**Maria Donten-Bury**

# Konstrukcje rozmaitości algebraicznych przez działanie grup skończonych

autoreferat rozprawy doktorskiej

Na działaniach grup opartych jest wiele konstrukcji rozmaitości algebraicznych. Symetrie pochodzące od działania, pojawiające się w sposób naturalny przy takich konstrukcjach, często okazują się skutecznym narzędziem pomagającym zrozumieć strukturę badanych obiektów geometrycznych. Zatem jeśli pewna klasa rozmaitości została zdefiniowana z użyciem działania grupy, to można oczekiwać, że będzie ona mieć dobre własności. W szczególności sprawdzanie obiektów, na których istnieje działanie grupy, bywa dobrym pomysłem na konstrukcję przykładów obiektów o określonych własnościach. Ponadto symetrie zazwyczaj zmniejszają złożoność badanych obiektów, więc podjęcie badań bardzo ogólnej klasy rozpoczynając od przypadków z działaniem grupy często daje dobre rezultaty i pozwala na zdobycie doświadczeń przydatnych do rozszerzenia ich na inne przypadki. Spośród licznych możliwości realizacji tych pomysłów przedstawiamy dokładniej te, które mają bezpośredni związek z treścią omawianej rozprawy doktorskiej.

Naturalnym pomysłem jest rozpatrywanie ilorazów rozmaitości przez działanie grupy (chociaż zdefiniowanie takich ilorazów w geometrii algebraicznej nie jest natychmiastowe). Najprostsze przykłady to ilorazy przestrzeni afinicznych przez działania grup skończonych. Pewne własności takich ilorazów w przypadku dwuwymiarowym, czyli osobliwości ilorazowych powierzchni, są przedmiotem badań pierwszej części pracy. Dokładniej, opisujemy strukturę pierścieni Coxa rozwiązań minimalnych tych osobliwości. Bardzo istotnym spostrzeżeniem jest, że takie rozwiązanie można skonstruować biorąc iloraz rozmaitości afinicznej odpowiadającej jego pierścieniowi Coxa przez pewne działanie torusa.

Badanie rozwiąząń osobliwości ilorazowych związane jest z konstrukcją Kummera powierzchni K3, zob. [Kum75], oraz jej uogólnieniami, które można wykorzystać na przykład do otrzymywania rozmaitości Calabi-Yau, będących ważnym elementem teorii strun. Problem rozważany w pierwszej części rozprawy doktorskiej ma swój początek właśnie w pracach nad uogólnieniem konstrukcji Kummera, zaproponowanym w [AW10] i badanym również w [Don11].

Druga część rozprawy dotyczy modeli geometrycznych procesów Markowa na drzewach filogenetycznych, czyli rozmaitości algebraicznych związanych ze strukturami kombinatorycznymi opisującymi modele procesów ewolucji. Ograniczamy się do badania takich struktur, które są zdefiniowane za pomocą pewnego działania skończonej grupy. Głównym celem jest opisanie własności geometrycznych odpowiadających im rozmaitości. Znane wyniki dotyczące tego zagadnienia (m.in. [SS05, DK09, Mic11]), w tym nasze, zaprezentowane w drugiej części rozprawy (pochodzące z prac [BDW09], wspólnej z W. Buczyńską i J. Wiśniewskim, oraz [DBM12], wspólnej z M. Michałkiem), pokazują, że dla klasy drzew filogenetycznych z działaniem grupy można udowodnić wiele ciekawych twierdzeń, które nie uogólniają się jednak na szerszą klasę drzew.

Kolejną klasą rozmaitości konstruowanych przez działanie grupy, tym razem nieskończonej, są rozmaitości toryczne. Istnienie działania torusa z otwartą orbitą prowadzi do bardzo użytecznego kombinatorycznego opisu rozmaitości. Ponadto każdą normalną rozmaitość toryczną można skonstruować przez podzielenie pewnego otwartego podzbioru przestrzeni afinicznej przez działanie torusa. To spostrzeżenie stanowi ważny element dowodu jednego z głównych wyników pierwszej części pracy. Mimo że rozmaitości toryczne nie są otrzymywane przez działanie grupy skończonej, wspominamy o nich tutaj, ponieważ są jednym z najbardziej znaczących narzędzi w obu częściach pracy. Z tego powodu poświęcamy drugi rozdział pracy na zebranie ich własności, do których odwołujemy się dalej.

