Oszacowania sum wektorów losowych

Piotr Nayar

Autoreferat rozprawy doktorskiej napisanej pod kierunkiem
prof. dra hab. Krzysztofa Oleszkiewicza

W skład rozprawy wchodzą cztery artykuły naukowe, które powstały podczas moich studiów doktoranckich na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Dotyczą one zagadnień związanych z oszacowaniami momentów i ogonów norm wektorów losowych.

W napisanych wspólnie z Tomaszem Tkoczem (obecnie doktorantem w University of Warwick) pracach [NT1] oraz [NT2] rozważaliśmy tzw. problem S-inequality. Mówiąc ogólnie, rozwiązanie tego zagadnienia dla pewnej miary borelowskiej μ prowadzi do optymalnych nierówności dla momentów norm wektorów losowych o rozkładzie μ. Nasze dociekania doprowadziły do rozwiązania zagadnienia dla pewnych szczególnych miar produktowych. Praca [NT1] została opublikowana w czasopiśmie Israel Journal of Mathematics. Praca [NT2] została przyjęta do druku i opublikowana w wersji elektronicznej w czasopiśmie Mathematische Nachrichten.

Artykuł [NO] dotyczy optymalnych stałych w nierównościach typu Chinczyna. Pracę napisałem wspólnie z prof. Krzysztofem Oleszkiewiczem. Definiujemy w niej ultra sub-gaussowskie wektory losowe i udowadniamy optymalne oszacowania pomiędzy parzystymi momentami sum niezależnych wektorów tego typu. Nasze rozważania obejmują, jako przypadek szczególny, klasyczną nierówność Chinczyna dla sum rademacherowych. Praca została opublikowana w czasopiśmie Positivity.

W pracy [N] rozważam niesymetryczną wersję twierdzenia FKN, pochodzącego w swojej pierwotnej wersji od E. Friedguta, G. Kalaia i A. Naora, [FKN]. Udało mi się wzmocnić pewne oszacowania pochodzące z pracy [JOW] i udowodnić analogiczny wynik w przypadku kostki symetrycznej i funkcji przyjmujących wartości w przedziale $[-1, 1]$. Uzyskane rezultaty bazują na nierównościach hiperkontrakcyjnych i nierównościach dla momentów i ogonów chaosów rademacherowych.

Poniżej opiszę szczegółowo udowodnione przeze mnie twierdzenia oraz ich związki z istniejącą literaturą przedmiotu.

S-inequality Rozważmy miarę borelowską μ na przestrzeni metrycznej (X, d). Dla $t > 0$ i zbioru borelowskiego A definiujemy t-otoczkę zbioru A, $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, A) < t\}$. Zagadnienie izoperymetryczne dla miary μ polega na wyznaczeniu wielkości $h_t(s) = \inf\{\mu(A_t) : \mu(A) = s\}$. W przypadku miary Lebesgue'a i przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ powyższe infimum przyjmowane jest dla kul euklidesowych (klasyczna izoperymetria). Jeśli zatem $|A|$ oznacza n-wymiarową miarę Lebesgue'a zbioru A, zaś v_n jest objętością kuli euklidesowej o promieniu 1 w $\mathbb{R}^n$, to z warunku $|A| = |B|$, gdzie B jest kulą euklidesową, wynika $|A_t| \geq |B_t|$. Łatwo wywnioskować stąd nierówność

$$|A_t| \geq v_n \left((|A|/v_n)^{1/n} + t \right)^n.$$

Rozwiązanie zagadnienia izoperymetrycznego znane jest również dla standardowej miary Gaussa γ_n na $\mathbb{R}^n$, czyli miary z gęstością $\mathrm{d}\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}$, gdzie $|\cdot|$ jest normą euklidesową. W tym przypadku *optymalnymi* zbiorami nie są kule, lecz półprzestrzenie $H_v = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v < 1\}$, gdzie $v \in \mathbb{R}^n$ i $\cdot$ jest standardowym iloczynem skalarnym, patrz [SC] oraz [B]. Ze względu na rotacyjną niezmienniczość miary Gaussa możemy ograniczyć się do rozważania półprzestrzeni postaci $H^s = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 < s\}$. Zdefiniujmy funkcję $\Phi(s) = \gamma_1((-\infty, s))$. Z rozwiązania zagadnienia izoperymetrycznego wynika, że jeśli $\gamma_n(A) = \gamma_n(H^s) = \Phi(s)$, to $\gamma_n(A_t) \geq \gamma_n(H^{s+t}) = \Phi(s+t)$. Stąd

$$\gamma_n(A_t) \geq \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + t). \tag{1}$$

Znane jest również rozwiązanie problemu izoperymetrycznego dla rotacyjnie niezmienniczej miary probabilistycznej σ_n na euklidesowej sferze jednostkowej S^{n-1} w $\mathbb{R}^n$, patrz [L]. Optymalnymi zbiorami są zbiory postaci $S^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v < 1\}$.

Oszacowania powyższego typu są niezwykle ważne z punktu widzenia tzw. koncentracji miary. Zdefiniujmy funkcję koncentracji miary μ,

$$\alpha_\mu(t) = \sup\left\{1 - \mu(A_t) : \mu(A) \geq 1/2\right\}.$$

Z (1) łatwo otrzymujemy $\alpha_{\gamma_n}(t) = 1 - \Phi(t) \leq \frac{1}{2} e^{-t^2/2}$. Powyższa nierówność implikuje koncentrację funkcji 1-lipschitzowskich $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\gamma_n\left(\{|F - \mathrm{Med}\, F| \geq t\}\right) \leq e^{-t^2/2},$$

gdzie $\mathrm{Med}\, F$ jest medianą funkcji F. Jest to podstawowe narzędzie w wielu zagadnieniach analizy i rachunku prawdopodobieństwa, np. w tzw. lokalnej teorii przestrzeni Banacha (dowód twierdzenia Dvoretzky'ego). Z zagadnieniem koncentracji miary wiążą się ważne nierówności funkcyjne, np. nierówność Poincaré, logarytmiczna nierówność Sobolewa, nierówność Cheegera, nierówność splotu infimum, czy nierówność Bobkowa.

