Marzena Filipowicz-Chomko
Politechnika Białostocka

Struktura i własności wyróżnionych typów algebr filialnych

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Jednym z podstawowych pojęć teorii pierścieni i algebr jest pojęcie ideału. W języku ideałów wyraża się wiele problemów tej teorii, jak też z ich pomocą uzyskuje się twierdzenia opisujące strukturę pierścieni i algebr. W efekcie badane są różne własności ideałów. Przykładem naturalnego pytania dotyczącego takich własności jest pytanie, czy relacja bycia ideałem jest przechodnia, tzn. czy ideał ideału pierścienia jest ideałem tego pierścienia? Pytanie to oczywiście dotyczy sytuacji ogólnej tzn. nie ograniczonej do często stosowanego założenia technicznego, że pierścienie mają jedynkę. Pojawia się ono w wielu badanych zagadnieniach teorii pierścieni. Nietrudno jest znaleźć przykłady pokazujące, że ogólnie, odpowiedź jest negatywna. Przykładem pozytywnego wyniku jest twierdzenie ADS, mówiące, że dowolny radykał ideału pierścienia jest ideałem tego pierścienia.

Pierścienie w których relacja bycia ideałem jest przechodnia nazywamy pierścieniami filialnymi. Można też rozważać pierścienie lewostronnie filialne (prawostronnie filialne), gdy relacja bycia ideałem lewostronnym (prawostronnym) jest przechodnia. Pierścienie filialne można uznać za odpowiedniki t-grup (por. [9, 11, 18]) czyli, grup w których każda podgrupa podnormalna jest dzielnikiem normalnym. W klasie pierścieni filialnych zawierają się pierścienie Hamiltona (tj. pierścienie, w których każdy podpierścień jest ideałem) badane między innymi w pracach [20, 25, 27]. Szczegółowe badania były prowadzone przez R.L. Kruse w jego pracy doktorskiej i opublikowane w [21]. Wyniki tam otrzymane pokazały, że problem opisu takich pierścieni nie jest łatwy. Liu Shao-Xue w [23] badał algebry Hamiltona nad ciałem (tj. algebry, w których każda podalgebra jest ideałem). W tym przypadku sytuacja znacznie się upraszcza. Liu Shao-Xue uzyskał kompletną klasyfikację takich algebr (ale sprowadzającą się do problemu klasyfikacji pewnych form kwadratowych, który jest wciąż otwarty).

Problem opisu pierścieni filialnych (bez użycia ich nazwy) był postawiony w monografii Szásza ([29], Problem 9). Pojawił się tam w kontekście innego zagadnienia rozważanego w [28], którego celem nie było badanie samych pierścieni filialnych.

Przez wiele lat był otwarty problem dotyczący, tzw. stabilizacji łańcuchów Kurosza (por. [2, 19, 24]). Został on rozwiązany przez K.I. Beidara w [8]. Mówiąc bardzo pobieżnie, w przedstawionej przez niego konstrukcji zasadniczą rolę odgrywały pewne specyficzne pierścienie, które nie są filialne.

Systematyczne badania pierścieni filialnych, wraz z wprowadzeniem tej nazwy, rozpoczęła G. Ehrlich w [12]. Zajmowała sie ona głównie przypadkiem przemiennym, a jej motywacje nawiązywały do t-grup. Mniej więcej w tym samym czasie pewne wyniki odnośnie pierścieni filialnych, bez używania terminu filialny, były uzyskane niezależnie w pracach [26, 32, 30, 31]. W [26] A.D. Sands podał podstawowe charakteryzacje pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych, ale nie badał ich dokładniej. W [32] S. Veldsman studiował pewne bardziej ogólne klasy. Dla dowolnych α, β, γ zawartych w zbiorze trzech symboli: {lewostronny ideał, prawostronny ideał, ideał} rozważał klasy pierścieni: $V(\alpha, \beta, \gamma) = \{R \mid I\alpha J\beta R \to I\gamma R\}$. Oczywiście wśród tych klas zawarte są klasy pierścieni filialnych, lewostronnie filialnych i prawostronnie filialnych. S. Veldsman podał charakteryzacje tych klas oraz pewne ogólne związki między nimi. Prace G. Tzintzisa [30] i [31] dotyczyły teorii radykałów. Badał on klasy pierścieni, których nie można odwzorować homomorficznie na niezerowe pierścienie filialne (lewostronnie filialne) i zależności między tymi klasami (są one klasami radykalnymi) oraz innymi znanymi klasami radykalnymi. Żadna z tych prac nie zawiera jednak głębszych twierdzeń opisujących strukturę pierścieni filialnych (lewostronnie filialnych).

