Paweł Wolff

Hiperkontrakcja i nierówności funkcyjne dla miar produktowych*

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Wiele klasycznych zagadnień Teorii Prawdopodobieństwa zajmuje się badaniem własności produktów miar probabilistycznych. Wystarczy wspomnieć twierdzenia graniczne dla sum niezależnych zmiennych losowych: Prawo Wielkich Liczb, Centralne Twierdzenie Graniczne czy Prawo Iterowanego Logarytmu. Cechą wspólną dla tych zagadnień jest to, że rozważane produkty miar nie mają z góry ustalonego wymiaru, a często wręcz wymiar dąży do nieskończoności. Kluczowym narzędziem do badania własności produktów miar są nierówności probabilistyczne. Najogólniej ujmując, streszczana tu rozprawa traktuje o różnych aspektach nierówności hiperkontrakcyjnych, nierówności funkcyjnych typu entropii-energii (do których zalicza się nierówność Poincaré i logarytmiczną nierówność Sobolewa) i koncentracji miary.

1. Hiperkontrakcja

Rozdziały 1–3 rozprawy traktują o pojęciu hiperkontrakcji i nierównościach hiperkontrakcyjnych, zarówno w klasycznym kontekście półgrup Markowa (rozdział 2), jak i w kontekście rzeczywistych zmiennych losowych (rozdział 3). W celu zreferowania wyników autora, zamieszczonych w tej części rozprawy, przybliżymy najważniejsze pojęcia i znane z literatury wyniki.

Niech Ω będzie przestrzenią polską (rozważania będą obejmowały głównie przykłady: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, zbiór dyskretny skończony). Będziemy rozważać półgrupę operatorów Markowa, działającą na przestrzeni funkcji (rzeczywistych) określonych na Ω (np. funkcji ciągłych ograniczonych z Ω w $\mathbb{R}$), z borelowską, probabilistyczną miarą niezmienniczą μ. W takiej sytuacji możemy rozważać rozszerzenia półgrupy $(P_t)_{t\geqslant 0}$ do półgrup $P_t\colon L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ dla dowolnego $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ($L^p(\mu)$ oznacza tutaj przestrzeń $L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$). W dalszym ciągu będziemy zakładać, że półgrupa $P_t\colon L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ jest półgrupą operatorów samosprzężonych.

Definicja 1. Półgrupa $(P_t)_{t\geqslant 0}$ jest (p,q)-*hiperkontraktywna* ($1 \leqslant q < p \leqslant \infty$), jeśli istnieje stała $t_0 = t_0(p,q) \geqslant 0$, dla której operator P_{t_0} rozszerza się do operatora ciągłego $P_{t_0}\colon L^q(\mu) \to L^p(\mu)$, o normie 1. Jeśli t_0 jest najmniejsze możliwe o wyżej opisanej własności, to stałą e^{-t_0} będziemy nazywać *stałą* (p,q)-*hiperkontrakcji* dla półgrupy $(P_t)_{t\geqslant 0}$.

* Praca doktorska powstała przy wsparciu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego z grantu promotorskiego N N201 0226 33 oraz z grantu PO3A 012 29