Mogłoby się wydawać, że dwa tematy prac stanowiących podstawę rozprawy – pierścienie Coxa rozwiązań minimalnych osobliwości ilorazowych i modele geometryczne drzew filogenetycznych – mają niewiele wspólnych elementów poza użyciem działania grupy do konstrukcji badanych obiektów. Jednak w trakcie pracy okazało się, że wymagają one użycia tego samego narzędzia – geometrii torycznej – co bardzo ułatwiło równoległe zajmowanie się tymi zagadnieniami. Ponadto istnieje nawet bezpośredni związek między tymi tematami: modele binarne (czyli z działaniem grupy $\mathbb{Z}_2$) drzew filogenetycznych prowadzą do pewnych degeneracji spektrów pierścieni Coxa na rozdmuchaniach przestrzeni rzutowych, zob. [SX10].

Przyjmujemy dalej, że wszystkie rozważane rozmaitości algebraiczne są zdefiniowane nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

Numeracja twierdzeń pochodzi z omawianej rozprawy doktorskiej. Podane są również odnośniki do prac, w których te wyniki pojawiły się po raz pierwszy.

## Pierścienie Coxa rozwiązań minimalnych dwuwymiarowych osobliwości ilorazowych

Pierścień Coxa normalnej rozmaitości algebraicznej $X$ definiujemy jako moduł

$$\mathrm{Cox}(X) = \bigoplus_{[D]\in \mathrm{Cl}(X)} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)),$$

z gradacją zadaną przez grupę klas $\mathrm{Cl}(X)$, w którym mnożenie pochodzi od mnożenia funkcji wymiernych na $X$. Dokładny opis tej konstrukcji znajduje się w [ADHL10, 4.1, 4.2].

Można rozpatrywać Cox($X$) z geometrycznego punktu widzenia, jeśli tylko jest on skończenie generowany. Załóżmy, że grupa Picarda Pic($X$) jest beztorsyjna i rozważmy działanie torusa Picarda rozmaitości $X$

$$T = \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(X), \mathbb{C}^*)$$

na Spec(Cox($X$)). Wówczas można odtworzyć $X$ z jej pierścienia Coxa biorąc iloraz geometryczny otwartego podzbioru Spec(Cox($X$)) przez $T$. To oznacza, że pierścień Coxa zawiera wiele informacji dotyczących geometrii rozmaitości: $X$ jest wyznaczona przez Cox($X$) oraz pewne dodatkowe dane związane z gradacją w tym pierścieniu (zob. np. [LV09]).

W pierwszej części pracy doktorskiej badamy minimalne rozwiązania zespolonych dwuwymiarowych osobliwości ilorazowych. Wprowadzamy następujące oznaczenia: $X$ to minimalne rozwiązanie osobliwości ilorazowej $\mathbb{C}^2/G$, gdzie $G$ to skończona (mała) podgrupa $GL(2,\mathbb{C})$. Celem pracy jest zrozumienie struktury pierścieni Coxa tych rozwiązań. Dowodzimy, że są one skończenie generowane, i podajemy metody pozwalające opisać je w terminach generatorów i relacji. Odnotujmy, że rozpatrywanym przypadku można rozważać działanie torusa Picarda, ponieważ grupa klas $\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Pic}(X)$ minimalnego rozwiązania osobliwości $\mathbb{C}^2/G$ jest beztorsyjna.