Systematyczne badanie pierścieni filialnych, nawiązujące bezpośrednio do pracy G. Ehrlich (również w odniesieniu do pierścieni nieprzemiennych) podjęte zostały przez R.R. Andruszkiewicza i E.R. Puczyłowskiego w pracy [5]. Zostały one rozszerzone w pracy doktorskiej R.R. Andruszkiewicza. Otrzymane w niej wyniki miały między innymi zastosowania w badaniach prowadzonych nad wspomnianym wyżej problemem stabilizacji łańcuchów i lewostronnych łańcuchów Kurosza (por. [6]). W pracy [3] R.R. Andruszkiewicz podał klasyfikację przemiennych filialnych dziedzin. Badania te były rozszerzone w [7] i [4] na przypadek przemiennych filialnych pierścieni zredukowanych.

Wszystkie te prace dotyczyły pierścieni filialnych (pomijając różne niezależne obserwacje dotyczące ideałów jednostronnych). Sugerowały one podjęcie bardziej systematycznych badań dotyczących pierścieni lewostronnie filialnych. To zagadnienie zapoczątkowało moje zainteresowanie tą tematyką. Pierwsze wyniki zostały uzyskane w [13] i rozszerzone w [14], gdzie również prowadzone były badania nad związkami między różnymi typami filialności. Naturalne pytania, jakie się pojawiały przy badaniu tych klas potwierdzały, że są to zagadnienia interesujące. W obu pracach pojawiły się wyniki uzyskane dla algebr nad ciałem, które są filialne (lewostronnie filialne) jako pierścienie. Skierowały one moje zainteresowanie na przypadek filialnych i lewostronnie filialnych algebr nad ciałem. Inna motywacja płynęła z wyników uzyskanych we wspomnianej wyżej pracy Liu Shao-Xue ([23]). Badania prowadzone nad filialnymi i lewostronnie filialnymi algebrami nad ciałem potwierdziły, że istotnie w tym przypadku można powiedzieć więcej. W pracy [16] uzyskano prawie kompletną (a kompletną dla algebr skończenie wymiarowych) klasyfikację lewostronnie filialnych algebr nad ciałem (modulo otwarte problemy dotyczące form kwadratowych, które pojawiły się również u Liu Shao-Xue). W badaniu algebr stosowane były inne techniki niż przy badaniach filialności i lewostronnej filialności pierścieni.

Satysfakcjonujące wyniki uzyskane w przypadku pierścieni i algebr nad ciałem inspirowały do dalszych badań. Pojawiło się pytanie, na ile jest możliwe uzyskanie wspólnych ich uogólnień. Okazało się, że wiele z tych wyników można rozszerzyć do przypadku algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym z jedynką, ale posługując się innymi metodami.

Struktura i główne wyniki pracy

Powyżej opisana moja działalność w obszarze związanym z filialnymi i lewostronnie filialnymi algebrami wyznaczyła strukturę rozprawy doktorskiej.

Wszystkie rozważane w pracy pierścienie i algebry są łączne, ale niekoniecznie z jedynką.

Rozdział pierwszy ma charakter wprowadzający. Zawiera ogólnie znane pojęcia i fakty dotyczące algebr i pierścieni łącznych wykorzystywane w dalszych fragmentach pracy.

Zasadnicza część rozprawy dzieli się na trzy rozdziały, które omówimy teraz dokładniej.

Wszędzie dalej β oznacza radykał pierwszy.

Rozdział drugi

W rozdziale tym rozważamy przypadek ogólny, tj. filialne i lewostronnie filialne algebry nad dowolnym pierścieniem przemiennym K z jedynką. Wyniki dotyczące algebr lewostronnie filialnych mają swoje naturalne, dualne odpowiedniki dla algebr prawostronnie filialnych. Przedstawione w nim zostały definicje, charakteryzacje, własności takich algebr, a także związki pomiędzy różnego rodzaju filialnościami. W rozdziale tym opisana została również filialność i lewostronna filialność algebr otrzymanych w wyniku typowych konstrukcji takich jak macierze, wielomiany, czy sumy proste.

Do głównych wyników tego rozdziału można zaliczyć:

1. Charakteryzacja pierwszych algebr lewostronnie filialnych i twierdzenie strukturalne opisujące półpierwsze algebry lewostronnie filialne.

