Asymptotyka rozwiązań meromorficznych równań różniczkowych i funkcji tworzących dla wielokrotnych wartości zeta

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Michał Zakrzewski

25 lutego 2011

Tematem tej pracy jest badanie własności asymptotycznych równań różniczkowych zwyczajnych[1]

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t,\lambda)\,\frac{d^i x(t,\lambda)}{dt^i} \;=\; 0, \tag{2}$$

gdzie $x \in \mathbb{C}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ jest parametrem oraz układów równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{x}(t) \;=\; A(t,\lambda)\,x(t), \tag{3}$$

gdzie $x \in \mathbb{C}$, $A \in \mathrm{end}(\mathbb{C}^n)$ i $\dot{x}$ oznacza pochodną wektora x ze względu na 'czas', który zazwyczaj będzie oznaczany przez t. Ogólnie $t \in S$, gdzie S jest pewnąpowierzchnią Riemanna. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że Wyrazy macierzy A są funkcjami meromorficznymi $A \in \mathrm{end}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}(t)$. Dodatkowo zakladać będziemy, że zarówno szukane funkcje, jak i współczynniki mogą zależeć od parametru λ. Typowym przykładem będzie równanie

$$(T + \lambda^{|p|})x \;=\; 0, \tag{4}$$

gdzie $p = (p_1, ..., p_k) \in \mathbb{Z}^k$, $|p| = p_1 + ... + p_k$ oraz

$$T \;:=\; (1-t)\partial_t(t\partial_t)^{p_1-1}...(1-t)\partial_t(t\partial_t)^{p_k-1}, \tag{5}$$

przy odpowiednich zalożeniach na $0 < p_j \in \mathbb{Z}$, przy czym $p_k \geq 2$. Jest ono związane z funkcją tworzącą tzw. **wielokrotne wartości zeta**, które definiujemy jako sumy szeregów postaci

$$\zeta(p_1, ..., p_k) \;:=\; \sum_{0<n_1<...<n_k} n_1^{-p_1} \ldots n_k^{-p_k}. \tag{6}$$

[1] W dalszym ciągu, dla uproszczenia notacji, będziemy często pisać

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,\frac{d^i x}{dt^i}\,, \qquad \text{lub} \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i\,\partial_t^i x\,, \qquad \text{zamiast} \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i(t,\lambda)\,\frac{d^i x(t,\lambda)}{dt^i} \tag{1}$$

oraz $\dot{x} = A\,x$, zamiast $\dot{x}(t) \;=\; A(t,\lambda)\,x(t)$.

W pracy [55] jest podana konstrukcja funkcji tworzącej dla MZV, która jest rozwiązaniem zagadnienia własnego (4) operatora (5). Dokładniej: jeśli$x(t,\lambda)$ jest rozwiązaniem (unormowanym i holomorficznym w zerze) równania $(T+\lambda)x=0$, to wówczas

$$x(1,\lambda) \;=\; \sum_{m\geq 0}(-1)^m\zeta(\{p_1,...,p_k\}^m)\lambda^{|p|m}, \tag{7}$$

gdzie (powtórzenie ciągu $\{p_1,...,p_k\}$ występuje m razy)

$$\zeta(\{p_1,...,p_k\}^m) := \zeta(p_1,...,p_k,...,p_1,...,p_k). \tag{8}$$

Liczbę $|p|$ we wzorze (6) będziemy nazywać **wagą** wielokrotnej wartości zeta (lub ogólniej polilogarytmu), zaś mianem jej (jego) **głębokości** określimy wartość k.

Naturalną sytuacją, w której pojawiają się inne, podobne równania Picarda-Fuchsa jest badanie własności cykli algebraicznych w rozmaitościach zespolonych. Jest to związane z tzw. algebrą okresów, których szczególnym przypadkiem są właśnie wielokrotne wartości zeta. Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w [37] oraz w pracach Goncharova [22] i [23] oraz Goncharova i Manina [25], gdzie szczególny nacisk położony jest na rozwijanie odpowiedniej teorii motywicznej.