## Motywacja i obecny stan wiedzy

Wyniki opisane w tej części rozprawy można uznać za wprowadzenie do badania pierścieni Coxa rozwiązań osobliwości ilorazowych w wyższych wymiarach. Ważną motywacją dla zajmowania się tym problemem jest możliwość przedstawienia rozmaitości $X$ jako ilorazu geometrycznego Spec(Cox($X$)), pod warunkiem, że Cox($X$) jest skończenie generowany. Mówiąc ogólnie, jeśli byłoby możliwe opisanie pierścienia Coxa (hipotetycznego) rozwiązania $X$ danej osobliwości w oparciu wyłącznie o pewne ograniczone informacje o geometrii $X$ (dostępne bez znajomości konstrukcji $X$), być może udałoby się uzyskać nowe rozwiązania, opisane jako ilorazy geometryczne otwartych podzbiorów Spec(Cox($X$)). Przypomnijmy, że chociaż w wyższych wymiarach można zdefiniować minimalne rozwiązania osobliwości (w kontekście teorii modeli minimalnych), to nie otrzymuje się w ten sposób jednoznacznie określonego rozwiązania. Może się zdarzyć, że istnieje zbiór rozwiązań (lub częściowych rozwiązań), izomorficznych w kowymiarze 1 i powiązanych przez tzw. flopy (zob. np. [Rei92]). Jednak takie rozwiązania mają ten sam pierścień Coxa, czyli zawiera on informacje o całej grupie rozwiązań, co stanowi kolejny argument za tym, że warto zrozumieć jego strukturę. Szczególnie interesujący ze względu na możliwe zastosowania do innych ważnych problemów matematycznych jest przypadek czterowymiarowych symplektycznych osobliwości ilorazowych i ich rozwiązań symplektycznych. Projekt rozpoczęty pracami opisanymi w tej części rozprawy jest kontynuowany we współpracy z J. Wiśniewskim, [DBW13].

Kolejną motywacją dla badań pierścieni Coxa rozwiązań osobliwości ilorazowych jest związek z bardziej złożonymi konstrukcjami rozmaitości algebraicznych, a szczególnie z uogólnioną konstrukcją Kummera, zaproponowaną przez Andreattę i Wiśniewskiego w [AW10]. Początkowym pomysłem było rozszerzenie wyników pracy [Don11] o opis pierścieni Coxa trójwymiarowych rozmaitości Kummera, konstruowanych przez rozwiązanie osobliwości pewnych ilorazów rozmaitości abelowych przez działania grup skończonych. Ten problem wyewoluował do bardziej elementarnego pytania, dotyczącego sytuacji lokalnej, czyli pierścieni Coxa rozwiązań ilorazów przestrzeni afinicznych. W trakcie prac okazało się ono przynajmniej tak samo interesujące, jak wyjściowy problem. Wobec tego koncentrujemy się na badaniu rozwiązań ilorazów przestrzeni afinicznych, a zastosowanie tych wyników do opisu pierścieni Coxa uogólnionych rozmaitości Kummera może być ciekawym pomysłem na kontynuację badań.

Obecnie niewiele wiadomo o pierścieniach Coxa rozwiązań osobliwości ilorazowych. Pierwsza próba badania tych obiektów to niedawna praca [FGAL11]. Autorzy znajdują jedyną relację pomiędzy generatorami $\mathrm{Cox}(X)$, gdzie $X$ jest rozwiązaniem minimalnym osobliwości Du Vala (czyli ilorazu $\mathbb{C}^2$ przez $G \subset SL(2,\mathbb{C})$). Jednak metody zastosowane do otrzymania tego wyniku wymagają użycia równań zanurzenia badanej osobliwości w przestrzeń afiniczną, wobec czego wydają się bardzo trudne do uogólnienia na szerszą klasę osobliwości. Ponadto relację w pierścieniu Coxa dla rozwiązań minimalnych dowolnych osobliwości ilorazowych powierzchni można obliczyć za pomocą wyników z teorii rozmaitości z działaniem torusa, którego największe orbity mają kowymiar 1 (tzw. działanie o złożoności 1), zob. [HS10]. Jednak te wyniki również nie przenoszą się na osobliwości ilorazowe w wyższych wymiarach, wobec tego nie wykorzystujemy ich, ponieważ głównym celem naszej pracy jest rozwinięcie metod, które można byłoby zastosować także do opisania pierścieni Coxa dla szerszej klasy rozwiązań osobliwości ilorazowych.

### Wyniki pierwszej części pracy

Głównymi wynikami dotyczącymi tego zagadnienia są dwie metody opisu $\mathrm{Cox}(X)$. Po pierwsze, przedstawiamy $\mathrm{Cox}(X)$ jako iloraz pierścienia wielomianów przez ideał główny generowany przez sumę trzech jednomianów, które można wyznaczyć kombinatorycznie na podstawie opisu dywizora wyjątkowego rozwiązania.

