Kompleksy grup na kategoriach z pętlami

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Olga Ziemiańska

29 marca 2010

Wprowadzenie

Głównym celem niniejszej rozprawy jest uogólnienie klasycznej teorii kompleksów grup wprowadzonej przez A. Haefliegera ([H1], [B-H]). Uogólniony kompleks grup każdemu obiektowi c pewnej kategorii indeksującej $\mathcal{C}$ przypisuje grupę $\mathcal{G}(c)$, a każdemu morfizmowi $c' \longrightarrow c$ homomorfizm grup $\mathcal{G}(c') \longrightarrow \mathcal{G}(c)$. Przyporządkowanie to nie musi być jednak funktorialne, mianowicie zachowuje ono złożenie z dokładnością do sprzężenia. Nasze rozważania zaczniemy od podania precyzyjnej definicji:

Definicja *Kompleks grup* $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ *przypisuje*

1. *każdemu obiektowi* $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *grupę* $\mathcal{G}(c)$
2. *każdemu morfizmowi* $l : c' \longrightarrow c \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ *homomorfizm grup* $\mathcal{G}(l) : \mathcal{G}(c') \longrightarrow \mathcal{G}(c)$
3. *każdej parze składalnych morfizmów* $c'' \xrightarrow{l'} c' \xrightarrow{l} c \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ *element* $g_{l,l'} \in \mathcal{G}(c)$, *nazywany elementem sprzęgającym taki, że*
   i) $\mathrm{Ad}(g_{l,l'})\mathcal{G}(ll') = \mathcal{G}(l)\mathcal{G}(l')$, *gdzie* $\mathrm{Ad}(g_{l,l'})$ *oznacza sprzężenie elementem* $g_{l,l'}$
   ii) dla każdej trójki $\cdot \xrightarrow{l''} \cdot \xrightarrow{l'} \cdot \xrightarrow{l} \cdot \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ *składalnych morfizmów* $\mathcal{G}(l)(g_{l',l''})g_{l,l'l''} = g_{l,l'}g_{ll',l''}$ *(warunek kocyklu)*

Zauważmy, że jeśli kategoria $\mathcal{C}$ składa się z jednego obiektu, wówczas kompleks grup jest po prostu grupą. Wiele pojęć charakterystycznych dla grup można uogólnić na kompleksy grup. Homomorfizm kompleksów grup $\phi : \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G}$ nad funktorem $F : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ składa się z homomorfizmów grup lokalnych $\{\phi_{c'} : \mathcal{G}'(c') \longrightarrow \mathcal{G}(F(c'))\}_{c' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'}$ spełniających pewne dodatkowe relacje zgodności.

Kompleksy grup zdefiniowane przez działanie grupy Motywem przewodnim pracy Haefliegera był następujący przykład. Przypuśćmy, że grupa G działa na kompleksie symplicjalnym $\widetilde{X}$ w taki sposób, że przestrzeń ilorazowa $X := \widetilde{X}/G$ ma strukturę symplicjalną i odwzorowanie $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ jest symplicjalne. Sympleksy X tworzą zbiór uporządkowany poprzez (odwróconą) inkluzję, zatem zadają kategorię $\mathcal{C}$. Definiujemy słaby funktor $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ przypisując każdemu sympleksowi $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ najpierw pewien sympleks $\widetilde{c}$ należący do orbity $p^{-1}(c)$, a następnie jego podgrupę izotropii $G_{\widetilde{c}} \subset G$. Jeśli $c' \subset c$ wówczas wybieramy element $g \in G$ taki, że $\widetilde{c'}$ jest ścianą sympleksu $g\widetilde{c}$. Definiujemy monomorfizm $\psi_{c'c} : G_{\widetilde{c}} \to G_{\widetilde{c'}}$ jako złożenie sprzężenia $\mathrm{Ad}(g) : G_{\widetilde{c}} \to G_{g\widetilde{c}}$ i włożenia $G_{g\widetilde{c}} \subset G_{\widetilde{c'}}$. Otrzymujemy słaby funktor z kategorii sympleksów do kategorii grup i monomorfizmów. Dokonywane wybory sprawiają, że jeśli rozważymy złożenie $G_{\widetilde{c}} \longrightarrow G_{\widetilde{c'}} \longrightarrow G_{\widetilde{c''}}$ to monomorfizm $\psi_{c''c} \neq \psi_{c''c'}\psi_{c'c}$ i różnią się one o sprzężenie elementem grupy $G_{\widetilde{c''}}$ nazywanym elementem sprzęgającym. Elementy te spełniają warunek kocyklu. Zauważmy, że $\mathcal{C}$ jest małą kategorią, której endomorfizmy obiektów są identycznościami. Taką kategorię nazywamy małą kategorią bez pętli.

