Michał Sierakowski

Osobliwe struktury automorfizmów powierzchni hiperbolicznych

Autoreferat pracy doktorskiej

Przedmiotem mojej rozprawy doktorskiej są automorfizmy zwartych powierzchni topologicznych, których genus algebraiczny jest większy od 1. Powierzchnie spełniające powyższy warunek będziemy nazywać hiperbolicznymi. Stosowany w pracy termin *powierzchnie Kleina* odnosi się do powierzchni topologicznych ze strukturą dianalityczną, a więc taką która w charakterze funkcji przejść dopuszcza również odbicia zespolone. W niniejszej rozprawie zajmuję się zatem badaniem *struktur osobliwych* dianalitycznych automorfizmów zwartych hiperbolicznych powierzchni Kleina, rozumianych jako zbiory tych punktów, których orbity są krótsze od rzędu przekształcenia. Zagadnieniem, które rozpatruję jest pytanie o realizację zadanych struktur okresowych wyznaczanych przez działania cyklicznych grup automorfizmów. Genezą moich badań jest pytanie postawione przez prof. Jaume Llibre w poniższej postaci:

Pytanie 1. *Dla rozmaitości zespolonej M znaleźć zbiory okresów orbit okresowych odwzorowań holomorficznych M w siebie.*

Podstawowymi rozmaitościami zespolonymi są powierzchnie Riemanna i to badanie własności automorfizmów krzywych algebraicznych stanowi główny przedmiot obecnej pracy, w której nie rozpatruje się rozmaitości wymiaru (zespolonego) większego od 1.

Jak się okazuje warunek holomorficzności w przypadku powierzchni hiperbolicznych jest założeniem na tyle sztywnym, że determinuje stopień przekształcenia ograniczając jednocześnie jego (skończony) rząd. Co więcej w przypadku powierzchni Kleina i słabszego założenia dianalityczności odwzorowania, otrzymuje się analogiczny wniosek. Na mocy twierdzenia Kerckhoffa [12] każdy okresowy homeomorfizm zwartej hiperbolicznej powierzchni Kleina jest topologicznie sprzężony z dianalitycznym automorfizmem powierzchni Kleina o tym samym typie topologicznym rozumianym jako sygnatura

NEC grupy Λ uniformizującej X (tzn. takiej, dla której X jest przestrzenią orbit $\mathbb{H}^2/\Lambda$). Z powyższego zatem można wywnioskować, że pomijając zespoloną strukturę rozmaitości nie traci się ogólności w badaniu dynamicznych własności przekształceń. Jednak badając automorfizmy dianalityczne traktowane jako reprezentanty klas sprzężoności topologicznej homeomorfizmów okresowych można wykorzystać bardzo silne narzędzia analizy zespolonej i geometrii algebraicznej. Dzięki takiemu podejściu udaje się znaleźć odpowiedź na pytanie sformułowane przez Alsedà, Llibre i Misiurewicza:

Pytanie 2 (Alsedà, Llibre and Misiurewicz [1], Open Problem 3.3)**.** *Dla dowolnej powierzchni zwartej wyznaczyć zbiory okresów orbit okresowych dla homeomorfizmów skończonego rzędu, redukowalnych oraz pseudo–Anosowa.*

w części dotyczącej homeomorfizmów skończonego rzędu. Przypomnijmy, że zgodnie z klasyfikacją Nielsena–Thurstona [18] elementy grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(M)$ dowolnej powierzchni M dzielimy właśnie na wymienione w Pytaniu 2 trzy typy.

W pierwszych rozdziałach pracy zajmujemy się analitycznymi przekształceniami powierzchni Riemanna. Rozwiązanie Pytania 1 dla sfery $\hat{\mathbb{C}}$ oraz torusów $\mathbb{T}$ jest znacząco różne od odpowiedzi dla przypadku powierzchni o genusie wynoszącym co najmniej 2. Przypadek sfery opisuje twierdzenie Bakera [2, 7], natomiast zadanie dla torusów zespolonych jest ćwiczeniem bazującym na ogólnej postaci przekształceń holomorficznych $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ (patrz [15]).