**Twierdzenie 4.3.3.** ([DB12, 5.3]) *Niech $X$ będzie minimalnym rozwiązaniem osobliwości ilorazowej powierzchni $\mathbb{C}^2/G$. Przez $n$ oznaczmy liczbę krzywych w dywizorze wyjątkowym tego rozwiązania. Wówczas* $\mathrm{Cox}(X)$ *jest skończenie generowaną* $\mathbb{C}$*-algebrą. Ponadto* $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cox}(X))$ *jest hiperpowierzchnią w $\mathbb{C}^{n+3}$, której równanie (trójmian) można wyznaczyć, znając współczynniki samoprzecięć krzywych w dywizorze wyjątkowym, jak opisano w [DB12, 3.17].*

Dowód tego twierdzenia opiera się na charakteryzacji pierścieni Coxa przez ilorazy GIT, podanej w [ADHL10, 6.4.3]. Przedstawienie argumentu wymaga pewnych przygotowań. Opieramy się na klasyfikacji dwuwymiarowych osobliwości ilorazowych i na opisie dywizora wyjątkowego ich rozwiązań minimalnych, podanych m.in.

w [Bri68]. Definiujemy działanie torusa Picarda $T$ minimalnego rozwiązania $X$ osobliwości $\mathbb{C}^2/G$ na przestrzeni afinicznej $\mathbb{C}^{n+3}$, a następnie definiujemy jej niezmienniczą hiperpowierzchnię $S$, która staje się kandydatem na spektrum pierścienia Coxa. Analizujemy własności tego działania korzystając z narzędzi geometrii torycznej.

Ważną część argumentu stanowi badanie ilorazu geometrycznego otwartego podzbioru $S$ przez działanie $T$, zanurzonego w trójwymiarową rozmaitość toryczną. Uzasadniamy, że ten jest on izomorficzny z rozwiązaniem minimalnym $\mathbb{C}^2/G$, co stanowi najtrudniejszy do sprawdzenia warunek twierdzenia [ADHL10, 6.4.3]. Mogłoby się wydawać, że to podejście prowadzi tylko do powtórzenia wyników [Bri68] innymi metodami. Uważamy jednak, że jest ono w pełni uzasadnione ze względu na to, że planujemy rozszerzenie otrzymanych wyników na przypadki osobliwości ilorazowych w wyższych wymiarach (gdzie analogiczny opis rozwiązań zwykle nie istnieje), a także próbę odwrócenia przebiegu rozumowania: otrzymanie konstrukcji rozwiązań osobliwości z ich pierścieni Coxa.

Druga metoda opisu $\mathrm{Cox}(X)$ wymaga badania zanurzenia tego pierścienia w iloczyn tensorowy pierścienia Coxa rozważanej osobliwości $\mathrm{Cox}(\mathbb{C}^2/G) \simeq \mathbb{C}[a,b]^{[G,G]}$ i pierścienia współrzędnych torusa Picarda rozwiązania. Dowodzimy twierdzenia opisującego generatory obrazu $\mathrm{Cox}(X)$ przy tym zanurzeniu.

**Twierdzenie 5.2.9.** ([DB12, 6.9]) *Pierścień* $\mathrm{Cox}(X) \subset \mathbb{C}[a,b]^{[G,G]}[t_0^{\pm 1}, t_1^{\pm 1}, \ldots, t_{n-1}^{\pm 1}]$ *jest generowany przez elementy dwóch typów: charaktery torusa Picarda $T$, zależne od zmiennych $t_i$, oraz odpowiednio dobrane wielomiany $\sigma_i(a,b)$ dla $i = 1,2,3$, pomnożone przez pewne charaktery $T$. Wielomiany $\sigma_i(a,b)$ są pewnymi wektorami własnymi działania abelianizacji grupy $G$ na pierścieniu $\mathbb{C}[a,b]^{[G,G]}$ niezmienników komutatora tej grupy, izomorficznym z pierścieniem Coxa badanej osobliwości. Dokładny opis konstrukcji tego zbioru generatorów jest podany w [DB12, 6.3, 6.5, 6.11].*

