Autoreferat rozprawy doktorskiej:
Wycena wybranych instrumentów pochodnych w modelu SABR i modelu lognormalnym

Maciej Wiśniewolski
Promotor: prof. Jacek Jakubowski

28 kwietnia 2008

Intensywny rozwój rynków finansowych w ostatnich latach rodzi potrzebę wyceny i zabezpieczenia coraz bardziej skomplikowanych instrumentów finansowych. Ceny aktywów finansowych reprezentowane są, zadanymi w modelu, procesami stochastycznymi, dlatego ich wycena i zabezpieczenie wymagają zaangażowania często zaawansowanych technik probabilistycznych i numerycznych. Nawet w ramach standardowego modelu Blacka-Scholesa wycena niektórych instrumentów pochodnych jest trudna. Przykładem mogą być tu opcje na stopę procentową. Wycena i efektywne zabezpieczanie opcji na stopę procentową mogą przysparzać w wielu sytuacjach spore trudności (Brigo-Mercurio [3], Rutkowski [16], Gupta-Subrahmanyam [8]). Jedna z takich sytuacji ma miejsce, gdy termin wypłaty opcji na stopę procentową jest niestandardowy. Funkcja wypłaty takiej opcji uzależniona jest od dwóch różnych, skorelowanych stóp procentowych. Aby dobrze wyceniać takie instrumenty musimy znać rozkład łączny procesów od których uzależniona jest funkcja wypłaty. Dodatkowym i bardzo istotnym czynnikiem komplikującym wycenę jest potrzeba dostosowania modeli matematycznych do obserwowalnych, rzeczywistych zachowań rynkowych takich jak volatility smile (Andreasen [1], Brigo-Mercurio [2], Mercurio [12], Rebonato [14], [15]). Efekt volatility smile polega na zróżnicowaniu wartości współczynnika zmienności tego samego aktywu finansowego w zależności od poziomu kursu wykonania kontraktu opcyjnego. Model Blacka-Scholesa zakłada tymczasem, że współczynnik zmienności danego aktywu finansowego jest stały. Wprowadzenie modeli local volatility (Dupire [6], [7], Derman-Kani [4], [5]) miało na celu osłabić rygorystyczne założenie o stałym współczynniku zmienności w modelu Blacka-Scholesa. Mimo tego, że modele te skutecznie można kalibrować do obserwowanych wielkości rynkowych, to jednak w przypadku dynamicznego zabezpieczania pozycji opcyjnych, zakładają odwrotny, do przewidywanego przez rynek, kierunek zmian wartości współczynnika zmienności (Hagan-Kumar-Lesniewski-Woodward [9]). Dlatego modele local volatility coraz częściej zastępowane są modelami stochastic volatility, w których współczynnik zmienności jest zadanym procesem stochastycznym. Bardzo popularnym modelem tego typu jest model SABR zaproponowany przez Hagana, Kumara, Leśniewskiego oraz Woodward [9], gdzie za pomocą techniki nazywanej „singular perturbation“ autorzy wyprowadzili analityczną postać aproksymacji współczynnika zmienności implikowanej opcji na aktywo, którego dynamika została zadana tym modelem. Dzięki temu wyprowadzona została analityczna postać aproksymacji ceny opcji waniliowej w modelu SABR.

W swojej pracy zrealizowałem dwa główne cele. Z jednej strony, dla modeli z dynamikami zadanymi rozkładem lognormalnym, zaprezentowałem nową technikę probabilistyczną, dzięki której wycena złożonych instrumentów pochodnych w tym modelu znacznie się upraszcza. Umiejętność wyceny instrumentów pochodnych w modelu lognormalnym jest bardzo istotna z racji tego, że konwencje rynkowe zbudowane są na bazie modelu Blacka-Scholesa, w którym ceny aktywów finansowych modelowane są rozkładem lognormalnym. Model Blacka-Scholesa i jego odpowiednik typu local volatility są punktem odniesienia dla innych modeli. Z drugiej strony w pracy zaprezentowałem nowe wyniki dotyczące modelu SABR. W szczególności przedstawiłem uogólnienie wzoru Blacka-Scholesa na wycenę opcji waniliowej w szczególnym przypadku modelu SABR tzw. lognormal stochastic volatility model. Dodatkowo, bazując na pomysłach wyceny złożonych instrumentów pochodnych w modelach z dynamikami zadanymi rozkładem lognormalnym, wyprowadziłem analogiczne wyniki dla modelu SABR.

