Stochastyczne Układy Cząstek

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Mariusz Baryło

29 kwietnia 2009

Od ponad 150 lat trwa dynamiczny rozwój kinetycznej teorii gazów oraz mechaniki statystycznej. Przez dziesięciolecia wprowadzano coraz bogatszy aparat pojęciowy, służący do analizowania układów cząstek. Jednym z kluczowych narzędzi zarówno mechaniki klasycznej, jak i statystycznej, jest tzw. równanie Liouville'a, opisujące ewolucję w czasie funkcji gęstości rozkładu położenia układu cząstek w przestrzeni fazowej. Z równania tego można wyprowadzić związki opisujące dynamikę funkcji gęstości rozkładu położenia w przestrzeni fazowej wybranego podukładu cząstek – jest to tzw. hierarchia BBGKY (od nazwisk uczonych, zajmujących się tym problemem: N. N. Bogolubowa, M. Borna, H. S. Greena, J. G. Kirkwooda oraz J. Yvona).

Głównym celem niniejszej rozprawy jest podanie stochastycznej wersji równania Liouville'a oraz hierarchii BBGKY dla układu cząstek, rozumianych jako punkty materialne, oddziałujących zgodnie z zasadami dynamiki Newtona poprzez gładki potencjał odpychający (i nie dopuszczający do zderzeń cząstek), jednak ze stochastycznymi zaburzeniami położenia i pędu każdej z cząstek.

1. Wprowadzenie

W rozdziale pierwszym rozprawy zawarty został krótki opis historii mechaniki statystycznej oraz hierarchii BBGKY, zwięzłe omówienie otrzymanych w rozprawie wyników, a także sformułowanie analizowanego problemu.

Zajmujemy się układem $N \geqslant 2$ cząstek, które uważamy za punkty materialne o masie $m > 0$, poruszające się w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Zakładamy, że układ bez zaburzeń stochastycznych posiada hamiltonian, opisujący energię układu cząstek. Jest to funkcja $H\colon (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N \to \mathbb{R}$ postaci

$$H(q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \Phi(q_i - q_j), \tag{1}$$

gdzie $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ jest energią potencjalną oddziaływania cząstek, spełniającą szereg odpowiednich założeń.

Zakładamy również, iż ruch wszystkich cząstek opisany jest następującym układem równań (uogólnieniem równań Hamiltona na przypadek cząstek, doznających losowych brownowskich zaburzeń):

$$\begin{cases} dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dt + \eta_i\, dv_i, \\ dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\, dt + \xi_i\, dz_i, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie, jak widzimy z postaci hamiltonianu (1), $\frac{\partial H}{\partial p_i} \equiv \frac{p_i}{m}$ jest prędkością i-tej cząstki, zaś $-\frac{\partial H}{\partial q_i} \equiv -\sum_{l \neq i} \nabla \Phi(q_i - q_l)$ jest siłą, działającą na i-tą cząstkę.
v_i oraz z_i są niezależnymi standardowymi procesami Wienera w $\mathbb{R}^3$, zaś η_i oraz ξ_i – stałymi rzeczywistymi macierzami diagonalnymi wymiaru 3 (takimi samymi dla każdej cząstki, tzn. $\eta_i = \eta_j$ oraz $\xi_i = \xi_j$ dla $i, j \in \{1, \ldots, N\}$):

$$\eta_i = \begin{pmatrix} \eta_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{i_2} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{i3} \end{pmatrix}, \quad \xi_i = \begin{pmatrix} \xi_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{i_2} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{i3} \end{pmatrix},$$

przy czym $\eta_{ik} \geqslant 0, \ \xi_{ik} \geqslant 0$ dla $i \in \{1, \ldots, N\}, \ k \in \{1, 2, 3\}$.
Zakładamy zatem, że w dowolnym momencie każda ze współrzędnych zarówno położenia, jak i pędu każdej z cząstek może zostać zaburzona w niezależny od pozostałych sposób zgodnie z rozkładem gaussowskim (zadanym przez jednowymiarowe procesy Wienera). Macierze η_i oraz ξ_i możemy uznać więc za współczynniki dyfuzji dla pędu i położenia każdej z cząstek.

Wszystkie założenia dotyczące analizowanego układu można podsumować, łącząc je w 3 grupy:

Założenia o rozpatrywanym modelu (H1):

1) Mamy dany układ $N \geqslant 2$ poruszających się w $\mathbb{R}^3$ cząstek o masie $m > 0$, traktowanych jako punkty materialne.
2) Cząstki te poruszają się w przestrzeni fazowej $\Gamma = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N$, gdzie pierwsza składowa każdego z N czynników iloczynu kartezjańskiego odpowiada za wektor położenia cząstki, zaś druga za wektor jej pędu.
3) Konfiguracja początkowa układu cząstek należy do podzbioru Γ_0 przestrzeni fazowej Γ, zadanego równością $\Gamma_0 = (\mathbb{R}^{3N} \backslash W_N) \times \mathbb{R}^{3N}$, gdzie $W_N = \Big\{(q_1, \ldots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N} \colon |q_i - q_j| = 0$ dla co najmniej jednej pary (i, j) takich, że $i \neq j$ oraz $i, j \in \{1, \ldots, N\}\Big\}$;
4) Mamy daną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wyposażoną w prawostronnie ciągłą filtrację $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ taką, że $\mathcal{F}_0$ zawiera wszystkie zbiory o mierze $\mathbb{P}$ równej zero.
5) Stan układu jest opisywany przez funkcję $P(t, q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N, \omega)$, gdzie q_i oznacza położenie, zaś p_i pęd i-tej cząstki, $\omega \in \Omega$; P jest zatem gęstością losową dla analizowanego układu cząstek.