Zagadnienie S-inequality jest koncepcyjnie zbliżone do problemu izoperymetrycznego. Niech μ będzie miarą borelowską na $\mathbb{R}^n$. Problem polega na znalezieniu wielkości

$$g_t(s) = \inf\{\mu(tA) : \ \mu(A) = s\}, \tag{2}$$

gdzie zbiór $tA = \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta, \ a \in A\}$ jest tzw. dylatacją zbioru A. Zatem zamiast rozważania otoczek zbioru A patrzymy na jego jednokładne obrazy. Ze względu na jednorodność miary Lebesgue'a, mamy $|tA| = t^n|A|$, a zatem infimum we wzorze (2) jest dla niej przyjmowane przez wszystkie zbiory borelowskie o mierze s.

Z punktu widzenia zastosowań w powyższym zagadnieniu ważne jest sprecyzowanie klasy zbiorów $\mathcal{K}$, w której postawiony problem chcemy rozwiązać. Bardzo użyteczne jest rozwiązanie zagadnienia w klasie $\mathcal{K}$ wszystkich zbiorów symetrycznych wypukłych. Wprowadźmy następującą definicję.

Definicja 1. Niech μ będzie miarą borelowską. Powiemy, że μ spełnia S-inequality dla klasy zbiorów $\mathcal{K}$, jeśli dla każdego $A \in \mathcal{K}$ z warunku $\mu(A) = \mu(P)$ wynika nierówność $\mu(tA) \geq \mu(tP)$ dla wszystkich $t \geq 1$, gdzie P jest pasem, przez co w tym autoreferacie będziemy rozumieć zbiór postaci $P = \{|x_1| < L\}$.

Załóżmy dodatkowo, że pasy P należą do rodziny $\mathcal{K}$. Wówczas infimum we wzorze (2) jest osiągane przez pas P mający miarę s. W tej sytuacji pasy nazywamy zbiorami ekstremalnymi. Łatwo wówczas zauważyć, że jeśli $\mu(A) = \mu(P)$, to dla $0 < t \leq 1$ mamy $\mu(tA) \leq \mu(tP)$.

Okazuje się, że ekstremalność pasów w klasie $\mathcal{K}$ zbiorów symetrycznych wypukłych implikuje optymalne nierówności dla momentów dowolnych norm wektorów losowych o rozkładzie μ. Konkretnie, prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 1. Przypuśćmy, że probabilistyczna miara borelowska μ na $\mathbb{R}^n$ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a i spełnia S-inequality dla klasy $\mathcal{K}$ zbiorów symetrycznych wypukłych. Wówczas dla dowolnej normy $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ i dla $p \geq q > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \leq C_{p,q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^q \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q},$$

gdzie $X = (X_1, \ldots, X_n)$ jest wektorem losowym o rozkładzie μ oraz

$$C_{p,q} = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x_1|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x_1|^q \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}}.$$

Chciałbym tutaj uzasadnić to stwierdzenie, jako że jego dowód nie znajduje się w żadnej z publikacji wchodzących w skład rozprawy. Przedstawione poniżej rozumowanie pochodzi od S. Szarka. Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie taką liczbą rzeczywistą, że $\mathbb{E}\,\|X\|^p = \mathbb{E}|aX_1|^p$. Wówczas

$$p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}\left(\|X\| > t\right)\,\mathrm{d}t = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}\left(|aX_1| > t\right)\,\mathrm{d}t.$$

Funkcje $t \mapsto \mathbb{P}\left(\|X\| > t\right)$ oraz $t \mapsto \mathbb{P}\left(|aX_1| > t\right)$ są ciągłe, a zatem istnieje $t_0 > 0$, dla którego $\mathbb{P}\left(\|X\| > t_0\right) = \mathbb{P}\left(|aX_1| > t_0\right)$. Zbiory $\{\|x\| \le t_0\}$ oraz $\{|ax_1| \le t_0\}$ są symetryczne i wypukłe. Ponadto drugi zbiór jest pasem w $\mathbb{R}^n$. Stąd i z faktu, że μ spełnia S-inequality dla symetrycznych zbiorów wypukłych, mamy $\mu\left(t\{\|x\| \le t_0\}\right) \ge \mu\left(t\{|ax_1| \le t_0\}\right)$ dla $t \ge 1$, czyli $\mathbb{P}\left(\|x\| \le tt_0\right) \ge \mathbb{P}\left(|ax_1| \le tt_0\right)$. Wynika stąd, że dla $t \ge t_0$ jest $\mathbb{P}\left(\|x\| > t\right) \le \mathbb{P}\left(|ax_1| > t\right)$. Ponadto dla $0 < t \le t_0$ mamy $\mathbb{P}\left(\|x\| > t\right) \ge \mathbb{P}\left(|ax_1| > t\right)$. Zatem dla wszystkich $t > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^q - \left(\frac{t}{t_0}\right)^p\right)\left(\mathbb{P}\left(\|x\| > t\right) - \mathbb{P}\left(|ax_1| > t\right)\right) \ge 0.$$

Całkując tę nierówność stronami i korzystając z równości $\mathbb{E}\,\|X\|^p = \mathbb{E}|aX_1|^p$ otrzymujemy $\mathbb{E}\,\|X\|^q \ge \mathbb{E}|aX_1|^q$, czyli $(\mathbb{E}\,\|X\|^q)^{1/q} \ge |a|(\mathbb{E}|X_1|^q)^{1/q}$. Oczywiście mamy również $(\mathbb{E}\,\|X\|^p)^{1/p} = |a|(\mathbb{E}|X_1|^p)^{1/p}$. Stąd

$$(\mathbb{E}\,\|X\|^p)^{1/p} \le \frac{(\mathbb{E}|X_1|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}|X_1|^q)^{1/q}}(\mathbb{E}\,\|X\|^q)^{1/q},$$

co mieliśmy udowodnić.

Analogicznie możemy uzasadnić następujące stwierdzenie, dotyczące optymalnych oszacowań momentów sum niezależnych zmiennych losowych (jest to tzw. nierówność typu Chinczyna-Kahane'a).

Stwierdzenie 2. Przypuśćmy, że probabilistyczna miara μ na $\mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a i dla wszystkich $n \ge 1$ miara produktowa μ^n spełnia S-inequality dla klasy $\mathcal{K}$ zbiorów symetrycznych wypukłych. Niech $S = \sum_{i=1}^n v_iX_i$, gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają rozkład μ oraz $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są dowolnymi wektorami w przestrzeni Banacha $(E, \|\cdot\|)$. Wówczas dla $p \ge q > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_iX_i\right\|^p\right)^{1/p} \le C_{p,q}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_iX_i\right\|^q\right)^{1/q},$$

gdzie $C_{p,q} = (\mathbb{E}|X_1|^p)^{1/p}/(\mathbb{E}|X_1|^q)^{1/q}$.

