Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Tomasz Tkaliński

Wybrane aspekty wyceny i zabezpieczenia wypłat w modelach rynku z czasem dyskretnym

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Promotor
prof. dr hab. Jacek Jakubowski

Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski

Styczeń 2012

Wprowadzenie

Rozprawa składa się z dwóch części. W pierwszej części formułujemy matematyczny opis metody wyceny wypłat przez analizę scenariuszy. Analiza scenariuszy należy do ważnych technik używanych w finansach do oceny wartości obarczonych niepewnością pozycji. Metody używane do analizowania scenariuszy pozwalają na dużą elastyczność w wyborze rozpatrywanych przyszłych zmian czynników ryzyka wpływających na wartość kontraktów. Są również przydatne w wycenie egzotycznych instrumentów pochodnych, dla których nie ma jawnych wzorów na cenę oraz znajdują naturalne zastosowanie w inżynierii biznesowej (ang. *business engineering*) [13]. Dotychczas w literaturze rozpatrywano konkretne przykłady implementacji metod analizy scenariuszy do rozwiązania pewnych skomplikowanych zagadnień, np.: do wyceny *real options* [11], [12]. W niniejszej rozprawie po raz pierwszy podano bardzo ogólne sformułowanie metody wyceny wypłat przez analizę scenariuszy, którą można zaimplementować w bardzo szerokiej klasie modeli rynku z czasem dyskretnym ([4], [5], [8], [10], [17]). Zaproponowana metodologia pozwala na uwzględnienie w wycenie zarówno parametrów modelu, jak i przesłanek wynikających z tendencji rynkowych i bieżącej sytuacji (jest to metodologia analogiczna do obowiązującej w bardzo ważnym, stosowanym w praktyce modelu Blacka-Littermana [3]). W drugiej części pracy prezentujemy nowe wyniki dotyczące problemu efektywnego zabezpieczenia. Wprowadzamy technikę aproksymacyjną, za pomocą której dowodzimy twierdzenia o istnieniu i postaci rozwiązania problemu zabezpieczenia nieujemnej, całkowalnej wypłaty względem wypukłej półciągłej z dołu miary ryzyka, która jest ciągła i skończona w co najmniej jednym punkcie. Jest to ważny wynik, gdyż w bardzo istotny sposób uogólnia on wiele wcześniejszych rezultatów ([7], [15], [16], [18], [19], [20]). Bardzo istotne uogólnienie polega na tym, że uzyskano postać efektywnego zabezpieczenia wypłat, dla których nie istnieje superhedging (tw. 3.5.12). Problem efektywnego zabezpieczenia tych ostatnich wypłat nie był dotychczas rozpatrywany w literaturze i nie można go rozwiązać stosowanymi dotąd technikami. Należy podkreślić, że za rozpatrywaniem problemu efektywnego zabezpieczenia wypłat, dla których nie istnieje superhedging stoi naturalna i bardzo silną motywacja ekonomiczną: wobec braku superreplikacji, sprzedający wskazuje strategię inwestycyjną, która minimalizuje ryzyko straty mierzone za pomocą wypukłej miary ryzyka ρ. Wypukłe miary ryzyka stanowią szeroką klasę obejmującą m.in. koherentne miary ryzyka, których pożądane z perspektywy oceny ryzyka własności wskazano m.in. w pionierskich pracach [1], [2]. Z drugiej strony należy zwrócić uwagę na znaczenie wyniku dla modelowania rynków finansowych. Dotychczas rozpatrując problem wyceny w zaawansowanych modelach rynku budowanych na bezatomowych przestrzeniach probabilistycznych, zakładano, że kres górny wartości oczekiwanych wypłaty względem wszystkich miar martyngałowych jest skończony, co istotnie zawęża klasę wypłat, dla których można było rozwiązać problem efektywnego zabezpieczenia. W podejściu Rudloff [19] założenie to jest kluczowe dla otrzymania postaci rozwiązania. Opuszczenie tego założenia wymagało rozwinięcia zupełnie nowej techniki rozwiązania. Dodatkowo, bazując na rozwiniętym podejściu aproksymacyjnym dowodzimy twierdzenia o istnieniu i postaci rozwiązania zagad-

nienia wypukłego zabezpieczenia względem miar ryzyka z osłabionym warunkiem ciągłości.
Przejdziemy teraz do szczegółowego przestawienia najważniejszych rezultatów rozprawy.

