CAŁKOWA KRZYWIZNA MENGERA DLA ZBIORÓW DOWOLNEGO WYMIARU I KOWYMIARU

(INTEGRAL MENGER CURVATURE FOR SETS OF ARBITRARY DIMENSION AND CODIMENSION)

AUTOREFERAT ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

24 maja 2011

SŁAWOMIR KOLASIŃSKI

Wstęp

Krzywizna Mengera to pojęcie zdefiniowane dla trójek punktów w przestrzeni Euklidesowej. Niech $R(x, y, z)$ będzie promieniem najmniejszego okręgu przechodzącego przez trzy punkty x, y i z. Wówczas *krzywizna Mengera* trójki (x, y, z) jest równa $R(x, y, z)^{-1}$. Pojęcie to może być wykorzystane do zdefiniowania wielu innych pojęć krzywizny dla zbiorów 1-wymiarowych zanurzonych w $\mathbb{R}^n$ i pojawia się w literaturze w kilku różnych kontekstach.

Oryginalne motywacje do badania tego pojęcia pochodziły, w pewnej części, z nauk przyrodniczych i dotyczyły badania modeli dla łańcuchów polimerowych, cząsteczek DNA oraz struktur białkowych; zobacz fizyczne prace Banavara i innych [1] oraz Suttona i Balluffi [26]. Chodziło, w pierwszej kolejności, o matematyczne sformalizowanie naturalnych, fizycznych warunków: braku samoprzecięć krzywych, a także faktu, że różne obiekty fizyczne, które można modelować jako krzywe lub powierzchnie, mają jednak pewną charakterystyczną *grubość*. Cel ten można osiągnąć na przykład przez narzucenie dolnego ograniczenia na tzw. *grubość*, zdefiniowaną jako infimum wartości $R(x, y, z)$ po wszystkich trójkach punktów x, y i z leżących na krzywej. Można też badać tzw. *promień krzywizny globalnej* zadany w punkcie x przez infimum z $R(x, y, z)$ po wszystkich parach y,z. Teoria dla obiektów jednowymiarowych została szeroko rozwinięta i udało się udowodnić szereg rezultatów. Wymienimy tylko kilka, mających znaczenie dla naszych badań. Zostały zdefiniowane pojęcia krzywizn całkowych, które dawały się badać metodami analitycznymi i pozwalały udowadniać np. istnienie krzywych o minimalnej krzywiźnie w danej klasie zawęźlenia (patrz prace Gonzaleza, Maddocksa, Schurichta i von der Mosela [9], Cantarelli i Kusnera [4], Gonzaleza i de la Llave [8]), czy istnienie tzw. *węzłów idealnych*, które minimalizują stosunek długości do grubości, patrz m.in. Cantarella i Kusner [4], Cantarella i inni [3], Durumeric [7] oraz Schuricht i von der Mosel [17]. Szerszy opis tej tematyki można znaleźć w cytowanych artykułach.

Zupełnie niezależnie od motywacji fizycznych, badania prowadzone przez Mielnikowa, Tolsę, Davida i innych matematyków nad charakteryzacją usuwalnych osobliwości ograniczonych funkcji analitycznych i rozwiązaniem hipotezy Wituszkina, również doprowadziły do badania definiowanej jako całka krzywizny obiektów niegładkich. O związkach analizy harmonicznej z krzywizną Mengera pisali w przeglądowych tekstach Mattila [14] oraz Tolsa [27]; Léger [11] udowodnił, że krzywe o skończonej całkowej krzywiźnie Mengera są przeliczalnie 1-prostowalne. Był to jeden z kluczowych kroków w dowodzie hipotezy Wituszkina.