Rozważania te zaowocowały stworzeniem przez Haefliegera w roku 1990 teorii kompleksów grup, czyli słabych funktorów zdefiniowanych na kategoriach stowarzyszonych z kompleksami symplicjalnymi o wartościach w kategorii grup. Kompleks grup stowarzyszony z działaniem grupy nazywamy *rozwijalnym*.

Haefliger i Thomason Znacznie wcześniej, w roku 1979 Bob Thomason rozważał podobne zagadnienia, jednak w znacznie ogólniejszym kontekście. Zajmował się on tak zwanymi słabymi funktorami (nazywał je "op-lax" funktorami) określonymi na dowolnej małej kategorii o wartościach w małych kategoriach ([T]). Łatwo sprawdzić, że definicja Haefligera jest specjalnym przypadkiem definicji Thomasona, jeśli tylko założymy, że $\mathcal{C}$ jest małą kategorią bez pętli a funktor przyjmuje wartości w kategorii grup i monomorfizmów. Wynika to z prostego faktu pozwalającego utożsamić każdą grupę G z małą kategorią $\mathcal{B}G$ z jednym obiektem i morfizmami odpowiadającymi elementom grupy.

W niniejszej rozprawie uogólniamy podejście Haefliegera, korzystając z języka Thomasona. Uogólniony kompleks grup jest słabym funktorem określonym na dowolnej małej kategorii o wartościach w kategorii grup.

Kompleks grup stowarzyszony z rozszerzeniem grup Przedstawimy najprostszy możliwy przykład kompleksu grup na kategorii z pętlami. Będzie on określony na kategorii $\mathcal{B}G$ zdefiniowanej przez grupę G. Niech $N \rightarrowtail \widetilde{G} \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} G$ będzie rozszerzeniem grup. Dowolny przekrój epimorfimu η zadaje kompleks grup $\mathcal{F} : \mathcal{B}G \longrightarrow \mathrm{Gr}$ taki, że $\mathcal{F}(*) = N$. Dokładniej, dla każdego elementu $g \in G$ wybieramy $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$, taki że $\varphi(\widetilde{g}) = g$ i homomorfizm $\mathcal{F}(g) : N \longrightarrow N$ definiujemy jako sprzężenie $\mathrm{Ad}(\widetilde{g}) : N \longrightarrow N$. Dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ izomorfizmy $\mathcal{F}(g_1 g_2)$ i $\mathcal{F}(g_1) \circ \mathcal{F}(g_2)$ różnią się o sprzężenie pewnym elementem $n_{g_1,g_2} \in N$.

Niech $\mathcal{E}G$ oznacza kategorię, której obiekty odpowiadają elementom grupy G oraz dla każdej pary g_1, g_2 istnieje dokładnie jeden morfizm $g_1 \overset{g_1^{-1}g_2}{\longrightarrow} g_2$. Grupa G działa na $\mathcal{E}G$ w oczywisty sposób, a ilorazem tego działania jest kategoria $\mathcal{B}G$. Zatem grupa $\widetilde{G}$ działa na $\mathcal{E}G$ poprzez epimorfizm φ, dokładniej $\widetilde{g}.g = \varphi(\widetilde{g})g$. Oczywiście podgrupa izotropii każdego obiektu jest izomorficzna z N. Okazuje się, że kompleks grup stowarzyszony z działaniem $\widetilde{G}$ jest izomorficzny z kompleksem grup $\mathcal{F}$. Wobec tego $\mathcal{F} : \mathcal{B}G \longrightarrow \mathrm{Gr}$ jest rozwijalny.

