -krytyczne (jest ich 115) oraz posety TP -wyjątkowe (jest ich 17). Udowodniliśmy, że poset jednopikowy I jest prawie TP -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $5 \leq |I| \leq 9$, I jest nieujemny oraz $\text{Ker } \widehat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest prawie wiernym wektorem.

Pokazaliśmy, że prawie TP -krytyczne posety jednopikowe mają co najwyżej 9 elementów. Stosując algorymy opisane w rozdziale czwartym podaliśmy pełną listę jednopikowych posetów prawie TP -krytycznych, a także opisaliśmy kołczany $\widehat{\Phi}_I$ -oczkowe dla prawie TP -krytycznych

posetów. W przypadku posetów TP -wyjątkowych opisaliśmy również kołczany Φ_T -oczkowe dla posetów $T = I \setminus \{*\}$.

Udowodniliśmy, że poset jednopikowy jest TP -wyjątkowy wtedy i tylko wtedy, gdy $5 \leq |I| \leq 9$, $q_T = \hat{q}_I^{(*)}$ i \hat{q}_I są nieujemne oraz $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, $\text{Ker } q_T = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^-$, gdzie $\mathbf{h}^- = (h_1, \dots, h_n)$ jest nil-wektorem, zaś $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^-, 0)$ jest prawie wiernym wektorem.

W pracy [48] A. M. Polishchuk wyróżnia na liście posetów P -krytycznych (w sensie Bondarenko-Stepochkina) posety słabo P -krytyczne (w sensie Bondarenko) oraz podaje przykład takiego posetu T . Okazuje się, że poset $I = T \cup \{*\}$ znajduje się na przedstawionej przez nas w rozdziale 3.3 liście posetów TP -wyjątkowych (poset \mathbb{L}_{127}). Istnieje podejrzenie, że jednopikowy poset I jest TP -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $T = I \setminus \{*\}$ jest słabo P -krytyczny (w sensie Bondarenki). Niestety do tej pory nie udało się tego pokazać.

Wykorzystując wyniki publikacji [35, 47, 53, 54, 55, 56, 57, 58] przedstawiliśmy w rozprawie pakiet algorytmów (wraz z oszacowaniem złożoności czasowej), które posłużyły nam do klasyfikacji P -krytycznych bigrafów (bez pętli) oraz prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych, m.in. algorytm konstruujący P -krytyczne bigrafy o $n + 1$ wierzchołkach z dodatnich bigrafów o n wierzchołkach i ich wiernych pierwiastków; implementację grupy ortogonalnej $O(n, \mathbb{Z})$; algorytm znajdujący reprezentantów $O(n, \mathbb{Z})$ -orbit zarówno dla P -krytycznych bigrafów jak i dla dodatnich bigrafów; implementację algorytmu inflacyjnego dla P -krytycznych bigrafów; algorytm pozwalający znaleźć pełną listę prawie TP -krytycznych posetów jednopikowych. Opisaliśmy również metodę pozwalającą znaleźć defekt i zredukowaną liczbę Coxetera dla prawie TP -krytycznych posetów, a także implementację algorytmów służących do opisu sieciowych systemów pierwiastków dla prawie TP -krytycznych posetów.

Spis cytowanej literatury

- [1] L. Adleman and K. Manders, Diophantine complexity, *Proc. 17th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, Proc. IEEE, New York, 81–88.
- [2] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1. Techniques of Representation Theory*, London Math. Soc. Student Texts 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2006.
- [3] M. Barot, A characterization of positive unit forms, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **(3)5**(1999), 87–93.
- [4] M. Barot, A characterization of positive unit forms II, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **(3)7**(2001), 13–22.
- [5] M. Barot and J. A. de la Pena, The Dynkin type of a non-negative unit forms, *Exposition. Math* **17**(1999), 339–348.
- [6] L. W. Beineke and R. J. Wilson, *Topics in algebraic graph theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 102, Cambridge University Press 2005.
- [7] V. M. Bondarenko, Representations of bundles of semichained sets and their applications, *Algebra i Analiz* **3(5)**(1991), 38–61 (in Russian), English version: *St. Petersburg Math. J.* **3**(1992), 973–996.
- [8] V. M. Bondarenko and A. M. Polishchuk, On finiteness of critical Tits forms of posets, *Proc. Inst. Math. NAS Ukr.* **50**(2004), 1061–1063.
- [9] V. M. Bondarenko and M. V. Stepochkina, On posets of width two with positive Tits form, *Algebra and Discrete Math.* **2**(2005), 20–35.

