Autoreferat rozprawy doktorskiej pt.:

Dynamika rozwiązań równań płynu mikropolarnego na dwuwymiarowym torusie

Piotr Szopa

promotor: prof. Grzegorz Łukaszewicz

Fundamentalnym problemem w hydrodynamice jest istnienie globalnych w czasie, regularnych i jednoznacznych rozwiązań równań Naviera-Stokesa w trójwymiarowym obszarze przepływu. Na chwilę obecną nie istnieje dowód, że rozwiązania takie istnieją, ani żadne kontrprzykłady świadczące, że tak by być nie miało. W przypadku przepływów dwuwymiarowych problem jest łatwiejszy. Wykazano istnienie globalnych w czasie, jednoznacznych i regularnych rozwiązań, zatem można go badać za pomocą teorii układów dynamicznych. Model Naviera-Stokesa ma jedno ważne ograniczenie - z definicji nie opisuje płynów posiadających strukturę wewnętrzną i dlatego w wielu przypadkach trzeba go zastępować modelami ogólniejszymi i bardziej szczegółowymi, które biorą ją pod uwagę.

W pracy zajmowałem się dwuwymiarowym modelem płynu mikropolarnego, zaproponowanym przez C. Eringena w [3], który dobrze opisuje niektóre płyny posiadające mikrostrukturę np. krew, ciekłe kryształy, ciekłe polimery. Model ten powstaje przez dodanie do równań Naviera-Stokesa dodatkowego równania wyrażającego zasadę zachowania momentu pędu oraz przez pewne sprzęgnięcie równań. Dzięki takiej konstrukcji model ten zawiera w sobie, jako przypadek szczególny, model Naviera-Stokesa. Rozważałem przepływ na dwuwymiarowym torusie $Q = (0, L)^2$. Przepływ taki może być interpretowany jako ruch płynu w płaszczyźnie $x_3 = \text{const}$ przecinającej zbiór $Q \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ przy następujących założeniach: pola zewnętrzne oraz sam ruch nie zależą od x_3. Możemy to osiągnąć w następujący sposób: zakładamy, że składowa prędkości u_3 jest zerowa oraz że osie obrotu cząstek płynu są prostopadłe do płaszczyzny (x_1, x_2). Powyższe założenia implikują, że pola u, p, ω przyjmują postać: $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), 0)$, $p = p(x,t)$, $\omega = (0, 0, \omega_3(x,t))$, gdzie $x = (x_1, x_2) \in Q$. Niech $f = (f_1(x,t), f_2(x,t), 0)$, $g = (0, 0, g_3(x,t))$. Wtedy układ równań płynu mikropolarnego ma postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega - \beta\nabla \operatorname{div} \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g, \tag{3}$$

gdzie $u = (u_1, u_2)$ jest polem prędkości płynu, p - ciśnieniem, a $\omega = \omega_3$ - polem mikrorotacji określającym prędkości kątowe obracających się cząstek oraz

$$\operatorname{rot} u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \qquad \operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \qquad \operatorname{rot} \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}, -\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right).$$

Pola $f = (f_1, f_2)$ i $g = g_3$ są siłami i momentami zewnętrznymi działającymi na płyn. Stałe ν, ν_r, α oraz β są dodatnie i reprezentują współczynniki lepkości. Zakładamy, że płyn jest nieściśliwy a jego gęstość jest równa jeden.

Celem mojej rozprawy było badanie modelu płynu mikropolarnego w kontekście badań nad turbulencją przepływów. Ważnym aspektem badań turbulencji jest problem skończonej wymiarowości przepływu tzn. problem opisu przepływu za pomocą skończonej liczby parametrów. Temu zagadnieniu została poświęcona główna część rozprawy.

Model płynu mikropolarnego był już wcześniej badany pod tym kątem przez G. Łukaszewicza, który w [6] pokazał istnienie atraktora i oszacował jego wymiar fraktalny. Praca ta dotyczyła przepływu w obszarze ograniczonym z warunkiem Dirichleta na brzegu.

W pracy porównałem również modele Naviera-Stokesa i płynu mikropolarnego, aby zbadać jak liczba stopni swobody zależy od modelu. Interesowała mnie zależność oszacowań od ν_r – parametru, który w pewnym sensie rozróżnia te modele (dla $\nu_r = 0$ następuje rozprzęgnięcie równań - układ "rozpada się" na równanie Naviera-Stokesa i równanie na rotację cząstek) oraz od warunków brzegowych – porównałem oszacowania dla warunku okresowego i Dirichleta.

