Analiza jakościowa rozwiązań równań nieściśliwych cieczy lepkich

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Paweł Konieczny

Niniejsza rozprawa poświęcona jest zagadnieniom związanym z matematycznym modelem przepływu nieściśliwej cieczy lepkiej, a konkretnie analizować będziemy równania Naviera-Stokesa. Obszarem, w którym rozpatrujemy nasze zagadnienie, jest obszar zewnętrzny, tzn. zewnętrze zwartego podzbioru $\mathcal{B}$ dwuwymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Jako warunki brzegowe rozpatrujemy warunki brzegowe typu poślizgu, które są fizycznym uzupełnieniem warunków brzegowych typu Dirichleta. Te ostatnie były szeroko badane w ciągu ostatnich dziesięcioleci, podczas gdy te pierwsze były przez matematyków w pewien sposób zaniedbywane, mimo iż z punktu widzenia fizycznego w pewnych modelach są bardziej naturalne. Składają się one z dwóch równań (w przypadku obszaru dwuwymiarowego) – jedno związane jest z drugą zasadą dynamiki Newtona i opisuje interakcję między płynem a brzegiem (tarcie), podczas gdy drugie opisuje przepływ cieczy przez brzeg obszaru. W bardziej aktualnych badaniach te warunki brzegowe są używane w przybliżonych modelach gazu doskonałego ([6], [19]), jak również w modelach przepływu krwi, polimerów, czy ciekłych metali ([7], [13]).

Na rozprawę doktorską składają się cztery główne rozdziały, a każdy z nich jest podstawą samodzielnego artykułu (patrz: [15], [14], [16]).

W rozdziale drugim zajmujemy się liniowymi problemami mechaniki płynów. Jest to zwykle pierwszy krok do opracowania narzędzi, wykorzystywanych później w problemach nieliniowych. Nasze podejście do tych problemów jest podobne do prezentowanego w [17], gdzie autorzy pracują z równaniami Naviera-Stokesa, wyrażonymi przy pomocy rotacji pola prędkości. Jest to o tyle naturalne podejście, że warunki brzegowe typu poślizgu w takim przypadku przekształcone zostają w warunki brzegowe typu Dirichleta na rotację (patrz: [23]).

Jednym ze standardowych podejść ([18], [12]) do zagadnień z hydrodynamiki polega na wykazaniu istnienia rozwiązań, które posiadają skończoną energią kinetyczną, tzn. skończoną całkę Dirichleta:

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx < \infty. \tag{1}$$

W przypadku warunków brzegowych typu Dirichleta uzyskuje się to poprzez wprowadzanie pomocniczego pola wektorowego a, które przejmuje na brzegu całą informację o prędkości. Przedstawia się następnie szukane rozwiązanie jako $v = u + a$, gdzie u jest nowym szukanym polem wektorowym, które należy już do przestrzeni $H_0^1(\Omega)$, co znacznie upraszcza zagadnienie, z uwagi na dodatkowe nierówności, które mamy w tej przestrzeni do dyspozycji. Konstrukcja pola a nie jest oczywista, ponieważ musi ono być nie tylko bezdywergentne oraz dokładnie określone na brzegu, ale również musi spełniać dodatkową nierówność, która jest potrzebna, jeśli chcemy rozwiązać nasze zagadnienie bez założenia małości danych.

Niestety, to standardowe podejście nie jest możliwe dla warunków brzegowych typu poślizgu, z uwagi na fakt, że warunki te a'priori nie pozwalają na pełne określenie prędkości na brzegu obszaru, a przez to nie ma możliwości rozbicia pola v jako $u + a$, gdzie $u \in H_0^1(\Omega)$. Okazuje się, że potrzebna jest bardziej subtelna konstrukcja – taka, jaka została przedstawiona w pracy [17], mianowicie konstruowane pole wektorowe posiada inne własności w kierunku stycznym do brzegu, a inne w kierunku normalnym. To pozwala na uzyskanie odpowiednich oszacowań w klasie funkcji, która jest różna od $H^1_0(\Omega)$, ale jest bardziej naturalna w przypadku problemu na rotację.

Poza pomniejszymi trudnościami, które napotykamy badając obszary zewnętrzne, musimy uporać się z jednym, który nie jest trywialny, mianowicie z problemem jądra operatora *rot-div*. Następujące pytanie nasuwa się od razu: czy możliwe jest odzyskanie pełnej informacji o prędkości z jej rotacji. W przypadku obszarów jednospójnych odpowiedź jest twierdząca, z uwagi na fakt, że jądro operatora *rot-div* jest trywialne. W obszarze zewnętrznym, a więc siłą rzeczy niejednospójnym, pokazujemy, że jądro to jest jednowymiarowe (w najprostszym przypadku $\Pi_1(\Omega) = \mathbb{Z}$). Niemniej jednak, używając warunków brzegowych typu poślizgu, jesteśmy w stanie wykazać, że część prędkości v, która leży w jądrze tego operatora jest trywialna, a co za tym idzie możemy odzyskać pełną informację z rotacji. Rozumowanie to opiera się na mocnej zasadzie maksimum dla funkcji harmonicznych.