- [10] V. M. Bondarenko and M. V. Steepochkina, (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and Tits quadratic forms, *In: Analysis and Algebra Problems, Inst. Mat. NAS Ukraine* **2**(2005), 3–46.
- [11] V. M. Bondarenko and M. V. Steepochkina, (Min, max)-equivalence of posets and non-negative Tits forms, *Ukrain. Mat. Zh.* **60**(2008), 1157–1167.
- [12] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6, Elements of Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.
- [13] A. E. Brouwer and W. H. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer, New York, etc., 2012, <http://www.win.tue.nl/~aeb/2WF02/spectra.pdf>.
- [14] R. A. Brualdi, *The Mutually Beneficial Relationship between Graphs and Matrices*, CBMS Monograph, American Mathematical Society, 2011.
- [15] D. M. Cvetković, P. Rowlinson and S. K. Simić, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, London Math. Soc. Student Texts 75, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2010.
- [16] P. Dražler, Yu. A. Drozd, N. S. Golovachtchuk, S. A. Ovsienko and M. Zeldych, Towards the classification of sincere weakly positive unit forms, *Europ. J. Combinatorics* **16**(1995), 1–16.
- [17] J. A. Drozd, Coxeter transformations and representations of partially ordered sets, *Funct. Anal. Appl.* **8**(1974), 219–225.
- [18] P. Gabriel and A. V. Roiter, Representations of finite dimensional algebras, Algebra VIII, *Encyclopaedia of Math. Sci.*, vol. 73, Springer-Verlag, 1992.
- [19] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol.1, Chelsea Publishing Company, New York, 1984.
- [20] M. Gąsiorek and D. Simson, One-peak posets with positive Tits quadratic form, their mesh translation quivers of roots, and programming in Maple and Python, *Linear Algebra Appl.* **436**(2012), 2240–2272, doi:10. 1016/j.laa. 2011. 10. 045.
- [21] M. Gąsiorek and D. Simson, A computation of positive one-peak posets that are Tits sincere using Maple and Python, *Colloq. Math.* **127**(2012), 83–103.
- [22] I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space. *Coll. Math. Soc. Bolyai, Tihany (Hungary)*, **5**(1970), 163–237.
- [23] J. P. Gram, Om raekkeudviklinger, bestemte ved hjaelp af de mindste kvadraters metode, Kopenhavne, 1879.
- [24] F. Harary, On the notion of balance of a signed graph, *Michigan Math.* **2**(1953), 143–146.
- [25] R. A. Horn and V. V. Sergeichuk, Congruences of a square matrix and its transpose, *Linear Algebra Appl.* **389**(2004), 347–353.
- [26] H. J. von Höhne, On weakly positive unit forms, *Comment Math. Helvetici*, **63**(1988), 312–336.
- [27] S. M. Johnson, Generation of permutations by adjacent transpositions, *Math. Comp.* **17**(1963), 282–285.
- [28] M. M. Kleiner, Partially ordered sets of finite type, *in Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, **28**(1972), 32–41 (in Russian).