Pierwsze przykłady hiperkontraktywnych półgrup Markowa wywodzą się z fizyki matematycznej — półgrupa Ornsteina-Uhlenbecka, oraz z analizy harmonicznej — półgrupa operatorów splotowych na kostce dyskretnej $\{-1,1\}^n$. Hiperkontraktywność półgrupy Ornsteina-Uhlenbecka wykazał E. Nelson [16], otrzymując optymalną stałą (p,q)-hiperkontrakcji: $\sqrt{(q-1)/(p-1)}$. Z kolei A. Bonami [2], w pracy dotyczącej analizy harmonicznej na grupach dyskretnych, otrzymała analogiczny wynik dla półgrupy operatorów splotowych $(T_t)_{t\geqslant 0}$ na kostce dyskretnej $\mathbb{Z}_2^n \cong \{-1,1\}^n$: $T_t f = f * \mu_{e^{-t}}^{\otimes n}$, gdzie $\mu_a^{\otimes n}$ oznacza n-krotny produkt miar dwupunktowych $\frac{1+a}{2}\delta_1 + \frac{1-a}{2}\delta_{-1}$ (oczywiście miarą niezmienniczą jest $\mu_0^{\otimes n}$). Tak zdefiniowaną półgrupę $(T_t)_{t\geqslant 0}$ będziemy dalej nazywali *(symetryczną) półgrupą Bernoulliego*. Wynik Bonami został uogólniony przez K. Oleszkiewicza [17] na przypadek *niesymetrycznej półgrupy Bernoulliego* (czyli takiej, której miara stacjonarna jest produktem niekoniecznie symetrycznych miar dwupunktowych). Dokładniej, obliczone zostały tam optymalne stałe $(2,q)$- i $(p,2)$-hiperkontrakcji dla tej półgrupy.

Użyteczność pojęcia hiperkontrakcji wynika m.in. ze stabilności ze względu na „tensorowanie" (patrz np. [2, Ch. 3, Lemme 1]). Konkretniej, jeśli półgrupa $(P_t^{(i)})_{t\geqslant 0}$, z miarą niezmienniczą μ_i, jest (p,q)-hiperkontraktywna ze stałą σ_i ($i=1,2$), to półgrupa $P_t = P_t^{(1)} \otimes P_t^{(2)}$, określona na funkcjach postaci $f(x,y) = \sum_{i\leqslant N} g_i(x)h_i(y)$ jako

$$(P_t f)(x,y) = \sum_{i\leqslant N} (P_t^{(1)} g_i)(x)(P_t^{(2)} h_i)(y),$$

której miarą niezmienniczą jest $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, jest (p,q)-hiperkontraktywna ze stałą $\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$. Oczywiście powyższy fakt można uogólnić na produkt większej liczby półgrup. Wynika stąd natychmiast, że hiperkontraktywność zarówno półgrupy Ornsteina-Uhlenbecka, jak i półgrupy Bernoulliego, wystarczy badać w wymiarze $n=1$, gdyż obydwie mają strukturę produktową.

C. Borell [4] zauważył, że wynik Bonami o hiperkontraktywności półgrupy Bernoulliego może być wykorzystany od badania chaosów rademacherowych, również tych o współczynnikach będących wektorami przestrzeni Banacha. Praca W. Krakowiaka i J. Szulgi [8] stanowi rozwinięcie idei Borella na przypadek form wieloliniowych od innych zmiennych niż zmienne Bernoulliego (zob. także [10, Ch. 3]). Właśnie w pracy [8] zostało wprowadzone pojęcie hiperkontraktywnej zmiennej losowej:

Definicja 2. Niech $0 < q < p < \infty$, F będzie przestrzenią liniową unormowaną, zaś θ — niezdegenerowaną zmienną losową o wartościach rzeczywistych. Mówimy, że θ jest *(p,q)-hiperkontraktywna (ze stałą $\sigma > 0$) w przestrzeni F*, jeśli $\mathbb{E}|\theta|^p < \infty$ oraz

$$\forall_{x,y\in F} \quad \|x + \sigma\theta y\|_p \leqslant \|x + \theta y\|_q. \tag{1}$$

Hiperkontraktywne zmienne losowe posiadają analogiczną własność „tensoryzacji", przysługującą hiperkontraktywnym półgrupom operatorów, tzn. nierówność (1) przenosi się np. na sumy niezależnych kopii zmiennej θ lub na formy wieloliniowe, których argumentami są niezależne kopie zmiennej θ. Na przykład dla sum odpowiedni fakt można sformułować następująco: jeśli $(\theta_k)_{k=1}^n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych, z których każda jest (p,q)-hiperkontraktywna w przestrzeni unormowanej F ze stałą $\sigma > 0$, to dla dowolnych wektorów $x, y_1, \ldots, y_n \in F$,

$$\Big\|x + \sigma\sum_{k=1}^n \theta_k y_k\Big\|_p \leqslant \Big\|x + \sum_{k=1}^n \theta_k y_k\Big\|_q.$$

Kładąc w powyższej nierówności $x = 0$ otrzymamy nierówność typu Chinczyna-Kahane'a.