Grafy grup i kompleksy grup Teoria grafów grup sformalizowana przez J.P. Serre'a [S] zajmuje się analizowaniem algebraicznej struktury grup działających na drzewach symplicjalnych. Grafem grup nazywamy kompleks grup $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$, taki że geometryczna realizacja kategorii $\mathcal{C}$ jest jednowymiarowym kompleksem symplicjalnym. Teoria ta pozwala przedstawić grupę jako wolny produkt, posługując się pojęciem grupy podstawowej grafu grup. Każdemu grafowi grup $\mathcal{G}$ można przypisać drzewo Bassa-Serra'a $\widetilde{X}$ wraz z działaniem grupy podstawowej tego grafu grup. Co więcej kompleks grup stowarzyszony z tym działaniem jest izomorficzny z grafem grup $\mathcal{G}$. Oznacza to, że każdy graf grup jest rozwijalny. Najważniejsze twierdzenie tej teorii mówi, że jeśli G działa na drzewie $\widetilde{X}$ i $\mathcal{G}$ jest grafem grup stowarzyszonym z tym działaniem, to G jest izomorficzna z grupą podstawową $\mathcal{G}$. Najbardziej znany przykład to przedstawienie grupy $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ jako produktu z amalgamacją $\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$.

Teoria kompleksów grup jest uogólnieniem teorii Bassa-Serre'a na wyższe wymiary. Dla każdego kompleksu grup można zdefiniować jego grupę podstawową, jednak by spełniała ona potrzebne nam własności oraz by dało się skonstruować odpowiednik drzewa Bassa-Serre'a, musimy wprowadzić warunek tak zwanej "niedodatniej krzywizny". Szczegóły tej konstrukcji znajdują się w pracach Corsona [C] i Stallingsa [St].

W przypadku dowolnego kompleksu grup analog drzewa Bassa-Serre'a może być niemożliwy do skonstruowania. W szczególności może zdarzyć się, że grupa podstawowa kompleksu grup jest trywialna i kompleks grup nie jest rozwijalny.

Kategoria klasyfikująca kompleksu grup Każdemu kompleksowi grup $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ możemy przypisać małą kategorię $\mathcal{B}\mathcal{G}$ nazywaną kategorią klasyfikującą $\mathcal{G}$. Kategoria $\mathcal{B}\mathcal{G}$ jest "generowna" przez kategorię $\mathcal{C}$ oraz grupy lokalne $\{\mathcal{G}(c)\}_{c\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ jako automorfizmy obiektów. W szczególności istnieje projekcja $p : \mathcal{B}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}$, która jest bijekcją na zbiorze obiektów. Jeśli $\mathcal{G}$ jest kompleksem grup Haefliegera, wówczas $\mathcal{B}\mathcal{G}$ pokrywa się z kategorią klasyfikującą kompleksu grup zdefiniowaną w [H1], [B-H]. Jeśli kompleks grup jest grupą G, wówczas jego kategorią klasyfikującą jest $\mathcal{B}G$. W przypadku gdy $\mathcal{F} : \mathcal{B}G \longrightarrow \mathrm{Gr}$ jest kompleksem grup stowarzyszonym z rozszerzeniem $N \rightarrowtail \widetilde{G} \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} G$, kategoria klasyfikująca $\mathcal{F}$ jest izomorficzna z $\mathcal{B}\widetilde{G}$.

Załóżmy, że $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ jest kompleksem grup stowarzyszonym z działaniem grupy G na jednospójnym kompleksie symplicjalnym $\widetilde{X}$. Wówczas realizacja geometryczna $\mathrm{B}\,\mathcal{G}$ kategorii klasyfikującej $\mathcal{B}\mathcal{G}$ jest homotopijnie równoważna z konstrukcją Borela $\mathrm{E}\,G \times_G \widetilde{X}$, gdzie przestrzeń $\mathrm{E}\,G$ jest nakryciem uniwersalnym przestrzeni Eilenberga-MacLane'a $\mathrm{B}\,G$.

Grupa podstawowa kompleksu grup Haefliger zdefiniował grupę podstawową kompleksu grup $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ jako grupę generowaną przez grupy lokalne i przez morfizmy kategorii $\mathcal{C}$. Najważniejsze twierdzenie teorii kompleksów grup mówi, że kompleks grup jest rozwijalny wtedy i tylko wtedy gdy grupy lokalne wkładają się w grupę podstawową ([H1], [B-H]).