Przyczynami wspomnianych różnic, między przypadkami hiperbolicznym i niehiperbolicznym jest po pierwsze brak górnego ograniczenia na stopień przekształcenia dla $\hat{\mathbb{C}}$ i $\mathbb{T}$. Po drugie zaś własność, że holomorficzne odwzorowania powierzchni hiperbolicznych w siebie są odwracalne już przy słabym założeniu, że ich obrazy nie są jednopunktowe. Wynika to z przytoczonego poniżej twierdzenia Riemanna–Hurwitza:

Twierdzenie 1 (Farkas and Kra [8])**.** *Niech $f\colon S \to S'$ będzie przekształceniem holomorficznym zwartych powierzchni Riemanna stopnia K (przez co rozumiemy, że zbiór $f^{-1}(Q)$ ma moc K dla prawie wszystkich $Q \in S'$), którego obraz jest różny od punktu. Niech g i γ oznaczają odpowiednio genusy powierzchni S i S'. Wtedy mamy*

$$g = K(\gamma - 1) + 1 + \frac{1}{2}\sum_{P \in S} b_f(P), \tag{1}$$

gdzie $b_f(P) + 1$ jest indeksem rozgałęzienia przekształcenia f w punkcie P.

Zatem holomorficzne odwzorowania $t\colon S \to S$ powierzchni hiperbolicznych nie mają rozgałęzień, a ich stopień jest zawsze równy 1. Tym samym jako przekształcenia "na" i "1–1" są konforemne (przekształcenia odwrotne $t^{-1}\colon S \to S$ są również konforemne). Co więcej ich rząd jest skończony co wynika z rezultatu Schwarza, który pokazał że grupa automorfizmów analitycznych powierzchni hiperbolicznych jest skończona (patrz [8]). Dodajmy, że stosowany wielokrotnie w niniejszej pracy wzór (1) jest przede wszystkim wykorzystywany w szczególnym przypadku nakryć rozgałęzionych. Jeśli bowiem $t\colon S \to S$ jest analitycznym automorfizmem powierzchni Riemanna o genusie topologicznym $g \geq 2$, to relacja Riemanna–Hurwitza pozwala na wnioskowanie o indeksach rozgałęzień nakrycia $S \to S/\langle t\rangle$. Przy oznaczeniu przez N rzędu przekształcenia t oraz przez m_i, $i = 1, \ldots, n$ wspomnianych indeksów rozgałęzień mamy na mocy (1):

$$g = N(\gamma - 1) + 1 + \frac{1}{2}\sum_{P\in S} b_f(P) = N(\gamma - 1) + 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{N}{m_i}(m_i - 1),$$

co daje

$$\frac{2(g-1)}{N} = 2(\gamma - 1) + \sum_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{m_i}).$$

Dynamika homeomorfizmów skończonego rzędu, które działają na powierzchniach Riemanna i zachowują orientację jest bardzo prosta, ponieważ posiadają one jedynie skończenie wiele izolowanych orbit okresowych, których okresy są dzielnikami właściwymi rzędu przekształcenia. Znany powszechnie wynik mówi, że dowolny zbiór takich dzielników może być zrealizowany jako zbiór okresów dla pewnego t ([9], patrz również Stwierdzenie 2.4). Zamyka to problem wyznaczenia zbiorów okresów przekształceń holomorficznych zespolonych rozmaitości wymiaru 1. Można jednak pytać o to, czy realizacja zadanego zbioru okresów nakłada wymagania na typ topologiczny powierzchni Riemanna formułując kolejne zagadnienie:

Pytanie 3. *Dla dowolnego N oraz $\mathcal{A}$ – podzbioru zbioru właściwych dzielników N, znaleźć najmniejszy genus hiperbolicznej powierzchni Riemanna, na której można określić odwzorowanie konforemne rzędu N, którego zbiór okresów pokrywa się z $\mathcal{A}$.*