Główne rezultaty rozprawy

1) Korzystając z metody Faedo-Galerkina i odpowiednich oszacowań *a priori*, wykazałem istnienie słabych i silnych, globalnych w czasie oraz jednoznacznych rozwiązań równań płynu mikropolarnego. Rozwiązania te istnieją w przestrzeniach, które są naturalnym, dostosowanym do równań rozszerzeniem przestrzeni, w których istnieją rozwiązania równań Naviera-Stokesa. Uzyskane wyniki są więc w pewnym sensie optymalne. Twierdzenia te są punktem wyjścia do dalszych rozważań dotyczących asymptotyki przepływu.

2) Udowodniłem istnienie globalnego atraktora dla słabych rozwiązań - zwartego zbioru niezmienniczego przyciągającego zbiory ograniczone w przestrzeni fazowej. Istnienie atraktora jest ważną cechą układu dynamicznego, ponieważ dynamika na atraktorze charakteryzuje w pewnym sensie asymptotyczne zachowanie się układu. Ponadto oszacowałem od góry wymiar fraktalny i wymiar Hausdorffa tego atraktora. $d_f(\mathcal{A}_{\nu_r}) \leq 2m$, $d_H(\mathcal{A}_{\nu_r}) \leq m$, gdzie $m \sim \tilde{F}$, a $\tilde{F}$ jest do asymptotyczną wielkością sił i momentów mierzoną w normie $L^2(Q)$; $\tilde{F} = \limsup_{t\to\infty} \sqrt{||f(t)||^2_{L^2} + ||g(t)||^2_{L^2}}$. Takie ograniczenie jest jedną z bardziej interesujących cech układu, gdyż może być interpretowane jako ograniczenie na liczbę stopni swobody przepływu po długim czasie. Skończony wymiar atraktora dla półgrupy związanej z układem równań różniczkowych cząstkowych sugeruje, że układ a priori nieskończenie wymiarowy dąży

do układu skończenie wymiarowego tj. dającego się scharakteryzować z pomocą skończonej liczby parametrów.
3) Stosując metodę kompleksyfikacji, pokazałem istnienie rozwiązań analitycznych o wartościach w przestrzeni Gevrey'a. Jest to uogólnienie wyniku C. Foiasa i R. Temama [4], którzy pokazali tę własność dla równań Naviera-Stokesa, na szerszą klasę równań. Okazuje się, że rozwiązania z przestrzeni Gevrey'a leżące na atraktorze daje się scharakteryzować za pomocą wartości prędkości i rotacji w k punktach dziedziny Q, gdzie $k \sim d_f$.
4) Uzyskałem oszacowanie na liczbę harmonik determinujących tego samego rzędu co dla równań płynu mikropolarnego z warunkiem Dirichleta na brzegu $c\tilde{F}^2 + c(\nu_r)$. Oszacowanie to jest tego rzędu co dla równań Naviera-Stokesa z warunkiem Dirichleta na brzegu i gorsze niż dla równań Naviera-Stokesa z okresowym warunkiem brzegowym (rzędu F), gdzie F jest asymptotyczną wielkością sił zewnętrznych działających na płyn; $F = \limsup_{t\to\infty} ||f(t)||_{L^2}$. Jest to spowodowane brakiem własności ortogonalności dla formy b_1, która jest dwuliniową formą związaną z wyrazem $(u \cdot \nabla)\omega$ w równaniu (3):

$$b_1(u,\omega,\psi) = \sum_{i=1}^{2} \int_Q u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \psi \, dx.$$

Forma b jest związana z wyrazem $(u \cdot \nabla)u$ w równaniu (1)

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_Q u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx$$

i posiada następującą własność: $b(u,u,Au) = 0$ dla każdego $u \in D(A)$, której forma b_1 nie posiada: nie jest prawdą, że $b_1(u,\omega,A_1\omega) = 0$ dla każdego $u \in D(A)$, $\omega \in D(A_1)$. Gdy $\nu_r \to 0$ to $c(\nu_r) \to 0$, więc można wysnuć wniosek, że ν_r odpowiada za wzajemny wpływ pól prędkości i rotacji na siebie. Dla $\nu_r = 0$ mamy oszacowanie takie jak dla równań Naviera-Stokesa z warunkiem Dirichleta na brzegu.

Uzyskane oszacowanie na liczbę węzłów determinujących, eksponencjalne od wielkości sił, jest dużo gorsze od analogicznego wyniku dla równań Naviera-Stokesa z okresowym warunkiem brzegowym (rzędu F) i porównywalne z wynikiem dla równań Naviera-Stokesa z warunkiem Dirichleta na brzegu, które też jest eksponencjalne.