Założenia o hamiltonianie (H2):

1) Dla rozpatrywanego układu istnieje (deterministyczny) hamiltonian $H \colon \Gamma \to \mathbb{R}$, opisujący energię układu cząstek, dany wzorem

$$H(q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \Phi(q_i - q_j), \tag{3}$$

gdzie $\Phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ jest energią potencjalną oddziaływania cząstek, spełniającą następujące warunki:
2) $\Phi(q) = m\widetilde{\Phi}(|q|)$, gdzie potencjał $\widetilde{\Phi} \colon \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (potencjał sferycznie symetryczny),

3) $\widetilde{\Phi}$ jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$ i jej pochodna też jest na $\mathbb{R}_+$ ograniczona,
4) $\widetilde{\Phi} \in C^3(\mathbb{R}_+)$,
5) $\widetilde{\Phi}(0) = 0$,
6) $\left|\widetilde{\Phi}'(q_1) - \widetilde{\Phi}'(q_2)\right| \leqslant L_1|q_1 - q_2|$ dla $q_1,\ q_2 \in \mathbb{R}_+$,
7) $D^3\Phi$ jest ograniczona na $\mathbb{R}^3$,
8) potencjał $\widetilde{\Phi}$ opisuje odpychanie na tyle silne, że niemożliwe są zderzenia poruszających się cząstek.

Założenia o zaburzeniach stochastycznych (H3):
1) W dowolnym momencie każda ze współrzędnych zarówno położenia, jak i pędu każdej z cząstek może zostać zaburzona w niezależny od pozostałych sposób zgodnie z rozkładem gaussowskim, zadanym przez niezależne standardowe procesy Wienera v_i oraz z_i w $\mathbb{R}^3$,
2) procesy $v_1, z_1, \dots, v_N,\ z_N$ tworzą $6N$-wymiarowy proces Wienera,
3) współczynnik dyfuzji w równaniu stochastycznym opisującym zmianę położenia i-tej cząstki w czasie wynosi η_i, gdzie η_i to stała rzeczywista macierz diagonalna wymiaru 3 (taka sama dla każdej cząstki), postaci
$$\eta_i = \begin{pmatrix} \eta_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{i_2} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{i3} \end{pmatrix},$$
gdzie $\eta_{ik} \geqslant 0$ dla $i \in \{1, \dots, N\},\ k \in \{1, 2, 3\}$,
4) współczynnik dyfuzji w równaniu stochastycznym opisującym zmianę pędu i-tej cząstki w czasie wynosi ξ_i, gdzie ξ_i jest stałą rzeczywistą macierzą diagonalną wymiaru 3 (taką samą dla każdej cząstki), postaci
$$\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{i_2} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{i3} \end{pmatrix},$$
gdzie $\xi_{ik} \geqslant 0$ dla $i \in \{1, \dots, N\},\ k \in \{1, 2, 3\}$.

Oznaczając przez $X = (x_1, \dots, x_N) \in \Gamma$ wektor położenia cząstek w przestrzeni fazowej (tzn. każde $x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ jest parą (q_i, p_i)), $b = (b_1, \dots, b_N) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N$ – wektor o współrzędnych $b_i = (\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ oraz przez $W = (w_1, \dots, w_N)$ – $6N$-wymiarowy standardowy proces Wienera w przestrzeni fazowej, zdefiniowany na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i wartościach w $\mathbb{R}^{6N}$, (przy czym $w_i = (v_i, z_i)$), możemy układ równań (2) zapisać w postaci
$$\begin{cases} dX(t) = b\Big(X(t)\Big)\, dt + \Theta\, dW(t),\ t \geqslant 0 \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{4}$$

Wprowadźmy przestrzeń $C_W \equiv C_W\Big([0, T]; L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)\Big)$ ciągłych przekształceń $F\colon [0, T] \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)$ adaptowanych do W.
C_W wyposażona w normę
$$\|F\|_{C_W} = \Big(\sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\Big(|F(t)|^2\Big)\Big)^{1/2} \tag{5}$$

jest przestrzenią Banacha i nazywana jest przestrzenią procesów adaptowanych na $[0, T]$ o wartościach w Γ, ciągłych w sensie średniokwadratowym.

Wówczas przez rozwiązanie całkowe (ang. *mild solution*) zagadnienia (4) będziemy rozumieć proces stochastyczny na C_W taki, że

$$X(t) = x + \int_0^t b(X(s))\,ds + \int_0^t \Theta\,dW(s),\ \ t \geqslant 0. \tag{6}$$

2. Istnienie potoku stochastycznego (*stochastic flow*)

Kolejny rozdział poświęcony jest problemowi istnienia potoku stochastycznego (stochastic flow) dla analizowanego układu cząstek (czyli rozwiązania stochastycznego układu równań w odpowiedniej przestrzeni) – wykazane jest najpierw ogólne twierdzenie dotyczące istnienia potoku, a następnie pokazane zostało, że rozpatrywany układ spełnia założenia tego twierdzenia. Terminologia niniejszego rozdziału oparta jest na książce [35].

Na początku wprowadzić musimy kilka niezbędnych pojęć.