Znane są pewne charakteryzacje hiperkontraktywnych zmiennych losowych w terminach ich rozkładu. S. Kwapień i J. Szulga [9] uzyskali charakteryzację hiperkontraktywnych zmiennych losowych wśród zmiennych o rozkładzie symetrycznym. Charakteryzacja ta obejmuje dwa skrajne przypadki: hiperkontraktywność w przestrzeni $F = \mathbb{R}$ oraz hiperkontraktywność w dowolnej przestrzeni liniowej unormowanej F (równoważnie, w przestrzeni $F = \ell_\infty$). R. Latała w swojej pracy magisterskiej [11] rozszerzył te wyniki, między innymi pozbywając się założenia symetryczności.

1.1. Oszacowania stałych hiperkontrakcji

Wyniki autora zawarte w części rozprawy dotyczącej hiperkontrakcji wpisują się w wyżej nakreślony kontekst. Rozdział 2, „Oszacowania stałych hiperkontrakcji dla rozkładów dyskretnych", zawiera wyniki dotyczące oszacowań stałych hiperkontrakcji $\sigma_{p,q} = e^{-t_0(p,q)}$ dla pewnych półgrup Markowa o dyskretnej przestrzeni stanów. Dokładniej, dla dowolnego dyskretnego zbioru skończonego Ω i zadanej na nim miary probabilistycznej μ, określamy półgrupę $(T_t)_{t\geqslant 0}$ wzorem

$$T_t = e^{-t(Id - \mathbb{E}_\mu)} = e^{-t} Id + (1 - e^{-t})\mathbb{E}_\mu, \tag{2}$$

gdzie $\mathbb{E}_\mu$ oznacza całkę względem miary μ. W przypadku, gdy Ω jest zbiorem dwupunktowym, rozpatrywana półgrupa jest niesymetryczną półgrupą Bernoulliego i w takim przypadku jedynym istotnym parametrem jest waga atomów miary μ: α, $1-\alpha$. Przyjmując dla ustalenia uwagi, że $\alpha \in (0, 1/2]$, określmy $\sigma_{p,q}(\alpha)$ jako stałą (p, q)-hiperkontrakcji odpowiedniej niesymetrycznej półgrupy Bernoulliego. Autorowi udało się znaleźć stałe $\sigma_{p,q}(\alpha)$ z dokładnością do czynnika uniwersalnego, w przypadku gdy $1 < q < p \leqslant 2$ lub $2 \leqslant q < p < \infty$. Pierwszy z przypadków obejmuje

Twierdzenie 1. *$\sigma_{p,q}(\alpha) \simeq \tilde{\sigma}_{p,q}(\alpha)$ dla dowolnych $1 < q < p \leqslant 2$, $\alpha \in I := (0, 1/2]$, gdzie*

$$\tilde{\sigma}_{p,q}(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} & \textit{dla } \alpha \in I_1 = \{\alpha \in I \mid \frac{e^{\frac{1}{q-1}}}{q-1} \leqslant \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\alpha}\}, \\ \left((q-1)\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \alpha^{1-\frac{1}{p}} & \textit{dla } \alpha \in I_2 = \{\alpha \in I \mid \frac{e^{\frac{1}{p-1}}}{q-1} \leqslant \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\alpha} < \frac{e^{\frac{1}{q-1}}}{q-1}\}, \\ \frac{q-1}{p-1}\frac{\ln(1/\alpha)}{1+\ln\left(\frac{q-1}{p-1}\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\alpha}\right)} & \textit{dla } \alpha \in I_3 = \{\alpha \in I \mid \frac{p-1}{q-1} \leqslant \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\alpha} < \frac{e^{\frac{1}{p-1}}}{q-1}\}, \\ \sqrt{\frac{q-1}{p-1}\alpha\ln(1/\alpha)} & \textit{dla } \alpha \in I_4 = \{\alpha \in I \mid \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\alpha} < \frac{p-1}{q-1}\}. \end{cases}$$

(Symbol $\simeq$ oznacza, że dane wielkości są porównywalne z dokładnością do uniwersalnej stałej multiplikatywnej).

