Języki słów proskończonych i problem ograniczoności

Szymon Toruńczyk

autoreferat rozprawy doktorskiej

pod kierunkiem dr hab. Mikołaja Bojańczyka

31 marca 2011

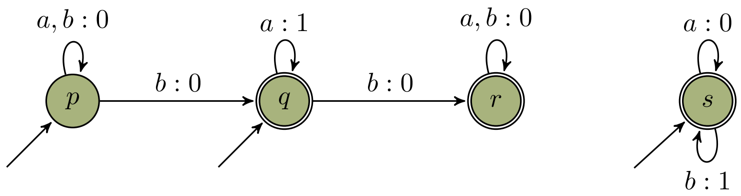
Wprowadzenie

Tematem niniejszej rozprawy doktorskiej jest problem ograniczoności (ang. *limitedness*). Jej celem zaś, jest stworzenie teorii, w której rozwiązanie tego problemu byłoby eleganckie oraz dające perspektywy do uogólnień. Poniżej opisuję zarys historyczny problemu, oraz jak niniejsza praca się na tle tego zarysu usytuowia.

Problem star height oraz problem ograniczoności

Problem *star height* został wprowadzony przez L. C. Eggana w roku 1963 [Egg63]. Jest to następujący problem obliczeniowy. **Wejście:** Język regularny L (przedstawiony np. za pomocą automatu) **Obliczyć:** Najmniejszą możliwą liczbę zagnieżdżeń gwiazdki Kleene'go w wyrażeniu regularnym, które opisuje język L. Rozważane wyrażenia regularne mogą korzystać z konkatenacji, sumy oraz gwiazdki Kleene'go, ale nie z dopełnienia. Pytanie o obliczalność problemu star height pozostało otwarte przez 25 lat, do chwili gdy K. Hashiguchi [Has88] znalazł na nie pozytywną odpowiedź. Jego dowód jest głęboki i wnikliwy, ale – jak wielu zaznacza – trudny do zrozumienia.

Rozwiązując problem star height, K. Hashiguchi zdefiniował inny problem decyzyjny, zwany problemem ograniczoności (ang. *limitedness*). Problem ten jest kombinatorycznym jądrem problemu star height oraz pokrewnych mu zagadnień z teorii języków formalnych. W podstawowej postaci, problem ograniczoności brzmi następująco. **Wejście:** Niedeterministyczny automat skończony $\mathcal{A}$, którego tranzycje są etykietowane wagami będącymi liczbami naturalnymi. **Rozstrzygnąć:** czy istnieje ograniczenie n takie, że każde akceptowane słowo ma pewien bieg akceptujący o sumie wag nie przekraczającej n? Tego rodzaju automat, w którym tranzycje posiadają nieujemne wagi, nazywany jest automatem z odległością (ang. *distance automaton*). Przykładowy automat z odległością nad alfabetem $\{a, b\}$ jest przedstawiony na Rys. 1. Automat z odległo-



Rysunek 1: *Automat z odległością. Stany początkowe to p, q, s, a stany akceptujące to q, r, s*

ścią $\mathcal{A}$ może być widziany jako funkcja przypisująca danemu słowu wejściowemu w najmniejszą możliwą sumę wag w biegu akceptującym słowo w, oraz ∞ gdy słowo nie jest akceptowane. Dla przykładu, automat z Rys. 1 przypisuje słowu $a^{n_1}ba^{n_2}b \ldots ba^{n_k}$ wartość $\min(n_1, n_2, \ldots, n_k, k)$. Problem ograniczoności jest pytaniem o to, czy funkcja wyznaczona przez automat ma skończony obraz. Nasz przykładowy automat nie jest ograniczony, bo wartości przypisane słowom $aba, aabaabaa, \ldots, (a^k b)^k a^k, \ldots$ rosną nieograniczenie.

Półpierścień tropikalny Problem ograniczoności automatów z odległością jest ściśle powiązany z zagadnieniami dotyczącymi półpierścienia tropikalnego (ang. *tropical semiring*), wprowadzonego przez I. Simona. Półpierścień ten składa się z liczb naturalnych oraz elementu ∞, gdzie minimum wraz z dodawaniem grają rolę, odpowiednio, operacji dodawania i mnożenia półpierścieniu. Związek z automatami z odległością wynika z następującego spostrzeżenia. W automacie z odległością, wartością biegu jest suma wag jego tranzycji, a wartością słowa jest najmniejsza możliwa wartość biegu akceptującego dane słowo. Odpowiada to mnożeniu macierzy nad półpierścieniem tropikalnym: jeżeli $s_1, s_2, \ldots, s_k$ są takimi macierzami, to w ich iloczynie, na pozycji $[i, j]$, znajduje się minimum po wszystkich ciągach $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} \in \{1, \ldots, n\}$ wartości

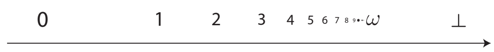
$$s_1[i, i_1] + s_2[i_1, i_2] + \cdots + s_k[i_{k-1}, j].$$

Wartość tę można interpretować jako sumę wag wzdłuż biegu odwiedzającego kolejno stany $i, i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, j$. Opierając się na tym spostrzeżeniu, łatwo jest wykazać równoważność problemu ograniczoności z następującym problemem skończonego przekroju (ang. *finite section problem*). Dla zbioru S macierzy $n \times n$ nad półpierścieniem tropikalnym oraz pary współrzędnych $[i, j]$, $[i, j]$-przekrojem zbioru S nazywamy zbiór elementów, które pojawiają się na współrzędnej $[i, j]$ pewnej macierzy ze zbioru S. Problem skończonego przekroju pyta, czy dla danego skończonego zbioru macierzy A, skończony jest $[i, j]$-przekrój zbioru wszystkich A^+ macierzy otrzymanych przez wymnażanie macierzy ze zbioru A.