Podczas gdy wynik przedstawiony w Twierdzeniu 4.3.3 można powiązać z metodami zastosowanymi w pracy [HS10], Twierdzenie 5.2.9 wprowadza nowy sposób opisu pierścieni Coxa, opracowany tak, aby można było go zastosować również w wyżej wymiarowych przypadkach. Okazuje się, że do wyznaczenia generatorów potrzeba wyłącznie znajomości wartości indeksów przecięć składowych dywizora wyjątkowego rozwiązania oraz struktury pierścienia niezmienników $\mathbb{C}[a,b]^{[G,G]}$. Tego typu informacje o osobliwości i rozwiązaniu w niektórych przypadkach można otrzymać w inny sposób niż przez podanie konstrukcji rozwiązania (np. za pomocą odpowiedniości McKaya). Wobec tego zastosowanie metod rozwijanych w tej części pracy do rozwiązań osobliwości ilorazowych w wyższych wymiarach (zob. [DBW13]) ma szanse dać ciekawe wyniki.

## Symetryczne modele procesów Markowa na drzewach

W drugiej części rozprawy rozważamy kilka problemów związanych z zagadnieniami opisywanymi przez statystykę algebraiczną: badamy geometryczne modele procesów Markowa na drzewach filogenetycznych, ograniczając się do tych, które są konstruowane za pomocą pewnego działania grupy skończonej. Struktura procesu Markowa na drzewie składa się z trzech elementów. Po pierwsze ustalamy skończony zbiór $\mathcal{A}$, którego elementy będą nazywane literami. Odpowiadają one możliwym wartościom cech, których ewolucję modelujemy. Możemy na przykład przyjąć, że zbiór $\mathcal{A}$ składa się z czterech liter $A$, $C$, $T$, $G$, które zwyczajowo oznaczają nukleotydy w łańcuchu DNA. Drugim elementem struktury jest drzewo (czyli graf bez cykli) $\mathcal{T}$. Jego wierzchołkom przypisujemy zmienne losowe, przyjmujące wartości w zbiorze $\mathcal{A}$, opisujące stan procesu. Na końcu ustalamy model ewolucji $\widehat{W}$, przedstawiany zwykle jako pewna przestrzeń macierzy, który określa, w jaki sposób zmienne losowe przypisane wierzchołkom mogą się zmieniać przy przejściu z jednego do drugiego końca krawędzi $\mathcal{T}$. Model ewolucji można rozumieć jako przestrzeń parametryzującą możliwe wartości prawdopodobieństwa warunkowego określającego zależność między wartościami zmiennych przypisanych końcom krawędzi drzewa.

Dla takiej struktury można skonstruować jej model geometryczny – mówiąc ogólnie, jest to rozmaitość algebraiczna zawierająca informację o możliwych rozkładach liter w liściach $\mathcal{T}$. Szczegóły konstrukcji są opisane m.in. w [BW07]. W opisywanej rozprawie koncentrujemy się na badaniu drzew filogenetycznych z punktu widzenia geometrii algebraicznej, czyli staramy się zrozumieć ich modele geometryczne. Źródła tego zagadnienia w problemach biologii obliczeniowej i statystyki mają duże znaczenie dla samego sformułowania definicji badanych struktur, ale ich znajomość nie jest konieczna do zajmowania się czysto matematycznym aspektem problemu. W pracy doktorskiej zawarte jest zatem tylko krótkie wyjaśnienie kontekstu, a bardziej dokładne omówienie można znaleźć np. w [SS03] lub [PS05, Part I].

W zagadnieniach pochodzących z nauk przyrodniczych często zakłada się istnienie symetrii, aby zmniejszyć złożoność problemu. Okazuje się, że ta metoda daje dobre efekty także w przypadku drzew filogenetycznych – ograniczenie się do klasy modeli ewolucji z symetriami (zadanymi przez działanie skończonej grupy), lub do jej odpowiednio zdefiniowanych podklas, prowadzi do ciekawych wyników, które nie są prawdziwe przy bardziej ogólnych założeniach. Ponadto wiele modeli blisko związanych z biologicznymi źródłami problemu ma symetrie, wynikające w sposób naturalny z biochemicznych właściwości substancji związanych z opisywanym procesem.