Prowadzone są też intensywne badania nad uogólnieniem takiego pojęcia krzywizny dla niegładkich powierzchni, a nawet ogólniej, dla k-wymiarowych podrozmaitości w $\mathbb{R}^n$. Tutaj również celem jest wykrywanie samoprzecięć i znajdowanie dobrych zanurzeń, np. takich, dla których istnieje możliwie grube otoczenie tubularne rozpatrywanego obiektu. Pojawiają się też zastosowania w rachunku wariacyjnym. Okazuje się, że „naturalne” uogólnienie krzywizny Mengera na wyższe wymiary jako odwrotności promienia sfery przechodzącej przez pewne $k+2$ punkty jest błędna. W [24, Appendix B] Strzelecki i von der Mosel pokazali przykład gładkiej rozmaitości, dla której taka krzywizna byłaby nieograniczona. Dobrze zdefiniowana krzywizna pozwala narzucać więzy topologiczne w zadaniach wariacyjnych i znajdować minima funkcjonałów w konkretnej klasie izotopii, patrz np. [21] i [22]. Lerman i Whitehouse [12] i [13] wprowadzili ostatnio wiele różnych rodzajów krzywizn całkowych dla miar. Ich prace skupiają się na teorii miar jednostajnie prostowalnych w sensie zdefiniowanym przez Davida i Semmesa w monografii [6] i wiążą teorię zbiorów jednostajnie prostowalnych z krzywiznami całkowymi.

Chodzi zatem o znalezienie takiego pojęcia krzywizny, które będzie miało sens dla obiektów o stosunkowo niskiej regularności, a zarazem takiego, którego kontrolowanie będzie pozwalało wnioskować o wyższej regularności oraz „lepszym” kształcie (brak samoprzecięć i grube otoczenie tubularne). Przykładem takiego pojęcia jest tzw. stała *cięciwa-łuk* (ang. chord-arc constant), badana w pracach Semmesa [18] i [19] oraz w [2]. Innym tego typu pojęciem jest uogólniona druga forma podstawowa badana przez Tatianę Toro [28] oraz Mülera i Sveráka [15].

Nasze badania skupiają się na krzywiznach zdefiniowanych jako pewien potencjał odpychający, który uogólnia krzywiznę Mengera dla krzywych. Takie potencjały można traktować jako wyidealizowany model wielopunktowych oddziaływań odpychających, które zapobiegają przecinaniu się odległych części powierzchni. W pracach [21] i [22] Strzelecki i von der Mosel wprowadzili pojęcie globalnej krzywizny dla szerokiej klasy powierzchni, opisanych parametrycznie. Udowodnili brak samoprzecięć, regularność klasy $C^{1,1}$ oraz istnienie odpowiednio grubego otoczenia tubularnego (o wielkości związanej z ograniczeniem krzywizny globalnej) takich powierzchni. Wyniki te zostały też zastosowane do zagadnień wariacyjnych z więzami topologicznymi, np. do minimalizacji pola powierzchni przy ustalonym z góry genusie lub klasie izotopii.

Wyżej wymiarowa krzywizna Mengera

Dla $m+2$ punktów $\{x_0, x_1, \ldots, x_{m+1}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ definiujemy ich *dyskretną krzywiznę* wzorem

$$\mathcal{K}(x_0, \ldots, x_{m+1}) := \frac{\mathscr{H}^{m+1}(\triangle(x_0, \ldots, x_{m+1}))}{\operatorname{diam}(\{x_0, x_1, \ldots, x_{m+1}\})^{m+2}},$$

gdzie $\triangle(x_0, \ldots, x_{m+1})$ oznacza otoczkę wypukłą zbioru $\{x_0, \ldots, x_{m+1}\}$, która w najczęstszym przypadku będzie $(m+1)$-wymiarowym sympleksem. Dla $m = 2$ można z łatwością udowodnić, że powyższa wartość $\mathcal{K}$ jest zawsze mniejsza niż krzywizna zdefiniowana w [24] ale dla w miarę „regularnych" czworościanów obie wartości są porównywalne. Jest to konsekwencją faktu, że powierzchnia boczna czworościanu jest zawsze ograniczona przez 4π razy kwadrat jego średnicy.

Niech $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym, m-wymiarowym, zwartym zbiorem oraz niech $p > 0$. Wprowadzamy pojęcie *całkowej krzywizny Mengera rzędu p* zbioru Σ (w skrócie będziemy ją nazywać *p-energią* Σ)

$$\mathcal{E}_p(\Sigma) := \int_{\Sigma^{m+2}} \mathcal{K}(x_0, \ldots, x_{m+1})^p \, d\mathscr{H}^m_{x_0} \cdots d\mathscr{H}^m_{x_{m+1}}, \quad \Sigma^{m+2} = \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{(m+2) \text{ times}}. \tag{1}$$

Tak zdefiniowana energia jest skończona dla każdej rozmaitości klasy C^2 (zobacz Stwierdzenie 1.7.5 oraz Wniosek 1.7.6). We wspólnej pracy z Martą Szumańską [10] dowodzimy też, że wykresy funkcji klasy $C^{1,\nu}$ również mają skończoną energię o ile tylko $\nu > \nu_0 = 1 - \frac{m(m+1)}{p}$ oraz konstruujemy przykłady funkcji klasy C^{1,ν_0} dla których powyższa energia jest nieskończona. Zatem wykładnik ν_0 jest w istocie optymalny i nie można go polepszyć.