Rozstrzygalność problemu ograniczoności automatów z odległością została wykazana przez K. Hashiguchiego w [Has82]. I. Simon skomentował ([Sim88]) wynik słowami: „rozwiązanie jest bardzo skomplikowane i trudne do zobrazowania, co poprowadziło do dalszej pracy nad szukaniem innych dowodów tego wyniku". Ponadto, podany algorytm ma bardzo złą złożoność obliczeniową.

Dowód K. Hashiguchiego rozstrzygalności problemu star height przebiega poprzez zawiłą redukcję do problemu ograniczoności.

Topologiczne podejście do problemu ograniczoności Inny dowód rozstrzygalności problemu ograniczoności został podany przez H. Leunga w [Leu98], w artykule pod tytułem „Topologiczne podejście do problemu ograniczoności automatów z odległością". H. Leung wprowadził rozszerzenie $\mathcal{T}$ półpierścienia tropikalnego o nowy element ω, z porządkiem $0 < 1 < 2 < \ldots < \omega < \infty$. Operacje w półpierścieniu $\mathcal{T}$ to znowu minimum oraz dodawanie, gdzie $x+\omega = \max(x,\omega)$ dla $x \in \mathcal{T}$. Kluczowe są własności topologiczne półpierścienia $\mathcal{T}$: element ω jest punktem skupienia dowolnego nieograniczonego ciągu liczby naturalnych. Dokładniej, rozpatrujemy metrykę na $\mathcal{T}$, w której odległością między liczbą n a elementem ω jest $1/n$, podczas gdy każda liczba jest odległa od elementu ∞ o 1. Topologia $\mathcal{T}$ jest przedstawiona na Rys. 2. Korzyść z wprowadzenia



Rysunek 2: *Topologia oraz porządek w półpierścieniu $\mathcal{T}$*

elementu ω jest następująca. Niech A będzie skończonym zbiorem macierzy nad półpierścieniem $\mathcal{T}$, które nie używają wartości ω. Wówczas, $[i,j]$-przekrój zbioru A^+ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy jego topologiczne domknięcie $\overline{A^+}$ zawiera macierz, której $[i,j]$-ta współrzędna jest równa ω. W celu rozstrzygnięcia problemu skończonego przekroju, H. Leung wprowadził jeszcze jeden, skończony półpierścień $\mathcal{R}$, będący uproszczoną wersją półpierścienia $\mathcal{T}$: składa się on z elementów $0, 1, \omega, \infty$, i element 1 reprezentuje wszystkie skończone, dodatnie wartości. Istnieje naturalne przekształcenie, które macierzy nad półpierścieniem $\mathcal{T}$ przyporządkowuje jej uproszczenie, będące macierzą nad półpierścieniem $\mathcal{R}$, poprzez zastąpienie skończonych, dodatnich wartości wartością 1. To przekształcenie jest homomorfizmem półpierścieni. Ponieważ uproszczenie to rozróżnia skończone wartości od elementu ω, problem ograniczoności można przedstawić następująco: dla danego skończonego zbioru macierzy A, obliczyć zbiór uproszczeń macierzy będących elementami zbioru $\overline{A^+}$.

Dla macierzy nad półpierścieniem $\mathcal{R}$, H. Leung rozważał operację stabilizacji (ang. *stabilization*), która przypomina akcelerację: dla danej idempotentnej macierzy e nad półpierścieniem $\mathcal{R}$, jej stabilizacją $e^{\#}$ jest uproszczenie granicy macierzy $e, e^2, e^3, \ldots$, traktowanych jako macierze nad półpierścieniem $\mathcal{T}$. Przykładowo, niech e będzie macierzą 1×1, której jedyny element ma wartość 1. Macierz ta jest idempotentem, gdy widziana jest jako macierz nad półpierścieniem $\mathcal{R}$. Jednak nad półpierścieniem $\mathcal{T}$, jej kolejne potęgi to $1, 2, 3, 4, \ldots$, a ich granicą jest ω. Dlatego też, stabilizacja $e^{\#}$ macierzy e jest macierzą, której jedyny element ma wartość ω.

H. Leung zaproponował następującą charakteryzację zbioru uproszczeń macierzy występujących w domknięciu $\overline{A^+}$.

$$\alpha(\overline{A^+}) = \alpha(A)^{\langle\,\cdot\,,\#\rangle}$$

Powyżej, α oznacza operację upraszczania macierzy, a $\alpha(A)^{\langle\,\cdot\,,\#\rangle}$ oznacza zbiór wszystkich macierzy nad półpierścieniem $\mathcal{R}$, które da się wygenerować za pomocą wymnażania oraz stabilizacji ze zbioru uproszczeń macierzy występujących w A.

Ponieważ zbiór wszystkich macierzy $n \times n$ o współczynnikach w $\mathcal{R}$ jest skończony, powyższa charakteryzacja pozwala na efektywne rozstrzygnięcie problemu ograniczoności. Niestety, dowód charakteryzacji został jedynie naszkicowany przez H. Leunga w [Leu98].

W [Sim94], I. Simon podał niezależny dowód charakteryzacji H. Leunga. Kluczowym zastosowanym narzędziem są lasy faktoryzacji (ang. *factorization forests*) – potężny, acz prosty wynalazek ułatwiający operowanie na skończonych półgrupach.