Warto wspomnieć, że wielokrotne wartości zeta pojawiły się po raz pierwszy w pracach Leonarda Eulera. Uzyskał on min. wzory na wartości funkcji ζ w dodatnich liczbach parzystych, wykorzystując rozwinięcie funkcji sinus w szereg potęgowy oraz, z drugiej strony, przedstawienie jej w postaci iloczynu. Zachodzi

$$\begin{aligned} f_2(\lambda) &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\zeta(\{2\}^n)\lambda^{2n} = \prod\left(1-\frac{\lambda^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{\sin\pi\lambda}{\pi\lambda} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(\pi\lambda)^{2n}}{(2n+1)!}, \end{aligned} \tag{9}$$

skąd, po porównaniu współczynników, otrzymujemy

$$\zeta(\{2\}^n) \;=\; \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}. \tag{10}$$

Odnotujmy jeszcze inną funkcję tworzącą:

$$f_4(\lambda) \;=\; \prod\left(1-\frac{\lambda^4}{n^4}\right) = \prod\left(1-\frac{\lambda^2}{n^2}\right)\prod\left(1+\frac{\lambda^2}{n^2}\right) \;=\; \frac{\sin\pi\lambda}{\pi\lambda}\cdot\frac{\sinh\pi\lambda}{\pi\lambda}. \tag{11}$$

Z rozwinięcia (9) można też obliczyć $\zeta(2m)$.Mamy na przykład

$$\zeta(2)^2 \;=\; \sum_{k,n>0} n^{-2}k^{-2} = \left(\sum_{k>n}+\sum_{k=n}+\sum_{k<n}\right)n^{-2}k^{-2} \;=\; \zeta(4)+2\zeta(2,2). \tag{12}$$

Podobne relacje, które wynikają ze wzoru włączeń i wyłączeń z kombinatoryki, można podać także dla wielu innych wielokrotnych wartości zeta.

W korespondecji z Goldbachem, Euler podał także inne, nietrywialne[2] relacje na wielokrotne wartości zeta z dwoma argumentami.

Należy dodać, że wielokrotne wartości zeta są obecnie przedmiotem intensywnego badania, przy użyciu bardzo różnorodnych metod. Warto tu przytoczyć min. prace [8], [9], [13], [13], [22], [23], [28], [41], [37], [43], [49], [54] oraz [29].

Jednym ze sposobów badania asymptotyki (układów) równań różniczkowych zwyczajnych jest tzw. **metoda WKB** (lub **aproksymacja WKB**). Polega ona na przedstawieniu hipotetycznego rozwiązania równania (1).

$$x(t) \;=\; \lambda^{\alpha} e^{\lambda S(t)} \sum_{k\geq 0} \psi_k(t)\lambda^{-k}. \tag{15}$$

Podstawienie tego wyrażenia do równania, prowadzi do algebraicznego różniczkowego równania na 'działanie' S oraz rodziny 'prostych' równań na współczynniki ψ_n. Zilustrujemy metodę WKB następującym przykładem.

Przykład 0.1 *Rozważmy zagadnienie własne* $(T + \lambda^{|p|})\phi \;=\; 0$ *dla operatora (5), gdzie* $|p| = p_1 + ... + p_k$. *Stosując metodę WKB, otrzymujemy następujące równanie na działanie:*

$$t^{|p|-k}(1-t)^k \left[\dot{S}(t)\right]^{|p|} + 1 \;=\; 0. \tag{16}$$

Nie zwracając uwagi na dalsze wyrazy asymptotyki i przechodząc z t do granicy $t = 1$ *otrzymujemy wzór*

$$S(1) \;\;=\;\; \mu^j \int_0^1 (1-u)^{1/k-1} u^{(k-1)/k-1}\, du \;=\; B\left(\frac{1}{k}, \frac{k-1}{k}\right), \tag{17}$$

gdzie $B(x, y)$ *oznacza funkcję Beta Eulera. Ze wzoru*

$$B(x, y) \;=\; \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(y + x)} \tag{18}$$