Główne rezultaty rozprawy

1. Badałem dwa procesy stochastyczne X_t, Y_t o dynamikach zadanych równaniami:

$$dX_t = \sigma_X X_t dW_t,$$
$$dY_t = \sigma_Y Y_t dZ_t,$$

gdzie σ_X, σ_Y są dodatnimi stałymi, W, Z są skorelowanymi ruchami Browna oraz:

$$d\langle W, Z\rangle_t = \rho dt.$$

Dla tych procesów stochastycznych X_t, Y_t oraz odpowiednich funkcji f, rozpatrywałem warunkowe wartości oczekiwane $\mathbb{E}[f(X_t, Y_t)|Y_t]$. W szczególności dla wybranych funkcji f oraz procesu stochastycznego:

$$[0, T] \ni t \mapsto \mathbb{E}[f(X_t, Y_t)|Y_t] =: \mathcal{Z}_t(f)$$

wyprowadziłem algebraiczne wzory reprezentujące ciągłe wersje procesów $\mathcal{Z}_t(f)$. Dla ustalonego $t \geq 0$, $K \geq 0$ oraz mierzalnych funkcji

p, q, rozpatrywałem funkcje f postaci: $f(x,y) = \Big(p(t)x - q(t)y - K\Big)^+$. Otrzymałem następujące wyniki:

$$\mathbb{E}[X_t|Y_t] = \frac{X_0}{Y_0^a} e^{t\frac{\sigma_Y^2}{2}(-a^2+a)} Y_t^a,$$

gdzie $a = \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}$, a ρ, σ_X oraz σ_Y są parametrami modelu.

$$\mathbb{E}[(X_t - K)^+|Y_t] = Bl(K, h(Y_t,t), \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X),$$

$$\mathbb{E}[(p(t)X_t - q(t)Y_t - K)^+|Y_t] = Bl(K + q(t)Y_t, p(t)h(Y_t,t), \sqrt{t(1-\rho^2)}\sigma_X),$$

gdzie:

$$h(Y_t,t) = \mathbb{E}[X_t|Y_t]$$

oraz:

$$\begin{aligned} Bl(K,F,v) &= F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \\ d_1 &= \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v}, \\ d_2 &= d_1 - v, \end{aligned}$$

a Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Wykazałem, że znajomość algebraicznego wzoru na postać warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[f(X_t,Y_t)|Y_t]$ znacznie ułatwia wycenę wybranych instrumentów pochodnych. Istotnie, wycena instrumentów pochodnych sprowadza się do obliczenia wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[f(X_t,Y_t)]$. Z prawa iterowanej wartości oczekiwanej otrzymujemy $\mathbb{E}[f(X_t,Y_t)] = \mathbb{E}\mathbb{E}[f(X_t,Y_t)|Y_t]$. Tym samym wycenę instrumentu pochodnego o funkcji wypłaty uzależnionej od X_t oraz Y_t sprowadzamy do obliczenia wartości oczekiwanej funkcji od Y_t. Zaprezentowane przykłady obejmują wycenę kontraktu Quanto Constant Maturity Swap, wycenę opcji na stopę procentową z przesuniętym terminem wypłaty oraz wycenę opcji na spread.

2. Uogólniłem wyniki uzyskane w modelu lognormalnym ze stałym współczynnikiem zmienności na przypadek modelu, w którym współczynniki zmienności σ_X, σ_Y są deterministycznymi funkcjami czasu. Powstały w ten sposób model należy do klasy modeli local volatility model. Dla tego modelu wyprowadziłem postać warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[(p(t)X_t - q(t)Y_t - K)^+|Y_t]$. Rozpatrywane były przypadki kolejno $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ oraz $K = 0$, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ oraz $K > 0$ i przypadek $p > 0$, $q > 0$ oraz $K > 0$.

3. Dalej badałem model stochastic volatility SABR. Rozpatrywałem w tym celu dwa procesy X_t, Y_t o dynamikach zadanych równaniami:

$$dX_t = Y_t X_t^{\beta} dW_t,$$
$$dY_t = \sigma Y_t dZ_t,$$

gdzie W, Z są ruchami Browna oraz $d\langle W, Z\rangle_t = \rho dt$, $\rho \in (-1,1)$, $\beta \in [0,1]$, $\sigma > 0$, $X_0 > 0$, $Y_0 > 0$.