Przypadek dualny ($2 \leqslant q < p < \infty$) łatwo wyprowadzić z pierwszego dzięki samosprzężoności półgrupy $T_t \colon L^2(\mu) \to L^2(\mu)$. Jako zastosowanie oszacowań stałych $\sigma_{p,q}(\alpha)$ (dla $2 \leqslant q < p < \infty$) pokazano nierówność typu Chinczyna-Kahane'a dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym $(1-\alpha)\delta_{-\alpha} + \alpha\delta_{1-\alpha}$. Otrzymane w niej stałe okazują się być optymalne (z dokładnością do czynnika uniwersalnego), co pokazano przy użyciu wyników R. Latały [12].

Drugi rezultat dotyczy uogólnienia oszacowań stałych (p, q)-hiperkontrakcji z przypadku niesymetrycznej półgrupy Bernoulliego na przypadek półgrupy $(T_t)_{t\geqslant 0}$ związanej z dowolną, dyskretną miarą probabilistyczną μ, o skończonej liczbie atomów (patrz wzór (2)). Oznaczając stałą (p, q)-hiperkontrakcji tej ostatniej przez $\sigma_{p,q}(\mu)$, omawiany wynik można sformułować następująco:

Twierdzenie 2. *Niech μ będzie dyskretną miarą probabilistyczną, której masa najmniejszego atomu jest równa $\alpha_* > 0$. Wówczas dla dowolnych $1 < q < p < \infty$,*

$$\inf_{\alpha \in [\alpha_*, 1/2]} \sigma_{p,q}(\alpha) \leqslant \sigma_{p,q}(\mu) \leqslant \sigma_{p,q}(\alpha_*).$$

Dowód opiera się na elementarnym argumencie wariacyjnym. Analogiczny wynik w kontekście logarytmicznych nierówności Sobolewa związanych z omawianą klasą półgrup Markowa pochodzi od Diaconisa i Saloff-Coste [5].

Wyniki z rozdziału 2 zostały opublikowane w pracy [19].

1.2. Hiperkontrakcja a geometria

Rozdział 3, „Hiperkontrakcja zmiennych losowych a geometria przestrzeni unormowanych", stanowi dyskusję pojęcia przedstawionego w Definicji 2, z naciskiem na rolę geometrii rozpatrywanej przestrzeni. Głównym celem tego rozdziału jest uogólnienie wyników Kwapienia i Szulgi [9] oraz Latały [11], które charakteryzują hiperkontraktywne zmienne losowe w kontekście niektórych przestrzeni unormowanych, takich jak $\mathbb{R}$, przestrzeń Hilberta, ℓ_∞, przestrzenie L^p. Uzyskany w tym kierunku wynik jest następujący:

Twierdzenie 3. *Niech F będzie ustaloną przestrzenią liniową unormowaną, $p > q > 1$ oraz θ będzie zmienną losową o średniej zero i skończonym p-tym momencie. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *zmienna θ jest (p, q)-hiperkontraktywna w przestrzeni F,*

(ii) *istnieją stałe $K, t_0 > 0$ takie, że dla każdego $t \in [-t_0, t_0]$*

$$\mathbb{E}|t\theta|^p \mathbf{1}_{\{|t\theta| \geqslant 1\}} \leqslant K\mathbb{E}((\|x + ty\| - 1) \wedge 1)$$

dla dowolnych $x, y \in F$ spełniających $\|x\| = \|y\| = 1$ i $\forall_{\lambda \in \mathbb{R}}\ \|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|$,

a także

$$\mathbb{E}|t\theta|^p \mathbf{1}_{\{|t\theta| \geqslant 1\}} \leqslant K\mathbb{E}\left((t\theta)^2 \wedge 1\right).$$