Automaty Kirstena W [Kir05], D. Kirsten zaproponował nowy model automatów, które nazwał zagnieżdżonymi automatami z odległością pustynną (ang. *nested distance desert automata*). My będziemy je po prostu nazywali automatami Kirstena. Automat Kirstena można w skrócie opisać jako niedeterministyczny automat, wyposażony w wiele liczników, które uporządkowane są w ścisłą hierarchię: zwiększenie jednego licznika wywołuje również wyzerowanie wszystkich liczników będących niżej w hierarchii. Wartością biegu jest maksymalna wartość osiągnięta przez którykolwiek z liczników. Wartością słowa jest najmniejsza możliwa wartość biegu, który je akceptuje. Wobec tego, podobnie do automatów z odległością, automaty Kirstena przypisują akceptowanym słowom wejściowym liczby naturalne, a pozostałym słowom – wartość ∞. Dlatego też, nie jest pozbawionym sensu rozpatrywanie problemu ograniczoności dla automatów Kirstena. Rozwijając algebraiczne metody K. Hashiguchiego, I. Simona oraz H. Leunga, D. Kirsten podał dowód rozstrzygalności ograniczoności swoich automatów. Ponadto, D. Kirsten przedstawił elegancką i w miarę bezpośrednią redukcję problemu star height do tego problemu ograniczoności.

Temat pierwszej części rozprawy W pierwszej części niniejszej pracy, przedstawiamy kolejny dowód problemu ograniczoności automatów z odległością, oraz dla B-automatów – modelu który uogólnia automaty Kirstena, i który opisujemy w dalszej części tego wprowadzenia. Dowód ten czerpie z topologicznych idei H. Leunga, a także z techniki I. Simona korzystającej z lasów faktoryzacji. Zgodnie z podejściem topologicznym, patrzymy na półgrupę macierzy nad półpierścieniem $\mathcal{T}$ jako na zwartą półgrupę topologiczną, a konkretniej – jako na półgrupę proskończoną. Każda taka półgrupa jest wyposażona w operację zwaną ω-potęgą (ang. *ω-power*), która danej macierzy s przyporządkowuje granicę ciągu macierzy $s, s^{2!}, s^{3!}, \ldots$. Okazuje się, że ω-potęga w półgrupie macierzy nad półpierścieniem $\mathcal{T}$ odpowiada stabilizacji H. Leunga. Dowodzimy następującej, kluczowej własności półgrupy macierzy nad półpierścieniem $\mathcal{T}$.

Twierdzenie 1 *Niech A będzie skończonym zbiorem macierzy $n \times n$ nad półpierścieniem $\mathcal{T}$. Wówczas*

$$\overline{A^+} = A^{\langle\,\cdot\,,\omega\rangle},$$

gdzie $A^{\langle\,\cdot\,,\omega\rangle}$ oznacza zbiór wszystkich macierzy, które da się wygenerować za pomocą wymnażania oraz ω-potęgi ze zbioru A.

Powyższa własność jest bardzo blisko związana z charakteryzacją podaną przez H. Leunga. W istocie, bardzo łatwo jest wykazać, że powyższe twierdzenie implikuje charakteryzację podaną przez H. Leunga (implikacja w drugą stronę jest również dosyć prosta). Nasz dowód powyższej własności opiera się o rozszerzenie pojęcia lasów faktoryzacji na obiekty, które nazywamy półgrupami ze stabilizacją. Pod tym względem, dowód przypomina dowód przedstawiony przez I. Simona w [Sim94]. Uważamy, że nasz dowód jest prostszy, a także ogólniejszy (gdyż dotyczy B-automatów) od wcześniej przedstawianych dowodów, ale przede wszystkim, pomaga on dostrzec związki pomiędzy problemem ograniczoności a topologią proskończoną, które są zgłębiane w drugiej części pracy.

Logika MSO+$\mathbb{B}$ oraz B/S-automaty

Logika MSO+$\mathbb{B}$ W swojej rozprawie doktorskiej, M. Bojańczyk rozpoczął badania nad logiką MSO+$\mathbb{B}$ na drzewach nieskończonych. Jest to rozszerzenie logiki MSO o nowy kwantyfikator $\mathbb{B}$. Definicja kwantyfikatora $\mathbb{B}$ jest taka, że formuła $\mathbb{B}X.\varphi(X)$ zachodzi, jeżeli istnieje wspólne ograniczenie na rozmiar zbioru pozycji X, który spełnia formułę ϕ. M. Bojańczyk wykazał rozstrzygalność niektórych fragmentów tej logiki, jednak w pełnej ogólności problem pozostaje otwarty, nawet w przypadku słów nieskończonych.

Praca nad logiką MSO+$\mathbb{B}$ stała się częścią większego projektu (opisanego szerzej w [Boj10]), który stara się rozszerzyć pojęcie języka ω-regularnego, jednocześnie zachowując jego silne własności. Przykładowo, język zdefiniowany w logice MSO+$\mathbb{B}$ wciąż wyznacza kongruencję o skończonym indeksie, nawet w przypadku silnej równoważności Arnolda, często rozpatrywanej w odniesieniu do nieskończonych słów. W [Boj09, BT09] podano kilka klas języków, rozszerzających języki ω-regularne. Zdefiniowane je jako rozszerzenia słabej logiki monadycznej (ang. *Weak MSO logic*) – której wyrazistość jest równoważna logice MSO na słowach nieskończonych – poprzez wprowadzenie kwantyfikwatora $\mathbb{B}$, lub różnych innych kwantyfikatorów. Te rozszerzenia dopuszały równoważne opisy w terminach automatów, tym samym umożliwiając rozwiązanie problemu spełnialności.