Rozdział 3 poświęcony jest zagadnieniu istnienia słabych rozwiązań dla równań Naviera-Stokesa w obszarze zewnętrznym. Jak wspominaliśmy wcześniej – używamy tutaj narzędzi, które były rozwijane w Rozdziale 2. To pozwala nam na wykazanie istnienia rozwiązań bez założeń na małość danych. Ten rezultat jest uzupełnieniem rezultatów dla równań Naviera-Stokesa, rozważanych z warunkami brzegowymi typu Dirichleta, i jest ściśle związany z problemem przepływu (flux problem, [4]). Raz jeszcze korzystamy z podejścia z pracy [17], mianowicie rozważając problem na rotację prędkości, jednakże z uwagi na rozważania na temat jądra operatora *rot-div* jesteśmy w stanie wykazać, że uzyskane rozwiązania są de facto rozwiązaniami wyjściowych równań Naviera-Stokesa. W pracy [17] występowało założenie o jednospójności obszaru, w którym szukamy rozwiązań.

Najważniejszą częścią naszej rozprawy jest Rozdział 4. Prezentujemy w nim obszerną analizę w przestrzeniach L_p rozwiązań równań Oseena, modelujących przepływ cieczy w półprzestrzeni. Rezultaty te pozwalają w pierwszej kolejności na uzyskanie oszacowań L_p dla rozwiązań układu Oseena również w obszarach zewnętrznych. Nasze podejście jest inne od tego, które jest zwykle omawiane w literaturze (przez rozwiązanie podstawowe) – dla danego rozwiązania stosujemy procedurę lokalizacji, aby rozbić rozważany problem na problem w całej przestrzeni i problem w półprzestrzeni. Dla tego pierwszego wyniki są dobrze znane ([8]) – do udowodnienia odpowiednich oszacowań używa się twierdzenia Lizorkina o multiplikatorach. Z kolei w przypadku półprzestrzeni potrzebne jest inne podejście. Stosujemy do rozwiązania transformatę Fouriera, ale tylko w kierunku stycznym do brzegu obszaru, natomiast drugi kierunek traktujemy jako czas. W ten sposób uzyskujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych, który możemy dalej analizować. Do uzyskania oszacowań L_p używamy twierdzenia Marcinkiewicza o multiplikatorach i technik, które były używane między innymi w pracach [25], [21], czy też [22]. Część tych oszacowań występuje również w znanych pracach o regularności rozwiązań równań eliptycznych Agmona, Douglisa i Nirenberga ([1], [2]).

Szczegółowa analiza wartości własnych, które się pojawiają przy rozwiązywaniu wspomnianego układu równań zwyczajnych, daje bardzo ciekawe rezultaty, które przekładają się istotnie na wybór klasy funkcji dla warunków brzegowych. Wartości te są ściśle związane z kątem między powierzchnią przeszkody, a wektorem $\vec{v_\infty}$, tzn. kierunkiem przepływu cieczy. Okazuje się, że charakter rozwiązania zależy w istotny sposób od tego, czy rozważany obszar jest przed przeszkodą, czy też za nią. W naszej pracy pokazujemy, że przed przeszkodą wymagane są warunki brzegowe, które są typowe dla zagadnień ściśle eliptycznych, podczas gdy dla obszaru za przeszkodą musimy rozpatrywać warunki brzegowe z zaburzeniem, które jest charakterystyczne dla układów parabolicznych. To zjawisko może tłumaczyć powstawanie obszaru wzburzenia (wake region) za przeszkodą – fizycznie uzasadnionego parabolicznego obszaru za przeszkodą, który charakteryzuje się inną asymptotyką rozwiązań. Tego typu wynik jest już znany ([8]), jednakże tylko jako asymptotyczne zachowanie. Wydaje się, że nasz rezultat na poziomie lokalnym (problem w półprzestrzeni) jest wynikiem nowym i bardzo interesującym. Jest to najważniejszy wynik w naszej pracy.

Jako konsekwencja korzystania z twierdzenia Marcinkiewicza o multiplikatorach naturalnym staje się rozpatrywanie przestrzeni Sobolewa nie tylko niejednorodnych, ale również jednorodnych. Część rezultatów najłatwiej jest też przedstawić w przestrzeniach Biesova z uwagi na fakt, że są one najbardziej naturalne w podejściu, jakie stosujemy, mianowicie przy pracy z multiplikatorami w przestrzeni Fouriera. To pozwala nam na otrzymanie optymalnych oszacowań regularnościowych.