Ustalmy liczbę $T \in \mathbb{N}$ oraz niech $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$. Ponadto dla $i \in \mathcal{T}$ przez $\mathcal{T}_i$ oznaczać będziemy zbiór $\mathcal{T} \setminus \{i\}$. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie ogólną przestrzenią probabilistyczną z filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ taką, że $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Wycena wypłat przez analizę scenariuszy

1. Charakteryzacja Z-warunkowych wartości oczekiwanych dowolnych zmiennych losowych.
Ustalmy dowolne σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ oraz dowolny niepusty zbiór $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$. σ-ciało $\mathcal{G}$ (odp. $\mathcal{H}$) pełni rolę zbioru zdarzeń obserwowalnych na rynku do chwili $t-1$ (odp. t). Elementy zbioru $\mathcal{U}$ można traktować, jako zbiory scenariuszy z historią do chwili $t-1$, które zostały wybrane do analizy scenariuszy. Zakładamy, że istnieje *ciąg reprezentujący* $\mathcal{U}$, tzn. ciąg zdarzeń $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ taki, że $A_i \in \mathcal{U}$ dla każdego i oraz $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$. Przez $\mathcal{P}_e$ oznaczmy zbiór miar probabilistycznych równoważnych $\mathbb{P}$. Niech $Z : \mathcal{U} \to \mathcal{P}_e$ będzie ustaloną funkcją. Wprowadzimy następującą konwencję oznaczeń: miarę probabilistyczną będącą wartością funkcji Z na zbiorze $A \in \mathcal{U}$ będziemy oznaczać przez $\mathbb{P}_{Z(A)}$.
Zmienne losowe rozpatrywane w tym rozdziale będą $\mathcal{F}$-mierzalnymi funkcjami o wartościach w zbiorze $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} \cup \{\kappa\}$, gdzie κ oznacza wartość nieokreśloną. Powiemy, że zmienna losowa X jest dobrze określona, jeżeli $\mathbb{P}(\{X = \kappa\}) = 0$.

Definicja 2.2.3. *Niech dobrze określona zmienna losowa X będzie taka, że $E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G})$ istnieje dla każdego $A \in \mathcal{U}$. Powiemy, że zmienna losowa $X_{Z,\mathcal{G}}$ jest Z-warunkową wartością oczekiwaną zmiennej X pod warunkiem $\mathcal{G}$, jeżeli $X_{Z,\mathcal{G}}$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna oraz dla każdego $A \in \mathcal{U}$ zachodzi równość*

$$\mathbf{1}_A X_{Z,\mathcal{G}} = \mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G}).$$

Łatwo dowodzi się, że jeżeli dla zmiennej losowej X istnieje $X_{Z,\mathcal{G}}$, to jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zbiorów $\mathbb{P}$-miary zero. Podajemy przykład funkcji Z takiej, że $X_{Z,\mathcal{G}}$ może nie istnieć nawet dla ograniczonych zmiennych losowych X. Jeżeli dla funkcji Z można znaleźć ograniczoną zmienną losową X taką, że nie istnieje Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$, to taką funkcję Z będziemy uznawać za nieodpowiednią z punktu widzenia zastosowań do wyceny. W związku z tym wprowadzamy definicję

Definicja 2.2.9. *Powiemy, że funkcja Z reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$, jeżeli dla dowolnej ograniczonej $\mathcal{H}$-mierzalnej zmiennej losowej X istnieje Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$.*

Dowiedliśmy następującej charakteryzacji funkcji reprezentujących zgodny wybór

Twierdzenie 2.2.11. *Funkcja Z reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $A, B \in \mathcal{U}$ zachodzi równość*

$$\mathbf{1}_{A\cap B}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_{A\cap B}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \qquad \mathbb{P}-p.n. \tag{1}$$

Warunek (1) jest równoważny istnieniu miary $\mathbb{P}_Z$, dla której spełnione są warunki

$$\mathbf{1}_A\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_A\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \qquad \mathbb{P}\text{-p.n.} \tag{2}$$

i

$$\mathbb{P}_Z = \mathbb{P} \text{ na } \mathcal{G}. \tag{3}$$

Sformułujemy teraz główny wynik dotyczący istnienia, jednoznaczności i postaci Z-warunkowej wartości oczekiwanej.

Twierdzenie 2.2.20. *Niech $Z : \mathcal{U} \to \mathcal{G}$ będzie funkcją reprezentującą zgodny wybór względem $\mathcal{H}$ oraz niech $\mathbb{P}_Z$ będzie dowolną miarą spełniającą warunki* (2) *i* (3). *Niech ponadto X będzie dowolną $\mathcal{H}$-mierzalną zmienną losową. Następujące warunki są równoważne:*
(i) Istnieje zmienna losowa $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$
(ii) Istnieje Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$.
Ponadto, jeżeli spełnione są powyższe warunki, to Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$ jest $\mathbb{P}$-p.n. równa $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$.