oraz z formuły Eulera na odbicie dla funkcji Γ, *otrzymujemy*

$$S(1) \;=\; \frac{\pi}{\sin \pi/k}. \tag{19}$$

Stąd wynika, że funkcje generujące MZV powinny mieć w pierwszym przybliżeniu postać

$$\sum_m \mu^m \exp\left(\mu^m \frac{\pi x}{\sin \pi/k}\right), \tag{20}$$

[2] Euler uzyskał na przykład wzory

$$\zeta(1, m) \;=\; m\,\zeta(m+1) - \sum_{j=1}^{m-2} \zeta(j+1)\zeta(m-j), \tag{13}$$

gdzie $m > 2$ oraz

$$\zeta(1, 2) \;=\; \zeta(3), \tag{14}$$

które zostały uogólnione dopiero w drugiej połowie XX wieku.

gdzie μ oznacza tu pierwiastek pierwotny z jedności stopnia $|p|$.

Pozwala to na przykład uzasadnić fakt, iż we wzorze Broadhursta[3] *mamy do czynienia z parametrem przeskalowanym o $\sqrt{2}$ w stosunku do regularnego rozwiązania równania na MZV związanej z operatorem $(1-t)\partial_t(t\partial_t)^3$.*

Warto odnotować w tym miejscu, że w przypadku równania na funkcję tworzącą ciągu $\zeta(\{2\}^n)$, metody asymptotyczne pozwalają uzyskać wzory $\zeta(\{2\}^n) = \pi^{2n}/(2k+1)!$. W przypadku $\zeta(\{p\}^n)$, gdzie $p > 2$ jest liczbą pierwszą, podobne wzory nie są znane i nie wiadomo nawet, czy liczby te są przestępne, ale wzór (20) zachodzi dla każdego k. Co więcej,

$$\frac{\pi}{\sin \pi/k} \in \overline{\mathbb{Q}}(\pi), \tag{22}$$

skąd widać, że w pierwszym asymptotycznym przybliżeniu, funkcja tworząca ciągów wielokrotnych wartości zeta ma zawsze współczynniki[4] postaci $\pi^n \times q$, gdzie q jest liczbą algebraiczną.

W analizie rodziny równań (5) istotną rolę może odgrywać tzw. **zjawisko Stokes'a**, które w przypadku funkcji tworzących związanych z $\zeta(2)$ oraz $\zeta(3)$ zostało opisane w pracach [51] i [53].

Omówimy teraz pokrótce zawartość poszczególnych rozdziałów i podstawowe wyniki tej rozprawy. Przed przejściem do szczegółowego streszczenia kolejnych rozdziałów, warto odnotować, że w trzech Dodatkach omówiona została aproksymacja fazy stacjonarnej (Dodatek A), wzory całkowe dla funkcji hipergeometrycznych i całki Drinfelda-Kontsevicha (Dodatek B) oraz podstawowe fakty o teorii meromorficznych równań różniczkowych zwyczajnych (Dodatek C).

W Rozdziale 1 rozważamy równanie

$$(1-t)\partial_t\, t\partial_t x + \lambda^2 x \;=\; 0, \tag{23}$$

związane z funkcją tworzącą f_2, ciągu $\zeta(\{2\}^n)$. Okazuje się, że funkcja hipergeometryczna

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\lambda, -\lambda\\ 1\end{matrix}\;\middle|\; t\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n(-\lambda)_n}{(n!)^2}t^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{Li}_{\{2\}^n}(t)\lambda^{2n} \tag{24}$$

jest funkcją tworzącą dla polilogarytmów $\mathrm{Li}_{\{2\}^n}(t)$, a jej wartość w $t=1$ jest funkcją tworzącą $f_2(\lambda)$ dla wielokrotnych wartości zeta $\zeta(\{2\}^n)$.