Korzystając z wyników P.K Fritza i J.C. Robinsona [5] pokazałem istnienie zbioru węzłów natychmiastowo determinujących (*instantanously determining nodes*) dla rozwiązań analitycznych, tzn. takiego zbioru punktów $X = \{x_1, \ldots x_k\} \subset Q$, że odwzorowanie $E_X \colon \bar{u} \mapsto (\bar{u}(x_1), \ldots \bar{u}(x_k))$ z atrakrora $\mathcal{A}$ na $\mathbb{R}^{3k}$ jest $1-1$, gdzie $\bar{u} = (u,\omega)$ jest rozwiązaniem równań płynu mikropolarnego z punktu 3). Okazuje się, że węzły te są też determinujące w sensie asymptotycznym. Oszacowanie ich liczby jest dużo lepsze - liniowe względem asymptotycznej wielkości sił i momentów $\tilde{F}$, niż dla rozwiązań nieanalitycznych, dla których ta zależność jest eksponencjalna.

Porównując uzyskane oszacowania na liczbę stopni swobody dochodzimy do wniosku, że pewne sposoby opisu asymptotyki przepływu są lepsze od innych w tym sensie, że wymagają mniejszej liczby parametrów. Najlepszy pod tym względem wydaje się być atraktor, ponieważ jego wymiar fraktalny jest proporcjonalny do $\tilde{F}$, a każdy zbiór o wymiarze fraktalnym mniejszym niż d, d całkowite, można w sposób ciągły sparametryzować za pomocą $2d+1$ parametrów. Problemem związanym z taką parametryzacją jest to, że parametry, którymi opisujemy atraktor nie są związane z wielkościami fizycznymi opisującymi przepływ. Jednak gdy rozpatrujemy rozwiązania analityczne to trajektorię na atraktorze da się opisać za pomocą wartości prędkości i mikrorotacji w pewnej ilości punktów należących do obszaru przepływu (por. punkt 3).

5) Kolejnym rozpatrywanym przeze mnie problemem było uzyskanie oszacowań drabinowych (ladder estimates) wiążących ewolucję $N-$tych seminorm rozwiązań z seminormami niższego rzędu. Problematyczne przy wyprowadzaniu było to, że w przypadku dwuwymiarowym mikrorotacja ω jest funkcją skalarną i nie da się dla niej zdefiniować operatora div. Jednak dzięki rozpatrywaniu przepływu w dwóch wymiarach jako szczególnego przypadku przepływu trójwymiarowego udało się uzyskać strukturę równania na rotację podobną do struktury równania na prędkość To pozwoliło na uzyskanie oszacowań drabinowych podobnych do uzyskanych przez M.V. Bartuccelliego, C.R. Doeringa, J.D. Gibbona oraz S.J.A. Malhama w [1]. Tego typu oszacowania posłużyły C.R. Doeringowi i J.D. Gibbonowi do badania regularności rozwiązań równań Naviera-Stokesa w trójwymiarowym obszarze przepływu. W [2] pokazali oni, że rozwiązania równań Naviera-Stokesa posiadają dwojakie zachowanie się w czasie, długie spokojne okresy są przedzielone krótkimi aktywnymi okresami, podczas których występują duże fluktuacje prędkości, dalekie od wartości średniej. Pokazano, że w "dobrych" okresach rozwiązania są ograniczone i regularne, podczas gdy w "złych" okresach mogą pojawiać się osobliwości. Ponadto udowodniono, że stosunek długości okresów "dobrych" do "złych" rośnie wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa.

Część wyników uzyskanych w rozprawie została opublikowana w [7, 8, 9].

Literatura

[1] M.V. Bartuccelli, C.R. Doering, J.D. Gibbon, S.J.A. Malham, *Length scales in solutions of the Navier-Stokes equations*, Nonlinearity 6, 549–568, 1993.

[2] C.R. Doering, J.D. Gibbon, *Intermittency and Regularity Issues in 3D Navier-Stokes Turbulence*, Arch Rational Mech. Anal. 177, 115–150, 2005.

[3] A.C. Eringen, *Theory of micropolar fluids*, J. Math. Mech. 16, 1–16, 1966.

[4] C. Foias, R. Temam, *Gevrey Class Regularity for the Solutions of Navier Stokes Equations*, Journal of Functional Analysis 87, 359–369, 1989.

[5] P.K. Fritz, J.C. Robinson, *Paramertising the attractor of two-dimensional Navier-Stokes equations with a finite number of nodal values*, Physica D 148, 201–220, 2001.

[6] G. Łukaszewicz, *Long time behavior of 2D micropolar fluid flows*, Mathematical and Computer Modelling 34, 487–509, 2001.

[7] P. Szopa, *Determining Modes for 2-D Micropolar Fluid Flows*, Math. Comp. Modelling 42, 1079–1088, 2005.

[8] P. Szopa, *On Existence of Solutions for 2-D Micropolar Fluid Flows with Periodic Boundary Conditions*, Math. Meth. Appl. Sci 30, 331–346, 2007.

[9] P. Szopa, *Finite-Dimensionality of 2-D Micropolar Fluid Flows with Periodic Boundary Conditions*, przyjęty w Applicationes Mathematicae.