- [29] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 4, Fascicle 2: Generating All Tuples and Permutations, Addison-Wesley Professional, 2005.
- [30] J. Kosakowska, A classification of two-peak sincere posets of finite prinjective type and their sincere prinjective representations, *Colloq. Math.* **87**(2001), 27–77.
- [31] J. Kosakowska, Inflation algorithms for positive and principal edge-bipartite graphs and unit quadratic forms, *Fund. Inform.* **119**(2012), 149–162, doi: 10.3233/FI-2012-690.
- [32] A. I. Kostrikin and Y. I. Manin, *Linear Algebra and Geometry*, Algebra, Logic and Applications, Vol.1, Gordon & Breach Science Publishers, 1997.
- [33] H. Lenzing and J. A. de la Pena, Spectral analysis of finite dimensional algebras and singularities, In: *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics*, ICRA XII, (ed. A. Skowroński), Series of Congress Reports, European Math. Soc. Publishing House, Zürich, 2008, pp. 541–588.
- [34] W. Lipski, *Kombinatoryka dla programistów*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2004.
- [35] G. Marczak, A. Polak and D. Simson, P -critical integral quadratic forms and positive forms. An algorithmic approach, *Linear Algebra Appl.* **433**(2010), 1873–1888, doi: 10.1016/j.laa.2010.06.052.
- [36] J. V. Matijasevich, Enumerable sets are Diophantine, *Doklady Akad. Nauk SSSR.* **191**(1970), 279–282 (in Russian).
- [37] L. A. Nazarova, A. V. Roiter, V. V. Sergeichuk and V. M. Bondarenko, Applications of modules over a dyad to a classification of finite p -groups having an abelian subgroup of index p , and of pairs of mutually annihilated operators, *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **28**(1972), 69–92, English version: *J. Soviet Math.* **3**(5) (1975), 636–654 (in Russian).
- [38] S. A. Ovsienko, Integral weakly positive forms, in „*Schur Matrix Problems and Quadratic Forms*”, Inst. Mat. Akad. Nauk USSR, preprint **78.25**(1978), pp. 3–17 (in Russian).
- [39] S. A. Ovsienko, A bound of roots of weakly positive forms, in „*Representations and Quadratic Forms*”, Acad. Nauk Ukr. S.S.R., Inst. Mat., Kiev, 1979, pp. 106-123 (in Russian).
- [40] J. A. de la Pena and M. Takane, Spectral properties of Coxeter transformations and applications, *Arch. Math.* **55**(1990), 120–134.
- [41] A. Polak, <http://www.mat.umk.pl/~aga13/pkrytyczne.html>, dostęp: 10 lutego 2013 r.
- [42] A. Polak, <http://www.mat.umk.pl/~aga13/kolczany.pdf>, dostęp: 10 lutego 2013 r.
- [43] A. Polak and D. Simson, Symbolic and numerical computation in determining P -critical unit forms and Tits P -critical posets, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **38**(2011), 723–730.
- [44] A. Polak and D. Simson, On Coxeter spectral classification of P -critical edge-bipartite graphs of Euclidean type \tilde{A}_n , *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **40**(2013), 311–316.
- [45] A. Polak and D. Simson, Algorithms computing $O(n, \mathbb{Z})$ -orbits of P -critical edge-bipartite graphs and P -critical unit forms using Maple and C#, *Algebra and Discrete Mathematics*, **16**(2013), No. 2, 1–41
- [46] A. Polak and D. Simson, Algorithmic experiences in Coxeter spectral study of P -critical edge-bipartite graphs and posets, *Proc. 15th Intern. Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing*, SYNASC 2013, Timișoara, 2013, IEEE Computer Society, IEEE CPS, Tokyo, 2013, w druku.

- [47] A. Polak and D. Simson, *Coxeter spectral classification of almost TP-critical one-peak posets using symbolic and numerical computations*, w recenzji.
- [48] A. M. Polishchuk, On weak critical posets with respect to the positive definiteness of a quadratic Tits form, *Nonlinear Oscillations* **11(3)**, 2008, 416–426.
- [49] C. M. Ringel, Tame Algebras and Integral Quadratic Forms, *Lecture Notes in Math.* No. 1099, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York-Tokyo, 1984.
- [50] D. Simson, Peak reductions and waist reflection functors, *Fund. Math.* **137**(1991), 115–144.
- [51] D. Simson, *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Algebra, Logic and Applications, Vol. 4, Gordon & Breach Science Publishers, 1992.
- [52] D. Simson, *Pierwiastki funkcjonalów kwadratowych, diagramy Dynkina i zbiory częściowo uporządkowane*, Wykłady monograficzne - skrypt, Wydział Matematyki i Informatyki UMK, Toruń, wrzesień 2004-kwiecień 2009.
- [53] D. Simson, Incidence coalgebras of intervally finite posets, their integral quadratic forms and comodule categories, *Colloq. Math.*, **115**(2009), 259–295.
- [54] D. Simson, Integral bilinear forms, Coxeter transformations and Coxeter polynomials of finite posets, *Linear Algebra Appl.* **433**(2010), 699–717; doi: 10.1016/j.laa. 2010.03.04.
- [55] D. Simson, Mesh geometries of root orbits of integral quadratic forms, *J. Pure Appl. Algebra*, **215**(2011), 13–34, doi: 10.1016/j.jpaa. 2010.02.029.
- [56] D. Simson, Mesh algorithms for solving principal Diophantine equations, sand-glass tubes and tori of roots, *Fund. Inform.* **109**(2011), 425–462, doi: 3233/FI-2011-603.
- [57] D. Simson, Algorithms determining matrix morsifications, Weyl orbits, Coxeter polynomials and mesh geometries of roots for Dynkin diagrams, *Fund. Inform.* **123**(2013), 447–490.
- [58] D. Simson, A Coxeter-Gram classification of positive simplylaced bipartite graphs and unit forms, *SIAM J. Discr. Math.* **27**(2013), 827–854.
- [59] D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 2. Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type*, London Math. Soc. Student Texts 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2007.
- [60] D. Simson and K. Zając, A framework for Coxeter spectral classification of finite posets and their mesh geometries of roots, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2013, Article ID 743734, 22 pages, 2013. doi:10.1155/2013/743734.
- [61] H. F. Trotter, Perm (Algorithm 115), *Comm. ACM*, **5**(1962), 434–435.
- [62] T. Zaslavsky, Signed graphs, *Discrete Appl. Math.* **4**(1982), 47–74.