Problem spełnialności pełnej logiki MSO+$\mathbb{B}$ jest trudniejszy niż problem ograniczoności, gdyż dla danego automatu z licznikami $\mathcal{A}$ (np. automatu Kirstena), łatwo skonstruować formułę MSO+$\mathbb{B}$, która wyraża fakt, że $\mathcal{A}$ jest ograniczony:

> Dla dowolnego nieskończonego słowa $w_1\$w_2\$w_3\$\ldots$ istnieje nieskończone słowo $\rho_1\$\rho_2\$\rho_3\$\ldots$ takie, że:
>
> – dla każdej liczby $i \in \{1, 2, \ldots\}$, słowo ρ_i opisuje akceptujący bieg automatu $\mathcal{A}$ po słowie w_i
>
> – dla każdego licznika istnieje ograniczenie na rozmiar zbioru pozycji zaznaczających kolejne wzrosty wybranego licznika, pomiędzy którymi nie następuje jego wyzerowanie

W publikacji [BC06], autorzy (nieświadomi istniejących wyników na temat problemu ograniczoności) wykazali rozstrzygalność pewnego fragmentu logiki MSO+$\mathbb{B}$, który zawiera formuły takie jak powyższa. Tak więc, przedstawili oni nowy, niezależny dowód problemu rozstrzygalności problemu ograniczoności (automatów z odległością, czy też automatów Kirstena).

Jednym z narzędzi wykorzystanych w dowodzie są B-automaty. Są one podobne do automatów Kirstena z tą różnicą, że liczniki nie są uporządkowane w hierarchię, i można na nich wykonywać dwie operacje: zwiększania oraz wyzerowania. Wartością słowa jest najmniejsza możliwa wartość biegu, który je akceptuje, zaś wartością biegu jest największa wartość osiągana przez który bądź z liczników. Autorzy wprowadzili również inny model automatów, które nazwali S-automatami. Ich definicja jest taka jak definicja B-automatów, z tą różnicą, że słowa „największa" oraz „najmniejsza" są ze sobą zamienione. S-automaty są wygodne, ponieważ ich problem ograniczoności jest łatwo rozstrzygalny. W zasadniczym kombinatorycznym wyniku pracy [BC06], wykazany jest związek B-automatów z S-automatami, z którego z kolei wynika rozstrzygalność fragmentu logiki MSO+$\mathbb{B}$. Dowód tego wyniku opiera się również o lasy faktoryzacji I. Simona.

Żeby przenieść te wyniki do świata słów nieskończonych, wprowadzono *ωB-automaty*. Są one zdefiniowane podobnie jak B-automaty, ale zamiast przypisywać słowu liczbę, dają one odpowiedź Boolowską, opartą o warunek Büchi'ego, oraz to, czy podczas biegu, liczniki miały ograniczone wartości. ωB-automaty definiują klasę *języków ωB-regularnych*, która rozszerza języki ω-regularne, oraz odpowiada syntaktycznemu fragmentowi logiki MSO+$\mathbb{B}$, w którym jest organiczona jest możliwość używania negacji. Zasadniczy wynik pracy [BC06] implikuje rozstrzygalność spełnialności dla tego fragmentu logiki.

Okazuje się, że klasa języków ωB-regularnych jest dosyć naturalną klasą. Pojawia się przykładowo również w pracy [ST11], która rozpatruje pozornie niezwiązane zagadnienia. W tej pracy rozważane są automaty wyposażone w wiele liczników, z testami na równość, oraz możliwością zwiększania i zmniejszania liczników, tyle, że o wartość niekontrolowaną przez automat. Okazuje się, że te automaty, rozpatrywane na słowach nieskończonych (z warunkiem akceptacji typu Büchi'ego) są równoważne ωB-automatom. Warto zauważyć, że wyposażenie ωB-automatu w możliwość zmniejszania licznika o jeden prowadzi łatwo do nierostrzygalności, gdyż umożliwia symulację maszyny dwulicznikowej. Nawet dla ωB-automatów z jednym licznikiem i bez możliwości resetowania, prowadzi to do nieroztrzygalnej pustości (w pracy [DDG$^+$10] przedstawiony jest dowód, w której automaty z jednym licznikiem, z dekrementacją i inkrementacją i testem na istnienie ograniczenia występuje pod nazwą „Energy Games").

Teoria Colcombeta W pracach [Col09, Col10], T. Colcombet rozwinął całą teorię, która, między innymi, implikuje zasadniczy wynik pracy [BC06], oraz ujawnia jego związki z problemem ograniczoności. Teoria ta opiera się głównie na pracy [BC06], lecz czerpie też z metod H. Leunga oraz D. Kirstena. Kluczowym pojęciem wprowadzonym przez T. Colcombeta jest funkcja kosztu (ang. *cost function*). Jest to abstrakcja, ujmująca istotę funkcji obliczanych przez automaty z licznikami – utożsamiane ze sobą są funkcje wyglądające podobnie z punktu widzenia ograniczoności. Definicja jest następująca. Dla danych dwóch funkcji $f, g\colon A^+ \to \overline{\mathbb{N}}$, określonych na zbiorze wszystkich słów nad alfabetem A, mówimy, że f dominuje g, jeżeli na każdym zbiorze słów, na którym funkcja f jest ograniczona, funkcja g jest również ograniczona. Relacja dominacji zadaje relację przechodnią i zwrotną na zbiorze wszystkich funkcji. Mówimy, że dwie funkcje f oraz g są równoważne, jeżeli f dominuje g, oraz g dominuje f. Klasy równoważności tej relacji równoważności nazywane są funkcjami kosztu.