Rozwiązanie problemu S-inequality w klasie zbiorów symetrycznych wypukłych jest znane jedynie dla standardowej miary Gaussa na $\mathbb{R}^n$. Jest to rezultat pochodzący od R. Latały i K. Oleszkiewicza, [LO]. W tym przypadku S-inequality jest spełnione, czyli optymalnymi zbiorami są pasy. Prowadzi to do oszacowania

$$\gamma_n(tA) \geq 2\Phi\left(t\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma_n(A)}{2}\right)\right) - 1,$$

które jest analogiem nierówności (1). Dowód korzysta z rotacyjnej niezmienniczości miary Gaussa i z tzw. symetryzacji Ehrharda.

Znane są również ogólne oszacowania wielkości $\mu(A_t)$ dla miar logarytmicznie wklęsłych (log-wklęsłych). Miarę borelowską μ na $\mathbb{R}^n$ nazywamy log-wklęsłą, jeśli

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}, \qquad \lambda \in (0,1),$$

dla dowolnych zbiorów borelowskich A, B. Absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a miara μ jest log-wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy ma gęstość postaci $e^{-\Phi}$, gdzie $\Phi : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ jest funkcją wypukłą. Jednym z najważniejszych przykładów miar log-wklęsłych są rozkłady jednostajne na ciałach wypukłych, czyli zbiorach zwartych wypukłych o niepustym wnętrzu. Innym przykładem jest standardowy rozkład gaussowski na $\mathbb{R}^n$.

Niech A będzie symetrycznym zbiorem wypukłym i niech μ będzie miarą log-wklęsłą. W pracy [B] C. Borell udowodnił następujące oszacowanie,

$$\mu(tA) \geq 1 - \mu(A)\left(\frac{1-\mu(A)}{\mu(A)}\right)^{\frac{t+1}{2}}, \quad t \geq 1.$$

Nierówność ta jest ciekawa jedynie dla zbiorów A spełniających warunek $\mu(A) > 1/2$. W pracy [G] O. Guédon udowodnił wzmocnioną wersję lematu Borella,

$$\mu(tA) \geq 1 - (1-\mu(A))^{\frac{t+1}{2}}, \quad t \geq 1.$$

Powyższe oszacowania prowadzą do nierówności typu Chinczyna-Kahane'a dla miar log-wklęsłych. Mówiąc precyzyjnie, dla dowolnej miary log-wklęsłej μ i dla dowolnej normy $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\int \|x\|^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \leq 12\, \frac{p}{q} \left(\int \|x\|^q \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}, \quad 1 \leq q \leq p.$$

Wspólnie z Tomaszem Tkoczem rozważaliśmy zespoloną wersję zagadnienia S-inequality dla miary Gaussa. Zespolona miara Gaussa $\gamma_{\mathbb{C}^n}$ jest miarą z gęstością

$$\mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (|\Re z_i|^2 + |\Im z_i|^2) \right).$$

Jest to więc standardowa miara gaussowska na $\mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$. Odpowiednikiem zbiorów symetrycznych są tutaj zbiory *zaokrąglone*, czyli zbiory spełniające warunek $e^{i\theta}A = A$ dla wszystkich $\theta \in \mathbb{R}$. Cylindrem nazwiemy zbiór postaci $C = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| \leq L\}$. Możemy sformułować następującą hipotezę, postawioną przez A. Pełczyńskiego.

Hipoteza 1. Rozważmy klasę $\mathcal{K}$ wszystkich zaokrąglonych zbiorów wypukłych w $\mathbb{C}^n$. Dla zbioru $A \in \mathcal{K}$ rozważmy cylinder C spełniający warunek $\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) = \gamma_{\mathbb{C}^n}(C)$. Wówczas $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \geq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$ dla wszystkich $t \geq 1$ oraz $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \leq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$ dla wszystkich $0 < t \leq 1$.

W pracy [T] T. Tkocz częściowo udowodnił tę hipotezę pokazując, że nierówność $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \leq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$, $0 < t \leq 1$ jest spełniona przy dodatkowym założeniu, że zbiór A spełnia warunek $\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) \leq 0,64$. Hipoteza w pełnej ogólności jest wciąż otwarta.

W artykule [NT1] zajęliśmy się klasą $\mathcal{K}_1$ wypukłych zbiorów 1-zaokrąglonych, czyli zbiorów wypukłych spełniających warunek

$$(z_1, \ldots, z_n) \in A \implies (e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n) \in A, \quad \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}.$$

Jest to oczywiście klasa węższa niż klasa wszystkich zaokrąglonych zbiorów wypukłych. Klasa ta jest interesująca, gdyż zawiera ona kule w normach $\|\cdot\|$ spełniających warunek

$$\left\|(e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n)\right\| = \|(z_1, \ldots, z_n)\|, \quad \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}.$$

Udało nam się udowodnić Hipotezę 1 w klasie $\mathcal{K}_1$, a nawet w szerszej klasie wszystkich zupełnych obszarów Reinhardta, czyli zbiorów spełniających warunek

$$(z_1, \ldots, z_n) \in A \implies (w_1, \ldots, w_n) \in A, \quad \text{gdy } |w_i| \leq |z_i| \text{ dla } i = 1, \ldots, n.$$

Konkretnie, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 ([NT1], Theorem 1)**.** *Niech $\mathcal{R}$ będzie klasą wszystkich zupełnych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^n$. Dla zbioru $A \in \mathcal{R}$ rozważmy cylinder C spełniający warunek $\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) = \gamma_{\mathbb{C}^n}(C)$. Wówczas $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \geq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$ dla wszystkich $t \geq 1$ oraz $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \leq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$ dla wszystkich $0 < t \leq 1$.*

Strategia dowodu jest następująca. Korzystamy z prostej obserwacji.

Stwierdzenie 3 ([NT1], Proposition 1)**.** Niech $A \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem borelowskim i niech C będzie cylindrem spełniającym warunek $\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) = \gamma_{\mathbb{C}^n}(C)$. Wówczas nierówność $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \geq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$ jest spełniona dla wszystkich $t \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jednokładny obraz $\tilde{A}$ zbioru A spełnia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(t\tilde{A})\big|_{t=1} \geq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(t\tilde{C})\big|_{t=1}$, gdzie $\tilde{C}$ jest cylindrem, dla którego $\gamma_{\mathbb{C}^n}(\tilde{A}) = \gamma_{\mathbb{C}^n}(\tilde{C})$.