Definicja 2.1. *Niech $\mathbb{D}$ będzie obszarem w $\mathbb{R}^d$, $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, zaś $0 < \delta \leqslant 1,\ m \in \mathbb{N}$.*
Powiemy, że $f \in C^{m,\delta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in C^m$ oraz wszystkie pochodne $D^\alpha f,\ |\alpha| = m$ są δ–Hölderowsko ciągłe.

Wprowadźmy też dwie normy, których będziemy dalej używać:

$$\|f\|_m = \sup_{x\in\mathbb{D}} \frac{|f(x)|}{1+|x|} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in\mathbb{D}} |D^\alpha f(x)| \tag{7}$$

oraz

$$\|f\|_{m+\delta} = \|f\|_m + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{D}\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\delta}. \tag{8}$$

Definicja 2.2. *Niech $\mathbb{D}$ będzie obszarem w $\mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{D}\times\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.*
Powiemy, że $g \in \widetilde{C}^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy g jest m-krotnie różniczkowalna względem każdej zmiennej x oraz y.

$$\|g\|_m^\sim = \sup_{x,y\in\mathbb{D}} \frac{|g(x,y)|}{(1+|x|)(1+|y|)} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{x,y\in\mathbb{D}} |D_x^\alpha D_y^\alpha g(x,y)|. \tag{9}$$

$$\|g\|_{m+\delta}^\sim = \|g\|_m^\sim + \sum_{|\alpha|=m} |D_x^\alpha D_y^\alpha g|_\delta^\sim, \tag{10}$$

Definicja 2.3. *Niech $\{F(x,t),\ x \in \mathbb{D}\}$ będzie rodziną ciągłych semimartyngałów, tzn. procesów stochastycznych o rozkładzie $F(x,t) = M(x,t) + B(x,t)$, gdzie $M(x,t)$ jest rodziną ciągłych martyngałów lokalnych, zaś $B(x,t)$ – rodziną ciągłych procesów o wahaniu skończonym (tzn. dających się np. zapisać w postaci różnicy dwóch procesów rosnących).*

Załóżmy, że $B(x,t)$ można zapisać w postaci

$$B(x,t) = \int\limits_0^t b(x,s)\,ds,$$

gdzie $b(x,t)$ jest (dla dowolnego $x \in \mathbb{D}$) pewnym procesem prognozowalnym, zaś wzajemny nawias skośny martyngałów lokalnych $M(x,t)$ oraz $M(y,t)$ ma postać

$$\langle M(x,\cdot), M(y,\cdot)\rangle_t = A(x,y,t) = \int\limits_0^t a(x,y,r)\,dr,$$

gdzie $a(x,y,t)$ jest (dla dowolnych $x, y \in \mathbb{D}$) pewnym procesem prognozowalnym.

Wówczas parę $\big(a(x,y,t), b(x,t)\big)$ nazwiemy lokalną charakterystyką rodziny semimartyngałów $\{F(x,t),\ x \in \mathbb{D}\}$.

Definicja 2.4. *Powiemy, że proces $a(x,y,t) \in B^{0,1}_{ub}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on procesem prognozowalnym (lub posiada taką modyfikację) o wartościach w $\widetilde{C}^{0,1}$ oraz $\int_0^T \|a(\cdot,\cdot,t)\|^{\sim}_{0+1}\,dt < +\infty$ p.n., a ponadto istnieje nieujemna stała c taka, że dla dowolnego t nierówność $\|a(\cdot,\cdot,t)\|^{\sim}_{0+1} \leqslant c$ spełniona jest p.n.*

Definicja 2.5. *Powiemy, że proces $b(x,t) \in B^{0,1}_{ub}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b(x,t)$ jest procesem prognozowalnym o wartościach w $C^{0,1}$ oraz $\int_0^T \|b(\cdot,t)\|_{0+1}\,dt < +\infty$ p.n., a ponadto istnieje nieujemna stała c taka, że dla dowolnego t nierówność $\|b(\cdot,t)\|_{0+1} \leqslant c$ spełniona jest p.n.*

Definicja 2.6. *Powiemy że lokalna charakterystyka $\big(a(x,y,t), b(x,t)\big) \in B^{0,1}_{ub}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a(x,y,t) \in B^{0,1}_{ub}$ oraz $b(x,t) \in B^{0,1}_{ub}$.*

Załóżmy, że rodzina semimartyngałów $\{F(x,t),\ x \in \mathbb{D}\}$ posiada lokalną charakterystykę $\big(a(x,y,t), b(x,t)\big)$ oraz rozkład $F(x,t) = M(x,t) + B(x,t)$. Wówczas całka stochastyczna Itô z ciągłego procesu prognozowalnego f_t o wartościach w D, o jądrze $F(x,dt)$, zdefiniowana jest wzorem

$$\int\limits_0^t F(f_s, ds) = \int\limits_0^t M(f_s, ds) + \int\limits_0^t b(f_s, s)\,ds$$

Rozważamy dalej równania stochastyczne postaci:

$$\varphi_t = x_0 + \int\limits_{t_0}^t F(\varphi_s, ds). \tag{11}$$

Definicja 2.7. *Niech $t_0 \in [0,T]$ i $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Powiemy, że ciągły proces φ_t o wartościach w $\mathbb{R}^d$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, adaptowany do $\mathcal{F}_t$ nazwiemy rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego Itô, o jądrze $F(x,t)$, startującego z x_0 w chwili t_0, jeśli spełnia on równanie* (11).

