mgr Małgorzata Hryniewicka
Instytut Matematyki
Uniwersytet w Białymstoku

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Zachowanie się tożsamości wielomianowych przy działaniach punktowych algebr Hopfa na algebry łączne

2000 Mathematics Subject Classification 16R20, 16W22, 16W25, 16W30, 16W50, 16W55

Niech $\mathbf{k}$ będzie dowolnym ciałem. Przypomnijmy, że łączną $\mathbf{k}$-algebrę H z jedynką wraz z odwzorowaniami liniowymi: $\Delta\colon H \to H \otimes H$, $\varepsilon\colon H \to \mathbf{k}$ i $S\colon H \to H$ nazywamy *algebrą Hopfa*, jeśli Δ i ε są homomorfizmami algebr z jedynką oraz dla każdego elementu $h \in H$ - przy zachowaniu notacji Sweedlera - zachodzą następujące równości:

1. $\sum \Delta(h_1) \otimes h_2 = \sum h_1 \otimes \Delta(h_2)$,
2. $\sum \varepsilon(h_1)h_2 = \sum h_1\varepsilon(h_2) = h$,
3. $\sum S(h_1)h_2 = \sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$,

gdzie $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$. Mówimy, że algebra Hopfa H *działa* na łączną $\mathbf{k}$-algebrę A lub, że A jest *H-modułową algebrą*, jeśli:

1. A jest unitarnym lewostronnym H-modułem.
2. dla dowolnych elementów $h \in H$, $a, b \in A$ zachodzi: $h \cdot ab = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$.

Niezmiennikami działania H na A nazywamy zbiór:

$$A^H = \{a \in A \mid h \cdot a = \varepsilon(h)a \text{ dla każdego } h \in H\}.$$

Naturalnym przykładem algebry Hopfa jest algebra grupowa $\mathbf{k}G$ dowolnej grupy G. Wtedy dla dowolnej algebry A działanie algebry Hopfa $\mathbf{k}G$ na algebrę A jest dokładnie działaniem grupy G na A poprzez automorfizmy algebry. Niezmienniki działania algebry Hopfa $\mathbf{k}G$ pokrywają się z punktami stałymi działania grupy G: $A^{\mathbf{k}G} = A^G$. Dobrą referencją dla dalszych informacji o algebrach Hopfa jest monografia S. Montgomery [Mo93].

Rozprawa ta dotyczy głównie teorii niezmienników działań algebr Hopfa na algebry łączne. Rozważamy w niej szereg zagadnień związanych z następującym ogólnym pytaniem:

Czy, jeśli na algebrę A działa skończenie wymiarowa algebra Hopfa H, to z faktu iż podalgebra niezmienników A^H spełnia tożsamość wielomianową wynika, że również algebra A spełnia pewną tożsamość wielomianową ?

Przypomnijmy, że algebra A *spełnia tożsamość wielomianową* lub krócej, że A jest *PI-algebrą*, jeśli istnieje niezerowy wielomian nieprzemiennych zmiennych o współczynnikach z ciała $\mathbf{k}$ zerujący się przy dowolnym podstawieniu za zmienne elementów z A. Znaczenie własności spełniania tożsamości wielomianowej w dużej mierze wyjaśnia klasyczne Twierdzenie Posnera, zgodnie z którym każda pierwsza

PI-algebra zanurza się w pewną algebrę prostą skończenie wymiarową nad swoim centrum.

Nasze pytanie jest naturalnym uogólnieniem postawionego w roku 1971 przez J.E. Björka pytania, czy algebra na którą działa skończona grupa automorfizmów musi spełniać tożsamość wielomianową, jeśli podalgebra punktów stałych spełnia taką tożsamość. W roku 1973 ukazała się praca G.M. Bergmana i M. Isaacsa [BI73] w której autorzy podali przykład algebry A, na którą działa skończona grupa G automorfizmów bez nietrywialnych punktów stałych, a która nie spełnia żadnej tożsamości wielomianowej. W przykładzie tym charakterystyka ciała $\mathbf{k}$ dzieli rząd grupy G, ponadto A jest algebrą nienilpotentną, ale posiada niezerowe nilpotentne ideały. Warunki dostateczne pozytywnego rozwiązania problemu Björka badał m.in. V.K. Kharchenko.

Twierdzenie ([Kh74]; por. [Mo80, Tw. 6.5]) *Niech G będzie skończoną grupą automorfizmów algebry A. Załóżmy, że* $\mathrm{char}\mathbf{k} \nmid |G|$. *Jeśli podalgebra punktów stałych A^G spełnia tożsamość wielomianową, to również algebra A spełnia pewną tożsamość wielomianową.*

Jeśli dodatkowo A jest półpierwsza i A^G spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $d \cdot |G|$.