Okazuje się, że grupa podstawowa kompleksu grup jest izomorficzna z grupą podstawową geometrycznej realizacji kategorii klasyfikującej tego kompleksu grup. Wobec tego definiujemy grupę podstawową uogólnionego kompleksu grup jako grupę podstawową geometrycznej realizacji kategorii klasyfikującej tego kompleksu grup

$$\pi_1(\mathcal{G}, c_0) := \pi_1(\mathrm{B}\,\mathcal{G}, c_0)$$

Jeśli $\mathcal{G}$ jest diagramem grup postaci $G_1 \longleftarrow H \longrightarrow G_2$, to jego grupa podstawowa jest izomorficzna z push-outem tego diagramu, czyli jego granicą prostą. Jeśli $\mathcal{G}$ jest grupą G, to grupa podstawowa $\mathcal{G}$ jest równa G. W przypadku gdy $\mathcal{F} : \mathcal{B}G \longrightarrow \mathrm{Gr}$ jest kompleksem grup stowarzyszonym z rozszerzniem $N \rightarrowtail \widetilde{G} \twoheadrightarrow G$, grupa podstawowa $\mathcal{F}$ jest izomorficzna z $\widetilde{G}$.

Podsumowując, kompleks grup pozwala przedstawić grupę jako uogólniony produkt wolny grup. Termin ten jest bardzo pojemny, gdyż z jednej strony możemy otrzymać produkt z amalagamacją, z drugiej rozszerzenie grup.

Główne wyniki rozprawy

Klasyfikacja epimorfizmów kompleksów grup Motywacją dla tej części rozprawy były wyniki Haefliegera dotyczące klasyfikacji rozszerzeń kompleksów grup z abelowym jądrem lub jądrem lokalnie stałym (twierdzenia 5.2, 6.3 [H2]). Mówimy, że homomorfizm kompleksów grup $\varphi : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ nad $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ jest epimorfizmem, jeśli wszystkie lokalne homomorfizmy $\varphi_c : \widetilde{\mathcal{G}}(c) \longrightarrow \mathcal{G}(c)$ są surjektywne. Haefliegier definiuje rozszerzenie kompleksów grup z abelowym jądrem jako epimorfizm kompleksów grup $\varphi : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ nad $\mathcal{C}$ taki, że dla każdego obiektu $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ jądro homomorfizmu lokalnego φ_c jest grupą abelową. Natomiast rozszerzenie φ ma jądro lokalnie stałe jeśli istnieje grupa N taka, że dla każdego obiektu $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ zachodzi $\ker \varphi_c \simeq N$. Zatem klasyfikuje on nie tyle rozszerzenia kompleksów grup, co epimorfizmy kompleksów grup.

Naszym celem jest klasyfikacja epimorfizmów dowolnych kompleksów grup.

Rozważania rozpoczniemy od przypomnienia klasyfikacji rozszerzeń grup. Dokładny opis tej klasyfikacji można znaleźć w [B2] lub [R]. Niech G, N będą dyskretnymi grupami zaś $\mu : G \longrightarrow \mathrm{Out}(N) := \mathrm{Aut}(N,N)/\,\mathrm{Inn}(N)$ homomorfizmem. Homomorfizm μ pochodzi od rozszerzenia $N \rightarrowtail \widetilde{G} \twoheadrightarrow G$ wtedy i tylko wtedy gdy pewien element $o(\mu) \in H^3(G; Z(N))$ jest równy zero, gdzie $Z(N)$ oznacza centrum grupy N. Wówczas klasy równoważności rozszerzeń są w bijekcji z elementami grupy $H^2(G; Z(N))$. Jak zauważyliśmy wcześniej, każde rozszerzenie zadaje skręcony diagram grup $\mathcal{F} : \mathcal{B}G \longrightarrow \mathrm{Gr}$, taki że $\mathcal{F}(*) = N$. Zatem $\mathcal{F}$ wyznacza "słabe" działanie grupy G na N, a co za tym idzie funktor $G \longrightarrow \mathrm{Out}(N)$. Łatwo sprawdzić, że funktor ten jest równy μ.

Niech Rep oznacza kategorię, której obiektami są grupy a morfizmy są reprezentacjami, to znaczy $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Rep}}(G,H) := \mathrm{Hom}(G,H)/\,\mathrm{Inn}(H)$. Zauważmy, że dowolny kompleks grup złożony z projekcją $\mathrm{Gr} \longrightarrow \mathrm{Rep}$ daje funktor do kategorii Rep.