Warto zwrócić uwagę na to, że w pierwszej nierówności z warunku (ii) rozpatrywane są tylko takie pary wektorów x, y, że x jest *ortogonalny (w sensie Jamesa)* do y (co powyżej wyrażone jest przez odpowiedni warunek; patrz też [7]). Warunek (ii), choć bardziej bezpośrednio niż (i) odwołuje się do rozkładu zmiennej losowej θ i geometrii przestrzeni F, nadal jest dość skomplikowany. Jednak za pomocą Twierdzenia 3 udowodniony został następujący warunek dostateczny, w którym geometria przestrzeni F wyrażona jest poprzez *moduł wypukłości*:

Twierdzenie 4. *Niech $p > 1$, $\mathbb{E}\theta = 0$, $\mathbb{E}|\theta|^p < \infty$ i $\dim F \geqslant 2$. Jeśli istnieją stałe $K, t_0 > 0$ takie, że*

$$\forall_{|t| \leqslant t_0} \quad \mathbb{E}|t\theta|^p \mathbf{1}_{\{|t\theta| \geqslant 1\}} \leqslant K\mathbb{E}\bar{\delta}_F(|t\theta|),$$

gdzie

$$\bar{\delta}_F(\varepsilon) = \begin{cases} \delta_F(\varepsilon), & \text{gdy } \varepsilon \in [0, 1), \\ 1, & \text{gdy } \varepsilon \in [1, \infty), \end{cases}$$

to θ jest (p, q)-hiperkontraktywna w F, dla dowolnego $q \in (1, p)$. (Powyżej, δ_F oznacza moduł wypukłości *przestrzeni F).*

Powyższe twierdzenia zostały wykorzystane do skonstruowania „patologicznego" przykładu zmiennej losowej θ oraz przestrzeni F o następującej własności: θ nie jest $(2, 1\frac{1}{2})$-hiperkontraktywna w F, a równocześnie jest $(2, 1\frac{1}{2})$-hiperkontraktywna w dowolnej skończenie wymiarowej podprzestrzeni F.

2. Nierówności funkcyjne dla miar produktowych

W drugiej części rozprawy, na którą składają się rozdziały 4–6, rozważane są własności tensoryzacyjne pewnej rodziny nierówności funkcyjnych, zawierającej nierówność Poincaré i logarytmiczną nierówność Sobolewa (rozdział 5) oraz pewien wariant funkcyjnej nierówności koncentracyjnej, która w odróżnieniu od znanych tego typu nierówności, spełniona jest dla istotnie innej klasy funkcji aniżeli funkcje lipschitzowskie (rozdział 6).

Niech μ będzie probabilistyczną miarą borelowską na $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że μ spełnia *nierówność Poincaré* ze stałą $C > 0$, jeśli dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$

$$\int f^2\,d\mu - \left(\int f\,d\mu\right)^2 \leqslant C \int |\nabla f|^2\,d\mu.$$

Podobnie, miara μ spełnia *logarytmiczną nierówność Sobolewa* ze stałą $C > 0$, jeśli dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$

$$\int f^2 \ln f^2\,d\mu - \int f^2\,d\mu\,\ln \int f^2\,d\mu \leqslant 2C \int |\nabla f|^2\,d\mu.$$