W celu zbadania własności tego równania, stosujemy metody asymptotyczne, jak tzw. aproksymacja WKB, operatory Stokes'a oraz aproksymacja fazy stacjonarnej. Z

[3]Wzór

$$f_{1,3}(\sqrt{2}\lambda) \;=\; \frac{\sin\pi\lambda}{\pi\lambda}\frac{\sinh\pi\lambda}{\pi\lambda} \;=\; f_4(\lambda), \tag{21}$$

gdzie f_2, f_4 i $f_{1,3}$ oznaczają funkcje tworzące ciągów, odpowiednio $\zeta(\{2\}^n)$, $\zeta(\{4\}^n)$ oraz $\zeta(\{1,2\}^n)$, został zaproponowany przez D. Zagiera, a udowodniony przez D. Broadhursta. Patrz np. [37].

[4]Zachodzi nawet silniejszy fakt: współczynniki funkcji tworzącej są elementami $\dot{\mathbb{Q}}(\pi) \subset \overline{\mathbb{Q}}(\pi)$, gdzie $\dot{\mathbb{Q}}$ oznacza granicę odwrotną systemu ciał cyklotomicznych.

wykorzystaniem tego aparatu, podajemy dwa nowe dowody słynnego wzoru Eulera $\zeta(2) = \pi^2/6$. Patrz Wniosek 1.3.1 i Twierdzenie 1.4.1 w [50].

W Rozdziale 2 zajmujemy się analizą równania

$$(1-t)\partial_t\,(t\partial_t)^2 x + \lambda^3 x \;=\; 0, \tag{25}$$

którego analityczne w otoczeniu zera rozwiązanie $x_1(t,\lambda) = 1 + O(t)$, ewaluowane w punkcie $t = 1$, wyznacza funkcję tworzącą f_3 ciągu $\zeta(\{3\}^n)$, analogicznie jak w Rozdziale 1. Stosujemy następnie aproksymację WKB do badania bazy rozwiązań asymptotycznych powyższego równania hipergeometrycznego, dla $\lambda \sim \infty$ i obliczamy odpowiednie operatory Stokes'a. W kolejnym etapie dowodzi się, iż funkcja f_3, przy $\lambda \sim \infty$, także wyraża sie za pomocą odpowiednich rozwinięć WKB, podlegających zjawisku Stokes'a. Stąd otrzymujemy, że f_3 spełnia liniowe równanie różniczkowe szóstego rzędu, z nieregularnym punktem osobliwym w nieskończoności. Patrz Twierdzenie 2.4.1 w [50].

Rozdział 3 poświęcony jest badaniu układów liniowych równań różniczkowych

$$\dot{x}(t) \;=\; A(t,\lambda)\,x(t), \tag{26}$$

gdzie $x \in \mathbb{C}^n$, dla zespolonego parametru $\lambda \sim \infty$. Dowodzimy istnienia analogonów operatorów Stokes'a dla odpowiednich rozwinięć WKB (Twierdzenie 3.2.1 w [50]). Te macierze w ogólności mogą zależeć od parametru, jednak przy pewnych naturalnych założeniach, można wykazać, że mają one wyrazy stałe (Twierdzenie 3.3.1 w [50]). W dalszej części dowodzimy uogólnienie twierdzenia
Hukuhary-Levelta-Turritina o formalnej redukcji układu w otoczeniu nieregularnego punktu osobliwego do postaci normalnej, z rozgałęzioną reparametryzacją zmiennej czasowej (Twierdzenie 3.4.1 w [50]). W ostatniej części rozdziału, otrzymane wyniki są zastosowane do pewnych równań hipergeometrycznych, związanych z funkcjami tworzącymi wielokrotne wartości zeta.

Literatura

[1] Abramowitz, M., Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, IX ed., New York: Dover, 1972.

[2] W. Balser, *From divergent power series to analytic functions.* Lect. Notes in Math., vol. 1582, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[3] G. Bateman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, tom I, Mc Graw Hill Book, C., New York, 1953.

[4] G. Bateman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, tom II, Mc Graw Hill Book, C., New York, 1953.

[5] Beukers F., Peters C. A. M., *A family of $K3$ surfaces and $\zeta(3)$*. J. reine angew. Math. 351 (1984) 42 - 54,

[6] G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain differential equations containing a parameter.* Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), 219 - 230.