Twierdzenie 1. *Algebra pierwsza A jest lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest przemienną filialną dziedziną lub algebrą z dzieleniem.*

Charakteryzacja ta odgrywa istotną rolę w dowodzie następującego twierdzenia opisującego strukturę lewostronnie filialnych algebr półpierwszych.

Twierdzenie 2. *Dla dowolnej algebry A następujące warunki są równoważne*

(i) A jest półpierwszą algebrą lewostronnie filialną;

(ii) A zawiera taki ideał I, że I jest algebrą silnie regularną i A/I jest przemienną, zredukowaną algebrą filialną;

(iii) $A/S(A)$ jest przemienną, zredukowaną algebrą filialną, gdzie $S(A)$ jest radykałem silnie regularnym algebry A.

2. Wyniki dotyczące β-radykalnych filialnych lub lewostronnie filialnych $\star$-algebr (tzn. algebr spełniających warunek: jeśli dla dowolnego $a \in A$ i $k \in K$, $k^2 a = 0$, to $ka = 0$).

Stwierdzenie 3. *Dla dowolnej algebry A, $A/W(A)$ jest $\star$-algebrą, gdzie $W(A) = \sum\{I \mid I$ - ideał nilpotentny algebry $A\}$.*

Twierdzenie 4. *Jeśli lewostronnie filialna lub filialna β-radykalna K-algebra A jest $\star$-algebrą, to $A^3 = 0$*

Ponadto w przypadku β-radykalnych beztorsyjnych algebr lewostronnie filialnych lub filialnych, gdy K nie jest ciałem uzyskujemy wzmocnienie powyższego twierdzenia.

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że K nie jest ciałem oraz A jest beztorsyjną algebrą β-radykalną. Wówczas A jest algebrą lewostronnie filialną lub filialną wtedy i tylko wtedy gdy $A^2 = 0$.*

3. Opis struktury β-radykalnych algebr filialnych.

Twierdzenie 6. *Dowolna β-radykalna algebra filialna A jest H-algebrą oraz jest sumą swoich ideałów nilpotentnych.*

W dowodzie powyższego twierdzenia kluczową rolę odgrywa Twierdzenie 4 odnośnie $\star$-algebr.

W szczególności z Twierdzenia 6 uzyskujemy następujący

Wniosek 7. *Dowolna β-radykalna algebra filialna jest lewostronnie filialna.*

4. Opis filialnych i lewostronnie filialnych sum prostych, algebr wielomianów oraz macierzy.

Twierdzenie 8. *Dla danej algebry A i liczby całkowitej $n \geqslant 2$ równoważne są następujące warunki*

(i) *$A \in \mathcal{C}$, gdzie $\mathcal{C} = \{A \mid AI = I^3 = IA,$ dla każdego $I \lhd A\}$;*

(ii) *$A \oplus A$ jest algebrą filialną;*

(iii) *$M_n(A)$ jest algebrą filialną.*

Twierdzenie 9. *Dla danej algebry A następujące warunki są równoważne*

(i) *$A \oplus A$ jest algebrą lewostronnie filialną;*

(ii) *Dla każdego $a \in A$, $Aa = Aa^2$;*

(iii) *Dla każdego $L <_l A$, $AL = L^3$ i A jest algebrą lewostronnie filialną;*

(iv) *Dla każdego $L <_l A$ i dla każdego całkowitego $n \geqslant 2$, $AL = L^n$ i A jest algebrą lewostronnie filialną;*

(v) *$A\beta(A) = 0$ oraz $A/\beta(A)$ jest algebrą silnie regularną.*

Twierdzenie 10. *Dla dowolnej algebry A i dowolnego $n \geqslant 2$, algebra macierzy $M_n(A)$ jest lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = 0$.*

Twierdzenie 11. *Dla dowolnej algebry A, algebra wielomianów $A[x]$ jest filialna (lewostronnie filialna) wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = 0$.*

Rozdział trzeci

Rozdział ten dotyczy przypadku filialnych i lewostronnie filialnych algebr nad ciałem, które w przedstawionych wynikach oznaczamy symbolem F. Jak zostało wspomniane wcześniej w tym przypadku udało się otrzymać więcej, bowiem prawie kompletną klasyfikację takich algebr.

Oto najważniejsze wyniki tego rozdziału.