Pierwsze istotne dla tego rozdziału twierdzenie, którego szczegółowy dowód[1] podajemy, to

Twierdzenie 2.8. *Niech $F(x,t)$ będzie ciągłym semimartyngałem o wartościach w $C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ i lokalnej charakterystyce należącej do $B^{0,1}_{ub}$. Wówczas dla dowolnych t_0 i x_0 równanie (11) posiada jednoznaczne rozwiązanie (w sensie definicji 2.7).*

Potrzebujemy jeszcze trzech definicji:

Definicja 2.9. *Niech $\varphi_{s,t}(x,\omega),\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}^d$ będzie ciągłym polem losowym o wartościach w $\mathbb{R}^d$, zdefiniowanym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Wówczas dla p.w. ω $\varphi_{s,t}(\omega) \equiv \varphi_{s,t}(\cdot,\omega)$ definiuje ciągłe przekształcenie $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dla dowolnych s i t. Nazywamy je stochastycznym potokiem homeomorfizmów forward, jeśli istnieje zbiór $\mathcal{N}$ miary zero w Ω taki, że dla dowolnego $\omega \in \mathcal{N}^c$ rodzina ciągłych przekształceń $\{\varphi_{s,t}(\omega)\colon s,t \in [0,T]\}$ definiuje potok homeomorfizmów, tzn spełnia warunki:*
$i)$ $\varphi_{s,u}(\omega) = \varphi_{t,u}(\omega) \circ \varphi_{s,t}(\omega)\ \forall s,t,u \in [0,T]$,
$ii)$ $\varphi_{s,s}(\omega) = Id(\omega)\ \forall s \in [0,T]$,
$iii)$ przekształcenie $\varphi_{s,t}(\omega)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest homeomorfizmem „na” $\forall s,t \in [0,T]$.

Definicja 2.10. *Rodzina ciągłych semimartyngałów $F(x,t),\ x \in D$ o rozkładzie $F(x,t) = M(x,t) + B(x,t)$ należy do klasy $C^{k,\delta}$ (jest rodziną $C^{k,\delta}$-semimartyngałów), jeśli $M(x,t)$ jest ciągłym martyngałem lokalnym o wartościach w $C^{k,\delta}$ i $B(x,t)$ jest ciągłym procesem o wartościach w $C^{k,\delta}$ takim, że $D^\alpha_x B(x,t),\ x \in D, |\alpha| \leqslant k$ są procesami o wahaniu skończonym.*

Definicja 2.11. *Potok stochastyczny forward $\varphi_{s,t}$ o wartościach w G nazwiemy potokiem $C^{k,\delta}$-semimartyngałów, jeśli $\forall s$ $\varphi_{s,t},\ t \in [s,T]$ jest ciągłym $C^{k,\delta}$- semimartyngałem,adaptowanym do $(\mathcal{F}_{s,t})_{t\in[s,T]}$-filtracji generowanej przez potok $\varphi_{s,t}$.*

Po wprowadzeniu niezbędnego aparatu pojęciowego możemy teraz sformułować wyniki, uzyskane w niniejszym rozdziale.

Najpierw dowodzimy lematu:

Lemat 2.12. *Przy poczynionych wcześniej założeniach (H2) o potencjale Φ funkcja*

$$b(x) \equiv b\left((q_1,p_1,\ldots,q_N,p_N)^T\right) = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{m} \\ -\sum_{j\neq 1} \nabla\Phi(q_1-q_j) \\ \vdots \\ \frac{p_N}{m} \\ -\sum_{j\neq N}\nabla\Phi(q_N-q_j) \end{pmatrix}$$

jest lipschitzowska z pewną stałą dodatnią $L = L(m,N,L_1)$ (L_1 to stała Lipschitza dla $\widetilde{\Phi}'$, patrz: (H2) 6)).

Następnie zaś wykazujemy twierdzenie pokazujące, iż rozważany przez nas układ posiada jednoznaczne rozwiązanie (posiadające pewną dodatkową własność):

Twierdzenie 2.13. *Jeżeli spełnione są założenia (H1), (H2) oraz (H3), to układ* (4) *z hamiltonianem* (1) *posiada dla dowolnego warunku początkowego $x \in \Gamma_0$ jednoznacz-*

[1] opierający się na szkicach dowodów lematów z [35] i stanowiący uproszczenie dowodu omawianego tam ogólniejszego przypadku.

ne rozwiązanie. Ponadto istnieje modyfikacja rodziny rozwiązań tego układu, będąca stochastycznym potokiem homeomorfizmów forward.

Dowód powyższego twierdzenia polega na sprawdzeniu spełnienia założeń twierdzenia [35], Theorem 4.5.1 (i), str. 155.

3. Niektóre własności rozwiązania zagadnienia

Rozdział trzeci zawiera omówienie dwóch własności rozwiązania zagadnienia: ciągłej zależności oraz różniczkowalności względem warunku początkowego. Zostało tu wykazane stwierdzenie, będące poprawioną i zaadaptowaną do potrzeb rozprawy wersją stwierdzenia z [18] (Proposition 3.3, str. 62):

Stwierdzenie 3.1. *Jeżeli funkcja wektorowa b jest lipschitzowska ze stałą $L > 0$, to przyrost w przedziale czasu $[0, T]$ wartości procesu $X(t, x)$, spełniającego równanie* (6)*, względem zmiennych z przestrzeni fazowej, szacuje się w następujący sposób:*

$$\|X(t,x) - X(t,y)\|_{C_W} \leqslant \sqrt{2}e^{L^2T^2}|x-y|,\ x,y \in \Gamma_0. \tag{12}$$