2. Matematyczny opis metody wyceny wypłat przez analizę scenariuszy. Niech dany będzie pewien wolny od arbitrażu model rynku $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, gdzie S (odp. Φ) jest nieujemnym procesem adaptowanym o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$ (odp. jest zbiorem strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$), dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Przez $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ oznaczać będziemy zbiór miar martyngałowych. Ponieważ rynek jest wolny od arbitrażu, to zbiór $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ jest niepusty na mocy pierwszego fundamentalnego twierdzenia matematyki finansowej. Ustalmy dowolny ciąg zbiorów $\mathbf{U} = (\mathcal{U}_t)_{t\in\mathcal{T}_T}$, gdzie $\mathcal{U}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ jest zbiorem, dla którego istnieje ciąg reprezentujący $\mathcal{U}_t$. Dla $t \in \mathcal{T}_0$ przez $(\mathcal{P}_e)_{\mathcal{F}_{t-1}}$ oznaczmy zbiór miar probabilistycznych równoważnych $\mathbb{P}$, które są równe $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}_{t-1}$. Wypłatą nazwiemy dowolną dobrze określoną $\mathcal{F}$-mierzalną zmienną losową. Powiemy, że adaptowany proces Y jest procesem ceny arbitrażowej wypłaty X, jeżeli $Y_T = X$ oraz rynek rozszerzony o proces Y jest wolny od arbitrażu.

Definicja 2.3.3. *Dowolny ciąg funkcji $\mathbf{Z} = (Z^t)_{t\in\mathcal{T}_0}$ takich, że $Z^t : \mathcal{U}_{t-1} \to (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{F}_{t-1}}$ dla $t \in \mathcal{T}_0$ nazwiemy ciągiem reprezentującym subiektywne prognozy. Zbiór ciągów reprezentujących subiektywne prognozy będziemy oznaczać przez $\mathcal{Z}(\mathbf{U})$.*

Definicja 2.4.2. *Powiemy, że* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ *jest schematem wyceny, jeżeli dla dowolnej ograniczonej z dołu wypłaty* X*:*
1. *istnieje proces* $\mathbf{Z}$*-uśrednienia* X*, tzn. proces* Y *spełniający warunki:* $Y_T = X$ *oraz* $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z^t(A)}}(Y_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{1}_A Y_{t-1}$ *dla każdego* $A \in \mathcal{U}_{t-1}$ *i każdego* $t \in \mathcal{T}_0$*.*
2. *jeżeli proces* Y *przyjmuje wartości rzeczywiste, to* Y *jest procesem ceny arbitrażowej* X*.*
Wówczas powiemy, że $\mathbf{Z}$ *wycenia* X *przez analizę scenariuszy. Ponadto proces* Y *nazywać będziemy procesem ceny* X *zgodnym z* $\mathbf{Z}$ *i będziemy go oznaczać przez* $\Pi^{\mathbf{Z}}(X)$*.*

Intuicja stojąca za powyższą definicją jest następująca: schemat wyceny ma mieć na tyle „dobre własności", by istniał proces $\mathbf{Z}$-uśrednienia dla wszystkich wypłat, być może za wyjątkiem tych, z których straty mogą być nieograniczone z dołu. Formułowanie zagadnień dla wypłat czy procesów o bogactwie ograniczonym z dołu jest popularne w pracach z matematyki finansowej i ma naturalną interpretację ekonomiczną: nie dopuszczamy nieograniczonych strat. Warunek 1. określa związek pomiędzy „kandydatem na proces ceny", a ciągiem $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ reprezentującym subiektywne prognozy inwestora. Związek ten można opisać słowami w sposób następujący: jeżeli w chwili $t-1$ zaszło zdarzenie $A \in \mathcal{U}_{t-1}$, to cena jest równa wartości oczekiwanej cen z chwili t przy mierze przyporządkowanej zdarzeniu A przez funkcję Z^t.
Zmierzamy teraz do charakteryzacji schematów wyceny.
Przez $\mathcal{Z}_c(\mathbf{U}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ oznaczać będziemy zbiór elementów $\mathbf{Z} = (Z^t)_{t\in\mathcal{T}_0}$ takich, że Z^t reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{F}_t$. Dowodzimy (stw. 2.3.11), że z dowolnym elementem $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ można związać pewną miarę probabilistyczną $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ o gęstości danej wzorem

$$W(\mathbf{Z}) = \prod_{t=1}^{T} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right), \tag{4}$$

gdzie $\mathbb{P}_{Z^t}$ jest dowolną miarą probabilistyczną równoważną $\mathbb{P}$, taką, że dla $Z = Z^t$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{t-1}$, $\mathcal{H} = \mathcal{F}_t$ i $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{Z^t}$, spełnione są warunki (2) i (3). Definiujemy zbiór