1. Opis struktury półpierwszych lewostronnie filianych algebr nad ciałem.

Twierdzenie 12. *Algebra jest półpierwsza i lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest silnie regularna.*

Z tego twierdzenia w szczególności wynika, że algebry półpierwsze są lewostronnie filialne wtedy i tylko wtedy, gdy są prawostronnie filialne. Takie algebry są więc filialne.

2. Opis struktury β-radykalnych filialnych lub lewostronnie filialnych algebr nad ciałem.

Dowodzimy, że w obrębie algebr β-radykalnych nad ciałem klasy algebr lewostronnie filialnych, filialnych i H-algebr się pokrywają. Wynika to z następującego twierdzenia charakteryzującego takie algebry.

Twierdzenie 13. *Dla danej β-radykalnej algebry A następujące warunki są równoważne*

(i) A jest algebrą filialną

(ii) A jest algebrą lewostronnie filialną;

(iii) $A^3 = 0$ i dla każdego $a \in A$, $Aa = Fa^2$;

(iv) $A^3 = 0$ i dla każdego $x \in A$, $Ax = xA = Fx^2$;

(v) A jest H-algebrą.

Ponadto otrzymujemy

Twierdzenie 14. *β-radykalna algebra A jest H-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = 0$ lub $A = B \oplus C$, gdzie $C^2 = 0$, $B^2 = Fb$ dla pewnego $0 \neq b \in B$ takiego, że $Bb = bB = 0$ oraz dla każdego $x \in B \setminus Fb$, $x^2 \neq 0$.*

Uzyskana została też kompletna klasyfikacja β-radykalnych H-algebr nad ciałami skończonymi.

Twierdzenie 15. *β-radykalna algebra nad ciałem skończonym F jest H-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $A \simeq B \oplus C$, gdzie $B^2 = 0$, zaś $C = 0$ lub $C \simeq xF[x]/x^3F[x]$ lub C jest izomorficzna z algebrą opisaną w Stwierdzeniu 16.*

Stwierdzenie 16. *Nierozkładalna β-radykalna algebra A taka, że $dim_F A = 3$ jest H-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) istnieją $0 \neq \alpha \in F$, $\beta \in F$ takie, że równanie $1 + \beta t + \alpha t^2 = 0$ nie ma rozwiązań w ciele F;

(ii) *A ma taką bazę* e_1, e_2, e_3*, że* $e_1^2 = e_3$*,* $e_2^2 = \alpha e_3$*,* $e_1 e_2 = 0$*,* $e_2 e_1 = \beta e_3$ *oraz* $e_i e_3 = e_3 e_i = 0$*.*

3. Opis struktury dowolnych lewostronnie filialnych algebr nad ciałem.

Twierdzenie 17. *Algebra A jest lewostronnie filialna wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) *algebra* $A/\beta(A)$ *jest silnie regularna;*

(ii) $\beta(A)$ *jest* H*-algebrą;*

(iii) *zachodzi jeden z następujących warunków:*

   (a) $A = l_A(\beta(A)) + \beta(A)$*;*

   (b) $A = Fe + l_A(\beta(A)) + \beta(A)$*, gdzie* $\beta(A) \neq 0$*, zaś* e *jest idempotentem algebry* A *takim, że* $eb = b$ *dla każdego* $b \in \beta(A)$*.*

Teraz opiszemy strukturę algebr spełniających warunek *(iii) (b)* oraz *(iii) (a)* Twierdzenia 17.

Twierdzenie 18. *Lewostronnie filialna algebra* A *spełnia warunek (iii) (b) Twierdzenia 17 wtedy i tylko wtedy, gdy* $A \simeq \begin{pmatrix} S^\star & M \\ 0 & T \end{pmatrix}$*, gdzie* S *jest lewostronnie filialną algebrą postaci* $S = l_S(\beta(S)) + \beta(S)$ *i* $\beta(S) \neq 0$*,* T *jest algebrą silnie regularną,* M *jest* $S^\star - T$*-bimodułem, który jest unitarny jako lewostronny* $S^\star$*-moduł i* $SM = 0$*.*

Twierdzenie 19. *Niech* A *będzie algebrą, której* $dim_F(A/\beta(A)) < \infty$*. Algebra* A *spełnia warunek (iii) (a) Twierdzenia 17 wtedy i tylko wtedy, gdy* $A \simeq \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \oplus B$*, gdzie* T *jest skończenie wymiarową algebrą silnie regularną z jedynką,* M *jest prawostronnym* T*-modułem unitarnym, zaś* B *jest nilpotentną algebrą lewostronnie filialną.*

Rozdział czwarty

W rozdziale tym rozważamy filialne i lewostronnie filialne pierścienie, czyli algebry nad pierścieniem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Wykazujemy w nim, że pewne wyniki uzyskane dla algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym K z jedynką można w tym przypadku wzmocnić, ale jednak nie aż tak jak było to możliwe w przypadku, gdy K jest ciałem.