Następnie udowodniony został pomocniczy lemat

Lemat 3.2. *Jeżeli potencjał Φ spełnia założenia (H2), to funkcja wektorowa $b(\cdot)$ należy do przestrzeni $C_b^2(\Gamma)$ funkcji $f\colon \Gamma \to \Gamma$ dwukrotnie różniczkowalnych z jednostajnie ciągłą i ograniczoną drugą pochodną $D^2 f$ oraz z normą*

$$\|f\|_2\colon = \sup_{x\in\Gamma}|f(x)| + \sup_{x\in\Gamma}|Df(x)| + \sup_{x\in\Gamma}\|D^2f(x)\|, \tag{13}$$

po czym wykazane zostało twierdzenie, będące poprawioną i zaadaptowaną do potrzeb rozprawy wersją twierdzenia z [18] (Theorem 3.6, str. 65):

Twierdzenie 3.3. *Jeżeli funkcja $b(\cdot)$ jest lipschitzowska ze stałą $L > 0$ i ponadto należy do przestrzeni $C_b^2(\Gamma)$, to rozwiązanie $X(t,x)$ zagadnienia* (4) *jest różniczkowalne względem x w przestrzeni Banacha $C_W\Big([0,T]; L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)\Big)$ i dla dowolnego wektora $h \in \Gamma$ zachodzi wzór*

$$DX(t,x)\cdot h = \eta^h(t,x) \quad \text{p.n.}, \tag{14}$$

gdzie $\eta^h(t,x)$ jest (jedynym) rozwiązaniem równania całkowego

$$\eta^h(t,x) = h + \int_0^t Db(X(s,x))\cdot\eta^h(s,x)\,ds,\ t \geqslant 0 \quad \text{p.n.} \tag{15}$$

Ponadto

$$\|\eta^h(t,x)\|_{C_W} \leqslant \sqrt{2}e^{L^2T^2}|h|,\ x \in \Gamma. \tag{16}$$

Dowód powyższego twierdzenia wzorowany jest na dowodzie z [18].

4. Stochastyczne równanie Liouville'a

Jednym z kluczowych narzędzi zarówno mechaniki klasycznej, jak i statystycznej, jest tzw. równanie Liouville'a, opisujące ewolucję w czasie funkcji gęstości rozkładu położenia układu cząstek w przestrzeni fazowej (czyli ewolucję funkcji opisującej gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zdarzenia, że analizowany układ cząstek będzie znajdował się po pewnym czasie w zadanym obszarze i cząstki będą miały prędkości z pewnego zakresu).

Warto przypomnieć, iż w klasycznym przypadku, dla układu N identycznych cząstek, poruszających się zgodnie z zasadami dynamiki Newtona, których ruch opisany jest (w ujęciu hamiltonowskim) układem równań:

$$\begin{cases} dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dt \\ dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dt \end{cases} \tag{17}$$

równanie Liouville'a dla funkcji $P \equiv P(t, X)$, będącej (deterministyczną) gęstością rozkładu położenia cząstek w przestrzeni fazowej przybiera postać (por. [11], str. 11):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \frac{\partial P}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P}{\partial p_i} = 0 \tag{18}$$

i po wprowadzeniu oznaczeń $x_i = (q_i, p_i)$, $b_i = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $b(x) = (b_1, \ldots, b_N)$ może zostać zapisane w symbolicznej postaci

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i \cdot P) = 0. \tag{19}$$

W pracy [34] R. Kubo podał postać stochastycznego równania Liouville'a dla układu cząstek, jednak przy założeniu istnienia hamiltonianu. Z założenia tego wynika fakt, iż dla takiego układu istnieje miara niezmiennicza i jest to miara Lebesgue'a.
W rozdziale tym wyprowadzamy równanie Liouville'a dla układu (4), który w ogólności nie musi być układem hamiltonowskim. W związku z tym miara niezmiennicza (której istnienie założymy) nie musi być miarą Lebesgue'a. Jest to więc uogólnienie wyniku Kubo z pracy [34].

Na wstępie musimy wprowadzić pojęcie półgrupy operatorów, stowarzyszonej z rozwiązaniem rozważanego zagadnienia. Jest to rodzina $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ operatorów $P_t \colon B_b(\Gamma) \to B_b(\Gamma)$, związana z rozwiązaniem całkowym $X(t, x)$ zagadnienia (4):

$$P_t\phi(x) = \mathbb{E}[\phi(X(t, x))],\ \phi \in B_b(\Gamma),\ t \geqslant 0,\ x \in \Gamma, \tag{20}$$

gdzie $B_b(\Gamma) = \{f \colon \Gamma \to \Gamma \text{ t.że } f - \text{borelowska i ograniczona}\}$.