W [24] autorzy definiują podobny funkcjonał $\mathcal{M}_p$, który spełnia $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leqslant \mathcal{M}_p(\Sigma)$ w wymiarze $m = 2$ i kowymiarze 1. Następnie dowodzą, że jeśli wartość $\mathcal{M}_p(\Sigma)$ jest skończona dla pewnego $p > 8$, to istnieje skala $R > 0$, która zależy tylko od energii $\mathcal{M}_p(\Sigma)$, taka że dla dowolnego $r < R$ i dowolnego $x \in \Sigma$ mamy regularność typu Ahlforsa

$$\mathscr{H}^2(\Sigma \cap \mathbb{B}(x, r)) \geqslant \frac{\pi}{2} r^2 .$$

Co znamienne w tym twierdzeniu, to fakt, że skala R, poniżej której mamy powyższą nierówność, zależy tylko od energii $\mathcal{M}_p$, a nie od samej Σ. Jest to kluczowy element wszystkich dalszych wyników. Po udowodnieniu tej jednostajnej regularności w sensie Ahlforsa, autorzy wykazują istnienie płaszczyzn stycznych i szacują ich oscylację. W rezultacie otrzymują regularność klasy $C^{1,\alpha}$, gdzie $\alpha = 1 - \frac{8}{p}$ oraz są w stanie oszacować normę Höldera pochodnej parametryzacji przez stałą zależną jedynie od energii. W dalszej kolejności staje się to przydatne przy dowodzeniu twierdzeń o istnieniu minimów funkcjonału energii w zadanej klasie izotopii.

W naszej rozprawie dowodzimy analogicznych twierdzeń w dowolnym wymiarze i kowymiarze dla energii zdefiniowanej przez (1). Rozprawa jest częścią większego projektu, którego celem jest zbadanie również innych możliwych definicji krzywizny Mengera i wynikających z ich skończoności efektów podnoszących regularność oraz ich związków z przestrzeniami Soboleva. Planujemy też zbadać możliwe zastosowania tych krzywizn do narzucania więzów topologicznych w zadaniach wariacyjnych.

Główne rezultaty

W naszych badaniach rozpatrujemy dwie klasy zbiorów: klasa $\mathcal{A}(\delta, m)$ zbiorów (δ, m)-*dopuszczalnych*(ang. admissible) oraz klasa $\mathcal{F}(m)$ zbiorów m-*ładnych*(ang. fine). Obie te klasy zawierają zwarte, m-wymiarowe podzbiory przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^n$, które spełniają pewne, niezbyt mocne i dość ogólne warunki (zobacz Definicja 1.8.2 oraz Definicja 1.8.8). Definicja klasy $\mathcal{A}(\delta, m)$ jest bardziej topologiczna i posługuje się pojęciem *indeksu zaczepienia* dwóch podrozmaitości $\mathbb{R}^n$. Klasa $\mathcal{F}(m)$ jest za to zdefiniowana w terminach czysto metrycznych. Inspirowaliśmy się tutaj pracami Reifenberga [16] oraz Davida, Kaniga i Toro [5] o zbiorach płaskich w sensie Reifenberga. Przykładami zbiorów należących do $\mathcal{F}(m)$ lub $\mathcal{A}(\delta, m)$ są zwarte, gładkie rozmaitości zanurzone immersyjnie w $\mathbb{R}^n$, każda skończona suma takich immersyjnych obrazów rozmaitości, a nawet ich bilipschitzowskie obrazy.