W ten sposób został rozstrzygnięty przypadek $\mathrm{char}\mathbf{k} \nmid |G|$. Z kolei, jeśli $\mathrm{char}\mathbf{k} \mid |G|$, to przykład działania grupy G_p rzędu p^2 na algebrę macierzy $A = M_2(\mathbf{k}\langle x, y\rangle)$ nad wolną nieprzemienną algebrą $\mathbf{k}\langle x, y\rangle$ charakterystyki p z przemienną podalgebrą punktów stałych:

$$A^{G_p} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \omega(x,y) \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{k},\ \omega(x,y) \in \mathbf{k}\langle x, y\rangle \right\}$$

podany przez G.M. Bergmana [B76] (por. [Mo80, Przykład 1.1]) pokazuje, że problem Björka ma negatywne rozwiązanie nawet dla algebr pierwszych. Zauważmy, że w powyższym przykładzie podalgebra A^{G_p} posiada niezerowe elementy nilpotentne. Wystarczy jednak zażądać by algebra A była zredukowana, a własność bycia PI-algebrą zostanie zachowana przy przejściu od podalgebry punktów stałych A^G do algebry A bez żadnych dodatkowych założeń o rzędzie grupy G.

Twierdzenie ([Kh75]; por. [Mo80, Tw. 6.8]) *Niech G będzie skończoną grupą automorfizmów zredukowanej algebry A. Jeśli podalgebra A^G spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $d \cdot |G|$.*

W roku 1986 pojawiła się praca J. Bergena i M. Cohen poświęcona m.in. zachowaniu się tożsamości wielomianowych w algebrach zgradowanych przez skończoną grupę G. Jest to przypadek działania półprostej przemiennej algebry Hopfa $\mathbf{k}G^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}G, \mathbf{k})$. Niezmienniki działania algebry Hopfa $\mathbf{k}G^\star$ pokrywają się z jednostkową składową gradacji.

Twierdzenie ([BeC86]) *Niech $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ będzie algebrą zgradowaną przez skończoną grupę G. Jeśli jednostkowa składowa gradacji A_1 spełnia tożsamość wielomianową, to również algebra A spełnia pewną tożsamość wielomianową.*

Jeśli dodatkowo A jest gradacyjnie półpierwsza i A_1 spełnia tożsamość wielomianową stopnia d, to A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $d \cdot |G|$.

Autorzy udowodnili ponadto, że (po ewentualnym rozszerzeniu ciała skalarów) działanie dowolnej skończenie wymiarowej półprostej przemiennej algebry Hopfa jest w istocie gradacją przez pewną skończoną grupę. Interesujący rezultat o charakterze ogólnym dotyczący działania skończenie wymiarowych półprostych algebr Hopfa uzyskali Y.A. Bahturin i V. Linchenko.

Twierdzenie ([BL98]) *Niech H będzie skończenie wymiarową algebrą Hopfa. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *Dla dowolnej H-modułowej algebry A, jeśli podalgebra niezmienników A^H spełnia tożsamość wielomianową, to również algebra A spełnia tożsamość wielomianową.*
2. *Dla dowolnej H-modułowej algebry A, jeśli podalgebra niezmienników A^H jest nilpotentna, to również algebra A jest nilpotentna.*

Ponadto, każdy z tych warunków pociąga za sobą półprostotę algebry H.

W rozprawie badamy zachowanie się tożsamości wielomianowych przy działaniu punktowych algebr Hopfa (klasa ta obejmuje takie algebry Hopfa jak algebry grupowe, uniwersalne algebry obwiednie algebr Liego). Wymaga to dodatkowych założeń o algebrze A. Nasze rozważania zawężamy do - naturalnej dla tego problemu - klasy algebr półpierwszych.

Rozdział 1 zaczynamy od przypomnienia szeregu pojęć i rezultatów znanych z teorii algebr Hopfa. Prezentujemy też jeden nowy wynik, który stanowi częściową odpowiedź na pytanie J. Bergena, M. Cohen i D. Fischman [BCF90] czy, jeśli na algebrę A z jedynką działa skończenie wymiarowa algebra Hopfa H w taki sposób, że A nie posiada właściwych H-niezmienniczych lewostronnych ideałów, to wymiar algebry A traktowanej jako prawostronna przestrzeń liniowa nad pierścieniem z dzieleniem A^H jest skończony. Dowodzimy, że jest to prawdą dla punktowych algebr Hopfa, por. **Wniosek 1.3.6**.