Zatem możemy ograniczyć się do dowodu nierówności $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA)\big|_{t=1} \geq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)\big|_{t=1}$. Następnie zauważamy, że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA)\big|_{t=1} = 2n\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) - \int_A |z|^2 \,\mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z).$$

Korzystając z warunku $\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) = \gamma_{\mathbb{C}^n}(C)$ i wyrażając $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)\big|_{t=1}$ w terminach $\gamma_{\mathbb{C}^n}(C)$ otrzymujemy równoważną wersję problemu,

$$\int_A |z|^2 \,\mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z) \leq 2n\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) + 2(1-\gamma_{\mathbb{C}^n}(A)) \ln\left(1-\gamma_{\mathbb{C}^n}(A)\right). \tag{3}$$

Kluczowym pomysłem jest sformułowanie funkcyjnej wersji nierówności (3) i przeprowadzenie dowodu indukcyjnego tej nierówności. Będzie nam potrzebne pojęcie entropii funkcji względem miary. Dla $g : X \to \mathbb{R}_+$ i miary probabilistycznej μ na X definiujemy

$$\mathrm{Ent}_\mu(g) = \int_X g(x) \ln g(x) \,\mathrm{d}\mu(x) - \left(\int_X g(x) \,\mathrm{d}\mu(x)\right) \ln \left(\int_X g(x) \,\mathrm{d}\mu(x)\right).$$

Wówczas prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4 ([NT1], Lemma 2)**.** Niech $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją ograniczoną spełniającą warunki

1) $g(e^{i\theta_1}z_1, \ldots, e^{i\theta_n}z_n) = g(z)$ dla $z \in \mathbb{C}^n$ i $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$,

2) dla dowolnych $w, z \in \mathbb{C}^n$ warunek $|w_k| \leq |z_k|$, $k = 1, \ldots, n$ implikuje $g(w) \leq g(z)$.

Wówczas

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_{\mathbb{C}^n}}\, g \leq \int_{\mathbb{C}^n} g(z) \left(\frac{|z|^2}{2} - n\right) \mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z).$$

Korzystając z powyższego stwierdzenia dla $g(z) = 1 - \mathbf{1}_A$ otrzymujemy nierówność (3). Dowód Stwierdzenia 4 opiera się na jednowymiarowym oszacowaniu entropii.

Lemat 1. Niech ν będzie probabilistyczną miarą borelowską na $\mathbb{R}_+$ i niech $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie niemalejącą funkcją ograniczoną. Wtedy

$$\operatorname{Ent}_\nu f \leq - \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \left(1 + \ln \nu((x, \infty))\right) \mathrm{d}\nu(x). \tag{4}$$

Z Twierdzenia 1 i z dowodu Stwierdzenia 1 możemy łatwo wyprowadzić następujący wniosek.

Wniosek 1. Załóżmy, że $\|\cdot\|$ na $\mathbb{C}^n$ spełnia warunek

$$\left\|(e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n)\right\| = \|(z_1, \ldots, z_n)\| \quad \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}.$$

Wówczas dla dowolnych $p \geq q > 0$ mamy

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} \|z\|^p \, \mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z) \right)^{1/p} \leq C_{p,q} \left(\int_{\mathbb{C}^n} \|z\|^q \, \mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z) \right)^{1/q},$$

gdzie $C_{p,q} = \left(\int_{\mathbb{C}} |z|^p \, \mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}}(z) \right)^{1/p} / \left(\int_{\mathbb{C}} |z|^q \, \mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}}(z) \right)^{1/q}$.

Okazuje się, że z Twierdzenia 1 wynika rozwiązanie problemu S-inequality dla symetrycznej miary wykładniczej, czyli miary z gęstością

$$\mathrm{d}\nu_n(x) = \frac{1}{2^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n |x_i| \right),$$

i klasy $\mathcal{I}$ wszystkich ideałów w $\mathbb{R}^n$. Zbiór A nazywamy ideałem, jeśli $x \in A$ implikuje $[-|x_1|, |x_1|] \times \ldots \times [-|x_n|, |x_n|] \subseteq A$. W szczególności S-inequality jest spełnione dla wszystkich 1-symetrycznych zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^n$, czyli zbiorów wypukłych spełniających warunek

$$(x_1, \ldots, x_n) \in A \implies (\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n) \in A, \qquad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}.$$

Twierdzenie 2 ([NT1], Theorem 2)**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie klasą wszystkich ideałów w $\mathbb{R}^n$. Dla zbioru $A \in \mathcal{I}$ rozważmy pas P spełniający warunek $\nu_n(A) = \nu_n(P)$. Wówczas $\nu_n(tA) \geq \nu_n(tP)$ dla wszystkich $t \geq 1$ oraz $\nu_n(tA) \leq \nu_n(tP)$ dla wszystkich $0 < t \leq 1$.*

Dowód polega na zamianie zmiennych i skorzystaniu z transportu miary. Ponownie możemy sformułować wniosek dotyczący oszacowania momentów norm.

Wniosek 2 ([NT1], Corollary 2)**.** Załóżmy, że $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ spełnia warunek

$$\|(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n)\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}.$$

Wówczas dla dowolnych $p \geq q > 0$ mamy

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|z\|^p \, \mathrm{d}\nu_n(z)\right)^{1/p} \leq C_{p,q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|z\|^q \, \mathrm{d}\nu_n(z)\right)^{1/q},$$

gdzie $C_{p,q} = (\Gamma(p+1))^{1/p} / (\Gamma(q+1))^{1/q}$.

W pracy [NT2] rozszerzyliśmy powyższe rezultaty na przypadek miar z gęstościami

$$\mathrm{d}\nu_p^n(x) = (c_p/2)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right), \qquad 0 < p \leq 1.$$

Twierdzenie 3 ([NT2], Theorem 1)**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie klasą wszystkich ideałów w $\mathbb{R}^n$ i niech $p \in (0,1]$. Dla zbioru $A \in \mathcal{I}$ rozważmy pas P spełniający warunek $\nu_p^n(A) = \nu_p^n(P)$. Wówczas $\nu_p^n(tA) \geq \nu_p^n(tP)$ dla wszystkich $t \geq 1$ oraz $\nu_n(tA) \leq \nu_n(tP)$ dla wszystkich $0 < t \leq 1$.*