Liczbę spełniającą powyższy warunek nazywamy *genusem $\mathcal{A}$–minimalnym* i oznaczamy $g_{\mathcal{A}}$. Powyższe zadanie zostało rozwiązane metodami kombinatorycznymi w oparciu o teorię grup Fuchsa (Twierdzenie 2.8) przy wykorzystaniu wyników prac Harvey'a [11] i Macbeath'a [14]. Z uwagi jednak na zależność od rozkładu na czynniki pierwsze okresów przekształcenia, nie podajemy zamkniętej formuły na minimalny genus ograniczając się jedynie do wskazania najlepszych oszacowań (Stwierdzenie 2.10). W rozdziale 2.2 rozważamy natomiast *problem maksymalnego genusa*, czyli znalezienia takiego podzbioru dzielników N, którego relizacja jako zbioru okresów automorfizmu analitycznego wymaga modelowania na powierzchni o największym genusie spośród liczb $g_{\mathcal{A}}$ odpowiadających różnym podzbiorom zbioru dzielników własciwych N. Powyższe możemy sformalizować w następującej postaci:

Pytanie 4. *Dla każdego N znaleźć taki zbiór okresów $\mathcal{A}_{\max}$, aby odpowiadający mu genus $\mathcal{A}_{\max}$–minimalny dla każdego $\mathcal{A}$ podzbioru zbioru dzielników właściwych N spełniał warunek $g_{\mathcal{A}} \leq g_{\mathcal{A}_{\max}}$.*

Narzędzia, które zostały wykorzystane do rozwiązania Pytania 4 są standardowymi metodami analizy, teorii grup i teorii mnogości. Uzyskane wyniki wymagały przeprowadzenia serii elementarnych obliczeń, których szczegóły mogłyby się jednak okazać dla Czytelnika nużące i jako takie zostały w pracy pominięte. Ta część rozprawy została opublikowana w artykule [16].

W drugiej części pracy rozpatrujemy wersje wymienionych powyżej Pytań 1 i 3, uogólnione dla homeomorfizmów skończonego rzędu działających na powierzchniach Kleina. Rozważamy następujące zagadnienie:

Pytanie 5. *Dla odwzorowania skończonego rzędu działającego na zwartej powierzchni Kleina znaleźć zbiór punktów, których orbity są krótsze od rzędu przekształcenia oraz wyznaczyć jego okresy.*

Podobnie jak w przypadku homeomorfizmów zachowujących orientację działających na powierzchniach Riemanna klasyfikację struktur okresowych uzyskuje się rozważając jedynie podrodzinę homeomorfizmów złożoną z odwzorowań dianalitycznych. Z uwagi na jakościową różnicę w strukturze *zbioru osobliwego* w porównaniu z poprzednim przypadkiem, jaką jest występowanie składowych jednowymiarowych (wymiaru rzeczywistego 1) definiujemy w rozdziale 3 syntetyczną wielkość za pomocą, której opisujemy go w kolejnych częściach pracy. Do tego celu wykorzystujemy *charakter okresów* oznaczany przez $\mathfrak{C}_0$. Zawiera on informacje nie tylko o długościach orbit izolowanych, lecz również informacje o okresach *składników brzegowych*, *jedno*– i *dwustronnych owali* oraz *łańcuchów*. Zauważmy, że wyodrębnienie tak określonych składowych zbioru osobliwego nie jest nowym narzędziem, gdyż pojawiło się już w pracach [19]–[21] oraz w przypadku inwolucji w artykule [4]. Uogólnieniem Pytania 3 jest następujące

Pytanie 6. *Dla dowolnego N oraz charakteru okresów $\mathfrak{C}_0$, znaleźć minimum miary obszaru fundamentalnego NEC grupy Λ, takiej że na powierzchni $\mathbb{H}^2/\Lambda$ można określić dianalityczny automorfizm rzędu N, który realizuje $\mathfrak{C}_0$ jako swój charakter okresów.*

Ponieważ tym razem nie zakłada się, że brzeg jest zbiorem pustym, inaczej niż w przypadku powierzchni Riemanna, minimalizacja obszaru fundamentalnego grupy Λ nie jest tożsama z minimalizacją genusa powierzchni X. Wyniki dotyczące analizy poszczególnych przypadków ze względu na orientowalność badanej powierzchni X, powierzchni ilorazowej $X/\langle t\rangle$ oraz parzystość N zostały sformułowane w sześciu twierdzeniach: 5.5, 5.10, 5.17, 5.25, 5.36 i 5.42. Dodajmy przy tym, że stosując modyfikacje metod przedstawionych w rozdziale 4 można również uzyskać formuły minimalizujące genus przy założeniach dotyczących liczby składników brzegowych (lub odwrotnie: liczbę składników brzegowych przy założeniach dotyczących genusa). Podobne wyniki, choć bez rozróżniania zbiorów osobliwych automorfizmów zostały uzyskane w monografii [3].