Udowodniliśmy, że każdy funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Rep}$ wynacza funktor $Z_F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}b$ będący "centrum" funktora F. Ma on następującą własność: dla każdego obiektu $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ grupa $Z_F(c)$ jest podgrupą centrum grupy $F(c)$. Jeśli $\mathcal{C} = \mathcal{B}G$ to funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Rep}$ wyznacza homomorfizm $\mu : G \longrightarrow \mathrm{Out}(N)$, natomiast jego centrum $Z_F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}b$ utożsamimy z homomorfizmem $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(Z(N))$.

Niech $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Rep}$ będzie funktorem. Czy istnieje kompleks grup, który jest podniesieniem F i jak wiele takich podniesień istnieje?

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Gr} \arrow[d] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathrm{Rep} \end{tikzcd}$$

Odpowiedź wyrazimy w terminach kohomologii małej kategorii $\mathcal{C}$ o współczynnikach w funktorze $Z_F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}b$

Twierdzenie 1 *Każdemu funktorowi $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Rep}$ można przypisać pewien element $o(F) \in H^3(\mathcal{C}; Z_F)$, który jest równy zero wtedy i tylko wtedy gdy funktor F podnosi się do pewnego kompleksu grup $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$. Klasy równoważności takich podniesień są w bijekcji z elementami grupy $H^2(\mathcal{C}; Z_F)$.*

Jeśli $\mathcal{C}$ jest kategorią zdefiniowaną przez grupę G, to powyższe twierdzenie sprowadza się do klasycznego przypadku i otrzymujemy:

Wniosek 2 *Klasy równoważności rozszerzeń $N \rightarrowtail \widetilde{G} \twoheadrightarrow G$ są w bijekcji z klasami równoważności kompleksów grup $\mathcal{F} : \mathcal{B}G \longrightarrow \mathrm{Gr}$, spełniającymi $\mathcal{F}(*) = N$.*

Wniosek ten uogólniliśmy w następujący sposób:

Twierdzenie 3 *Niech $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ będzie kompleksem grup. Istnieje wzajemnie jendoznaczna odpowiedniość pomiędzy klasami równoważności epimorfizmów*

$$\varphi : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$$

a klasami równoważności kompleksów grup zdefiniowanych na kategorii klasyfikującej kompleksu grup $\mathcal{G}$;

$$\mathcal{F}_\varphi : \mathcal{B}\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Gr}$$

Jako wniosek z Twierdzenia 1 oraz Twierdzenia 3 otrzymujemy następujące

Twierdzenie 4 *Niech $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ będzie kompleksem grup i niech $F : \mathcal{B}\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Rep}$ będzie dowolnym funktorem. Jeśli pewien element $o(F) \in H^3(\mathcal{B}\mathcal{G}; Z_F)$ jest równy zero wówczas istnieje epimorfizm $\varphi : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ taki, że odpowiadający mu kompleks grup $\mathcal{F}_\varphi : \mathcal{B}\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ jest podniesieniem F. Ponadto, zbiór klas równoważności takich podniesień jest w bijekcji z elementami grupy $H^2(\mathcal{B}\mathcal{G}; Z_F)$.*

Rozszerzenia grup a rozszerzenia kompleksów grup Jeśli $\varphi : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ jest epimorfizmem kompleksów grup nad $\mathcal{C}$, to dla każdego obiektu $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ otrzymujemy rozszerzenie grup lokalnych $N_c \rightarrowtail \widetilde{\mathcal{G}}(c) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(c)$. Powstaje więc naturalne pytanie; czy można zdefiniować kompleks grup $\mathcal{N} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$, który jest "jądrem" φ, czyli $\mathcal{N}(c) = N_c$ dla każdego obiektu $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$? Odpowiedź okazuje się być dość skomplikowana, mianowicie może zdarzyć się, że taki kompleks grup nie istnieje.

Zastanówmy się nad tym co chcemy uważać za jądro takiego epimorfizmu. Powinien to być kompleks grup $\mathcal{N} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathrm{Gr}$ wraz z homomorfizmem $\phi : \mathcal{N} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ nad $F : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ takie, że złożenie $\varphi \circ \phi$ jest homomorfizmem trywialnym. Co to znaczy, że złożenie homomorfizmów kompleksów grup $\mathcal{N} \xrightarrow{\phi} \widetilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ jest trywialne? Możliwe są dwie interpretacje. Pierwsza z nich to taka, że homomorfizm $\varphi \circ \phi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{G}$ jest trywialny na grupach lokalnych, czyli dla każdego $c' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ homomorfizm lokalny $(\varphi \circ \phi)_{c'} : \mathcal{N}(c') \longrightarrow \mathcal{G}(F(c'))$ jest trywialny.