### Rozważane klasy modeli

Najczęściej pojawiająca się w literaturze klasa modeli ewolucji z symetriami to modele z abelową grupą symetrii (ang. *general group-based models*). Symetrie tych modeli są zadane przez tranzytywne i efektywne działanie skończonej grupy przemiennej na zbiorze liter $\mathcal{A}$ (zatem ta grupa ma tyle samo elementów, co $\mathcal{A}$). Modele te zostały wprowadzone w pracach [ES93] oraz [SSE93] i były później rozważane przez wielu różnych autorów. Jedną z najważniejszych prac dotyczących tego zagadnienia jest [SS05], w której badane są przede wszystkim geometryczne i algebraiczne własności modeli. W szczególności udowodniono, że rozmaitości algebraiczne odpowiadające modelom z abelową grupą symetrii są rozmaitościami torycznymi, co otwiera możliwości badania drzew filogenetycznych narzędziami geometrii torycznej.

Oprócz modeli z abelową grupą symetrii zajmujemy się jej naturalnym rozszerzeniem: klasą tak zwanych $G$-modeli, których grupa symetrii zawiera normalną podgrupę abelową działającą w sposób tranzytywny i efektywny na literach. Ta klasa została zdefiniowana przez M. Michałka (współautora pracy [DBM12], której wyniki zostały zawarte w omawianej rozprawie) w jego pracy doktorskiej [Mic12] i publikacji [Mic11]. Jego wyniki są jednak oparte na pomysłach opisanych w pracy [BDW09], wspólnej z W. Buczyńską and J. Wiśniewskim, której wyniki także wchodzą w skład rozprawy.

W części pracy, w której omawiamy wyniki [BDW09], przyjmujemy bardziej ogólne założenia dotyczące grupy symetrii niż te, na których opierają się wyniki [DBM12]: zakładamy wyłącznie tranzytywność i efektywność działania (dowolnej) grupy na $\mathcal{A}$. Dodajemy jednak założenie izotropowości modelu, co oznacza, że w drzewie $\mathcal{T}$ nie uwzględniamy kierunku krawędzi (również wyróżnienie korzenia nie jest potrzebne), a macierze opisujące prawdopodobieństwo warunkowe muszą być symetryczne. Te warunki odpowiadają odwracalności procesu Markowa w czasie. Celem pracy [BDW09] było ustalenie dobrej klasy modeli i dobranie odpowiednich założeń do prowadzenia dalszych badań metodami geometrii algebraicznej (i stąd właśnie pochodzi pierwszy pomysł na rozważanie klasy $G$-modeli). Wobec tego charakter zawartych tam wyników jest raczej algebraiczny lub kombinatoryczny niż geometryczny.

### Wyniki drugiej części pracy

W części rozprawy omawiającej wyniki dotyczące izotropowych modeli ewolucji wprowadzamy pojęcie nasyconej podgrupy grupy permutacji – jest to maksymalna podgrupa będąca grupą symetrii pewnego modelu. Zakładamy zawsze, że grupa symetrii rozważanego modelu jest nasycona. W celu zdobycia intuicji na temat badanych obiektów skonstruowany został duży zbiór przykładów: klasyfikujemy izotropowe modele ewolucji z ich (nasyconymi) grupami symetrii dla $|\mathcal{A}| \leq 9$.

Omawiamy dokładnie przypadek modeli hiperbinarnych, czyli takich, których grupa symetrii to $\mathbb{Z}_2^s$. Uogólniają one w naturalny sposób model binarny, badany w pracy [BW07]. Główny wynik dotyczący tej klasy określa jej wyjątkową rolę wśród modeli izotropowych.

**Twierdzenie 7.2.10.** ([BDW09, 3.10]) *Modele hiperbinarne to jedyne izotropowe modele z abelową (nasyconą) grupą symetrii.*

Dowód tego twierdzenia opiera się na innych wynikach z tej części pracy, dotyczących modeli izotropowych z grupą symetrii $G$, która zawiera podgrupę abelową $H$ działającą w sposób efektywny i tranzytywny na $\mathcal{A}$. Następujące twierdzenie podsumowuje rezultaty rozważań takich modeli i prowadzi do wniosku, że dla tak zdefiniowanej klasy założenie izotropowości jest w pewnym sensie zbędne.