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U}) = \left\{ \mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U}) : \begin{array}{c} \forall t \in \mathcal{T}_0 \ \forall A \in \mathcal{U}_{t-1} \ \exists \mathbb{P}^t_A \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \\ \text{t. że} \\ \mathbf{1}_A E\big(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t(A)}}{d\mathbb{P}}\big|\mathcal{F}_t\big) = \mathbf{1}_A E\left(\frac{\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}\middle|\mathcal{F}_t\right) \end{array} \right\}.$$

Intuicja stojąca za definicją zbioru $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ jest następująca: ciąg $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ reprezentujący subiektywne prognozy jest elementem $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, jeżeli dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$ i $A \in \mathcal{U}_{t-1}$ miara $\mathbb{P}_{Z^t(A)}$ przyporządkowana zdarzeniu A uśrednia wartości z chwili t na chwilę $t-1$ jeżeli zaszło zdarzenie A w taki sam sposób, jak pewna miara martyngałowa $\mathbb{P}^t_A$. Dowodzimy

Twierdzenie 2.4.10. *Ciąg* $(Z^t)_{t\in\mathcal{T}_0} = \mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ *jest schematem wyceny wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$*.*

W dalszej części ustalamy dowolną wypłatę X i rozważamy zagadnienie opisu zbioru $\mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, którego elementami są schematy dopuszczalne dla wyceny X, tzn.

takie $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, dla których istnieje proces ceny X zgodny z $\mathbf{Z}$. Powiemy, że zmienna losowa X i miara $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_e$ mają tower property względem pewnych σ-ciał $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$, jeżeli zachodzi implikacja:

$$\text{Jeżeli } E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{H}),\ E_{\mathbb{Q}}[E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}] \text{ istnieją, to} \\ \text{istnieje } E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G}) \text{ oraz } E_{\mathbb{Q}}[E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}] = E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G}).$$

Dowodzimy następującej charakteryzacji zbioru $\mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$.

TWIERDZENIE 2.4.20. *Niech X będzie dowolną wypłatą oraz $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$. Następujące warunki są równoważne:*
(i) $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ oraz zmienna losowa X i miara $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ o gęstości danej wzorem (4) mają tower property względem $\mathcal{F}_{t-1}$ i $\mathcal{F}_t$ dla dowolnego $t \in \mathcal{T}_0$.
(ii) Istnieje $E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t)$ dla każdego $t \in \mathcal{T}$ i proces

$$M_t := E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t) \text{ dla } t \in \mathcal{T}$$

przyjmuje wartości rzeczywiste.
W sytuacji, gdy zachodzi jeden z powyższych warunków, proces M jest procesem ceny X zgodnym z $\mathbf{Z}$.

3. Nowy opis procesów ceny arbitrażowej dowolnej wypłaty.
Dowodzimy, że dowolny proces ceny arbitrażowej dowolnej wypłaty można otrzymać metodą wyceny przez analizę scenariuszy, tzn. zachodzi następujące

TWIERDZENIE 2.4.21. *Niech X będzie dowolną wypłatą i niech M będzie procesem jej ceny arbitrażowej. Wówczas $M = \Pi^{\mathbf{Z}}(X)$ dla pewnego $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$.*

Wycenę wypłaty przez analizę scenariuszy można nazwać „podejściem lokalnym": wybieramy zdarzenia i dla nich określamy reguły wyceny w taki sposób, by w oparciu o te reguły otrzymać proces ceny arbitrażowej wypłaty. Jest to procedura alternatywna dla bezpośredniego wyboru miary wyceniającej. Tę ostatnią metodę można określić mianem „globalnego podejścia" do wyceny.

Efektywne zabezpieczenie

Od tej pory zakładamy, że przestrzeń $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest bezatomowa. Niech dany będzie pewien wolny od arbitrażu model rynku $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, gdzie S (odp. Φ) jest nieujemnym procesem adaptowanym o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$ (odp. jest zbiorem strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$), dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Przez $V(\xi)$ oznaczać będziemy proces wartości strategii samofinansującej $\xi \in \Phi$. Ponadto przez $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ (odp. $\mathcal{P}_b(\mathcal{M})$) oznaczać będziemy zbiór miar martyngałowych (odp. miar martyngałowych o ograniczonych gęstościach względem $\mathbb{P}$).
Ustalmy wypukłą, półciągłą z dołu miarę ryzyka $\rho : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ taką, że $\rho(0) = 0$, pewną nieujemną, całkowalną wypłatę H, oraz liczbę $\tilde{V}_0 > 0$. Przez ρ^* oznaczać będziemy transformatę Fenchela-Legendra funkcji ρ. Sformułujemy teraz zagadnienie