Głównym celem rozprawy jest wyodrębnienie w klasie punktowych algebr Hopfa warunków gwarantujących zachowanie własności bycia PI-algebrą przy przejściu od podalgebry niezmienników A^H do algebry A na którą działa dana algebra Hopfa H. Uzyskane przez nas wyniki przedstawiamy w Rozdziałach 3 i 4. Zauważmy, że prawie wszystkie omówione powyżej wyniki odnoszą się do działań półprostych algebr Hopfa. Główny rezultat Rozdziału 3 dotyczy sytuacji przeciwnej - w której algebra H zawiera ,,duży" podzbiór działający nilpotentnie na algebrę A.

Twierdzenie 3.1.2 *Niech H będzie punktową algebrą Hopfa generowaną jako algebra przez skończoną grupę $G = G(H)$ elementów grupopodobnych oraz koideał $\mathfrak{A}$ rozpięty nad ciałem $\mathbf{k}$ na skośnie prymitywnych elementach i normalizowany przez algebrę grupową $\mathbf{k}G$, tj. $\mathfrak{A}\mathbf{k}G = \mathbf{k}G\mathfrak{A}$. Niech ponadto A będzie półpierwszą H-modułową algebrą taką, że:*

1. *$\mathfrak{A}$ działa nilpotentnie na A, tj. $\mathfrak{A}^n \cdot A = 0$ dla pewnego $n \geq 1$.*
2. *podalgebra niezmienników $A^{\mathfrak{A}}$ jest półpierwsza.*
3. *wymiar działania $\mathfrak{A}$ na A jest skończony i wynosi N.*

Wówczas A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $A^{\mathfrak{A}}$ jest PI-algebrą.

Zauważmy, że warunek o normalizowaniu koideału $\mathfrak{A}$ przez algebrę grupową $\mathbf{k}G$ pociąga za sobą G-niezmienniczość podalgebry $A^{\mathfrak{A}}$. Punkty stałe działania grupy G na podalgebrę $A^{\mathfrak{A}}$ pokrywają się z niezmiennikami działania algebry Hopfa H na algebrę A: $(A^{\mathfrak{A}})^G = A^H$. Jako bezpośrednią konsekwencję Twierdzenia Kharchenki o działaniu grup skończonych zastosowanego do algebry $A^{\mathfrak{A}}$ otrzymujemy teraz następujący wniosek.

Wniosek 3.1.3 *Przy założeniach Twierdzenia 3.1.2, jeśli dodatkowo* $\mathrm{char}\mathbf{k} \nmid |G|$ *lub A jest algebrą zredukowaną, to A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A^H jest PI-algebrą.*

W drugiej części Rozdziału 3 podajemy przykłady zastosowań Twierdzenia 3.1.2 do działań konkretnych algebr Hopfa. Niech $\mathbf{k}$ będzie ciałem charakterystyki $p > 0$ i G_p - skończoną p-grupą. Przez $\omega(\mathbf{k}G_p)$ oznaczmy ideał augmentacji modularnej algebry grupowej $\mathbf{k}G_p$. Jak wiadomo, $\omega(\mathbf{k}G_p)$ jest ideałem nilpotentnym. Równocześnie, $\omega(\mathbf{k}G_p)$ jest koideałem punktowej algebry Hopfa $\mathbf{k}G_p$ kowymiaru 1 rozpiętym nad ciałem $\mathbf{k}$ na skośnie prymitywnych elementach postaci $1 - g$, gdzie $g \in G_p$, i normalizowanym przez grupę G_p: $\left[\sum_{g\in G_p} \alpha_g(1-g)\right] h = h \left[\sum_{g\in G_p} \alpha_g(1-h^{-1}gh)\right]$, gdzie $h \in G_p$, $\alpha_g \in \mathbf{k}$. Załóżmy dalej, że grupa G_p działa na półpierwszą algebrę A z półpierwszą podalgebrą punktów stałych A^{G_p}. Wtedy wszystkie założenia Twierdzenia 3.1.2 są w naturalny sposób spełnione, wobec czego A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A^{G_p} jest PI-algebrą. Przykład G.M. Bergmana pokazuje, że założenie o półpierwszości podalgebry A^{G_p} jest ważne. Stosując teraz Twierdzenie Kharchenki dostajemy następujący wniosek.