Prostota implementacji podanych w pracy procedur sprowadza je, w każdym z rozpatrywanych przypadków, do wykonania serii obliczeń bazujacych na zdefiniowanych w pracy własnościach kombinatorycznych zbiorów liczb naturalnych. Zauważmy przy tym, że niektóre zagadnienia związane działaniem cyklicznych grup izometrii na powierzchniach są przedmiotem artykułów popularnych, czego przykładem jest [13].

Dzięki przedstawionym tu konstrukcjom, w Przykładach 2.11 oraz 5.29 udało się odpowiedzieć na dwa otwarte pytania, które postawiono w pracy [10].

Zagadnienia związane z własnościami odwzorowań powierzchni są częstym tematem dysertacji doktorskich. Z niektórymi z nich miałem przyjemność zapoznać się podczas przygotowywania własnej rozprawy: [5, 6, 17] – za co serdecznie dziękuję ich Autorom.

Literatura

[1] L. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz, Low–dimensional combinatorial dynamics, International Journal of Bfurcation and Chaos 9 (1999) 1687-1704.

[2] I. N. Baker, Fixpoints of polynomials and rational functions, J. London Math. Soc. 39 (1964) 615-622.

[3] E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, G. Gromadzki, Automorphisms Groups of Compact Bordered Klein Surfaces. A combinatorial Approach., Lecture Notes in Mathematics 1439, Berlin–Heidelberg–New York, 1990.

[4] E. Bujalance, A. F. Costa, S. M. Natanzon, D. Singerman, Involutions of compact Klein surfaces, Math. Z. 211 (1992) 461-478.

[5] M. Chas, Minimum periods of homeomorphisms of orientable surfaces, Ph.D Thesis, Autonomus Univeristy of Barcelona, 1998.

[6] M. W. Chrisman, The number theory of finite cyclic actions on surfaces, Ph.D Thesis, University of Hawai'i at Honolulu, 2006.

[7] N. Fagella, J. Llibre, Periodic points of holomorphic maps via Lefschetz numbers, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000) 4711-4730.

[8] H. M. Farkas, I. Kra, Riemann surfaces, Springer-Verlag, New York, 1980.

[9] J. Franks, J. Llibre, Periods of surface homeomorphisms, Contemporary Mathematics 117 (1991) 63-77.

[10] J. Guaschi, J. Llibre, Orders and periods of algebraically–finite surface maps, Houston J. Math. 23 (1997) 86-97.

[11] W. J. Harvey, Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface, Quart. J. Math. Oxford 17 (1966) 86-97.

[12] S. P. Kerckhoff, The Nielsen realization problem, Ann. of Math. 117 (1983), 235-265.

[13] C. Kosniowski, Symmetries of surfaces, The Mathematical Gazette (1978) 233-245.

[14] A. M. Macbeath, Action of automorphisms of a compact Riemann surface on the first homology group, Bull. London Math. Soc. 5 (1973) 103-108.

[15] J. W. Milnor, Dynamics in one complex variable. Introductory lectures., Stony Brook IMS Preprint #1990/5 (revised version 9-5-91).

[16] M. Sierakowski, Sets of periods for automorphisms of compact Riemann surfaces, J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), 561-574.

[17] M. Stukow, Small generating sets for mapping class groups, Ph.D Thesis, Gdansk University, 2006.

[18] W. P. Thurston, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, Bull. Amer. Math. Soc 19 (1988), 417-431

[19] K. Yokoyama, Classification of periodic maps on compact surfaces: I, Tokyo J. Math. 6 (1983) 75-94.

[20] K. Yokoyama, Classification of periodic maps on compact surfaces: II, Tokyo J. Math. 7 (1984) 249-285.

[21] K. Yokoyama, Complete classification of periodic maps on compact surfaces: I, Tokyo J. Math. 15 (1992) 247-279.