efektywnego zabezpieczenia wypłaty H przy ograniczeniu $\tilde{V}_0$ na początkową wartość zabezpieczenia.
Niech

$$\Phi^+_{\tilde{V}_0} = \{\xi \in \Phi \ : \ V(\xi) \geq 0, \ V_0(\xi) \leq \tilde{V}_0\}$$

oznacza zbiór strategii, których proces wartości jest nieujemny i w chwili 0 nie przekracza $\tilde{V}_0$. Przy tych oznaczeniach problem efektywnego zabezpieczenia rozważany w pracy Rudloff [19] możemy zapisać, jako

$$\inf_{\xi \in \Phi^+_{\tilde{V}_0}} \rho(-(V_T(\xi) - H)^-). \tag{5}$$

Zmienną losową $-(V_T(\xi) - H)^-$ interpretujemy jako stratę ponoszoną przez zabezpieczającego wypłatę H przy pomocy strategii ξ.
Przez rozwiązanie problemu efektywnego zabezpieczenia rozumie się udowodnienie istnienia strategii realizującej minimum (5) oraz opisanie postaci strategii realizującej minimum. O jaki opis chodzi, wyjaśnimy, szkicując metodę rozwiązania.
Rudloff [19] rozwiązuje problem (5) według planu:
1. Definiuje zbiór zrandomizowanych testów

$$\mathcal{R} = \{\phi : \Omega \to [0,1] \ : \ \phi - \mathcal{F}_T - \text{mierzalne}\}$$

i formułuje *problem statyczny*

$$\inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}} \rho((\phi - 1)H), \tag{6}$$

gdzie

$$\tilde{\mathcal{R}} \coloneqq \{\phi \in \mathcal{R} \ : \ \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} \phi H \leq \tilde{V}_0\}.$$

2. Dowodzi istnienia zmiennej losowej $\tilde{\phi} \in \tilde{\mathcal{R}}$ będącej rozwiązaniem problemu statycznego (6) ([19], twierdzenie 4.3).
3. Wskazuje postać zmiennej losowej $\tilde{\phi}$ będącej rozwiązaniem problemu statycznego (6) ([19], twierdzenie 4.9). Jest to najtrudniejsza część pracy, w której Rudloff stosuje metody nieliniowej optymalizacji w przestrzeniach beczkowych [9], które wymagają by spełnione było

Założenie 3.1.1. *Istnieje $\phi_0 \in \tilde{\mathcal{R}}$ takie, że $\rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) < \infty$ i miara ryzyka ρ jest ciągła w punkcie $H(\phi_0 - \mathbf{1})$.*

Ponadto w tej części Rudloff korzysta również z założenia

Założenie 3.1.2.

$$\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} H < \infty.$$

4. Strategię realizującą minimum problemu (5) otrzymuje z następującego faktu.

Twierdzenie 3.1.3. *[[19], tw. 3.1] Niech $\tilde{\phi}$ będzie rozwiązaniem problemu statycznego (6) oraz niech $\tilde{\xi} \in \Phi^+_{\tilde{V}_0}$ będzie strategią superreplikującą wypłatę $\tilde{\phi} H$. Wówczas strategia $\tilde{\xi}$ realizuje minimum problemu (5).*

4. Efektywne zabezpieczenie wypłat, dla których nie istnieje superhedging.

W rozprawie podajemy przykład problemu efektywnego zabezpieczenia kontraktu określanego mianem *financial stop loss* ([14], rozdział 4.2.3.), dla którego nie jest spełnione założenie 3.1.2. W szczególności jest to kontrakt, dla którego nie istnieje *superhedging*. Umotywowani tym przykładem, rozwijamy podejście aproksymacyjne do rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia. Idea podejścia aproksymacyjnego jest następująca: definiujemy ciąg zagadnień, które można rozwiązać znanymi dotychczas metodami, a następnie z otrzymanych rozwiązań konstruujemy ciąg zmiennych losowych zbieżny do rozwiązania wyjściowego problemu, korzystając z lematu Delbaena i Schachermayera ([6], lemat $A1.1$) oraz pojęcia DS-ciągu.

DEFINICJA 3.4.4. *Powiemy, że ciąg* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest DS-ciągiem, jeżeli dla każdego* $n \in \mathbb{N}$*:*
1. $\gamma_n = (\gamma_{n,n}, \gamma_{n,n+1}, \dots)$.
2. *Współrzędne wektora* γ_n *są nieujemne, przy czym jest skończenie wiele niezerowych.*
3. $\sum_{k\geq n} \gamma_{n,k} = 1$.