Wśród przykładów miar należy wymienić kanoniczną miarę gaussowską (w dowolnym wymiarze spełnia obie nierówności ze stałą 1, patrz [6]), miarę wykładniczą (spełnia nierówność Poincaré ze stałą 4), miary na $\mathbb{R}^n$ o logarytmicznie jednostajnie wklęsłej gęstości (spełniają obie nierówności, patrz [1]). Z punktu widzenia tematyki poruszanej w tej części rozprawy, ważną konsekwencją faktu, że miara μ spełnia jedną z powyższych nierówności, jest tzw. *własność koncentracji* miary μ. Mówiąc nieformalnie, własność ta orzeka, iż dla dowolnego zbioru borelowskiego A, dla którego $\mu(A) \geqslant 1/2$, miara zbioru punktów odległych od A o co najmniej $r > 0$ szybko maleje do 0 wraz ze wzrostem r. Bardziej formalnie, własność koncentracji miary, ilościowo opisywaną przez funkcję $\alpha_\mu(r)$, można wyrazić m.in. w następujący sposób: jeśli $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją 1-lipschitzowską, to dla każdego $r \geqslant 0$,

$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geqslant \int f\,d\mu + r\right\}\right) \leqslant \alpha_\mu(r). \tag{3}$$

Jeśli dla miary μ zachodzi nierówność Poincaré ze stałą $C > 0$, to $\alpha_\mu(r) \leqslant K e^{-kr/\sqrt{C}}$, dla pewnych stałych numerycznych $K, k > 0$. Jeśli dla miary μ zachodzi logarytmiczna nierówność Sobolewa ze stałą $C > 0$, to $\alpha_\mu(r) \leqslant e^{-t^2/(2C)}$. Zjawisko koncentracji miary obszernie omówione zostało w monografii M. Ledoux [15].

Zaletą podejścia do zagadnienia koncentracji miary poprzez wyżej wspomniane nierówności funkcyjne jest to, że zarówno nierówność Poincaré, jak i logarytmiczna nierówność Sobolewa, posiadają własność „tensoryzacji", analogiczną do wspomnianej własności hiperkontraktywnych półgrup operatorów. Mianowicie, jeśli miary μ_i spełniają nierówność Poincaré [logarytmiczną nierówność Sobolewa] ze stałą $C_i > 0$ $(i = 1, 2)$, to także miara produktowa $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ spełnia odpowiednią nierówność, ze stałą $\max(C_1, C_2)$. Podobnej własności nie można w ogólności spodziewać się w przypadku nierówności (3).

Inne przykłady nierówności funkcyjnych, również z zastosowaniem do koncentracji miary, omawia praca K. Oleszkiewicza i R. Latały [14]. Cechą wspólną tych wszystkich nierówności funkcyjnych jest m.in. postać *funkcjonału entropii*:

$$\mathrm{Ent}_\mu^\varphi(f) = \int \varphi(f)\, d\mu - \varphi\left(\int f\, d\mu\right).$$

Dla przykładu, w nierówności Poincaré mamy do czynienia z $\mathrm{Ent}_\mu^\varphi(f)$ dla $\varphi(x) = x^2$, natomiast w logarytmicznej nierówności Sobolewa — z $\mathrm{Ent}_\mu^\varphi(f^2)$ dla $\varphi(x) = x \ln x$. W dalszym ciągu, funkcjonał $f \mapsto \mathrm{Ent}_\mu^\varphi(f)$ będziemy nazywali funkcjonałem *φ-entropii*.

2.1. Funkcjonały z własnością tensoryzacji

Własność tensoryzacji wspomnianych nierówności funkcyjnych opiera się w istocie na odpowiedniej własności dla funkcjonału Ent_μ^φ, która z kolei opiera się na pewnej własności funkcji φ: dla dowolnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$, i dowolnej całkowalnej zmiennej losowej Z,

$$\mathbb{E}\varphi(Z) - \varphi(\mathbb{E}Z) \leqslant \mathbb{E}\Big(\big(\mathbb{E}_1\varphi(Z) - \varphi(\mathbb{E}_1 Z)\big) + \big(\mathbb{E}_2\varphi(Z) - \varphi(\mathbb{E}_2 Z)\big)\Big) \tag{4}$$