Ponownie korzystając z prostej zamiany zmiennych udało nam się wywnioskować ten sam rezultat dla produktów symetrycznych rozkładów Weibulla ω_α i symetrycznych rozkładów Gamma λ_q,

$$\mathrm{d}\omega_\alpha(x) = \frac{1}{2}\alpha|x|^{\alpha-1}e^{-|x|^\alpha}\mathrm{d}x, \quad \alpha > 0, \qquad \mathrm{d}\lambda_q(x) = \frac{q}{2\Gamma(q)}|x|^{q-1}e^{-|x|}\mathrm{d}x, \quad q \geq 1.$$

Twierdzenie 3 dowodzi się indukcyjnie. Łatwo zauważyć ([NT2], Proposition 1), że S-inequality dla miary produktowej i klasy $\mathcal{I}$ wszystkich ideałów w $\mathbb{R}^n$ wystarczy dowodzić w przypadku $n = 2$. W tym przypadku rozważamy ideały generowane przez funkcje nierosnące $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, czyli zbiory postaci $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \leq f(|x|)\}$. Wówczas nietrudno zauważyć, korzystając ze Stwierdzenia 3 i przeprowadzając prosty rachunek, że problem wykazania optymalności pasów równoważny jest następującej nierówności funkcyjnej,

$$\int \Phi(g) \, \mathrm{d}\mu_+ - \Phi\left(\int g \, \mathrm{d}\mu_+\right) \leq \int_0^\infty g(x)\left(x^p - \frac{1}{p}\right) \mathrm{d}\mu_+(x), \tag{5}$$

gdzie

$$\Phi = S \circ T^{-1}, \quad T(u) = c_p \int_u^\infty e^{-x^p} \, \mathrm{d}x, \quad S(u) = c_p \int_0^u x^p e^{-x^p} \, \mathrm{d}x, \quad g = T \circ f$$

oraz μ_+ jest miarą na $\mathbb{R}_+$ z gęstością $c_p e^{-x^p}$. Dla $p = 1$ nierówność (5) jest równoważna z nierównością (4). Nierówność (5) jest prawdziwa dla wszystkich funkcji niemalejących $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Ze względu na to, że prawa strona (5) jest funkcjonałem liniowym, wystarczy wykazać, że prawa strona jest funkcjonałem wypukłym, a następnie sprawdzić nierówność dla funkcji postaci $g(x) = \mathbf{1}_{[a,\infty)}(x)$, $a > 0$. Dla tych funkcji w nierówności (5) mamy równość.

Aby pokazać wypukłość prawej strony, wystarczy skorzystać z następującego lematu.

Lemat 2 ([LO2], Lemma 4)**.** Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Załóżmy, że $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ spełnia $\Phi'' > 0$ oraz $(1/\Phi'')$ jest wklęsła. Dla $g : \Omega \to [0,1]$ definiujemy funkcjonał

$$\Psi_\Phi(g) = \int_\Omega \Phi(g)\, \mathrm{d}\nu - \Phi\left(\int_\Omega g\, \mathrm{d}\nu\right).$$

Wówczas funkcjonał Ψ_Φ jest wypukły, czyli

$$\Psi_\Phi(\lambda f + (1-\lambda)g) \leq \lambda \Psi_\Phi(f) + (1-\lambda)\Psi_\Phi(g).$$

Nierówności typu Chinczyna Rozważmy ciąg liczb $a_1, \ldots, a_n$ i niech $r_1, \ldots, r_n$ będzie ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych Bernoulliego, czyli zmiennych losowych spełniających $\mathbb{P}(r_i = 1) = \mathbb{P}(r_i = -1) = 1/2$. Rozważmy sumę $S = \sum_{i=1}^n a_i r_i$. Zmienną losową S nazywamy chaosem rademacherowym pierwszego rzędu. Dla dowolnych $p > q > 0$ prawdziwa jest następująca nierówność, udowodniona po raz pierwszy przez Chinczyna, [K],

$$(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leq C_{p,q} (\mathbb{E}|S|^q)^{1/q}, \tag{6}$$

gdzie $C_{p,q}$ jest stałą niezależną od n i ciągu $a_1, \ldots, a_n$. Będziemy zakładali, że stała $C_{p,q}$ jest optymalną stałą w nierówności (6). Problem wyznaczenia stałych $C_{p,q}$ ma długą historię i został rozwiązany jedynie w kilku specjalnych przypadkach. Stałe $C_{2,q}$ i $C_{p,2}$ są znane. Są one ważne ze względu na fakt, że drugi moment zmiennej S ma szczególnie prostą postać, $\mathbb{E}S^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$. Stałe $C_{p,2}$ dla $p \geq 3$ wyznaczył Whittle, [Wh]. Stała $C_{2,1}$ została wyznaczona przez Szarka w pracy [S]. Stałe $C_{p,2}$ dla $p \in (2,3)$ oraz stałe $C_{2,q}$ dla $q \in (0,2)$ zostały wyznaczone przez Haagerupa, [H]. W przypadku gdy $p = 2$ lub $q = 2$, optymalne stałe $C_{p,q}$ zostały znalezione w ogólniejszej sytuacji (gdy zamiast symetrycznych zmiennych Bernoulliego rozważamy pewną klasę rotacyjnie niezmienniczych wektorów losowych w $\mathbb{R}^n$, zawierającą np. wektory rozłożone jednostajnie na sferach i kulach euklidesowych) przez Königa i Kwapienia, [KK], oraz Baernsteina i Culverhouse'a, [BC].

Optymalne stałe $C_{p,q}$ w nierówności (6), w przypadku gdy p i q są parzystymi liczbami naturalnymi oraz $q|p$, zostały wyznaczone przez W. Czerwińskiego w jego pracy magisterskiej, [C]. W pracy [NO], którą napisałem wspólnie z moim promotorem, prof. Krzysztofem Oleszkiewiczem, wyznaczone zostały stałe $C_{p,q}$ dla dowolnych parzystych p, q.

Twierdzenie 4. *Niech $p > q > 0$ będą liczbami całkowitymi parzystymi i niech $S = \sum_{i=1}^n a_i r_i$. Wówczas*

$$(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leq \frac{\sqrt[p]{(p-1)!!}}{\sqrt[q]{(q-1)!!}} (\mathbb{E}|S|^q)^{1/q}.$$

W pracy [NO] definiujemy ultra sub-gaussowskie wektory losowe i dowodzimy nierówności typu Chinczyna dla sum niezależnych wektorów tego typu. Niech $\|\cdot\|$ będzie standardową normą euklidesową na $\mathbb{R}^d$ i niech G będzie standardowym wektorem gaussowskim w $\mathbb{R}^d$.