Głównym wynikiem jest postać rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia nieujemnych, całkowalnych wypłat, dla których nie istnieje *superhedging*.

TWIERDZENIE 3.5.12. *Niech* $\rho : L^1 \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *będzie wypukłą, właściwą, półciągłą z dołu miarą ryzyka,* $\rho(0) = 0$*,* H *nieujemną, całkowalną wypłatą oraz ustalmy liczbę* $\tilde{V}_0 > 0$*. Niech ponadto spełnione będzie założenie 3.1.1. Wówczas:*
1. *Dla* $r \in \mathbb{N}$ *istnieje rozwiązanie zagadnienia*

$$\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{D}}\Big\{\inf_{\phi\in\tilde{\mathcal{R}}_b^r}\{E_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{1}-\phi)H - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}})\}\Big\}, \tag{7}$$

gdzie $\mathcal{D} = \{Z \in L^\infty : \rho^*(-Z) < \infty\}$*, zaś* $\tilde{\mathcal{R}}_b^r := \big\{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^*\in(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} E_{\mathbb{P}^*}\phi H \leq \tilde{V}_0\big\}$*, przy czym* $(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r := \{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M}) : \|Z_{\mathbb{P}^*}\|_\infty \leq r\}$*,* $r \in \mathbb{N}$*.*
Ponadto dla dowolnego $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ *będącego rozwiązaniem problemu (7) istnieje rozwiązanie zagadnienia*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda_+((\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r)} G^r_{\mathbb{Q}}(\lambda), \tag{8}$$

gdzie

$$\begin{aligned} G^r_{\mathbb{Q}}(\lambda) := -\,E\Big[H\Big(Z_{\mathbb{Q}} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\Big)\Big]^- \\ + \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} E_{\mathbb{P}^*}H\lambda(d\mathbb{P}^*) - \tilde{V}_0\lambda((\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}) \end{aligned}$$

oraz $\Lambda_+((\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r)$ *oznacza zbiór miar o skończonym wahaniu określonych na* σ*-ciele wszystkich podzbiorów zbioru* $(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r$*.*
2. *Dla* $r \in \mathbb{N}$ *niech* $\bar{\mathbb{Q}}_r$ *(odp.* $\bar{\lambda}_r$*) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (7) (odp.*

(8) z $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}_r$). Wówczas dla każdego $r \in \mathbb{N}$ istnieje zrandomizowany test spełniający warunki

$$\psi_r(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } H(Z_{\bar{\mathbb{Q}}_r} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} Z_{\mathbb{P}^*} \bar{\lambda}_r(d\mathbb{P}^*))(\omega) < 0, \\ 1, & \text{gdy } H(Z_{\bar{\mathbb{Q}}_r} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} Z_{\mathbb{P}^*} \bar{\lambda}_r(d\mathbb{P}^*))(\omega) > 0 \end{cases} \tag{9}$$

oraz

$$E_{\mathbb{P}^*} H\psi_r = \tilde{V}_0 \text{ dla } \bar{\lambda}_r - \text{prawie wszystkich } \mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r. \tag{10}$$

3. *Dla $r \in \mathbb{N}$ niech $\bar{\mathbb{Q}}_r$ (odp. $\bar{\lambda}_r$) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (7) (odp. (8)). Niech ponadto $\bar{\psi}_r$ będzie dowolnym zrandomizowanym testem spełniającym warunki (9) oraz (10) oraz niech $\bar{\delta} \in \mathcal{R}$ będzie dowolne. Wówczas istnieje DS-ciąg $(\beta_m)_{m=1}^{\infty}$, dla którego wzór*

$$\bar{\delta}\mathbf{1}_{\{H=0\}} + \lim_{m\to\infty} \mathbf{1}_{\{H>0\}} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}\psi_r,$$

definiuje zmienną losową $\bar{\psi}$ będącą rozwiązaniem zagadnienia

$$\inf_{\phi\in\tilde{\mathcal{R}}} \rho((\phi - \mathbf{1})H)$$

4. *Rozwiązaniem problemu efektywnego zabezpieczenia (5) jest strategia superreplikująca wypłatę $\bar{\psi}H$.*

5. Efektywne zabezpieczenie wypłat względem miar ryzyka z osłabionym warunkiem ciągłości.

Na zakończenie dowodzimy twierdzenia o istnieniu i postaci rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia względem miar ryzyka, dla których warunek ciągłości (założenie 3.1.1) zastąpiono słabszym założeniem, które stanowi koniunkcja sformułowanych w poniższym twierdzeniu warunków $(Z1)$ i $(Z2)$.