lub równoważnie

$$\mathbb{E}\varphi(Z) - \mathbb{E}_1\varphi(\mathbb{E}_2 Z) - \mathbb{E}_2\varphi(\mathbb{E}_1 Z) + \varphi(\mathbb{E}Z) \geqslant 0,$$

gdzie $\mathbb{E}_i$ oznacza całkowanie względem $\mathbb{P}_i$. Powyższą własność funkcjonału φ-entropii będziemy nazywać *własnością tensoryzacji* (czasami też mówi się o podaddytywności). Problem charakteryzacji funkcji φ, dla których funkcjonał φ-entropii posiada powyższą własność, został rozwiązany w pracy [14]. Zdefiniowana tam została klasa $\Phi \subset \mathcal{C}^2\big((0,\infty); \mathbb{R}\big)$, zawierająca funkcje afiniczne oraz funkcje φ, dla których $\varphi'' > 0$ oraz $1/\varphi''$ jest funkcją wklęsłą. Pokazane zostało [14, Corollary 3], że jeśli $\varphi \in \Phi$, to spełniona jest nierówność tensoryzacyjna (4). Przedstawione tam rozumowanie daje się natychmiast odwrócić, przynajmniej przy dodatkowym założeniu, że funkcja φ, dla której zakładamy (4), jest klasy $\mathcal{C}^2$.

W rozdziale 5, „Funkcjonały z własnością tensoryzacji”, problem charakteryzacji funkcjonałów φ-entropii z własnością tensoryzacji został szczegółowo przedyskutowany. M.in. uzupełnione zostały argumenty, które w pracy [14] przedstawione zostały szkicowo (niektóre zaś budziły nawet wątpliwości — patrz np. uwagi w pracy [3, Sec. 3]). W ramach dalszego uzupełnienia wyników z [14] przedstawiono argument regularyzacyjny, który pozwala udowodnić, iż własność tensoryzacji dla funkcjonału φ-entropii, czyli nierówność (4), pociąga za sobą fakt, że φ jest klasy $\mathcal{C}^2$. Dzięki temu uzyskano pełną charakteryzację funkcjonałów φ-entropii z własnością tensoryzacji. Ponadto, podejmując pytania postawione na końcu pracy [14], dokonano analogicznej charakteryzacji dla tzw. iterowanych funkcjonałów φ-entropii. Uzyskane w tym zakresie wyniki pokazują, że wbrew wcześniejszym przypuszczeniom, odpowiednia klasa funkcjonałów okazuje się być bardzo uboga — zawiera jedynie tzw. *funkcjonały iterowanej wariancji*.

Wyniki z tego rozdziału zostały opublikowane w pracy [20].

2.2. Koncentracja dla funkcji nielipschitzowskich

W rozdziale 6, „Koncentracja dla funkcji nielipschitzowskich", udowodniona została pewna nowa nierówność koncentracyjna dla miary gaussowskiej, która zachodzi dla innej rodziny funkcji aniżeli funkcje lipschitzowskie (por. (3)). Mianowicie, niech X, Y będą niezależnymi wektorami losowymi o kanonicznym rozkładzie gaussowskim na $\mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^2$, dla której $\mathbb{E}|f(X,Y)| < \infty$. Zdefiniujmy zmienną losową

$$\Pi_1 f(X,Y) = \mathbb{E}[f(X,Y)|X] + \mathbb{E}[f(X,Y)|Y] - \mathbb{E}f(X,Y).$$

W każdym punkcie $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ rozważmy macierz pochodnych mieszanych rzędu 2:

$$\partial_M^2 f(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(x,y)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Twierdzenie 5. *Jeśli dla pewnych stałych $a, b > 0$ spełnione jest*

$$\|\partial_M^2 f(x,y)\|_{\mathrm{op}} \leqslant a \quad \textit{oraz} \quad \|\partial_M^2 f(x,y)\|_{\mathrm{HS}} \leqslant b$$

dla dowolnych $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, to dla każdego $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(|f(X,Y) - \Pi_1 f(X,Y)| \geqslant t) \leqslant C \exp\Big(-c \min\left(\frac{t}{a}, \frac{t^2}{b^2}\right)\Big),$$

gdzie $C, c > 0$ są pewnymi stałymi numerycznymi. ($\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ i $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ oznaczają, odpowiednio, normę operatorową i normę Hilberta-Schmidta macierzy).