Druga interpretacja wykorzystuje pojęcie grupy podstawowej kompleksu grup. Jak zauważyliśmy, kompleks grup konstruujemy w celu przedstawienia pewnej grupy jako uogólnionego produktu wolnego jej podgrup, używając do tego pojęcia grupy podstawowej. Udowodniliśmy następujące

Stwierdzenie 5 *Epimorfizm kompleksów grup* $\varphi : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ *nad* $\mathcal{C}$ *indukuje epimorfizm grup podstawowych* $\varphi_* : \pi_1(\widetilde{\mathcal{G}}, c) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}, c)$*.*

Powstaje naturalne pytanie, czy możemy przedstawić jądro epimorfimzu φ_* jako grupę podstawową pewnego kompleksu grup, tak by jego grupy lokalne były w jakiś sposób związane z epimorfizmem φ? Do odpowiedzi na to pytanie powrócimy w dalszej części naszych rozważań.

Druga możliwa interpretacja trywialności homomorfizmu $\varphi \circ \phi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{G}$ jest taka, że indukowany homomorfizm grup podstawowych $(\varphi \circ \phi)_* : \pi_1(\mathcal{N}, c') \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}, F(c'))$ jest trywialny. Podsumowując, homomorfizm $\varphi \circ \phi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{G}$ może być:

★ trywialny na grupach lokalnych

★★ trywialny na grupach podstawowych

Następujące przykłady "rozszerzeń" kompleksów grup spełniają jedną lub obie te własności:

Przykład 6 Jeśli rozszerzenie grup $N \overset{\phi}{\rightarrowtail} \widetilde{G} \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} G$ potraktujemy jako ciąg odwzorowań kompleksów grup to złożenie $\varphi \circ \phi$ jest trywialne na grupach lokalnych oraz na grupach podstawowych tych kompleksów grup.

Przykład 7 Niech $\mathcal{F} : \mathcal{B}G \longrightarrow \mathrm{Gr}$ będzie kompleksem grup stowarzyszonym z rozszerzeniem $N \rightarrowtail \widetilde{G} \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} G$. Istnieje homomorfizm $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \widetilde{G}$ nad $\mathcal{B}G \longrightarrow *$ kompleksów grup, który jest włożeniem na grupach lokalnych. Dostajemy ciąg homomorfizmów postaci

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \widetilde{G} \xrightarrow{\varphi} G$$

Złożenie $\varphi \circ \psi$ jest trywialne na grupach lokalnych. Indukowany ciąg homomorfizmów grup podstawowych jest równy $\widetilde{G} \xrightarrow{=} \widetilde{G} \xrightarrow{\varphi} G$.

Przykład 8 Niech $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ będzie diagramem grup $1 \longleftarrow 1 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ na kategorii $\mathcal{C} = * \longleftarrow * \longrightarrow *$. Jest to graf grup i stowarzyszone z nim drzewo Bassa-Serre'a jest geometryczną realizacją małej kategorii $\mathcal{D}$ postaci

$$\begin{tikzcd}
* & & \\
& * \arrow[ul] \arrow[dr] & \\
* & * \arrow[l] \arrow[r] & * \\
& * \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
* & &
\end{tikzcd}$$

Oczywiście $\mathbb{Z}_3$ działa na kategorii $\mathcal{D}$, a ilorazem tego działania jest kategoria $\mathcal{C}$. Rozważmy następujący ciąg homomorfizmów grafów grup:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 & & & & & & & & \\
& 1 \arrow[ul] \arrow[dr] & & & & & & & \\
\mathbb{Z}_2 & 1 \arrow[l] \arrow[r] & 1 \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{Z}_2 & 1 \arrow[l] \arrow[r] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r, "\varphi"] & 1 & 1 \arrow[l] \arrow[r] & \mathbb{Z}_3 \\
& 1 \arrow[ur] \arrow[dl] & & & & & & & \\
\mathbb{Z}_2 & & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Grupy podstawowe powyższych diagramów grup są izomorficzne z granicami prostymi tych diagramów. Zatem indukowany ciąg homomorfizmów grup podstawowych ma następującą postać;

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \rightarrowtail \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_3$$

i jest dokładny. Ponadto złożenie $\varphi \circ \phi$ jest trywialne na grupach lokalnych.