[7] G. D. Birkhoff, *Quantum mechanics and asymptotic series*, Bull. Amer. Math. Soc. 32 (1933), 681 - 700.

[8] J. M. Borwein, D. M. Bradley and D. J. Broadhurst, *Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums: A compendium of results for arbitrary k*, Electronic J. Combinat. 4 (1997), No 2. # R5.

[9] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, P. Lisonêk, *Combinatorial aspects of multiple zeta values*, Electronic J. Combinat. 5 (1998), # R38.

[10] Broadhurst D. J., Kreimer D. *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops.* Physics Lett. B 393 (1997), 403-412,

[11] Broadhurst D. J. *On the enumeration of irreducible k-fold Euler sums and their roles in knot theory and field theory.* preprint.

[12] Buslaev, V. S., *The generating integral and the canonical Maslov operator in the WKB method.* Funkt. Anal. i Ego Pril., 3:3 (1969), 17-31 (po rosyjsku). Wersja angielska: J. Funct. Anal. Appl., 3 (1969), 181-193.

[13] Cresson, Fischler, Rivoal, *Phénomenes de symétrie dans des formes linéaires en polyzetas.* J. reine angew. Math. 617 (2008), str. 109 - 152.

[14] Cresson, Fischler, Rivoal, *Séries hypergéométriques multiples et polyzetas.* Bull. SMF 136.1 (2008), str. 97 - 145.

[15] Euler L., *Meditationes circa singulare serierum genus.* Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. 20 (1775), 140-186. Reprinted in Opera Omnia, ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin, 1927, str. 217-267

[16] Euler L., *Opera Omnia.* Ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin, 1927.

[17] M. B. Fedoryuk, *Asymptotic analysis. Linear ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1993

[18] Gauss, Carl Friedrich, *Disquisitiones generales circa seriam infinitam* $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)} + etc.$ Commentationes societatis regiae scientarum Gottingensis recentiores (Gottingen) 2 (1813).

[19] Gelfand I. M., Graev M. I., *Holonomic systems of equations and series of hypergeometric type.* Doklady Akad. Nauk SSSR 295 (1987), 14-19.

[20] Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V., *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions.* Adv. in Math 84 (1990), 255-271.

[21] A. A. Glyutsuk, *Stokes operators via limit monodromy of generic perturbation.* J. Dynam. Control Syst. 5 (1999), 101 - 135.

[22] Goncharov A.B, *Multiple ζ-values, Galois groups, and geometry of modular varieties.* European Congress of Mathematics (Barcelona, 2000), Vol. I, Progr. Math. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, str. 361-392

[23] Goncharov A.B, *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1^{(l)}(P^1 - (\{0, \infty\} \cup \{\mu_N\}))$. Duke Math. J. 110 (2001), 397-487

[24] Goncharov A.B, *Polylogarithms in arithmetic and geometry.* Proc. ICM, Zürich, Vol. I, Birkh¨auser, 1994, str. 374–387.

[25] Goncharov A.B i Manin Yu. I. *Multiple* ζ*-motives and moduli spaces* $M_{0,n}$. Compositio Math. 140 (2004), 1-14

[26] Guillemin, V., Sternberg, S. *Geometric Assymptotics.* Mathematical Surveys and Monographs Nr 14. Amer. Math. Soc., Providence, 1990.

[27] Heading, J. M. A., *An introduction to phase-integral methods* J. Wiley & Sons, New York, 1977.

[28] Hoffman, M. E., *Quasi-Shuffle product.* J. Alg. Comb. 11 (2000), 49 - 68.

[29] Hoffman, M. E., *Referencje i spis wybranej literatury na temat wielokrotnych wartości zeta.* Dostępny na stronie: http://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html

[30] Horn, J. *Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen.* Math. Ann. 105 (1935), 381–407.

[31] Hukuhara, M. *Sur les points singuliers des équations différentielles lineaires. II.* J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 5 (1937), 123 - 166.