Rezultaty w półprzestrzeni pozwalają nam również na uzyskanie oszacowań L_p dla rozwiązań układ Oseena w obszarze zewnętrznym. Takie oszacowania są potrzebne, ponieważ znajdują zastosowanie przy rozwiązaniu jednego z najbardziej trudnych problemów przepływów w obszarach zewnętrznych w dwóch wymiarach, mianowicie problemu zachowania prędkości w nieskończoności. Problem ten, w ogólności wciąż otwarty, znalazł swoje częściowe rozwiązania w pracach [10], [11], [3], [9], jednakże dla warunków brzegowych typu Dirichleta. My chcieliśmy dostarczyć narzędzi, aby te rezultaty móc również zastosować do równań Naviera-Stokesa z warunkami brzegowymi typu poślizgu. Chcąc wyjaśnić, dlaczego oszacowania L_p są potrzebne wystarczy zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku, gdy wymiar 2 jest taki sam, jak potęga 2 w całce Dirichleta (1), nie można stwierdzić, że $v \to v_\infty$ dla $|x| \to \infty$, a nawet nie można wykluczyć przypadku, że rozwiązanie jest nieograniczone. Z tego powodu należało rozważyć inne podejście, w którym układ Oseena i jego oszacowania L_p grają główną rolę, żeby zapewnić, że rozwiązanie v dąży do z góry określonego stałego pola w nieskończoności.

W Rozdziale 5 prezentujemy nowatorskie podejście do badania asymptotyki rozwiązań równań Naviera-Stokesa. Punktem wyjściowym były rezultaty z pracy Wittwera [26], gdzie autor pokazuje istnienie rozwiązań i asymptotyczne zachowanie dla przepływów z określoną symetrią w obszarze, który jest półprzestrzenią. Warunki brzegowe tam rozpatrywane nie są naturalne (fizycznie uzasadnione) z racji potrzeby znajomości prędkości na całym brzegu rozpatrywanej półpłaszczyzny. Metoda, jaką posługuje się autor, polega na użyciu transformaty Fouriera w jednym tylko kierunku, a traktowaniu drugiego jako czasu. Rozszerzamy to podejście do badania niesymetrycznych przepływów i w całej przestrzeni. Co więcej rachunki, jakie są do tego potrzebne, są znacznie prostsze od tych z pracy [26]. Jest to po części zasługa tego, że rozpatrujemy równania Naviera-Stokesa bezpośrednio, a nie rozpatrujemy problemu na rotację prędkości. Motywacją do użycia takich metod była praca [20].

Jak wspomnieliśmy wcześniej – badanie zachowania rozwiązania w nieskończoności nie jest problemem łatwym i potrzebne są do tego niestandardowe metody. Dlatego też wprowadzamy do naszych rozważań inne przestrzenie Banacha, bardziej dostosowane do naszego problemu. Podobny punkt widzenia, którego efektem było znaczne uproszczenie rachunków, można zaobserwować w pracach [24] i [5], jednakże tam rozważane są problemy ewolucyjne.

W tej części pracy pokazujemy istnienie rozwiązań, stosując twierdzenie Banacha o punkcie stałym. Przedstawiamy również rezultaty związane z asymptotycznym zachowaniem się tych rozwiązań. Używając wzoru na rozwiązanie pokazujemy, że dla $t < -1$, czyli dla obszaru, który może być uznany jako ten przed przeszkodą, uzyskujemy jednostajne oszacowanie transformaty Fouriera prędkości przez wyrażenie $|t(1 + |\xi|)|^{-1/2}$. Dla obszaru za przeszkodą, czyli dla $t > 1$, pokazujemy, że transformata Fouriera prędkości zachowuje się jak $|(1+t|\xi|^2)|^{-1/2}$. Ma to bezpośrednie przełożenie na powstawanie za przeszkodą obszaru wzburzenia (wake region). Naszym celem było wykazanie tylko podstawowej asymptotyki rozwiązań, jednakże te rezultaty dają zapowiedź tego, co może być uzyskane, stosując wspomniane metody.

Największym wkładem w teorię równań Naviera-Stokesa, w naszej opinii, są rezultaty z

Rozdziałów 4 i 5 pracy. W tym pierwszym wyniki o istnieniu parabolicznego zaburzenia na poziomie lokalnym w rejonie za przeszkodą są nowe i interesujące. Również uprosczenie całego podejścia, przed twierdzenie Marcinkiewicza, może być pomocne z uwagi na fakt, że te techniki mogą być zastosowane do badania innych liniowych zagadnień. Rozdział 5 jako cały prezentuje nowe podejście do wspomnianych zagadnień i można mieć nadzieję, że używając ich możliwe jest uzyskanie interesujących, a być może również istotnie nowych, rezultatów.