Dowodzimy, że jeśli Σ leży w jednej z klas $\mathcal{F}(m)$ lub $\mathcal{A}(\delta, m)$ oraz energia $\mathcal{E}_p(\Sigma)$ jest skończona dla pewnego $p > m(m+2)$, to Σ można lokalnie przedstawić jako wykres funkcji klasy $C^{1,\alpha}$, gdzie $\alpha = 1 - \frac{m(m+2)}{p}$. Nasz pierwszy znaczący rezultat to

Twierdzenie 1 (porównaj Twierdzenie 2.0.12)**.** *Niech $E < \infty$ będzie pewną dodatnią stałą i niech $\Sigma \in \mathcal{A}(\delta, m)$ będzie zbiorem dopuszczalnym takim, że $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leqslant E$ dla pewnego $p > m(m+2)$. Wówczas istnieje promień $R = R(E, m, p, \delta)$ taki, że dla każdego $\rho \leqslant R$ i dowolnego $x \in \Sigma$ zachodzi nierówność*

$$\mathscr{H}^m(\Sigma \cap \mathbb{B}(x, \rho)) \geqslant (1 - \delta^2)^{\frac{m}{2}} \omega_m \rho^m .$$

Kluczową częścią dowodu jest Stwierdzenie 2.2.1, które zapewnia w prawie każdym punkcie $x \in \Sigma$ i dla każdego promienia $r > 0$ mniejszego niż pewna odległość stopu $d(x)$, istnienie m-wymiarowej płaszczyzny H takiej, że rzut $\Sigma \cap \mathbb{B}(x, r)$ na przestrzeń afiniczną $x + H$ zawiera dysk $\mathbb{B}(x, \sqrt{1 - \delta^2} r) \cap (x + H)$. To samo stwierdzenie pozwala też znajdować w miarę „regularne” sympleksy (zobacz Definicja 1.6.1) z wierzchołkami leżącymi w zbiorze Σ i rozmiarami porównywalnymi z $d(x)$. Dowód Stwierdzenia 2.2.1 opiera się na podobnym algorytmie, jaki został przedstawiony w [24] ale jest ogólniejszy i w istocie prostszy. Eksponuje on główną trudność, jaką napotkali Strzelecki i von der Mosel i rozwiązuje ją rozpatrując jedynie dwa przypadki zamiast pięciu, jak w pracy [24]. Istota algorytmu może być opisana następująco. Patrzymy na Σ w coraz większych skalach. Jeśli Σ w danej skali jest prawie płaskie (tzn. leży w małym otoczeniu jakiejś m-płaszczyzny), to musimy powiększyć skalę. W innym przypadku, możemy znaleźć punkt $y \in \Sigma$, który jest odległy od pewnej m-płaszczyzny rozpiętej przez $m + 1$ punktów leżących na Σ. W ten sposób konstruujemy w miarę „regularne” sympleksy, znajdując jednocześnie m-płaszczyzny, na które Σ ma duże rzuty.

W dalszej kolejności pokazujemy, że każdy zbiór (δ, m)-dopuszczalny Σ o skończonej p-energii jest również m-ładny (porównaj Twierdzenie 2.3.4). Dowód jest techniczny. Wykorzystujemy w nim następujące

Stwierdzenie 1 (porównaj Wniosek 2.1.2)**.** *Niech $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie pewnym m-wymiarowym zbiorem, regularnym w sensie Ahlforsa i takim, że energia $\mathcal{E}_p(\Sigma)$ jest skończona dla pewnego*

$p > m(m+2)$. Wówczas istnieją stałe $C > 0$ oraz $\tau \in (0,1)$ takie, że dla każdego $x \in \Sigma$ i każdego dostatecznie małego $r > 0$ mamy

$$\beta(x,r) \leqslant Cr^{\tau},$$

gdzie $\beta(x,r)$ oznacza liczby β Petera Jonesa zbioru Σ.

To stwierdzenie ma decydującą rolę w §3, gdzie dowodzimy następujące

Twierdzenie 2 (porównaj Twierdzenie 3.0.6)**.** *Niech $\Sigma \in \mathcal{F}(m)$ będzie m-ładnym zbiorem takim, że $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leqslant E < \infty$ dla pewnego $p > m(m+2)$. Wówczas istnieją stałe $R > 0$ oraz $\tau \in (0,1)$ takie, że dla każdego $x \in \Sigma$ zbiór $\Sigma \cap \mathbb{B}(x,R)$ jest wykresem pewnej funkcji $F_x \in C^{1,\tau}(T_x\Sigma, T_x\Sigma^{\perp})$. Ponadto promień R i norma Höldera pochodnej DF_x zależą wyłącznie od E, m oraz p.*