[32] Ilyashenko Yu., Yakovenko S., *Lectures in analytic differential equations.* Graduate Texts in Math. 86, Amer. Math. Soc., Providence, 2008.

[33] H. Jeffreys, *On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order.* Proc. London Math. Soc. 23 (1924), 428-436.

[34] Katz, N. *On the calculation of some differential Galois groups.* Invent. Math., Vol. 87, (1987), 13 - 61.

[35] M. Kohno, *Global analysis in linear differential equations.* Mathematics in Applications, Kluwer Academic Publications, Dordrecht, 1999.

[36] Kontsevich, M. *Vassiliev's Knot Invariants* Adv. Soviet Math. 16, Part 2, 1993, str. 137 - 150.

[37] Kontsevich, M. and Zagier D., *Periods* w "Mathematics Unlimited - 2001 and beyound", Springer, Berlin 2001, str. 771 - 808

[38] Langer, R. E., *On the asymptotic solutions of differential equations with an application to the Bessel functions of large complex order.* Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), 447 - 480.

[39] Levelt, A. H. M., *Jordan decomposition for a class of singular differential operators.* Arkiv Mat. 13 (1975), 1 – 27.

[40] Maslov, V. P., *Theory of pertubations and asymptotic methods.* Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1965 (po rosyjsku).

[41] H. N. Minh, M. Petitot and J. van der Hoeven, *Shuffle algebra and polylogarithms.* in: "Formal Series and Algebraic Combinatorics, Toronto 98", Discrete Mah. 225 (2000), 217 - 230.

[42] H. N. Minh, M. Petitot and J. van der Hoeven, *Shuffle algebra and polylogarithms*, in: 'Formal Series and Algebraic Combinatorics, Toronto 98', Discrete Mah. 225 (2000), 217 - 230.

[43] T. Rivoal, *Hypergeometric constructions of rational approximations for (multiple) zeta values.* Algebraic and analytic aspects of zeta functions and L-functions, MSJ Mem. 21, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2010), str. 167–183.

[44] Schiff L. I., *Quantum mechanics.* McGraw-Hill Book Comp., New York, 1968.

[45] Stokes G. G., *On the discontinuity of arbitrary constant that appear as multipliers of semi-convergent series.* Acta Math. 26 (1902), 393 - 397.

[46] Turritin T., *Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary differential equations containing a parameter,* z "Contributions to the theory of nonlinear oscillations", Annals of Mathematical Studies 29, Princeton University Press, Princeton, 1952, str. 81 - 116.

[47] Turritin T., *Convergent solutions of ordinary differential equations in the neighborhood of an irregular singular point.* Acta Math. 93 (1955), 27 - 66.

[48] Wasow, W. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations.* Dover Phoenix Editions, 2002.

[49] Zagier D., *Values of zeta functions and their applications.* in First European Congress of Mathematics (Paris, 1992), Vol. II, A. Joseph et. al. (eds.), Birkhäuser, Basel, 1994, str. 497-512

[50] Zakrzewski M., *Asymptotyka rozwiązań meromorficznych równań różniczkowych i funkcji tworzących dla wielokrotnych wartości zeta.* Rozprawa doktorska, Warszawa, 2011.

[51] Zakrzewski M., Żołądek H. *Linear meromorphic differential equations and multiple zeta-values I. Zeta (2).* Fund. Math. 210, (2010), 207 - 242.

[52] Zakrzewski M., Żołądek H. *Linear meromorphic differential equations and multiple zeta-values II. Generalization of the WKB method.* J. Math. An. Appl. (w druku)

[53] Zakrzewski M., Żołądek H. *Linear meromorphic differential equations and multiple zeta-values III. Zeta (3).* preprint, 2011

[54] Zhao Jianquiang, *On a conjecture of Borwein, Bradley and Broadhurst.* J. reine angew. Math. 639 (2010), strony 223 - 233.

[55] Żołądek H. *Note on multiple zeta values.* Bull. Acad. Stiinte Rep. Mold. Matem. 41 (2003), 78 - 82.

[56] Żołądek H. *The monodromy group.* Birkhäuser, Basel, 2006.