Oczywiście nie na wszystkie pytania, dotyczące prezentowanych problemów, udało nam się odpowiedzieć w tej pracy. Nakreślone zostały jednak kierunki badań, które w miarę ich rozwijania mogą przynieść nowe i ciekawe rezultaty – dla przykładu techniki z Rozdziału 5 mogą być użyte do rozpatrywania problemu opływu ciała i ten kierunek będzie w najbliższym czasie przez autora rozprawy obrany.

Literatura

[1] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I., Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959) 623–727.

[2] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II., Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964) 35–92.

[3] C.J. Amick, On Leray's Problem of Steady Navier-Stokes Flow Past a Body in the Plane, Acta Math., 161, 71-130.

[4] W. Borchers, K. Pileckas, Note on the Flux Problem for Stationary Incompressible Navier-Stokes Equations in Domains with Multiply Connected Boundary, Acta Appl. Math. 37 (1994), 21-30.

[5] Cannone, M., Karch, G.: Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system? J. Differential Equations 197 (2004), no. 2, 247–274.

[6] Clopeau, T., Mikelić, A., Robert, R., On the vanishing viscosity limit for the 2D incompressible Navier-Stokes equations with the friction type boundary conditions. Nonlinearity 11 (1998), no. 6, 1625–1636.

[7] H.Fujita, Remarks on the Stokes flow under slip and leak boundary conditions of friction type. Topics in mathematical fluid mechanics, 73–94, Quad. Mat., 10, 2002.

[8] G.P. Galdi, An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Springer Tracts in Natural Philosophy, 1994.

[9] Galdi, G. P., Mathematical questions relating to the plane steady motion of a Navier-Stokes fluid past a body. Recent topics on mathematical theory of viscous incompressible fluid (Tsukuba, 1996), 117–160, Lecture Notes Numer. Appl. Anal., 16, Kinokuniya, Tokyo, 1998.

[10] D. Gilbarg, H.F. Weinberger, Asymptotic Properties of Leray's Solution of the Stationary Two-Dimensional Navier-Stokes Equations, Russian Math. Surveys, 29, 109-123, 1974.

[11] D. Gilbarg, H.F. Weinberger, Asymptotic Properties of Steady Plane Solutions of the Navier-Stokes Equations with Bounded Dirichlet Integral, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (4), 5, 381-404, 1978.

[12] E. Hopf, Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik, Math. Ann. 117 (1941), 764-775.

[13] Itoh, S.; Tanaka N.; Tani A.: The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary condition, Adv. Math. Sci. Appl. 4, (1994) 51-69

[14] Konieczny, P., Linear flow problems in 2D exterior omain for 2D incompressible fluid flows, Banach Center Publ. 81 (2008), 243-257

[15] Konieczny, P., On Nonhomogeneous Slip Boundary Conditions for 2D Incompressible Exterior Fluid Flows, Acta Appl. Math. (2008), Online First.

[16] Konieczny, P., Thorough analysis of the Oseen system in 2D exterior domains, arXiv:0808.1183.

[17] Konieczny, P.; Mucha P. B., On nonhomogeneous slip boundary conditions for 2D incompressible fluid flows, Internat. J. Engrg. Sci. 44 (2006), no. 11-12, 738–747.

[18] Leray, J., Étude de Diverses Équations Intégrales non Linéaires et de Quelques Problémes que Pose l'Hydronamique, J. Math. Pures Appl. 12, 1–82, 1933.

[19] Mucha, P.B., On the inviscid limit of the Navier-Stokes equations for flows with large flux, Nonlinearity 16 (2003), 1715–1732.

[20] Mucha, P.B., Asymptotic behavior of a steady flow in a two-dimensional pipe. Studia Math. 158 (2003), no. 1, 39–58.

[21] Mucha, P. B.; Zajączkowski, W. M., On a L_p-estimate for the linearized compressible Navier-Stokes equations with the Dirichlet boundary conditions. J. Differential Equations 186 (2002), no. 2, 377–393.

[22] Mucha, P. B.; Zajączkowski, W. M., On the existence for the Cauchy-Neumann problem for the Stokes system in the L_p-framework. Studia Math. 143 (2000), no. 1, 75–101.

[23] Neustupa, J., Penel, P., Incompressible viscous fluid flows and the generalized impermeability boundary conditions. IASME Trans. 2 (2005), no. 7, 1254–1261.

[24] Sinai, Y., A new approach to the study of the $3D$-Navier-Stokes system. Prospects in mathematical physics, 223–229, Contemp. Math., 437, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[25] Solonnikov, V.A.; Scadilov, V.E.: On a boundary value problem for a stationary system of Navier-Stokes equations, Trudy Mat. Inst. Steklov. 125 (1973) 186-199

[26] Wittwer, P., On the structure of Stationary Solutions of the Navier-Stokes Equations, Commun. Math. Phys. 226 (2002), 455–474.