Definicja 2. Powiemy, że wektor losowy X o wartościach w $\mathbb{R}^d$ jest ultra sub-gaussowski, jeśli $X = 0$ p.n. lub X jest rotacyjnie niezmienniczy (symetryczny w przypadku $d = 1$), ma wszystkie momenty i ciąg $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $a_i = \mathbb{E}\|X\|^{2n} / \mathbb{E}\|G\|^{2n}$ jest log-wklęsły, czyli $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ dla $i \geq 1$.

Nietrudno zauważyć, że dla ciągu liczb dodatnich $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ spełniającego nierówność $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ dla $i \geq 1$ oraz warunek $a_0 = 1$, ciąg $(\sqrt[2i]{a_i})_{i=1}^{\infty}$ jest nierosnący. Wynika stąd, że ultra sub-gaussowski wektor X spełnia nierówność

$$(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \leq \frac{(\mathbb{E}\|G\|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\|G\|^q)^{1/q}} (\mathbb{E}\|X\|^q)^{1/q} \tag{7}$$

dla parzystych liczb całkowitych $p > q > 0$. Ponadto, prawdziwy jest następujący lemat.

Lemat 3 ([NO], Lemma 2)**.** Niech X, Y będą niezależnymi ultra sub-gaussowskimi wektorami losowymi w $\mathbb{R}^d$. Wówczas $X + Y$ jest również ultra sub-gaussowskim wektorem losowym.

Dowód powyższego lematu opiera się na następującym twierdzeniu, pochodzącym od Walkupa, [W] (w naszej pracy podajemy nowy, krótki dowód tego twierdzenia).

Twierdzenie 5 ([NO], Theorem 1)**.** *Niech $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ oraz $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ będą log-wklęsłymi ciągami dodatnich liczb rzeczywistych. Wówczas ciąg $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ zadany wzorem*

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$

jest również log-wklęsły.

Jako prosty wniosek z Lematu 3 i nierówności (7) otrzymujemy nierówność typu Chinczyna dla sum niezależnych ultra sub-gaussowskich wektorów losowych.

Twierdzenie 6 ([NO], Theorem 2)**.** *Niech d będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $p > q > 0$ będą parzystymi liczbami całkowitymi. Rozważmy ciąg niezależnych ultra sub-gaussowskich zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ w $\mathbb{R}^d$. Wówczas dla $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ prawdziwa jest nierówność*

$$(\mathbb{E}\,\|S\|^p)^{1/p} \leq \frac{(\mathbb{E}\,\|G\|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\,\|G\|^q)^{1/q}} (\mathbb{E}\,\|S\|^q)^{1/q}.$$

Przykłady ultra sub-gaussowskich zmiennych losowych możemy konstruować przy pomocy następującego lematu.

Lemat 4 ([NO], Lemma 3, Corollary 1, 2)**.** Załóżmy, że wektor losowy X w $\mathbb{R}^d$ i nieujemna zmienna losowa R są niezależne i $R{\cdot}X$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, Id_d)$. Wówczas X jest ultra sub-gaussowskim wektorem losowym. W szczególności ultra sub-gaussowskimi wektorami losowymi są

a) wektory losowego rozłożone jednostajnie na sferach euklidesowych $r{\cdot}S^{d-1}$, $r > 0$ (w przypadku $d = 1$ mamy symetryczną zmienną losową przyjmującą wartości $\pm r$),

b) wektory losowego rozłożone jednostajnie na kulach euklidesowych $r \cdot B^d$, gdzie $r > 0$ i B^d jest kulą o promieniu 1 i środku w 0 (w przypadku $d = 1$ mamy zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[-r, r]$),

c) wektory losowe z gęstością $g_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{\alpha}+1)} \pi^{-d/2} e^{-\|x\|^{\alpha}}$, $\alpha > 2$.

Mamy zatem następujący wniosek.

Wniosek 3 ([NO], Theorem 3)**.** Niech d będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $p > q > 0$ będą parzystymi liczbami całkowitymi. Rozważmy ciąg niezależnych ultra sub-gaussowskich zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ w $\mathbb{R}^d$, rozłożonych na kulach lub sferach euklidsowych (niekoniecznie o środku w 0). Wówczas dla $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ prawdziwa jest nierówność

$$(\mathbb{E}\,\|S\|^p)^{1/p} \leq \frac{(\mathbb{E}\,\|G\|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\,\|G\|^q)^{1/q}} (\mathbb{E}\,\|S\|^q)^{1/q}.$$

Stała

$$\frac{(\mathbb{E}\,\|G\|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\,\|G\|^q)^{1/q}} = \left(\frac{\Gamma(\frac{p+d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(\frac{q+d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{-1/q}$$

jest optymalna. Można się o tym przekonać rozważając ciąg $X_1, X_2, \ldots$ zmiennych niezależnych o tym samym rozkładzie i korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego przy $n \to \infty$. Dla $d = 1$ otrzymujemy Twierdzenie 4.

Problem wyznaczenia optymalnej stałej $C_{p,q}$ w nierówności Chinczyna dla dowolnych $p > q > 0$ wydaje się być bardzo trudny. Prawdziwa jest jednak następująca nierówność typu Chinczyna-Kahane'a.

Twierdzenie 7. *Niech $(F, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną i niech $v_1, \ldots, v_n \in F$. Niech $r_1, \ldots, r_n$ będzie ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych losowych Bernoulliego. Wówczas dla $p \geq q > 1$ mamy*

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_i r_i\right\|^p\right)^{1/p} \leq \sqrt{\frac{p-1}{q-1}} \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_i r_i\right\|^q\right)^{1/q}.$$