Twierdzenie 3.5.14. *Niech $\rho : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ będzie wypukłą, właściwą, półciągłą z dołu miarą ryzyka, $\rho(0) = 0$, H nieujemną, całkowalną wypłatą oraz ustalmy liczbę $\tilde{V}_0 > 0$. Niech ponadto spełnione będą następujące warunki:*
$(Z1)$ istnieje zrandomizowany test $\phi_0 \in \tilde{\mathcal{R}} := \{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*}(\phi H) \leq \tilde{V}_0\}$, dla którego $\rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) < \infty$.
$(Z2)$ Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje zmienna losowych $H_k \in L^{p_k}$ dla pewnego $1 \leq p_k < \infty$ oraz istnieje zrandomizowany test $\phi_0^{(k)} \in \tilde{\mathcal{R}}_b^{(k)} := \{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*}(\phi H_k) \leq \tilde{V}_0\}$, takie, że:
a) miara ryzyka $\rho : L^{p_k} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jest ciągła w punkcie $H_k(\phi_0^{(k)} - \mathbf{1})$,
b) $H_k \nearrow H$ $\mathbb{P}$-p.n. oraz istnieje zbiór Ω' taki, że $\mathbb{P}(\Omega' = 1)$ i dla każdego $\omega \in \Omega'$ istnieje $k_0(\omega)$ t. że $H_k(\omega) = H(\omega)$ dla $k \geq k_0(\omega)$.
Wówczas:
1. *Dla $k, r \in \mathbb{N}$ istnieje rozwiązanie zagadnienia*

$$\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{D}}\Big\{ \inf_{\phi\in\tilde{\mathcal{R}}_b^{(k,r)}} \{E_{\mathbb{Q}}\big[H_k(\mathbf{1} - \phi)\big] - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}})\}\Big\}, \tag{11}$$

gdzie $\mathcal{D} = \{Z \in L^\infty : \rho^*(-Z) < \infty\}$, *zaś* $\tilde{\mathcal{R}}_b^{(k,r)} = \big\{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} E_{\mathbb{P}^*}(\phi H_k) \le \tilde{V}_0\big\}$, *przy czym* $(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r := \{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M}) : \|Z_{\mathbb{P}^*}\|_{L^{p_k}} \le r\}$, $k, r \in \mathbb{N}$. *Ponadto dla dowolnego* $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ *będącego rozwiązaniem problemu (11) istnieje rozwiązanie zagadnienia*

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_+((\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r)} G_{\mathbb{Q}}^{k,r}(\lambda), \tag{12}$$

gdzie

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}}^{k,r}(\lambda) := &- E\Bigg[H_k\Big(Z_{\mathbb{Q}} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\Big)\Bigg]^- \\ &+ \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} E_{\mathbb{P}^*} H_k \lambda(d\mathbb{P}^*) - \tilde{V}_0 \lambda((\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}) \end{aligned}$$

oraz $\Lambda_+((\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r)$ *oznacza zbiór miar o skończonym wahaniu określonych na* σ-*ciele wszystkich podzbiorów zbioru* $(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r$.
2. *Dla* $k, r \in \mathbb{N}$ *niech* $\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$ *(odp.* $\bar{\lambda}_{k,r}$*) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (11) (odp. (12) z* $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$*). Wówczas dla dowolnych* $k, r \in \mathbb{N}$ *istnieje zrandomizowany test* $\psi_{k,r}$ *spełniający warunki*

$$\psi_{k,r}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } H_k(Z_{\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} Z_{\mathbb{P}^*}\bar{\lambda}_{k,r}(d\mathbb{P}^*))(\omega) < 0, \\ 1, & \text{gdy } H_k(Z_{\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} Z_{\mathbb{P}^*}\bar{\lambda}_{k,r}(d\mathbb{P}^*))(\omega) > 0 \end{cases} \tag{13}$$

oraz

$$E_{\mathbb{P}^*}(H_k \psi_{k,r}) = \tilde{V}_0 \ \textit{dla} \ \ \bar{\lambda}_{k,r} - \ \textit{prawie wszystkich} \ \mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r. \tag{14}$$

3. *Dla* $k, r \in \mathbb{N}$ *niech* $\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$ *(odp.* $\bar{\lambda}_{k,r}$*) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (11) (odp. (12) z* $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$*) oraz niech* $\psi_{k,r}$ *będzie dowolnym zrandomizowanym testem spełniającym warunki (13) oraz (14). Wówczas istnieją DS-ciągi* $(\eta_n)_{n=1}^\infty$, $(\beta_m^{(k)})_{m=1}^\infty$, $k \in \mathbb{N}$ *takie, że dla dowolnego* $\bar{\delta} \in \mathcal{R}$ *wzór*

$$\bar{\delta}\boldsymbol{1}_{\{H=0\}} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k \ge n} \eta_{n,k} \lim_{m\to\infty} \sum_{r \ge m} \beta_{m,r}^{(k)} \boldsymbol{1}_{\{H>0\}} \psi_{k,r}.$$

definiuje zrandomizowany test $\bar{\psi}$ *będący rozwiązaniem zagadnienia*

$$\inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}} \rho((\phi - \boldsymbol{1})H).$$

4. *Rozwiązaniem problemu efektywnego zabezpieczenia (5) jest strategia superreplikująca wypłatę* $\bar{\psi}H$.