Dowód wykorzystuje podobną metodę jaką użyli David, Kenig i Toro w [5, Proposition 9.1]. Jest techniczny i dość długi ale z pomocą Stwierdzenia 1 ogólny zamysł wydaje się jasny. Wybieramy dowolnie punkt $x \in \Sigma$, a następnie dla każdego $r > 0$ znajdujemy m-płaszczyznę $H(r)$, która najlepiej przybliża zbiór Σ w kuli $\mathbb{B}(x,r)$. Ograniczenie na liczby β, wraz z własnościami zbiorów m-ładnych implikują, że zbiór Σ jest płaski w sensie Reifenberga ze znikającą stałą (zobacz Definicja 1.5.8). Pozawala to dowieść, że niezależnie od wyboru płaszczyzn $H(r)$ istnieje granica $T_x\Sigma := \lim_{r\to 0} H(r)$. Dalej, korzystając ze Stwierdzenia 1 pokazujemy, że $\sphericalangle(T_x\Sigma, T_y\Sigma) \lesssim |x-y|^{\tau}$, co ostatecznie pozwala wykazać, że Σ jest rozmaitością klasy $C^{1,\tau}$.

Nasz dowód jest zupełnie niezależny od wyników Davida, Keniga i Toro [5], a otrzymany rezultat jest odrobinę silniejszy. Pokazujemy, że skala R oraz norma Höldera pochodnej DF_x nie zależą od Σ, a jedynie od energii. Jesteśmy przekonani, że będzie to kluczowe gdy zastosujemy nasze wyniki w rachunku wariacyjnym.

Warto też wspomnieć, że nasz dowód nie używa pojęcia *trapping box* wprowadzonego przez Strzeleckiego i von der Mosela w [25, §5.1]. Zamiast tego, wykorzystujemy fakt, że zbiory (δ, m)-dopuszczalne o skończonej p-energii są również m-ładne, a co za tym idzie, istnieje dobre oszacowanie na liczby θ Reifenberga (zwane też *dwustronnymi liczbami β*).

W §4 pokazujemy, że wykładnik τ można polepszyć do optymalnej wartości $\alpha = 1 - \frac{m(m+2)}{p}$. Wykorzystujemy w tym celu metodę opracowaną przez Strzeleckiego, Szumańską i von der Mosela [20, §6.1]. Tutaj również byliśmy w stanie nieco uprościć ich technikę. Definiujemy tylko dwa zbiory złych parametrów Σ_0 i $\Sigma_1(x_0,\ldots,x_m)$ oraz korzystamy z dobrych własności metryki na Grassmanianie opisanych w §1.3. Nadzwyczaj przydatne okazało się być Stwierdzenie 1.3.12, które pozwala oszacować odległość („kąt”) między dwiema m-płaszczyznami U i V, wiedząc jedynie, że wektory pewnej prawie ortonormalnej bazy U leżą blisko V.

Dowód podwyższonej regularności sprowadza się do oszacowania oscylacji płaszczyzn stycznych. Kąt pomiędzy dwiema płaszczyznami stycznymi $\sphericalangle(T_x\Sigma, T_y\Sigma)$ można szacować przez kąt $\sphericalangle(X,Y)$, gdzie X i Y to pewne płaszczyzny „sieczne”, przechodzące przez odpowiednio dobrane punkty Σ. Najpierw wybieramy dużą liczbę naturalną $N \in \mathbb{N}$. Punkty $x_0,\ldots,x_m$ leżące na Σ, które rozpinają płaszczyznę X, są dobrane tak, by odległość od x do któregokolwiek z $x_0, \ldots, x_m$ była N-krotnie mniejsza niż odległość między x i y. Analogicznie wybieramy punkty $y_0, \ldots, y_m$ rozpinające Y. Dalej, stosujemy podstawowe twierdzenie rachunku całkowego, by oszacować popełniony błąd, czyli kąty $\sphericalangle(T_x\Sigma, X)$ oraz $\sphericalangle(T_y\Sigma, Y)$. Dzięki dobremu doborowi punktów x_i i y_i możemy pokazać, że kąty te dają się ograniczyć przez oscylację płaszczyzn stycznych na zbiorze o średnicy $\frac{|x-y|}{N}$. Następnie wykorzystując górne ograniczenie na energię $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leqslant E$, dowodzimy, że $\sphericalangle(X, Y) \lesssim |x-y|^{\alpha}$.