Zakładamy dalej, iż półgrupa operatorów P_t, stowarzyszona z rozwiązaniem zagadnienia (4), posiada miarę niezmienniczą μ (określoną na sigma-ciele borelowskich podzbiorów zbioru Γ), tzn. że dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subseteq \Gamma$ oraz dowolnego $t \geqslant 0$ zachodzi związek

$$\mu\Big(P_t^{-1}(A)\Big) = \mu(A). \tag{21}$$

Dodatkowo poczynimy następujące założenie (M) o mierze niezmienniczej μ:

— μ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a i jej gęstość $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ jest funkcją niezmienniczą względem permutacji swoich zmiennych $x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, tzn. spełniony jest warunek $d\mu(X) = g(X)\,dX$ dla pewnej funkcji $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Głównym wynikiem autora w niniejszym rozdziale jest twierdzenie

Twierdzenie 4.1. *Niech X będzie procesem stochastycznym, należącym do przestrzeni $C_W\Big([0,T]; L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \Gamma)\Big)$, będącym rozwiązaniem całkowym zagadnienia*

$$\begin{cases} dX(t) = b\Big(X(t)\Big)\,dt + \Theta\,dW(t), \; t \geqslant 0 \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{22}$$

gdzie $X_0 \in \widetilde{\Gamma}$. Niech $P(t,\cdot,\omega)$ będzie gęstością losową o gęstości początkowej $P_0(\cdot,\omega) \equiv P(0,\cdot,\omega)$. Załóżmy, że półgrupa operatorów, danych wzorem (20)*, stowarzyszona z rozwiązaniem zagadnienia* (22)*, posiada miarę niezmienniczą μ, spełniającą warunek (M). Wówczas gęstość P spełnia następujące stochastyczne równanie Itô (zwane stochastycznym równaniem Liouville'a):*

$$\begin{aligned} P(t,X,\omega)g(X) = P_0(X) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial X}\Big(b(s,X)P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds \\ +\frac{1}{2}\int_0^t \Theta^*\Theta\frac{\partial^2}{\partial X^2}\Big(P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,ds - \int_0^t \Theta\frac{\partial}{\partial X}\Big(P(s,X,\omega)g(X)\Big)\,dW(s). \end{aligned} \tag{23}$$

5. Hierarchia BBGKY dla stochastycznego układu cząstek

W rozdziale piątym przy użyciu równania Liouville'a wyprowadzamy hierarchię BBGKY dla stochastycznego układu cząstek i zwracamy uwagę na różnice i podobieństwa względem hierarchii BBGKY w przypadku klasycznym.

Przypomnijmy, że w przypadku klasycznym, to znaczy dla układu N identycznych cząstek, poruszających się zgodnie z zasadami dynamiki Newtona, których ruch jest opisany (w ujęciu hamiltonowskim) układem równań

$$\begin{cases} dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dt \\ dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dt, \end{cases} \tag{24}$$

hierarchia BBGKY równań różniczkowo-całkowych, opisujących ewolucję w czasie funkcji

$$P^{(s)} \equiv P^{(s)}(q_1,p_1,q_2,p_2,\ldots,q_s,p_s,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{6(N-s)}} P(q_1,p_1,\ldots,q_N,p_N,t)\prod_{j=s+1}^{N} dq_j\,dp_j,$$

będącej (deterministyczną) gęstością rozkładu położenia dowolnego układu s cząstek w przestrzeni fazowej przybiera postać (por. [11], str. 58):

$$\frac{\partial P^{(s)}}{\partial t} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s} p_i \cdot \frac{\partial P^{(s)}}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{s} \nabla\Phi(q_i - q_l)\right)\frac{\partial P^{(s)}}{\partial p_i}$$
$$- (N-s)\sum_{i=1}^{s}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\Phi(q_i - q_{s+1})\frac{\partial P^{(s+1)}}{\partial p_i}\, dq_{s+1}\, dp_{s+1} = 0. \tag{25}$$

W analizowanym przez nas przypadku wprowadzamy rodzinę gęstości losowych

$$P^{(s)}(q_1, p_1, q_2, p_2, \ldots, q_s, p_s, t)$$
$$= \int_{\Lambda^{N-s}} P(q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N, t) g(q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N) \prod_{j=s+1}^{N} dx_j\, dw_j, \tag{26}$$

odpowiadających gęstości rozkładu położenia układu dowolnych s cząstek w przestrzeni fazowej ($s \in \{1, 2, \ldots, N\}$), gdzie $\Lambda^{N-s} = \mathbb{R}^{6(N-s)} \times \Omega^{N-s}$, przy czym Ω^{N-s} jest dziedziną, na której określonych jest $6(N-s)$ jednowymiarowych procesów Wienera.

Głównym wynikiem tego rozdziału, a zarazem najważniejszym wynikiem całej rozprawy jest

Twierdzenie 5.1. *Niech X będzie procesem stochastycznym, należącym do przestrzeni $C_W\Big([0,T]; L^2\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^{6N}\big)\Big)$, będącym rozwiązaniem całkowym zagadnienia*

$$\begin{cases} dX(t) = b\big(X(t)\big)\, dt + \Theta\, dW(t), \ t \geqslant 0 \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{27}$$

gdzie $X_0 \in \Gamma_0$, zaś b oraz Θ spełniają założenia podane w rozdziale 1.
Niech $P(t, \cdot, \omega)$ będzie gęstością losową o gęstości początkowej $P_0(\cdot, \omega) \equiv P(0, \cdot, \omega)$. Załóżmy, że półgrupa operatorów, danych wzorem (20)*, stowarzyszona z rozwiązaniem zagadnienia* (27)*, posiada miarę niezmienniczą μ, absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a, o gęstości $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, będącej funkcją niezmienniczą względem permutacji swoich zmiennych $x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \ldots, N\}$. Wówczas gęstość $P^{(s)}$ spełnia następujące stochastyczne równanie Itô:*

$$\Bigg[\frac{\partial P^{(s)}}{\partial t} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{s} p_i \frac{\partial P^{(s)}}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{s} \nabla\Phi(q_i - q_l)\right)\frac{\partial P^{(s)}}{\partial p_i}$$
$$-(N-s)\sum_{i=1}^{s}\int_{\mathbb{R}^6\times\Omega^1} \nabla\Phi(q_i - q_{s+1})\frac{\partial P^{(s+1)}}{\partial p_i}\, dx_{s+1}\, dw_{s+1}\Bigg]\, dt \tag{28}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{s} \theta_i^* \theta_i \frac{\partial^2 P^{(s)}}{\partial x_i^2}\right] dt - \left[\sum_{i=1}^{s} \theta_i \frac{\partial P^{(s)}}{\partial x_i}\right] dW(t).$$