Powyższą nierówność można udowodnić korzystając z tzw. nierówności hiperkontrakcyjnej. Aby podać jej sformułowanie, rozważmy kostkę dyskretną $\{-1,1\}^n$ z miarą produktową $\mu_n = \left(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}\right)^{\otimes n}$. Jest to miara jednostajna na $\{-1,1\}^n$. W przestrzeni liniowej funkcji $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ wprowadzamy strukturę przestrzeni Hilberta $L^2 = L^2(\mu_n)$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int fg \, \mathrm{d}\mu_n$ i z normą $\|f\| = \left(\int f^2 \, \mathrm{d}\mu_n\right)^{1/2}$. Jest to przestrzeń liniowa wymiaru 2^n. Dla $S \subset \{1, \ldots, n\}$ definiujemy funkcje Walsha, $w_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$ oraz $w_\emptyset \equiv 1$. Zbiór funkcji $(w_S)_S$ ma moc 2^n i jest układem ortonormalnym w L^2, a zatem jest bazą L^2. Wynika stąd, że każdą funkcję $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $f = \sum_S a_S w_S$, gdzie $(a_S)_S$ są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Zbiór $(a_S)_S$ nazywamy spektrum funkcji f. Definiujemy operator $\mathcal{P}_t$ wzorem

$$\mathcal{P}_t\left(\sum_S a_S w_S\right) = \sum_S e^{-t|S|} a_S w_S,$$

gdzie $|S|$ jest mocą zbioru S. Bonami, Beckner i Gross udowodnili następującą nierówność (patrz [Bo, Be, Gr]),

$$\|\mathcal{P}_t f\|_p \leq \|f\|_q, \qquad t \geq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p-1}{q-1}\right),\ p > q > 1. \tag{8}$$

W szczególności, dla wszystkich $a_S \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność

$$\left\|\sum_{S\subseteq[n]} (q-1)^{|S|/2} a_S w_S\right\|_2 \leq \left\|\sum_{S\subseteq[n]} a_S w_S\right\|_q. \tag{9}$$

Nierówność ta została uogólniona w pracy [Ol1] na przypadek niesymetryczny, w którym rozważamy kostkę $\{-\gamma, \gamma^{-1}\}^n$ z miarą $\mu_n = (\beta\delta_{-\gamma} + \alpha\delta_{\gamma^{-1}})^{\otimes}$, gdzie $\alpha+\beta = 1$, $\alpha \in (0, 1/2)$ oraz $\gamma = \sqrt{\alpha/\beta}$. Przy tej normalizacji $\int x_i \, \mathrm{d}\mu_n = 0$ i $\int x_i x_j \, \mathrm{d}\mu_n = \delta_{i,j}$. W szczególności funkcje Walsha tworzą układ ortonormalny. Prawdziwa jest nierówność

$$\left\|\sum_{T\subseteq[n]} c_q(\alpha,\beta)^{|T|} a_T w_T\right\|_2 \leq \left\|\sum_{T\subseteq[n]} a_T w_T\right\|_q, \tag{10}$$

gdzie

$$c_q(\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{\beta^{2-\frac{2}{q}} - \alpha^{2-\frac{2}{q}}}{\alpha\beta\left(\alpha^{-\frac{2}{q}} - \beta^{-\frac{2}{q}}\right)}}.$$

Łatwo zauważyć, że (9) jest szczególnym przypadkiem (10). Faktycznie, mamy

$$\sqrt{q-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} c_q\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right).$$

Praca [N] nie dotyczy bezpośrednio szacowania momentów sum niezależnych zmiennych losowych, jednak Twierdzenie 7 oraz nierówność (10) odgrywają w niej kluczową rolę. W pracy [FKN] Friedgut, Kalai i Naor udowodnili, że w przypadku symetrycznym funkcja, której spektrum jest ε-skoncentrowane na pierwszych dwóch poziomach, czyli $\sum_{|S|>1} a_S^2 < \varepsilon^2$, jest $C\varepsilon$-bliska w normie L^2 jednej z funkcji $\pm x_i$ lub funkcji stałej. W pracy [JOW] autorzy udowodnili następującą optymalną wersję tego twierdzenia.

Twierdzenie 8 ([JOW], Theorem 5.3 i Theorem 5.8)**.** *Niech $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ i $f = \sum_S a_S w_S$. Zdefiniujmy $\rho = \left(\sum_{|S|>1} a_S^2\right)^{1/2}$. Wówczas istnieje podzbiór $B \subseteq$*

$\{1,\ldots,n\}$ *spełniający* $|B| \le 1$ *taki, że* $\sum_{|S|\le 1, S\neq B} a_S^2 \le C\rho^4 \ln(2/\rho)$ *oraz* $|a_B|^2 \ge 1-\rho^2 - C\rho^4\ln(2/\rho)$, *gdzie* C *jest stałą uniwersalną.*

Ponadto, w przypadku niesymetrycznym, dla $f : \{-\gamma,\gamma^{-1}\}^n \to \{-1,1\}$ *istnieje* $k \in [n]$ *takie, że* $\left\|f - (a_\emptyset + a_{\{k\}}w_{\{k\}})\right\|_{L^2} \le 8\sqrt{\rho}$.

Dowód powyższego twierdzenia korzysta z nierówności (9). W pracy [N], korzystając z nierówności (10), udowodniłem następującą wzmocnioną wersję drugiej części Twierdzenia 8.

Twierdzenie 9. *Niech* $f : \{-\gamma,\gamma^{-1}\} \to \{-1,1\}$ *oraz* $f = \sum_S a_S w_S$. *Zdefiniujmy* $\rho = \left(\sum_{|S|>1} a_S^2\right)^{1/2}$. *Wówczas istnieje* $k \in \{1,\ldots,n\}$ *oraz stała uniwersalna* $c_0 > 0$ *taka, że dla* $\rho\ln(e/\rho) < c_0\alpha$ *mamy*

$$\left\|f - (a_\emptyset + a_{\{k\}}w_{\{k\}})\right\|_{L^2} \le 2\rho.$$

W drugiej części pracy [N] badałem funkcje określone na symetrycznej kostce dyskretnej i przyjmujące wartości w przedziale $[-1,1]$. Powiemy, że funkcja $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ jest afiniczna, jeśli $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ zbiór wszystkich funkcji afinicznych określonych na kostce dyskretnej, zaś przez $\mathcal{A}_{[-1,1]} \subset \mathcal{A}$ zbiór funkcji afinicznych, przyjmujących na kostce wartości w zbiorze $[-1,1]$.

W pracy [JOW] autorzy podali nastepujący przykład. Niech $g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $g(x) = s^{-1}n^{-1/2}\sum_{i=1}^n x_i$. Oczywiście $g \in \mathcal{A}$. Zdefiniujmy $\phi(x) = -\mathbf{1}_{(-\infty,-1)}(x) + x\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) + \mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$ oraz $f = \phi \circ g$. Funkcja f ma wartości w zbiorze $[-1,1]$, ale nie musi być afiniczna. Autorzy udowodnili, że $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}_{L^2}(f,\mathcal{A}) = O(e^{-s^2/4})$ oraz $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}_{L^2}(f,\mathcal{A}_{[-1,1]}) = \Theta(s^{-1})$. W [N] udowodniłem, że jest to najgorszy przypadek. Konkretniej, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10 ([N], Theorem 3)**.** *Niech* $f : \{-1,1\}^n \to [-1,1]$ *i niech* $\rho = \mathrm{dist}_{L^2}(f,\mathcal{A})$. *Wówczas* $\mathrm{dist}_{L^2}(f,\mathcal{A}_{[-1,1]}) \le \frac{18}{\sqrt{\ln(1/\rho)}}$.