Jądro epimorfimzu kompleksów grup po raz pierwszy Dla każdego epimorfizmu $\widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ nad $\mathcal{C}$ znajdziemy kompleks grup wraz z homomorfizmem $\mathcal{F} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$, uniwersalne ze względu na własność $\bigstar$ zdefiniowaną powyżej.

Przypomnijmy, że dla każdego kompleksu grup $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ istnieje projekcja $p : \mathcal{BG} \longrightarrow \mathcal{C}$ z jego kategorii klasyfikującej na $\mathcal{C}$, która jest bijekcją na zbiorze obiektów, możemy zatem je utożsamić. Zgodnie z Twierdzeniem 3, klasy równoważności epimorfizmów kompleksów grup $\varphi : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ są w bijekcji z klasami równoważności kompleksów grup $\mathcal{F}_\varphi : \mathcal{BG} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ na kategorii klasyfikującej $\mathcal{G}$. Udowodniliśmy, że dla każdego obiektu $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{BG}$ zachodzi

$$\mathcal{F}_\varphi(c) = \ker\big(\varphi_c : \widetilde{\mathcal{G}}(c) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(c)\big)$$

Ponadto pokazaliśmy nastepujące

Stwierdzenie 9 *Niech $\varphi : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ będzie epimorfizmem kompleksów grup nad $\mathcal{C}$, a $\mathcal{F}_\varphi : \mathcal{BG} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ stowarzyszonym z nim kompleksem grup. Istnieje homomorfizm kompleksów grup $\psi : \mathcal{F}_\varphi \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ nad $p : \mathcal{BG} \longrightarrow \mathcal{C}$ taki, że złożenie $\varphi \circ \psi$ jest trywialne na grupach lokalnych. Ponadto dla każdego homomorfizmu $\psi' : \mathcal{F}' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ nad $p' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ takiego, że $\varphi \circ \psi'$ jest trywialne na grupach lokalnych, istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\bar{\psi}' : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}_\varphi$ nad $\bar{p}' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{BG}$ taki, że $\psi \circ \bar{\psi}' = \psi'$ nad $p \circ \bar{p}' = p'$.*

Zatem $\mathcal{F}_\varphi$ jest "jądrem" epimorfizmu φ. Dla każdego obiektu $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{BG}$ mamy następujące roszerzenie grup lokalnych

$$\mathcal{F}_\varphi(c) \rightarrowtail \widetilde{\mathcal{G}}(c) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(c)$$

jednak grupa podstawowa $\mathcal{F}_\varphi$ jest izomorficzna z grupą podstawową skręconego diagramu grup $\widetilde{\mathcal{G}}$.

Tak więc znaleźliśmy odpowiednik kategoryjnego jądra dla epimorfizmu kompleksów grup.

Jądro epimorfizmu kompleksów grup po raz drugi Pokazaliśmy, że dla każdego kompleksu grup $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ istnieje mała kategoria $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, która jest odpowiednikiem drzewa Bassa-Serra grafu grup. W szczególności istnieje działanie grupy podstawowej $\pi_1(\mathcal{G}, c)$ na kategorii $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, a ilorazem tego działania jest $\mathcal{C}$. Niech $F : \mathcal{D}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{C}$ oznacza stowarzyszoną z tym działaniem projekcję.

Udowodniliśmy następujące

Twierdzenie 10 *Dla każdego epimorfizmu kompleksów grup $\varphi : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ nad $\mathcal{C}$ istnieje kompleks grup $\mathcal{K}_\varphi : \mathcal{D}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ wraz z homomorfizmem $\phi : \mathcal{K}_\varphi \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ nad $F : \mathcal{D}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{C}$ takie, że*