6. Dodatek

Ostatni rozdział zawiera dyskusję kwestii istnienia miary niezmienniczej dla półgrupy operatorów stowarzyszonych z rozwiązaniem analizowanego zagadnienia – w wyprowadzeniu równania Liouville'a oraz hierarchii BBGKY założono jej istnienie. Omawiamy najpierw znane sytuacje, gdy miara ta istnieje oraz posiada na ogół gęstość względem miary Lebesgue'a, zadaną w najprostszych przypadkach jawnym wzorem. Jest m. in. dla tzw. układów gradientowych, czyli dla równań stochastycznych postaci

$$dX(t) = \frac{1}{2}\nabla U(X(t))\,dt + Q^{1/2}\,dW(t), \tag{29}$$

gdzie U jest funkcją rzeczywistą klasy C^2 z ograniczonymi pochodnymi, zaś $Q^{1/2}$ to pewna macierz. Sugerujemy, iż na to, by rozpatrywany w niniejszej rozprawie układ był układem gradientowym, potrzeba i wystarcza, by istniała funkcja harmoniczna U, spełniająca w obszarze Γ układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial p_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial q_N} = \frac{\partial H}{\partial p_N}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial p_N} = -\frac{\partial H}{\partial q_N}. \end{cases} \tag{30}$$

Znalezienie takiej funkcji okazało się jednak zadaniem, którego autorowi rozwiązać się nie udało, dlatego ta metoda (przynajmniej na razie) nie prowadzi do znalezienia miary niezmienniczej.
Następnie rozpatrujemy przypadek układów dyssypatywnych, czyli równań stochastycznych postaci

$$dX(t) = \Big(AX(t) + F(X(t))\Big)\,dt + Q^{1/2}\,dW(t), \tag{31}$$

gdzie A jest odwzorowaniem liniowym, $Q^{1/2}$ – dowolną macierzą, zaś
$G(x) = Ax + F(x)$ jest tzw. *przekształceniem dyssypatywnym*, czyli spełniającym na pewnym obszarze warunek

$$\langle G(x) - G(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle \leqslant 0.$$

Pokazujemy, że dla analizowanego w niniejszej rozprawie układu cząstek można wykazać istnienie miary niezmienniczej na pewnym obszarze, nie będącym jednak całą przestrzenią fazową. Aby użyć techniki dowodzenia istnienia miary niezmienniczej dla układów dyssypatywnych, opisanej w §3.4, [18], musi być spełnione dodatkowe założenie:

$$\sup_{x,\overline{x}\in\Gamma}\left\{\frac{\langle b(x) - b(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle}{|x-\overline{x}|^2}\right\} < 0. \tag{32}$$

Warunek ten jednak nie jest spełniony na całej przestrzeni fazowej Γ, a jedynie na pewnym jej podzbiorze $\mathcal{D}$, zatem nie możemy użyć przedstawionej metody do dowodu istnienia miary niezmienniczej analizowanego układu na całym Γ.

Najbliższym kierunkiem badań autora nad niniejszym układem cząstek będzie bez wątpienia otwarta ciągle kwestia istnienia miary niezmienniczej dla półgrupy operatorów związanych z tym układem, jej absolutna ciągłość względem miary Lebesgue'a i w tym wypadku ewentualna postać tej miary (gęstość względem miary Lebesgue'a albo miary gaussowskiej). O wiele bardziej złożonym (i wymagającym innego niż prezentowane w rozprawie podejścia) problemem jest kwestia istnienia miary niezmienniczej dla układu cząstek, będących sztywnymi kulami, doznającymi zderzeń sprężystych i stochastycznych zaburzeń oraz ścisłe wyprowadzenie hierarchii BBGKY dla takiego układu cząstek.

Literatura

[1] L. Arkeryd, *On the Boltzmann Equation*, Arch. Rational Mech. Anal., Springer **45**, 1–16 (1972).

[2] L. Arkeryd, *On the Boltzmann Equation Part II: The Full Initial Value Problem*, Arch. Rational Mech. Anal., Springer **45**, 17–34 (1972).

[3] D. Bernoulli, *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Strasbourg, Johann Reinhold Dulsseke (1738).

[4] N. N. Bogolubow, *The Problem of Dynamical Theory in Statistical Physics (in Russian)*, Gostekhizdat, Moscow-Leningrad (1946).

[5] L. Boltzmann, *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*, Wien. Ber. **66**, 275–370 (1872).

[6] L. Boltzmann, *Entgegnung auf die Wärmetheoretischen Betrachtungen des Hrn. E. Zermelo*, Ann. d. Phys. **57**, 567–578 (1896).

[7] M. Born, H. S. Green, *A General Kinetic Theory of Liquids*, Proc. R. Soc. Lond., **A188**, 168–201 (1947).

[8] M. Born, H. S. Green, *A General Kinetic Theory of Fluids*, Cambridge University Press (1949).

[9] T. Carleman, *Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann*, Acta Math., Springer **60**, 91–146 (1933).