Wybieramy punkt $o \in \Sigma$ dowolnie. Wiemy a priori, że dla pewnego $R > 0$ zbiór $\Sigma \cap \mathbb{B}(o, R)$ pokrywa się z wykresem funkcji $\varphi : T_o\Sigma \to T_o\Sigma^{\perp}$ klasy $C^{1,\tau}$. Opisana wyżej technika daje oszacowanie

$$\sup_{\substack{x,y \in \mathbb{D}_R, \\ |x-y| \leqslant r}} \sphericalangle(T_{\varphi(x)}\Sigma, T_{\varphi(y)}\Sigma) \leqslant \tilde{C} \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{D}_{R+r}, \\ |x-y| \leqslant \frac{r}{N}}} \sphericalangle(T_{\varphi(x)}\Sigma, T_{\varphi(y)}\Sigma) + \hat{C} r^{\alpha} . \tag{2}$$

Następnie korzystamy z metody zaczerpniętej z teorii równań różniczkowych cząstkowych i iterujemy nasze oszacowania. Ponieważ φ jest klasy $C^{1,\tau}$, pierwszy składnik po prawej stronie (2) zbiega do zera, zaś drugi składnik tworzy zbieżny ciąg geometryczny. To pokazuje, że błąd popełniony przy przechodzeniu od $T_x\Sigma$ do X i od $T_y\Sigma$ do Y jest pomijalny.

Dalsze cele badawcze

Pole dalszych badań jest szeroko otwarte; wskazujemy krótko niektóre z możliwych kierunków.

Spodziewamy się, że uda się wykazać, iż dla zbiorów dowolnego kowymiaru ograniczenie krzywizny Mengera z góry ogranicza liczbę klas zbiorów z dokładnością do homeomorfizmu, natomiast dla 2-wymiarowych powierzchni w przestrzeni czterowymiarowej - także liczbę możliwych sposobów zawęźlenia. Będziemy również pracować nad dowodem hipotezy, że całkowa krzywizna Mengera osiąga minima przy zadanych z góry więzach: ustalonej klasie izotopii i ustalonej mierze $\mathscr{H}^m(\Sigma)$.

Dalej chcemy skupić się na badaniu innych funkcjonałów energii, które dawałyby podobne efekty dotyczące gładkości i niezmienników topologicznych. Uważamy, że godzien rozważenia jest m.in. funkcjonał

$$\mathcal{N}_p(\Sigma) := \int_{\Sigma} \widetilde{\mathcal{K}}^p(x) \; d\mathscr{H}^m(x) \, , \tag{3}$$

gdzie

$$\widetilde{\mathcal{K}}(x) := \max_{x_1, \ldots, x_{m+1} \in \Sigma} \mathcal{K}(x, x_1, \ldots, x_{m+1}) \, .$$

Jest on prostszy w tym sensie, że wymaga tylko jednokrotnego całkowania. Funkcja podcałkowa wydaje się być naturalnym odpowiednikiem tzw. promienia krzywizny globalnej dla krzywych, rozważanego przez Gonzaleza, Maddocksa i innych. Poza tym, wydaje się, że skończona energia $\mathcal{N}_p$ powinna dawać silniejsze efekty, gdyż funkcja podcałkowa w tym przypadku jest większa od funkcji podcałkowej energii $\mathcal{E}_p$. Dla krzywych ścisłe zbadanie odpowiednika funkcjonału (3), patrz [23], pozwoliło na podanie czysto geometrycznej charakteryzacji tych krzywych klasy $W^{2,p}$, które są pozbawione samoprzecięć. Razem z Pawłem Strzeleckim i Heiko von der Moselem przygotowujemy artykuł, w którym dowodzimy, że dla $p > m$ rozmaitości Σ klasy Sobolewa $W^{2,p}$ można scharakteryzować przez warunek $\mathcal{N}_p(\Sigma) < \infty$.

Literatura

[1] Jayanth R. Banavar, Oscar Gonzalez, John H. Maddocks, and Amos Maritan. Self-interactions of strands and sheets. *J. Statist. Phys.*, 110(1-2):35–50, 2003.

[2] Simon Blatt. Chord-arc constants for submanifolds of arbitrary codimension. *Adv. Calc. Var.*, 2(3):271–309, 2009.

[3] Jason Cantarella, Joseph H. G. Fu, Rob Kusner, John M. Sullivan, and Nancy C. Wrinkle. Criticality for the Gehring link problem. *Geom. Topol.*, 10:2055–2116 (electronic), 2006.