W dowodzie wykorzystuję Twierdzenie 7 oraz następujący lemat.

Lemat 5. ([HK], Theorem 1 i [Ol2], Theorem 1) Niech $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge 0$ i niech $S = \sum_{i=1}^n a_i r_i$, gdzie $r_1,\ldots,r_n$ są symetrycznymi niezależnymi zmiennymi Bernoulliego. Wówczas dla $t \ge 1$ mamy

$$\mathbb{P}\left(|S| \ge \|S\|_{L^2}\right) > \frac{1}{10} \qquad \text{oraz} \qquad (\mathbb{E}|S|^t)^{1/t} \ge \frac{1}{4}\sqrt{t}\Big(\sum_{i>t} a_i^2\Big)^{1/2}.$$

Podziękowania W pierwszej kolejności chciałbym podziękować mojemu promotorowi profesorowi Krzysztofowi Oleszkiewiczowi za jego pomoc i za rozmowy dotyczące matematyki i życia akademickiego. Dziękuję również mojemu promotorowi pomocniczemu Adamowi Osękowskiemu.

Pragnę również podziękować profesorowi Rafałowi Latale za zainteresowanie moimi badaniami naukowymi i za wiele pożytecznych dyskusji.

Dziękuję wszystkim osobom, które przyczyniły się do powstania artykułów, wchodzących w skład niniejszej rozprawy. W szczególności dziękuję profesorowi Stanisławowi Kwapieniowi, Olivierowi Guédonowi, Matthieu Fradeliziemu, Bernardowi Maureyowi i Radosławowi Adamczakowi.

Dziękuję mojej Rodzinie i Narzeczonej.

Chciałbym złożyć również podziękowania dla Piotra Bogusława Muchy, kierownika Środowiskowych Studiów Doktoranckich z Nauk Matematycznych, których byłem uczestnikiem. Dziękuję Narodowemu Centrum Nauki za wsparcie finansowe moich badań naukowych (grant NCN nr 2011/01/N/ST1/01839).

Literatura

[B] Borell, C., *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. 30 (1975), no. 2, 207-–216.

[BC] Baernstein, II, A., Culverhouse, R.C., *Majorization of sequences, sharp vector Khinchin inequalities, and bisubharmonic functions*, Stud. Math 152 (2002), 231—248.

[Be] Beckner, W., *Inequalities in Fourier analysis*, Annals of Math. 102 (1975), 159–182.

[Bo] Bonami, A., *Etude des coeffcients Fourier des fonctiones de $L_p(G)$*, Ann. Inst. Fourier 20 (1970), 335–402.

[C] Czerwiński, W., *Khinchine inequalities* (in Polish), University of Warsaw, Master thesis (2008).

[FKN] Friedgut, E., Kalai, G., Naor, A., *Boolean functions whose Fourier transform is concentrated on the first two levels*, Advances in Applied Mathematics 29, no. 3 (2002), 427-–437.

[G] Guédon, O., *Kahane-Khinchine type inequalities for negative exponent*, Mathematika 46, 1 (1999), 165–173.

[Gr] Gross, L., *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975), 1061–1083.

[H] Haagerup, U., *The best constants in the Khintchine inequality*, Stud. Math. 70 (1982), 231-–283.

[HK] Hitczenko, P., Kwapień, S., *On the Rademacher series*, Probability in Banach spaces, 9 (Sandjberg, 1993), 31—36, Progr. Probab., 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994.

[JOW] Jendrej, J., Oleszkiewicz, K., Wojtaszczyk, J.O., *On some extensions of the FKN theorem*, preprint.

[K] Khintchine, A., *Über dyadische Brüche*, Math. Z. 18 (1923), 109-–116.

[KK] König, H., Kwapień, S., *Best Khintchine type inequalities for sums of independent, rotationally invariant random vectors*, Positivity 5 (2001), 115—152.

[LO] Latała R., Oleszkiewicz K., *Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets*, Ann. Probab. 27 (1999), 1922–1938.

[LO2] Latała, R., Oleszkiewicz, K., *Between Sobolev and Poincaré*, Geometric Aspects of Functional Analysis, 147–168, Lecture Notes in Math., 1745, Springer, Berlin, 2000.

[L] Levy, P., *Problémes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino.* Gauthier-Villars, Paris, 1951. 2d ed.

[NO] Nayar P., Oleszkiewicz K., *Khinchine type inequalities with optimal constants via ultra log-concavity*, Positivity, 16 (2012), 359–371.

[NT1] Nayar P., Tkocz T., *The unconditional case of the complex S-inequality*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 197 1 (2013), 99–106.

[NT2] Nayar P., Tkocz T., *S-inequality for certain product measures*, Mathematische Nachrichten, online, 2013, DOI: 10.1002/mana.201200294

[N] Nayar, P., *FKN Theorem on the biased cube*, preprint, http://arxiv.org/pdf/1311.3179.pdf

[Ol1] Oleszkiewicz, K., *On a nonsymmetric version of the Khinchine-Kahane inequality*, Proceedings of the Stochastic Inequalities Conference (Barcelona 2002), Progress in Probab. 56, 157-–168, Birkhäuser Verlag Basel, 2003.

[Ol2] Oleszkiewicz, K., *On the Stein property of Rademacher sequences*, Prob. and Math. Stat., Vol. 16, Fasc. 1 (1996), 127—130

[S] Szarek, S., *On the best constant in the Khintchine inequality*, Stud. Math. 58 (1976), 197-–208.

[SC] Sudakov, V., Cirel'son, B., *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*, (Russian) Problems in the theory of probability distributions, II. Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 41 (1974), 14-–24, 165.

[T] Tkocz, T., *Gaussian measures of dilations of convex rotationally symmetric sets in* $\mathbb{C}^n$, Elect. Comm. in Probab. 16 (2011), 38–49.

[W] Walkup, D. W., *Pólya sequences, binomial convolution and the union of random sets*, J. Appl. Probab. 13 (1976), 76–85.

[Wh] Whittle, P., *Bounds for the moments of linear and quadratic forms in independent random variables*, Theory Probab. Appl. 5 (1960), 302–305.