Do najważniejszych wyników tej części należą:

1. Opis filialnych i lewostronnie filialnych T-pierścieni (t.j. pierścieni, których dla dowolnej liczby pierwszej p, nie można odwzorować homomorficznie ani na p-elementowe ciało ani na p-elementowy pierścień z zerowym mnożeniem).

Twierdzenie 20. *Niech R będzie T-pierścieniem. Wówczas*

(i) R jest pierścieniem lewostronnie filialnym, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in R$, $Ra = Ra^2$;

(ii) R jest pierścieniem filialnym, wtedy i tylko wtedy, gdy $R \in \mathcal{C}$, gdzie $\mathcal{C} = \{R \mid RI = I^3 = IR$, dla każdego $I \lhd R\}$.

2. Opis struktury pierścieni, których żaden niezerowy obraz homomorficzny nie jest filialny (lewostronnie filialny). Klasy takich pierścieni oznaczamy odpowiednio przez χ oraz χ_l.

Następujące twierdzenie wzmacnia wynik Tzintzisa z [31]

Twierdzenie 21. *(i) $\chi = \{R \mid R$ nie można odwzorować homomorficznie na niezerowy pierścień w $\mathcal{C}\}$.*

(ii) $\chi_l = \{R \mid R$ nie można odwzorować homomorficznie ani na pierścień z dzieleniem, ani na pierścień z zerowym mnożeniem$\}$.

3. Przykład β-radykalnego pierścienia lewostronnie filialnego, który nie jest filialny.

Przypomnijmy, że dowolna β-radykalna algebra filialna jest lewostronnie filialna. Dla algebr nad ciałem zachodzi implikacja przeciwna. Następujący przykład pokazuje, że nie zachodzi ona dla pierścieni.

Przykład. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Zauważmy, że pierścień $p\mathbb{Z}_{p^2} \simeq (\mathbb{Z}_p)^0 \simeq p\mathbb{Z}_{p^3}/p^2\mathbb{Z}_{p^3}$. Ponieważ $(p^2\mathbb{Z}_{p^3})(p\mathbb{Z}_{p^3}) = 0$, więc $p\mathbb{Z}_{p^3}$ ma naturalną strukturę lewostronnego $p\mathbb{Z}_{p^3}/p^2\mathbb{Z}_{p^3}$-modułu, a więc również lewostronnego $p\mathbb{Z}_{p^2}$-modułu. Rozpatrzmy $R = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. R jest pierścieniem łącznym, z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia macierzy. Pierścień R jest nilpotentny ($R^3 = 0$), lewostronnie filialny, ale nie jest filialny.

4. Przykłady pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych, które nie są prawostronnie filialne.

W klasie algebr nad dowolnym pierścieniem przemiennym z jedynką, półpierwsze (czyli β-półproste) algebry lewostronnie filialne są filialne, natomiast dla β-radykalnych algebr zachodzi inkluzja przeciwna (tzn. β-radykalne algebry filialne są lewostronnie filialne). Algebry nad ciałem, które są zarówno filialne, jak i lewostronnie filialne są też prawostronnie filialne. Dowód tego faktu nie jest prosty i nie dawał się on bezpośrednio rozszerzyć na przypadek ogólny. Pojawiło się więc pytanie, czy wynik ten ma miejsce przynajmniej dla pierścieni. Problem okazał się bardzo trudny. W pewnych klasach pierścieni (np. dla pierścieni torsyjnych) ma rozwiązanie pozytywne. Udało się jednak skonstruować dwa podobne, ale też jakościowo różne, przykłady, które pokazują, że ogólnie odpowiedź jest negatywna. Otrzymane przykłady nie są przypadkowe. Są one efektem wielu cząstkowych wyników i obserwacji, które nie zostały włączone do rozprawy ze względu na ich obecny roboczy charakter. Te wyniki sugerują, że jest bardzo prawdopodobne, że przykłady te są w pewnym sensie jedynymi możliwymi.