Wniosek 3.5.1 *Niech $\mathbf{k}$ będzie ciałem charakterystyki $p > 0$, G - skończoną grupą rzędu podzielnego przez p i A - algebrą półpierwszą na którą grupa G działa poprzez automorfizmy algebry. Załóżmy, że grupa G posiada normalną p-podgrupę Sylowa G_p oraz, że podalgebra punktów stałych A^{G_p} jest półpierwsza. Wówczas A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A^G jest PI-algebrą.*

Nech teraz $\mathbf{k}$ będzie ciałem charakterystyki różnej od 2 i $L = L_0 \oplus L_1$ - skończenie wymiarową nilpotentną superalgebrą Liego. Jeśli $\mathrm{char}\mathbf{k} > 2$, to dodatkowo zakładamy, że L jest ograniczona. Wiadomo, że gdy L jest algebrą Liego, tj. $L_1 = 0$, to uniwersalna algebra obwiednia $U(L)$ jest algebrą Hopfa. Nie jest to natomiast prawdą gdy L nie jest algebrą Liego. W tym przypadku możemy jednak rozważyć automorfizm σ algebry $U(L)$ rzędu 2. Kładziemy mianowicie $\sigma(x) = x$ gdy $x \in L_0$ oraz $\sigma(x) = -x$ gdy $x \in L_1$. Oznaczmy przez G grupę generowaną przez automorfizm σ i rozważmy skośny pierścień grupowy $U(L) \star G$. Jak nietrudno przekonać się, $U(L) \star G$ jest już algebrą Hopfa. Jeśli $\mathrm{char}\mathbf{k} > 2$, to algebrę $U(L)$ zastępujemy ograniczoną uniwersalną algebrą obwiednią $u(L)$. Załóżmy dalej, że superalgebra Liego L działa na półpierwszą algebrą A z półpierwszą podalgebrą niezmienników A^L oraz wymiar tego działania jest skończony. W rozprawie dowodzimy, w oparciu o Twierdzenie 3.1.2 zastosowane do $H = U(L) \star G$, $\mathfrak{A} = L$, że A jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A^L jest PI-algebrą. Docelowo otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.5.2 *Niech* $\mathbf{k}$ *będzie ciałem charakterystyki różnej od 2 i* G *- skończoną grupą abelową której rząd nie dzieli się przez* $\mathrm{char}\mathbf{k}$. *Załóżmy, że na półpierwszą algebrę* $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ *zgradowaną przez grupę* G *działa skończenie wymiarowa nilpotentna kolorowa algebra Liego* $L = \bigoplus_{g\in G} L_g$ *(ograniczona kolorowa algebra Liego* L*, gdy* $\mathrm{char}\mathbf{k} > 2$*) w taki sposób, że:*

1. *podalgebra niezmienników* A^L *jest półpierwsza.*
2. *wymiar działania* L *na* A *jest skończony.*

Oznaczmy wreszcie przez H *skośny pierścień grupowy* $U(L) \star G$ *lub - w przypadku, gdy* $\mathrm{char}\mathbf{k} > 2$ *-* $u(L) \star G$. *Wówczas* A *jest PI-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy* A^H *jest PI-algebrą.*

W Rozdziale 4 badamy zachowanie się tożsamości wielomianowych dla działań punktowych algebr Hopfa na algebry półpierwsze ze zredukowaną podalgebrą niezmienników. Odnotujmy, że pewne wyniki dotyczące zachowania się tożsamości wielomianowych w kontekście działania p-nilpotentnych grup, nilpotentnych algebr Liego oraz nilpotentnych superalgebr Liego na algebry pierwsze z centralną podalgebrą niezmienników uzyskali już J. Bergen, M. Cohen i D. Fischman [BCF90] oraz J. Bergen i P. Grzeszczuk [BeG96]. We wszystkich trzech przypadkach dowodzi się, że każdy niezerowy H-niezmienniczy lewostronny ideał algebry A zawiera niezerowe niezmienniki. Z drugiej strony przykład Bergmana pokazuje, że założenie o istnieniu niezerowych niezmienników w każdym niezerowym H-niezmienniczym lewostronnym ideale algebry A nie gwarantuje jeszcze zachowania własności bycia PI-algebrą przy przejściu od podalgebry A^H do algebry A. W tej części rozprawy dowodzimy:

Niech H *będzie punktową algebrą Hopfa i* A *- półpierwszą* H*-modułową algebrą taką, że wymiar działania* H *na* A *jest skończony i wynosi* N. *Załóżmy, że każdy niezerowy* H*-niezmienniczy lewostronny ideał algebry* A *zawiera niezerowe niezmienniki. Przyjmijmy również, że podalgebra niezmienników* A^H *spełnia tożsamość wielomianową stopnia* d. *Wówczas algebra* A *spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia* dN*, jeśli zachodzi jeden z następujących warunków:*

1. A^H *jest prawie centralna w* A*,* por. **Twierdzenie 4.1.1**.
2. A *jest zredukowana,* por. **Twierdzenie 4.1.2**.

Twierdzenie 4.1.2 jest uogólnieniem Twierdzenia Kharchenki o działaniu skończonych grup na algebry zredukowane.