Problem ograniczoności jawi się zatem jako problem rozstrzygnięcia, czy funkcja wyznaczona przez dany automat $\mathcal{A}$ jest zdominowana przez funkcję, która przypisuje wartość 0 słowom akceptowanym przez $\mathcal{A}$ oraz wartość ∞ słowom odrzucanym przez $\mathcal{A}$. Warto zauważyć, że własność ta zależy nie tyle od funkcji wyznaczonej przez automat $\mathcal{A}$, co od jej klasy abstrakcji, tj. wyznaczonej przez nią funkcji kosztu.

Następujący wynik jest sformułowany w [Col09], choć wynika on też z [BC06]:

Twierdzenie 2 *Klasa funkcji kosztu wyznaczanych przez B-automaty jest tożsama z klasą funkcji kosztu wyznaczonych przez S-automaty. W konsekwencji, relacja dominacji jest rozstrzygalna dla tej klasy funkcji kosztu.*

Za T. Colcombetem, nazywamy funkcje kosztu wyznaczone przez B-automaty (tudzież S-automaty) regularnymi funkcjami kosztu. Teoria T. Colcombeta podaje opis klasy regularnych funkcji kosztu nie tylko za pomocą automatów, ale także równoważne opisy w języku półgrup ze stabilizacją, oraz za pomocą rozszerzeń logiki MSO, czy też w końcu za pomocą odpowiednich wyrażeń regularnych.

Nie jest jasne, czy teoria funkcji kosztu, oparta o automaty z licznikami, jest właściwym podejściem do problemu spełnialności logiki MSO+$\mathbb{B}$ na słowach nieskończonych, czy jedynie do jej fragmentu z ograniczonym użyciem negacji.

Rzucającym się w oczy problemem przy próbie rozszerzenia tego podejścia do większych fragmentów logiki MSO+$\mathbb{B}$ jest to, że nie ma sensownego sposóbu na zdefiniowanie „dopełnienia" funkcji kosztu. Dalsze wątpliwości wynikają z pracy [HST10], która dowodzi, że za pomocą MSO+$\mathbb{B}$ można zdefiniować nieborelowskie zbiory słów nieskończonych. Implikuje to, że nie jest ona równoważna żadnemu modelowi automatów z Borelowskim warunkiem akceptacji. Wyklucza to stosowanie wszelkich znanych automatów niedeterministycznych z licznikami.

Topologiczne podejście do problemu ograniczoności

Intencją niniejszej pracy jest chęć choć najmniejszego przybliżenia się do problemu rozstrzygnięcia logiki MSO+$\mathbb{B}$ na słowach nieskończonych. Chociaż nie czynimy żadnego postępu pod względem rozstrzyganego fragmentu tej logiki, mamy nadzieję na stworzenie teorii, w której choćby sam problem ograniczoności miałby eleganckie i intuicyjne rozwiązanie.

Najbardziej przystępne dowody problemu ograniczoności to dowody D. Kirstena oraz T. Colcombeta. Jednakże, w dowodach tych, topologiczna idea H. Leunga gra bardzo wątłą rolę, gdyż opierają się one głównie na rozważaniach algebraicznych, co czyni te dowody „trudnymi do zobrazowania", używając określenia I. Simona. Wierzymy, że topologia ma istotne znaczenie w odniesieniu do problemu ograniczoności, a dokładniej, że istnieje związek z topologią proskończoną. Dlatego też rozwijamy teorię B- oraz S-automatów, porównywalną z klasyczną teorią automatów skończonych, która jawi się jako naturalne środowisko do rozważania problemów podobnych do ograniczoności czy też dominacji.

W klasycznej teorii, podobnie jak w teorii automatów Büchi'ego, oprócz automatów, istotne są pojęcia: wyrażeń regularnych, rozpoznawania przez morfizmy, logiki MSO oraz kongruencji syntaktycznej, z których wszystkie są równoważne pod względem definiowanej przez nie klasy języków.

W drugiej części niniejszej rozprawy przedstawiamy analogiczną teorię, która jest zbudowana wokół B- oraz S-automatów. Na wyjściu natykamy się na następujący problem: czym jest obiekt definiowany przez B-automat? Rozwiązanie T. Colcombeta uznaje, że tym obiektem jest funkcja kosztu wyznaczona przez automat. Wadą tego rozwiązania jest to, że funkcje kosztu są obiektami zupełnie innej natury, niż języki słów. Nie ma bowiem sensu pojęcie dopełnienia funkcji kosztu, nie można też mówić o przynależności do funkcji kosztu. Oba te pojęcia są niezbędne do definicji kongruencji syntaktycznej. Funkcje kosztu nie są podatne na inne standardowe teoriomnogościowe operacje, takie jak iloraz przez relację równoważności. W efekcie, w teorii T. Colcombeta nie występuje konstrukcja analogiczna do konstrukcji Myhill'a-Nerod'a, która z języka regularnego tworzy kanoniczny obiekt go rozpoznający.

Podejście przedstawione w niniejszej rozprawie omija te trudności, gdyż uznajemy, że automaty rozpoznają języki słów, tyle, że proskończonych. Dla przykładu, automat przedstawiony na Rys. 1 odrzuca słowo proskończone $(a^\omega b)^\omega a^\omega$, które jest granicą ciągu słów $((a^{k!}b)^{k!}a^{k!})_{k=1}^{\infty}$. Odkrywamy odpowiednie pojęcia wyrażeń regularnych, rozpoznawania przez morfizmy, logiki oraz kongruencji syntaktycznej, z których każde definiuje tę samą klasę języków słów proskończonych. Godna uwagi jest prostota sformułowania kluczowych problemów: problem ograniczoności jawi się jako problem uniwersalności automatu, a problem dominacji to nic innego, jak problem inkluzji języków. Automat z odległością rozważany w przykładzie nie jest uniwersalny, bo odrzuca słowo $(a^\omega b)^\omega a^\omega$. W dalszej części tego autoreferatu, streszczamy teorię rozwiniętą w drugiej części rozprawy.