**Twierdzenie 7.3.6.** ([BDW09, 5.7]) *Załóżmy, że $\widehat{W}$ jest izotropowym modelem ewolucji z (nasyconą) grupą symetrii $G$, której abelowa podgrupa $H$ działa w sposób efektywny i tranzytywny na $\mathcal{A}$. Wówczas dowolna macierz zachowywana przez indukowane działanie $G$ musi być symetryczna, czyli należy do $\widehat{W}$.*

W ostatnim rozdziale rozprawy prezentujemy wyniki pracy [DBM12], dotyczące geometrycznych własności modeli z abelową grupą symetrii oraz $G$-modeli. Ponieważ dla niektórych rozpatrywanych problemów należało spodziewać się raczej kontrprzykładów niż dowodów, przeprowadzone zostały obliczenia komputerowe. Były one oparte na własnej implementacji algorytmu dającego w wyniku opis modelu geometrycznego danego drzewa filogenetycznego w terminach geometrii torycznej, czyli odpowiadający rozmaitości wielościan (zob. [Mic11]), oraz na innych programach do obliczeń algebraicznych, [GAP12, GJ00, 4ti2, DGPS12, BIS]. W ten sposób otrzymaliśmy pierwsze przykłady modeli z działaniem grupy abelowej, których modele geometryczne nie są rozmaitościami normalnymi.

**Twierdzenie 8.2.2.** ([DBM12, 4.1]) *Modele geometryczne procesów na drzewie o trzech liściach dla grupy $G$ będącej jedną z $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ nie są rzutowo normalne. Ponadto model dla $G = \mathbb{Z}_6$ nie jest normalny. Modele procesów na dowolnym drzewie trójwalentnym dla $G$ izomorficznej z $\mathbb{Z}_5$ lub $\mathbb{Z}_7$ są (rzutowo) normalne.*

Obliczone zostały także pewne wartości wielomianów Hilberta-Ehrharta dla wielościanów odpowiadających $G$-modelom z niewielką grupą symetrii. Korzystając z wyników dotyczących normalności wykazaliśmy, że modele dla różnych drzew z tą samą liczbą liści nie muszą być deformacyjnie równoważne (zob. także [Kub10]). Wydaje się więc, że deformacyjna równoważność modeli dla grupy $\mathbb{Z}_2$ (zob. [BW07]) jest wyjątkiem.

**Twierdzenie 8.3.3.** ([DBM12, 4.4]) *Modele geometryczne procesów dla grupy $G$ będącej jedną z $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$ i $\mathbb{Z}_7$ oraz dla dwóch nieizomorficznych drzew o sześciu liściach mają różne wielomiany Ehrharta. Ponieważ te modele są normalne, więc ich wielomiany Ehrharta są równe wielomianom Hilberta, zatem można wnioskować, że modele te nie są deformacyjnie równoważne. Ponadto dwuparametrowy model Kimury (znaczący z punktu widzenia zastosowań) dla dwóch nieizomorficznych drzew o sześciu liściach daje wielościany o różnych wielomianach Ehrharta.*

Przedstawiamy także wyniki dotyczące jednego z najważniejszych problemów w dziedzinie: wyznaczania ideałów niezmienników filogenetycznych modeli (tzn. ideału wielomianów znikających na modelu geometrycznym). Podajemy (w formie hipotezy) metodę otrzymywania niezmienników filogenetycznych gwiazd, czyli drzew z dokładnie jednym wierzchołkiem wewnętrznym – do tego sprowadza się problem wyznaczania niezmienników dla dowolnego drzewa. Co ważne, ta metoda nie opiera się na czysto algebraicznym podejściu, ale uwzględnia geometrię badanych modeli. Dowodzimy prawdziwości postawionej hipotezy dla najprostszego przypadku, czyli modelu binarnego. Ponadto badamy jej związek z hipotezami Sturmfelsa i Sullivanta dotyczącymi stopnia generatorów ideału niezmienników filogenetycznych, zob. [SS05].

## Literatura


[ADHL10] Ivan Arzhantsev, Ulrich Derenthal, Jürgen Hausen, and Antonio Laface, *Cox Rings*, arXiv:1003.4229 [math.AG] (2010).

[AW10] Marco Andreatta and Jarosław A. Wiśniewski, *On the Kummer Construction*, Revista Matematica Complutense **23** (2010), 191–251.

[BDW09] Weronika Buczyńska, Maria Donten, and Jarosław A. Wiśniewski, *Isotropic models of evolution with symmetries*, Contemporary Mathematics **496** (2009), 111–132.