Druga część Rozdziału 4 jest poświęcona działaniu superalgebr Liego na algebry półpierwsze z centralną podalgebrą niezmienników. J. Bergen i P. Grzeszczuk [BeG96] udowodnili, że jeśli na półpierwszą algebrę A charakterystyki 0 działa skończenie wymiarowa nilpotentna algebra Liego L z podalgebrą niezmienników A^L zawartą w centrum $\mathcal{Z}(A)$ i wymiar tego działania jest skończony, to A jest algebrą przemienną i L działa trywialnie na A. W kontekście Wniosku 3.5.2 naturalnie pojawia się pytanie, czy rezultat Bergena i Grzeszczuka można rozszerzyć na większą klasę kolorowych algebr Liego. W rozprawie podajemy przykłady działania skończenie wymiarowych nilpotentnych superalgebr Liego $L = L_0 \oplus L_1$ na algebrę macierzy $A = M_n(\mathbf{k})$ z podalgebrą niezmienników $A^L \cong \mathbf{k}$ i algebrą Liego $L_0 = [L_1, L_1]$ działającą nietrywialnie na A, por. **Przykłady 4.3.2 i 4.3.3**. Prezentujemy też następujące uogólnienie Twierdzenia Bergena i Grzeszczuka.

Twierdzenie 4.3.4 *Niech A będzie algebrą półpierwszą charakterystyki 0 i $L = L_0 \oplus L_1$ - skończenie wymiarową nilpotentną superalgebrą Liego spełniającą warunek $[L_0, L_1] = 0$. Załóżmy, że L działa na A w taki sposób, że:*

1. *podalgebra niezmienników A^L jest zawarta w centrum $\mathcal{Z}(A)$.*
2. *wymiar działania L na A jest skończony.*

Wówczas A spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia nie większego niż $2 \cdot \sqrt{2^{\dim_{\mathbf{k}} L_1}}$.

Podstawowe narzędzia badawcze rozprawy stanowią ułamki symetryczne pierścieni półpierwszych i ich centralne lokalizacje, por. Rozdział 2. Pozwalają one na redukcję rozważanych w pracy problemów do działań algebr Hopfa na algebry skończenie wymiarowe.

Część z przedstawionych wyników została zawarta w publikacjach [GH04] oraz [GH07].

Literatura

[BL98] Y.A. Bahturin, V. Linchenko, *Identities of algebras with actions of Hopf algebras*, J. Algebra **202** (1998), 634-654.

[BeC86] J. Bergen, M. Cohen, *Actions of commutative Hopf algebras*, Bull. London Math. Soc. **18** (1986), 159-164.

[BCF90] J. Bergen, M. Cohen, D. Fishman, *Irreducible actions and faithful actions of Hopf algebras*, Israel J. Math. **72** (1990), 5-18.

[BeG96] J. Bergen, P. Grzeszczuk, *Invariants of Lie superalgebras acting on associative algebras*, Israel J. Math. **94** (1996), 403-428.

[B76] G.M. Bergman, *Review of the paper: V.K. Kharchenko, Fixed elements of a finite group action on a semiprime ring*, MR0429998 (55#3006).

[BI73] G.M. Bergman, M. Isaacs, *Rings with fixed-point-free group actions*, Proc. London Math. Soc. **27** (1973), 69-87.

[GH04] P. Grzeszczuk, M. Hryniewicka, *Polynomial identities of algebras with actions of pointed Hopf algebras*, J. Algebra **278** (2004), 684-703.

[GH07] P. Grzeszczuk, M. Hryniewicka, *Actions of pointed Hopf algebras with reduced PI invariants*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2381-2389.

[Kh74] V.K. Kharchenko, *Galois extensions and rings of quotients*, Algebra i Logika **13** (1974), 460-484.

[Kh75] V.K. Kharchenko, *Generalized identities with automorphisms*, Algebra i Logika **14** (1975), 215-237.

[Mo80] S. Montgomery, *Fixed rings of finite automorphisms groups of associative rings*, Lecture Notes in Math. **818**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Mo93] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **82**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1993.