Przegląd drugiej części rozprawy

Poniżej opiszemy nieco dokładniej pojęcia oraz zasadnicze twierdzenie drugiej części rozprawy. Zasadnicze twierdzenie mówi o równoważnych charakteryzacjach pewnej klas języków słów proskończonych, tzn. podzbiorów wolnej półgrupy proskończonej: poprzez wyrażenia regularne, automaty niedeterministyczne, rozpoznawalność przez homomorfizmy oraz przez własność skończonego indeksu. Wpierw, wprowadzimy powyższe pojęcia.

Półgrupa proskończona Niech A będzie ustalonym, skończonym alfabetem. Będziemy zakładać, że wszystkie słowa skończone są nad tym alfabetem.

Niech

$$w_1, w_2, w_3, \dots \tag{1}$$

będzie nieskończonym ciągiem słów skończonych. Powiemy, że powyższy ciąg słów *ostatecznie należy* do języka $L \subseteq A^+$, jeżeli od pewnego momentu n, wszystkie słowa $w_n, w_{n+1}, \dots$ należą do języka L. Mówimy, że ciąg słów (1) jest *zbieżny*, jeżeli dla każdego języka regularnego L, ciąg (1) ostatecznie należy do języka L albo do jego dopełnienia, $A^+ - L$. Powiemy, że dwa zbieżne ciągi słów $w_1, w_2, \dots$ oraz $v_1, v_2, \dots$ są *rozróżnianie* przez język L, jeżeli tylko jeden z ciągów ostatecznie należy do języka L. Jeżeli dwa ciągi nie są rozróżniane przez żaden język regularny, to są one są *równoważne*.

Klasy abstrakcji powyższej relacji równoważności nazywamy *słowami proskończonymi*, i oznaczamy je symbolami $x, y, \ldots$. Zbiór słów proskończonych oznaczamy symbolem $\widehat{A^+}$.

Przykład 1.

1. Jeżeli w jest ustalonym słowem skończonym, to ciąg $w, w, w, \ldots$ jest zbieżny. Klasę abstrakcji tego ciągu zbieżnego utożsamiamy ze słowem w.

2. Jeżeli $a \in A$ jest literą, to ciąg $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ nie jest zbieżny, gdyż kolejne jego wyrazy naprzemiennie należą i nie należą do języka regularnego $(AA)^+$.

3. Z kolei ciąg $a, a^{2!}, a^{3!}, a^{4!}, \ldots$ jest zbieżny, co wynika z lematu o pompowaniu dla języków regularnych. Klasę abstrakcji tego ciągu zbieżnego oznaczamy przez a^ω. Jest to nieskończone słowo proskończonej.

4. Ciąg $(aa), (aa)^{2!}, (aa)^{3!}, (aa)^{4!}, \ldots$ również jest zbieżny, oraz jest równoważny ciągowi z poprzedniego przykładu

5. Jeżeli dwa ciągi $w_1, w_2, \ldots$ oraz $v_1, v_2, \ldots$ są zbieżne oraz x i y to ich klasy abstrakcji, to ciąg $w_1v_1, w_2v_2, \ldots$ również jest zbieżny, a jego klasę abstrakcji oznaczamy $x \cdot y$

6. Jeżeli ciąg $w_1, w_2, \ldots$ jest zbieżny oraz x jest jego klasą abstrakcji, to ciąg $w_1^1, w_2^{2!}, w_3^{3!}, \ldots$ jest również zbieżny, a jego klasę abstrakcji oznaczamy x^ω

Operacje $x, y \mapsto x \cdot y$ oraz $x \mapsto x^\omega$ opisane w powyższym przykładzie nie zależą od wyboru reprezentantów klas abstrakcji x oraz y, zatem zadają one w sposób poprawny przekształcenia na zbiorze $\widehat{A^+}$. Półgrupę $\widehat{A^+}$ nazywamy wolną półgrupą generowaną przez zbiór A. Przekształcenie $x \mapsto x^\omega$ nazywamy *ω-potęgą*. Zbiór słów skończonych A^+ zanurza się w naturalny sposób w zbiór słów proskończonych, tak jak to opisano w pierwszym podpunkcie przykładu. Na zbiorze $\widehat{A^+}$ można zadać metrykę, w której odległością pomiędzy dwoma słowami proskończonymi x, y jest liczba 2^{-r}, gdzie r jest rozmiarem najmniejszego języka regularnego L który rozróżnia reprezentanta klasy x od reprezentanta klasy y (to nie zależy od wyboru reprezentantów). Rozmiar języka regularnego mierzymy poprzez moc najmniejszej półgrupy, która dany język rozpoznaje. Metrykę tę można również rozważać na zbiorze A^+ słów skończonych. Nietrudno wykazać, że przestrzeń $\widehat{A^+}$ jest izometryczna z uzupełnieniem przestrzeni A^+ względem tej metryki. W szczególności, zbiór A^+ jest gęsty w $\widehat{A^+}$. Ponadto, przestrzeń $\widehat{A^+}$ jest całkowicie niespójną, nieprzeliczalną przestrzenią zwartą. W szczególności, zbiór słów które da się wygenerować poprzez konkatenację oraz ω-potęgę z liter w alfabecie A nie wyczerpuje wszystkich słów proskończonych, gdyż jest on przeliczalny. Przez $\widehat{A^*}$ oznaczamy zbiór $\widehat{A^+}$ z dodanym izolowanym punktem ε, reprezentującym słowo puste.