W modelu rynku zbudowanym na przestrzeni probabilistycznej $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue ilustrujemy zastosowanie powyższego twierdzenia na przykładzie problemu efektywnego zabezpieczenia dowolnej, nieujemnej, całkowalnej wypłaty H względem koherentnej miary ryzyka zdefiniowanej wzorem

$$\bar{\rho}(Y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{[0,1]} -g_n(x) Y(x) dx, \qquad \text{dla } Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

gdzie $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją daną wzorem:

$$g_n(x) = c_n \mathbf{1}_{[\frac{1}{n+1},1]}(x) \cdot \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}, \qquad x \in [0,1],$$

przy czym $c_n^{-1} := 1 - (\frac{1}{n+1})^{\frac{3}{4}}$ jest stałą normującą. Dowodzimy (stw. 3.2.5), że dla $\bar{\rho}$ nie jest spełnione założenie 3.1.1, zatem problemu efektywnego zabezpieczenia względem miary ryzyka $\bar{\rho}$ nie można rozwiązać w oparciu o istniejące dotychczas wyniki [19]. Następnie uzasadniamy (przykład 3.5.15), że ponieważ $\bar{\rho}|_{L^2} < \infty$ (lemat 3.2.3), to dla $p_k := 2$, $H_k := H \wedge k$, $k \in \mathbb{N}$ spełnione są założenia twierdzenia 3.5.14.

Bibiliografia do autoreferatu

Poniżej zamieszczono tylko te prace, do których odwołania znajdują się w autoreferacie. Pełna bibliografia znajduje się w rozprawie.

[1] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath *Thinking coherently* Risk 10 (11), (1997), 68-71.

[2] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath *Coherent Measures if Risk* Math. Finance 9(3), (1999), 203-228.

[3] F. Black, R. Litterman *Global Portfolio Optimization* Financial Analysts Journal 48, (1992), 28-43.

[4] J.d Castillo, J-P. Ortega *Hedging of time disrete auto-regressive stochastic volatility options* arXiv, (2011).

[5] A. Cerny, J. Kallsen *Hedging by sequential regression revisited* Mathematical Finance 19, (2009), 591-617.

[6] F. Delbaen, W. Schachermayer *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Math. Ann. 300, (1994), 463-520 .

[7] H. Föllmer, P. Leukert *Efficient hedging: Cost versus shortfall risk* Finance and Stochastics 4 (2000), 117-146

[8] H. Föllmer, A. Schied *Stochastic Finance: an introduction in discrete time* Walter de Gruyter, (2002)

[9] T. Husain, S. M. Khaleelulla *Barrelledness in Topological and Ordered Vector Spaces* Springer, (1978).

[10] J. Jakubowski, *Modelowanie rynków finansowych*, SCRIPT, (2006) (in Polish).

[11] T. Luehrman *Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on the Numbers* Harvard Business Review 76, (1998), 51-67.

[12] T. Luehrman *Strategy as a Portfolio of Real Options* Harvard Business Review 76, (1998), 87-99.

[13] S. Mathews, J. Salmon *Business Engineering: A Practical Approach to Valuing High-Risk, High-Return Projects Using Real Options* Tutorials in Operations Research, INFORMS, (2007).

[14] T. Møller *On valuation and risk management at the interface of insurance and finance* British Actuarial Journal 8, (2002), 787-827,

[15] Y. Nakano *Minimizing coherent risk measures of shortfall in discrete-time models with cone constraints* Applied Mathematical Finance 10, (2003), 163–181.

[16] Y. Nakano *Efficient hedging with coherent risk measure* J. Math. Anal. Appl., 293 (2004), 345-354.

[17] S. R. Pliska *Wprowadzenie do matematyki finansowej. Modele z czasem dyskretnym*, WNT, (2005).

[18] B. Rudloff *Hedging in Incomplete Markets and Testing Compound Hypotheses via Convex Duality* Ph. D. Thesis, (2006).

[19] B. Rudloff *Convex hedging in incomplete Markets*, Applied Mathematical Finance 14, (2007), 437-452.

[20] B. Rudloff *Coherent hedging in incomplete markets* Quantitative Finance 9, (2009), 197–206.