Warto zwrócić uwagę, że dla formy dwuliniowej $f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$ powyższe twierdzenie podaje znane (optymalne) oszacowanie na ogon chaosu gaussowskiego. Należy jednak zaznaczyć, że podany w rozprawie dowód Twierdzenia 5 takiego właśnie oszacowania używa (ściślej, oszacowania momentów chaosu gaussowskiego). Drugim, istotnym składnikiem dowodu jest pewna modyfikacja nierówności Maureya-Pisiera [18, Theorem 2.2]. Mając do dyspozycji oszacowania momentów chaosów gaussowskich rzędu większego niż 2, które zostały uzyskane przez R. Latałę [13], pokazane zostało także uogólnienie Twierdzenia 5 na funkcje zależne od większej liczby niezależnych wektorów gaussowskich. Przedyskutowane zostało także uogólnienie Twierdzenia 5 na przypadek rozkładów, które są lipschitzowskimi obrazami kanonicznego rozkładu gaussowskiego na $\mathbb{R}^n$.

Literatura

[1] D. Bakry i M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, w: Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Lecture Notes in Math., 1123, Springer, Berlin, 1985, 177–206.

[2] A. Bonami, *Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 20 (1970), no. 2, 335–402.

[3] S. Boucheron, O. Bousquet, G. Lugosi i P. Massart, *Moment inequalities for functions of independent random variables*, Ann. Probab. 33 (2005), 514–560.

[4] C. Borell, *On the integrability of Banach space valued Walsh polynomials*, w: Séminaire de Probabilités XIII, Lecture Notes in Math. 721, Springer, 1979, 1–3.

[5] P. Diaconis i L. Saloff-Coste, *Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains*, Ann. Appl. Prob. 6 (1996), 695–750.

[6] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. of Math. 97 (1975), 1061–1083.

[7] R.C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 61 (1947), 265–292.

[8] W. Krakowiak i J. Szulga, *Hypercontraction principle and random multilinear forms*, Probab. Theory Related Fields 77 (1988), 325–342.

[9] S. Kwapień i J. Szulga, *Hypercontraction methods in moment inequalities for series of independent random variables in normed spaces*, Ann. Probab. 19 (1991), 369–379.

[10] S. Kwapień i W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Probability and its Applications, Birkhäuser, New York, 1992.

[11] R. Latała, *Hiperkontraktywne zmienne losowe albo kilka uwag o momentach*, Praca magisterska, Uniwersytet Warszawski, 1994.

[12] R. Latała, *Estimation of moments of sums of independent real random variables*, Ann. Probab. 25 (1997), 1502–1513.

[13] R. Latała, *Estimates of moments and tails of Gaussian chaoses*, Ann. Probab. 34 (2006), 2315–2331.

[14] R. Latała i K. Oleszkiewicz, *Between Sobolev and Poincaré*, w: Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Math. 1745, Springer, Berlin, 2000, 147–168.

[15] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, 89, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[16] E. Nelson, *The free Markov field*, J. Funct. Anal. 12 (1973), 211–227.

[17] K. Oleszkiewicz, *On a nonsymmetric version of the Khinchine-Kahane inequality*, w: Stochastic Inequalities and Applications, Progr. Probab. 56, Birkhäuser, Basel, 2003, 157–168.

[18] G. Pisier, *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces*, w: Probability and analysis (Verenna, 1985), Lecture Notes in Math. 1206, Springer, 1986, 167–241.

[19] P. Wolff, *Hypercontractivity of simple random variables*, Studia Math. 180 (2007), 219–236.

[20] P. Wolff, *Some remarks on functionals with the tensorization property*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 55 (2007), 279–291.