Języki rozpoznawane przez B-automaty oraz S-automaty Niech $\mathcal{A}$ będzie B-automatem oraz niech $f_{\mathcal{A}} \colon A^+ \to \overline{\mathbb{N}}$ będzie wyznaczoną przezeń funkcją. Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n, przeciwobraz $f_{\mathcal{A}}^{-1}([0, n])$ przedziału $[0, n]$ jest językiem regularnym nad alfabetem A. Wynika to z tego, że B-automat $\mathcal{A}$ można zastąpić automatem skończonym, który umie liczyć do progu n, i stwierdzić, czy dla wartość $f_{\mathcal{A}}(w)$ przypisana słowu w jest nie większa niż n. Na podstawie tej obserwacji nietrudno wykazać, że funkcja $f_{\mathcal{A}}$ jest jednostajnie ciągłą funkcją na przestrzeni metrycznej A^+ (na zbiorze $\overline{\mathbb{N}}$ rozważamy zwartą metrykę, w której ∞ jest jedynym punktem skupienia). Wobec tego, rozszerza się ona w sposób jednoznaczny do ciągłej funkcji $f_{\mathcal{A}}$ określonej na całej przestrzeni $\widehat{A^+}$. *Językiem* automatu $\mathcal{A}$ nazywamy zbiór wszystkich słów proskończonych, którym rozszerzenie $f_{\mathcal{A}}$ przypisuje wartość skończoną. Łatwo zauważyć, że automat $\mathcal{A}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jego język jest równy $\widehat{A^+}$. Przykładowo, automat przedstawiony na Rys. 1 definiuje zbiór wszystkich słów proskończonych, które mają skończenie wiele liter b oraz w których każdy spójny ciąg liter a ma ograniczoną długość.

Gdy $\mathcal{A}$ jest S-automatem, możemy powtórzyć powyższe rozumowanie. Język automatu $\mathcal{A}$ definiujemy jednak jako zbiór wszystkich słów proskończonych, którym rozszerzenie $f_{\mathcal{A}}$ przypisuje wartość ∞.

Wyrażenia B- oraz S-regularne Rozważamy rozszerzenia wyrażeń regularnych, podobne do tych, które były wprowadzone w pracy [BC06]. W tamtej pracy, wyrażenia B- oraz S-regularne opisywały klasy ciągów słów skończonych, podczas gdy tutaj, opisują one języki słów proskończonych. Wyrażenie B-regularne opisuje zbiór otwarty, podczas gdy wyrażenie S-regularne – zbiór domknięty w przestrzeni $\widehat{A^+}$.

Wyrażenia B-regularne, oprócz standardowych operacji sumy, konkatenacji oraz gwiazdki Kleene'go, mogą korzystać z operacji *ograniczonej iteracji*, oznaczanej $L \mapsto L^{<\infty}$. Z kolei, wyrażenia S-regularne, oprócz standardowych operacji, mogą korzystać z *nieskończonej iteracji*, oznaczonej $L \mapsto L^{\infty}$. Wyrażenia B-regularne definiują otwarte podzbiory przestrzeni $\widehat{A^*}$, a wyrażenia S-regularne definiują jej domknięte podzbiory. Pominiemy precyzyjne definicje w tym streszczeniu.

Przykład 2. Wyrażenie B-regularne

$$(a^{<\infty}b)^*a^{<\infty}$$

definiuje zbiór słów proskończonych, w których każdy spójny ciąg liter a ma ograniczoną długość. Wyrażenie S-regularne

$$(a+b)^*a^{\infty}(a+b)^*$$

definiuje zbiór, który jest dopełnieniem języka definiowanego przez powyższe wyrażenie B-regularne.

Kongruencja syntaktyczna Dla języka słów proskończonych $L \subseteq \widehat{A^+}$, definiujemy jego $\langle\,\cdot\,,\#\rangle$-*kongruencję syntaktyczną*, jako najmniejszą relację równoważności która jest niezmiennicza ze względu na mnożenie, ω-potęgę oraz na przynależność do zbioru L.

Półgrupy stabilizacyjne oraz rozpoznawalność *Półgrupa stabilizacyjna* jest to skończona półgrupa, wyposażona w topologię (zazwyczaj nie będącą topologią Hausdorffa) oraz w dodatkową operację *stabilizacji*, oznaczaną $s \mapsto s^{\#}$. Wymagane są pewne aksjomaty łączące te trzy struktury, które odzwierciedlają topologiczne oraz algebraiczne właściwości mnożenia i ω-potęgi w półgrupie $\widehat{A^+}$.

Kluczowe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 *Niech* $\alpha\colon A \to S$ *będzie przekształceniem ze skończonego alfabetu* A *w półgrupę stabilizacyjną* S*. Wówczas istnieje największy ciągły homomorfizm* $\hat{\alpha}\colon \widehat{A^+} \to S$*, który rozszerza przekształcenie* α*. Ponadto, dla dowolnego domkniętego (odp. otwartego) zbioru* $F \subseteq S$*, jego przeciwobraz* $\hat{\alpha}^{-1}(F)$ *jest definiowany przez wyrażenie S-regularne (odp. B-regularne).*

W powyższym sformułowaniu, od homomorfizmu $\hat{\alpha}$ wymagamy, by zachował on mnożenie oraz przekształcał ω-potęgę na stabilizację. Wymaganie mówiące, że jest on „największy” należy interpretować jako pewną kanoniczność owego rozszerzenia. Dla dowolnego zbioru $F \subseteq S$ powiemy, że język $\hat{\alpha}^{-1}(F)$ jest $\langle\,\cdot\,,\#\rangle$*-rozpoznawalny.*

Główne twierdzenie

Twierdzenie 4 *Niech* $L \subseteq \widehat{A^+}$ *będzie językiem słów proskończonych. Wówczas, równoważne są następujące warunki.*

1. L *jest* $\langle\,\cdot\,,\#\rangle$*-rozpoznawalny oraz domknięty*
2. L *jest definiowany przez wyrażenie S-regularne*
3. L *jest rozpoznawany przez pewien S-automat*
4. $L = \overline{L \cap A^{\langle\,\cdot\,,\omega\rangle}}$ *oraz jego kongruencja syntaktyczna ma skończony indeks*

Dualnie, równoważne są następujące warunki.