[4] Jason Cantarella, Robert B. Kusner, and John M. Sullivan. On the minimum ropelength of knots and links. *Invent. Math.*, 150(2):257–286, 2002.

[5] Guy David, Carlos Kenig, and Tatiana Toro. Asymptotically optimally doubling measures and Reifenberg flat sets with vanishing constant. *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(4):385–449, 2001.

[6] Guy David and Stephen Semmes. *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, volume 38 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[7] Oguz C. Durumeric. Local structure of ideal shapes of knots. *Topology Appl.*, 154(17):3070–3089, 2007.

[8] O. Gonzalez and R. de la Llave. Existence of ideal knots. *J. Knot Theory Ramifications*, 12(1):123–133, 2003.

[9] O. Gonzalez, J. H. Maddocks, F. Schuricht, and H. von der Mosel. Global curvature and self-contact of nonlinearly elastic curves and rods. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 14(1):29–68, 2002.

[10] Sławomir Kolasiński and Marta Szumańska. Optimal hölder exponent implying finiteness of integral Menger curvature. In preparation, 2011.

[11] J. C. Léger. Menger curvature and rectifiability. *Ann. of Math. (2)*, 149(3):831–869, 1999.

[12] G. Lerman and J. T. Whitehouse. High-dimensional Menger-type curvatures - Part I: Geometric multipoles and multiscale inequalities, 2008, arXiv:0805.1425.

[13] Gilad Lerman and J. Tyler Whitehouse. High-dimensional Menger-type curvatures. II. d-separation and a menagerie of curvatures. *Constr. Approx.*, 30(3):325–360, 2009.

[14] Pertti Mattila. Rectifiability, analytic capacity, and singular integrals. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. II, pages 657–664 (electronic), 1998.

[15] S. Müller and V. Šverák. On surfaces of finite total curvature. *J. Differential Geom.*, 42(2):229–258, 1995.

[16] E. R. Reifenberg. Solution of the Plateau Problem for m-dimensional surfaces of varying topological type. *Acta Math.*, 104:1–92, 1960.

[17] Friedemann Schuricht and Heiko von der Mosel. Characterization of ideal knots. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 19(3):281–305, 2004.

[18] Stephen Semmes. Chord-arc surfaces with small constant. I. *Adv. Math.*, 85(2):198–223, 1991.

[19] Stephen Semmes. Chord-arc surfaces with small constant. II. Good parameterizations. *Adv. Math.*, 88(2):170–199, 1991.

[20] Paweł Strzelecki, Marta Szumańska, and Heiko von der Mosel. Regularizing and self-avoidance effects of integral Menger curvature. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 9(1):145–187, 2010.

[21] Paweł Strzelecki and Heiko von der Mosel. On a mathematical model for thick surfaces. In *Physical and numerical models in knot theory*, volume 36 of *Ser. Knots Everything*, pages 547–564. World Sci. Publ., Singapore, 2005.

[22] Paweł Strzelecki and Heiko von der Mosel. Global curvature for surfaces and area minimization under a thickness constraint. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 25(4):431–467, 2006.

[23] Paweł Strzelecki and Heiko von der Mosel. On rectifiable curves with L^p-bounds on global curvature: self-avoidance, regularity, and minimizing knots. *Math. Z.*, 257(1):107–130, 2007.

[24] Paweł Strzelecki and Heiko von der Mosel. Integral menger curvature for surfaces. *Adv. Math.*, 226:2233–2304, 2011.

[25] Paweł Strzelecki and Heiko von der Mosel. Tangent-point repulsive potentials for a class of non-smooth m-dimensional sets in $\mathbb{R}^n$. Part I: Smoothing and self-avoidance effects, 2011, arXiv:1102.3642.

[26] A. P. Sutton and R. W. Balluffi. *Interfaces in Crystalline Materials (Monographs on the Physics and Chemistry of Materials)*. Oxford University Press, USA, 2 1997.

[27] Xavier Tolsa. Analytic capacity, rectifiability, and the Cauchy integral. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 1505–1527. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[28] Tatiana Toro. Surfaces with generalized second fundamental form in L^2 are Lipschitz manifolds. *J. Differential Geom.*, 39(1):65–101, 1994.

Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski, Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
E-mail address: `s.kolasinski@mimuw.edu.pl`
URL: `http://www.mimuw.edu.pl/~skola`