[10] C. Cercignani, *On the Boltzmann Equation for Rigid Spheres*, Transp. Theory Stat. Phys., **2**, 211–225 (1972).

[11] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Appl. Math. Sci., vol. **67**, Springer-Verlag (1988).

[12] C. Cercignani, *Theory and Application of the Boltzmann Equation*, Scottish Academic Press, Edinburgh and London (1975).

[13] C. Cercignani, V. I. Gerasimienko, D. Ya. Petrina, *Many Particle Dynamics and Kinetic Equations*, Math. and Its Appl., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).

[14] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Springer series in Appl. Math. **106**, Springer, New York (1994).

[15] S. Chapman, *On the Law of Distribution of Molecular Velocities, and on the Theory of Viscosity and Thermal Conduction, in a Non-Uniform Simple Monatomic Gas*, Phil. Trans. Roy. Soc., London **A216**, 279–348 (1916).

[16] R. Clausius, *Über die Art der Bewegung, die wir Wärme nennen*, Ann. d. Phys., **100**, 353–379 (1857).

[17] R. Clausius, *Über die mittlere Länge der Wege, welche bei der Molecularbewegung gasförmiger Körper von den einzelnen Molecülen zurückgelegt werden*, Ann. d. Phys., **105**, 239–258 (1858).
[18] G. Da Prato, *Kolmogorov Equations for Stochastic PDEs*, Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Birkhäuser, Basel (2004).
[19] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*, London Mathematical Society Lecture Notes, Cambridge Univ. Press (1996).
[20] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).
[21] R. J. DiPerna, P. L. Lions, *On the Cauchy Problem for Boltzmann Equations: Global Existence and Weak Stability*, Ann. Math., **130**, 321–366 (1989).
[22] J. R. Dorfman, *Wprowadzenie do teorii chaosu w nierównowagowej mechanice statystycznej*, PWN, Warszawa (2001).
[23] A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Ann. d. Phys., **322**, 549–560 (1905).
[24] A. Einstein, *Zur Theorie der Brownschen Bewegung*, Ann. d. Phys., **324**, 371–381 (1906).
[25] D. Enskog, *Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen*, Rozprawa doktorska, Uppsala University (1917).
[26] L. C. Evans, *Równania Różniczkowe Cząstkowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (2002).
[27] J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Yale University Press (1902).
[28] H. Grad, *On the Kinetic Theory of Rarified Gases*, Comm. Pure Appl. Math., **2**, 331–407 (1949).
[29] H. Grad, *Principles of the Kinetic Theory of Gases*, Hand. Phys., **12**, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1958).
[30] R. Z. Hasminskii, *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoff and Noordhoff, Groningen (1980).
[31] D. Hilbert, *Begründung der kinetischen Gastheorie*, Math. Ann., **72**, 562–577 (1912).
[32] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Math. **113**, Springer, New York (1988).
[33] J. G. Kirkwood, *The Statistical Mechanical Theory of Transport Process*, J. Chem. Phys., **14**, 180–201 (1946); **15**, 72–76 (1947).
[34] R. Kubo, *Stochastic Liouville Equations*, J. Math. Phys. **4**, 174–183 (1963).
[35] H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **24**, Cambridge University Press, Cambridge (1990).
[36] J. Loschmidt, Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Classe 73, 128-–142 (1876).
[37] J. C. Maxwell, *Illustrations of the Dynamical Theory of Gases*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, **19**, 19–32 (1860).
[38] D. Morgenstern, *General Existence and Uniqueness Proof for Spatially Homogeneous Solutions of the Maxwell-Botzmann Equation in the Case of Maxwellian Molecules*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **40**, 719–721 (1954).
[39] M. Nye, *Molecular Reality: A Perspective on the Scientific Work of Jean Perrin*,MacDonald, London (1972).
[40] A. Palczewski, *Równania Różniczkowe Zwyczajne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa (1999).

[41] A. Palczewski, *The BBGKY hierarchy for a stochastic particle system*, referat na "A-HYKE-3 Meeting. Third annual meeting of the HYKE network", Rzym 13-15.04.05

[42] J. Perrin, *L'Agitation Moléculaire et le Mouvement Brownien*, C. R. Acad. Sci., Paris, **146**, 967—970 (1908).

[43] J. Perrin, *La Loi de Stokes et le Mouvement Brownien*, C. R. Acad. Sci., Paris, **147** 475–529 (1908).

[44] S. Peszat, J. Zabczyk, *Stochastyczne Równania Ewolucyjne*, Wydawnictwa ICM, Warszawa (2004).

[45] J. von Plato, *Creating Modern Probability*, Cambridge University Press (1994).

[46] A. Ya. Povzner, *On the Boltzmann Equation in the Kinetic Theory of Gases*, Mat. Sbornik, **58**, 65-–86 (1962).

[47] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Berlin, New York (1994).

[48] M. Smoluchowski, *Zarys Teorii Kinetycznej Ruchów Browna i Roztworów Mętnych*, Bulletin International de l'Academie des Sciences et des Lettres de Cracovie, Kraków (1906).

[49] A. S. Sznitman, *Propagation of Chaos for a System of Annihilating Brownian Spheres, Comm. Pure Appl. Math.,* **40***, 663–690 (1987).*

[50] J. Yvon, *La Théorie Statistique des Fluids et l'Équation d'État*, Hermann, Paris (1935).

[51] E. Zermelo, *Über einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmtheorie*, Ann. d. Phys., **57**, 485–494 (1896).