1'. L *jest* $\langle\,\cdot\,,\#\rangle$*-rozpoznawalny oraz otwarty*

2'. L *jest definiowany przez wyrażenie B-regularne*

3'. L *jest rozpoznawany przez pewien B-automat*

4'. *Dopełnienie* $\widehat{A^+} - L$ *języka* L *jest* $\langle\,\cdot\,,\#\rangle$*-rozpoznawalne oraz domknięte*

Punkt czwarty mówi o tym, że język L jest „wyznaczony” poprzez zbiór słów proskończonych które jednocześnie należą do języka L oraz do zbioru słów które się dadzą wygenerować z alfabetu A poprzez konkatenację oraz ω-potęgę. Można wskazać przykłady, które pokazują, że to wymaganie jest konieczne.

Równoważności w powyższym twierdzeniu są efektywne, tzn. można efektywnie przekształcić automat B-regularny w równoważne wyrażenie B-regularne, lub wyznaczyć najmniejszą półgrupę stabilizacyjną rozpoznającą język przezeń wyznaczony, itp. Wobec tego, twierdzenie to implikuje łatwo rozstrzygalność problemu ograniczoności dla B-automatów: dla danego B-automatu $\mathcal{A}$ rozpoznającego język L, wyznaczamy wyrażenie S-regularne definiujące dopełnienie $\widehat{A^+} - L$, i następnie stwierdzamy, czy wyrażenie to definiuje zbiór pusty. Sprawdzanie pustości wyrażeń regularnych jest trywialne.

Podsumowanie Rozprawa opisuje teorię stosowną do rozpatrywania problemów decyzyjnych dla B- oraz S-automatów, takich jak problem ograniczoności. Pod wieloma względami, teoria ta rozszerza teorię języków regularnych. Zasadniczym pomysłem jest przeniesienie rozważań ze słów skończonych na słowa proskończone, oraz stworzenie narzędzi algebraicznych temu służących.

Literatura

[BC06] Mikołaj Bojańczyk and Thomas Colcombet. Bounds in ω-regularity. In *Logic in Computer Science*, pages 285–296, 2006.

[Boj09] Mikołaj Bojańczyk. Weak MSO with the unbounding quantifier. In Susanne Albers and Jean-Yves Marion, editors, *STACS*, volume 3 of *LIPIcs*, pages 159–170. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Germany, 2009.

[Boj10] Mikołaj Bojańczyk. Beyond ω-regular languages. In *STACS*, pages 11–16, 2010.

[BT09] Mikołaj Bojańczyk and Szymon Toruńczyk. Deterministic automata and extensions of Weak MSO. In Ravi Kannan and K. Narayan Kumar, editors, *FSTTCS*, volume 4 of *LIPIcs*, pages 73–84. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2009.

[Col09] Thomas Colcombet. The theory of stabilisation monoids and regular cost functions. In Susanne Albers, Alberto Marchetti-Spaccamela, Yossi Matias, Sotiris E. Nikoletseas, and Wolfgang Thomas, editors, *ICALP (2)*, volume 5556 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 139–150. Springer, 2009.

[Col10] Thomas Colcombet. Regular cost functions, part i: Logic and algebra over words. unpublished, 2010.

[DDG+10] Aldric Degorre, Laurent Doyen, Raffaella Gentilini, Jean-François Raskin, and Szymon Toruńczyk. Energy and mean-payoff games with imperfect information. In Anuj Dawar and Helmut Veith, editors, *CSL*, volume 6247 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 260–274. Springer, 2010.

[Egg63] Lawrence C. Eggan. Transition graphs and the star height of regular events. *Michigan Math. J.*, 10:385–397, 1963.

[Has82] Kosaburo Hashiguchi. Limitedness theorem on finite automata with distance functions. *Journal of Computer and System Sciences*, 24:233–244, 1982.

[Has88] Kosaburo Hashiguchi. Algorithms for determining relative star height and star height. *Inf. Comput.*, 78(2):124–169, 1988.

[HST10] Szczepan Hummel, Michał Skrzypczak, and Szymon Toruńczyk. On the topological complexity of MSO+U and related automata models. In Petr Hlinený and Antonín Kucera, editors, *MFCS*, volume 6281 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 429–440. Springer, 2010.

[Kir05] Daniel Kirsten. Distance desert automata and the star height problem. *Theoretical Informatics and Applications*, 39(3):455–511, 2005.

[Leu98] Hing Leung. The topological approach to the limitedness problem on distance automata. *Idempotency*, pages 88–111, 1998.

[Sim88] Imre Simon. Recognizable sets with multiplicites in the tropical semiring. In *Mathematical Foundations of Computer Science*, volume 324 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 107–120, 1988.

[Sim94] Imre Simon. On semigroups of matrices over the tropical semiring. *ITA*, 28(3-4):277–294, 1994.

[ST11] Luc Segoufin and Szymon Toruńczyk. Automata based verification over linearly ordered data domains. In *STACS*. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Germany, 2011. To appear.