[BIS] Winfried Bruns, Bogdan Ichim, and Christof Söger, *Normaliz*, http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/normaliz.

[Bri68] Egbert Brieskorn, *Rationale Singularitäten komplexer Flächen*, Inventiones Mathematicae **4** (1968), 336–358.

[BW07] Weronika Buczyńska and Jarosław A. Wiśniewski, *On geometry of binary symmetric models of phylogenetic trees*, J. Eur. Math. Soc. **9(3)** (2007), 609–635.

[DB12] Maria Donten-Bury, *Cox rings of minimal resolutions of surface quotient singularities*, in preparation.

[DBM12] Maria Donten-Bury and Mateusz Michałek, *Phylogenetic invariants for group based models*, Journal of Algebraic Statistics **3** (2012), no. 1, 44–63.

[DBW13] Maria Donten-Bury and Jarosław A. Wiśniewski, *Total coordinate rings of resolutions of a quotient singularity*, 2013, w przygotowaniu.

[DGPS12] Wolfram Decker, Gert-Martin Greuel, Gerhard Pfister, and Hans Schönemann, Singular *3-1-5 — A computer algebra system for polynomial computations*, http://www.singular.uni-kl.de.

[DK09] Jan Draisma and Jochen Kuttler, *On the ideals of equivariant tree models*, Mathematische Annalen **344(3)** (2009), 619–644.

[Don11] Maria Donten, *On Kummer 3-folds*, Revista Matematica Complutense **24** (2011), 465–492.

[ES93] Steven N. Evans and Terence P. Speed, *Invariants of some probability models used in phylogenetic inference*, Ann. Statist. **21(1)** (1993), 355–377.

[FGAL11] Laura Facchini, Víctor González-Alonso, and Michał Lasoń, *Cox rings of Du Val singularities*, Le Matematiche **66** (2011), 115–136.

[GAP12] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.5.6*, 2012.

[GJ00] Ewgenij Gawrilow and Michael Joswig, *Polymake: a Framework for Analyzing Convex Polytopes*, Polytopes — Combinatorics and Computation (Gil Kalai and Günter M. Ziegler, eds.), Birkhäuser, 2000, pp. 43–74.

[HS10] Jürgen Hausen and Hendrik Süß, *The cox ring of an algebraic variety with torus action*, Advances in Mathematics **225** (2010), no. 2, 977–1012.

[Kub10] Kaie Kubjas, *Hilbert polynomial of the Kimura 3-parameter model*, arXiv:1007.3164v1 [math.AC] (2010).

[Kum75] Ernst Eduard Kummer, *Über die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten, Collected papers, Volume II: Function theory, geometry and miscellaneous*, Springer-Verlag, 1975.

[LV09] Antonio Laface and Mauricio Velasco, *A survey on Cox rings*, Geometriae Dedicata **139** (2009), 269–287.

[Mic11] Mateusz Michałek, *Geometry of phylogenetic group-based models*, Journal of Algebra **339** (2011), 339–356.

[Mic12] ———, *Toric varieties: phylogenetics and derived categories*, 2012, doctoral thesis, IM PAN and Institut Fourier.

[PS05] Lior Pachter and Bernd Sturmfels, *Algebraic Statistics for Computational Biology*, Cambridge University Press, 2005.

[Rei92] Miles Reid, *What is a flip?*, scanned notes, homepages.warwick.ac.uk/ masda/3folds/what_flip.pdf, 1992.

[SS03] Charles Semple and Michael Steel, *Phylogenetics*, Oxford University Press, 2003.

[SS05] Bernd Sturmfels and Seth Sullivant, *Toric ideals of phylogenetic invariants*, J. Comput. Biology **12** (2005), 204–228.

[SSE93] Laszlo A. Székely, Michael A. Steel, and Péter L. Erdős, *Fourier calculus on evolutionary trees*, Appl. Math. **14(2)** (1993), 200–210.

[SX10] Bernd Sturmfels and Zhiqiang Xu, *Sagbi bases of Cox-Nagata rings*, Journal of the European Mathematical Society **12** (2010), 429–459.

[4ti2] 4ti2 team, *4ti2—a software package for algebraic, geometric and combinatorial problems on linear spaces*, www.4ti2.de.