Literatura

[1] T. Anderson, N. Divinsky , A. Suliński, *Hereditary radicals in associative and alternative rings*, Canad. J. Math. 17 (1965), pp. 594–603.

[2] ——, *Lower radical properties for associative and alternative rings*, J. London Math. Soc. 41 (1966), pp. 417–424.

[3] R.R. Andruszkiewicz, *The classification of intergral domains in which the relation of being an ideal is transitive*, Comm. Algbera 31 (2003), pp. 2067–2093.

[4] R.R. Andruszkiewicz, K. Pryszczepko, *A classification of commutative reduced filial rings*, Comm. Algebra (przyjęta do publikacji).

[5] R.R. Andruszkiewicz, E.R. Puczyłowski, *On filial rings*, Portugal. Math. 45 (1988), pp. 139–149.

[6] ——, *Kurosh's chains of associative rings*, Glasgow Math. J. 32 (1990), pp. 67–69.

[7] R.R. Andruszkiewicz, M. Sobolewska, *Commutative reduced filial rings*, Algebra Discrete Math. 3 (2007), pp. 18–26.

[8] K.I. Beidar, *A chain of Kurosh may have an arbitrary finite length*, Czechoslovak Math. J. 32 (1982), pp. 418–422.

[9] E. Best, O. Taussky, *A class of groups*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 47 (1942), pp. 55–62.

[10] J.C. Cozzens, C. Faith, *Simple Noetherian rings*, Cambridge University Press, Cambridge-New York-Malbourne, 1975.

[11] K. Doerk, M.D. Perez-Ramos, *A criterion for $\mathfrak{F}$-subnormality*, J. Algebra 120 (1989), pp. 416–421.

[12] G. Ehrlich, *Filial rings*, Portugal. Math. 42 (1983-84), pp. 185–194.

[13] M. Filipowicz, E.R. Puczyłowski, *Left filial rings*, Algebra Colloq. 11 (2004), pp. 335–344.

[14] ——, *On filial and left filial rings*, Publ. Math. Debrecen 66 (2005), pp. 257–267.

[15] ——, *On the upper radical determined by filial rings*, Acta Math. Hungar. 112 (2006), pp. 227–236.

[16] ——, *The structure of left filial algebras over a field*, Taiwan. J. Math. 13/3 (2009), pp. 1017–1029.

[17] A. Forsythe, N.H. McCoy, *On the commutativity of certain rings*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), pp. 523–526.

[18] W. Gaschutz, *Gruppen, in denen das Normalteilersein transitive ist*, J. Reine Angew. Math 198 (1957), pp. 87–92.

[19] A.G. Heinicke, *A note on lower radical constructions for associative rings*, Canad. Math. Bull. 11 (1968), pp. 23–30.

[20] A. Jones, J.J. Schaffer, *Concerning the structure of certain rings*, Bol. Fac. Ingen. Agrimens. Montevideo 6 (1957-58), pp. 327–335.

[21] R.L. Kruse, *Rings in which all subrings are ideals I*, Canad. J. Math. 20 (1968), pp. 862–871.

[22] J.C. Lennox, S.E. Stonehewer, *Subnormal subgroups of groups*, Oxford Math. Monogr., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1987.

[23] Shao-Xue. Liu, *On algebras in which every subalgebra is an ideal*, Chinese Math.-Acta 5 (1964), pp. 571–577.

[24] E.R. Puczyłowski, *On questions concerning strong radicals of associative rings*, Quaestiones Math. 10 (1987), pp. 321–338.

[25] L. Redei, *Vollidealringe im weiteren Sinn. I*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 3 (1952), pp. 243–268.

[26] A.D. Sands, *On ideals in over-rings*, Publ. Math. Debrecen 35 (1988), pp. 273–279.

[27] F. Szász, *Die ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 13 (1962), pp. 115–132.

[28] F. Szász, R. Wiegandt, *On the dualization of subdirect embeddings*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969), pp. 289–302.

[29] F. Szász, *Radicals of rings*, Akadémiai Kiadó, Budapest and John Wiley & Sons, 1981.

[30] G. Tzintzis, *An almost subidempotent radical property*, Acta Math. Hung. 49 (1987), pp. 173–184.

[31] ——, *A one-sided admissible ideal radical which is almost subidempotent*, Acta Math. Hungar. 49 (1987), pp. 307–314.

[32] S. Veldsman, *Extensions and ideals of rings*, Publ. Math. Debrecen 38 (1991), pp. 297–309.