1. $\mathcal{K}_\varphi(d) \simeq \ker(\varphi_{F(d)} : \widetilde{\mathcal{G}}(F(d)) \longrightarrow \mathcal{G}(F(d)))$ *dla każdego obiektu* $d \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$
2. $\pi_1(\mathcal{K}_\varphi, d) \simeq \ker(\varphi_* : \pi_1(\widetilde{\mathcal{G}}, F(d)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}, F(d)))$
3. *dla dowolnej kategorii $\mathcal{D}'$ i homomorfizmu $\phi' : \mathcal{K}' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ nad funktorem $F' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{C}$ takiego, że $\varphi \circ \phi'$ jest trywialne na grupach lokalnych i podstawowych, istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\bar{\phi}' : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}_\varphi$ nad $\bar{F}' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ taki, że $\phi \circ \bar{\phi}' = \phi'$ nad $F \circ \bar{F}' = F'$*

Homomorfizm $\phi : \mathcal{K} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ jest uniwersalny ze względu na własności ★ i ★★. Zatem $\mathcal{K}_\varphi : \mathcal{D}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathrm{Gr}$ jest "jądrem" epimorfizmów φ i φ_*, a otrzymany ciąg

$$\mathcal{K}_\varphi \rightarrowtail \widetilde{\mathcal{G}} \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{G}$$

jest "rozszerzeniem" kompleksów grup. Dla każdego obiektu $d \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ rozszerzenie to wyznacza rozszerzenie grup lokalnych

$$\mathcal{K}_\varphi(d) \rightarrowtail \widetilde{\mathcal{G}}(F(d)) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(F(d))$$

Ponadto indukowany ciąg grup podstawowych

$$\pi_1(\mathcal{K}_\varphi, d) \rightarrowtail \pi_1(\widetilde{\mathcal{G}}, F(d)) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathcal{G}, F(d))$$

jest dokładny.

Literatura

[B-H] Bridson, M.R.; Haefliger, A.: *Metric spaces of non-positive curvature;* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 319. Springer-Verlag, Berlin, (1999)

[B-K] Bousfield, A.K.; Kan, D.M.; *Homotopy limits, completions and localizations;* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1972)

[B1] Brown, K.S.: *Buildings;* Group theory from a geometrical viewpoint, 26 March-6 April 1990, ICTP, Trieste, World Scientific (1991), 254-295

[B2] Brown, K.S.: *Cohomology of groups;* Springer-Verlag, New York, (1982)

[Br] Brown, P.R.: *A simple construction of virtually free abelian triangles of finite groups;* Topology and its Applications 110 (2001), 25-28

[C] Corson, J.M.: *Complexes of groups;* Proc. of the London Math. Soc., 1992, s3-65(1), 199-224

[D] Dwyer, W.G.: *Advanced course on classifying spaces and cohomology of groups;* Notes of the course, 27 May-2 June 1998, Centre de Recerca Matematica Bellaterra (Spain)

[F] Filar, T.: *Nakrycia kompleksów grup;* praca magisterska, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, (2009)

[Fa] Farjoun, E.D.: *Fundamental group of homotopy colimits;* Advanced in Mathematics 182, (2004), 1-27

[G-Z] Gabriel, P.; Zisman, M.: *Calculus of fractions and homotopy theory;* Springer-Verlag, New York, (1967)

[H1] Haefliger, A.: *Complexes of groups and orbihedra;* Group theory from a geometrical viewpoint, 26 March-6 April 1990, ICTP, Trieste, World Scientific (1991), 504-540

[H2] Haefliger, A.: *Extension of complexes of groups;* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 42, 1-2, (1992), 275-311

[J-S] Jackowski, S.; Słomińska, J.: *G-functors, G-posets and homotopy decompositions of G-spaces;* Fund. Math. 169 (2001), 249-287

[L-T] Lim, S.; Thomas, A.: *Covering theory for complexes of groups;* J. Pure Appl. Algebra 212 (2008), 1632-1663

[Q] Quillen, D.: *Higher algebraic K-theory;* Algebraic K-theory, Battelle Institute Conf., 1972, Springer, Lecture Notes in Mathematics, 341 (1973), 77-139

[R] Robinson, D.J.S.: *A course in the theory of groups;* Springer-Verlag, New York, (1996)

[S] Serre, J.P.: *Trees;* Springer-Verlag, Berlin, (1980)

[St] Stallings, J.R.: *Non-positively curved triangles of groups;* Group theory from a geometrical viewpoint, 26 March-6 April 1990, ICTP, Trieste, World Scientific (1991), 491-503

[T] Thomason, R.W.: *Homotopy limits and colimits in the category of small categories;* Proc. Camb. Phil. Soc. 85 (1979), 91-109