Jest to obecnie jeden z najbardziej popularnych modeli stochastic volatility, w którym współczynnik reprezentujący zmienność procesu, reprezentującego wartość aktywu finansowego, jest procesem stochastycznym o rozkładzie lognormalnym. Popularność swą model ten zawdzięcza bardzo dużej dokładności kalibracji do danych rynkowych (West [17]) oraz wysokiej efektywnosci podczas dynamicznego zabezpieczania pozycji opcyjnych (Hagan et.al [9]). Najwięcej uwagi poświęciłem szczególnemu przypadkowi tego modelu, gdy jeden z parametrów jest znany i równy $\beta = 1$. Ciekawe wyniki w tym modelu, które dały początek moim badaniom, zaprezentował Jourdain [11]. Zauważyłem, że po rozwiązaniu odpowiednich równań rekurencyjnych, potrafimy wyznaczyć algebraiczny wzór na postać wybranych wartości oczekiwanych procesów stochastycznych związanych z modelem SABR z parametrem $\beta = 1$. W szczególności dotyczy to wartości oczekiwanych postaci $\mathbb{E}(\ln X_t)^n$, gdy n jest dowolną liczbą naturalną, a X_t jest procesem stochastycznym zadanym dynamiką modelu SABR z parametrem $\beta = 1$. W rezultacie zaproponowałem nowy sposób przybliżenia momentów procesu SABR postaci $\mathbb{E}X_t^{\delta}$ dla $\delta > 1$:

$$\mathbb{E}X_t^{\delta} \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{\delta^n}{n!} \mathbb{E}(\ln X_t)^n.$$

Ostatni wynik posłużył między innymi do wyceny kontraktów Constant Maturity Swap.

4. W dalszej kolejności udowodniłem, że w modelu SABR dla parametru $\beta = 1$, funkcja charakterystyczna procesu reprezentującego logarytm naturalny wartości aktywu finansowego $\ln X_t$, jest całkowalna i dzięki aproksymacji tej funkcji charakterystycznej, zaproponowałem zupełnie nowy sposób przybliżonej wyceny opcji waniliowej w modelu SABR dla parametru $\beta = 1$:

$$\mathbb{E}(X_t - K)^+ = \int_{\ln K}^{\infty} (e^v - K) g_{V_t}(v) dv,$$

gdzie:

$$g_{V_t}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isv} \phi_{V_t}(s) ds$$

oraz:

$$\phi_{V_t}(s) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{(is)^n}{n!}\mathbb{E}(\ln X_t)^n.$$

5. Udowodniłem, że dla ustalonego $t \geq 0$ gęstość g_{X_t} zmiennej losowej X_t istnieje i jest równa ($r > 0$):

$$g_{X_t}(r) = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{r\sigma_Z}\Phi'\Big(\frac{\ln\frac{r}{X_0} - \mu_Z}{\sigma_Z}\Big)\Big],$$

gdzie μ_Z, σ_Z są określonymi zmiennymi losowymi.

6. Zaprezentowałem i wyprowadziłem, po raz pierwszy w tej pracy, wzory na ceny opcji waniliowych w w modelu SABR dla parametru $\beta = 1$, które są uogólnieniem znanych wzorów Blacka. Otrzymałem następujące wzory:

$$\mathbb{E}[X_t - K]^+ = X_0\mathbb{E}[e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}}\Phi(d_1)] - K\mathbb{E}\Phi(d_2),$$
$$\mathbb{E}[K - X_t]^+ = K\mathbb{E}\Phi(-d_2) - X_0\mathbb{E}\Big[e^{\mu_Z + \frac{\sigma_Z^2}{2}}\Phi(-d_1)\Big],$$

gdzie, dla ustalonego $t \geq 0$, $\mu_Z, \sigma_Z, d_1, d_2$ są odpowiednimi zmiennymi losowymi. Wynik ten jest zgodny z intuicją, ponieważ model SABR z parametrem $\beta = 1$ powstaje w wyniku zamiany stałego współczynnika zmienności, w modelu Blacka, na proces stochastyczny o rozkładzie lognormalnym.

7. W modelu SABR dla $\beta \in (0,1)$, wyznaczyłem algebraiczny wzór na szczególny moment ($\mathbb{E}X_t^{2(1-\beta)}$) procesu stochastycznego zadanego dynamiką tego modelu:

$$\mathbb{E}X_t^{2(1-\beta)} = X_0^{2(1-\beta)} + (1-\beta)(1-2\beta)\frac{Y_0^2}{\sigma^2}[e^{\sigma^2 t} - 1].$$

Obserwacja ta została wykorzystana do wyceny kontraktów CMS w niniejszym modelu. Uzyskany wynik jest formułą w modelu SABR analogiczną do zaprezentowanej przez Hagana [10] formuły w modelu lognormalnym.

Literatura

1. Andreasen J. (2006). *Stochastic Volatility for Real.* Working paper.

2. Brigo D., Mercurio F. (2006). *Interest Rate Models: Theory and Practice.* Springer-Verlag (II ed).

3. Brigo D., Mercurio F. (2002). *Joint Calibration of the LIBOR Market Model to Caps and Swaptions Volatilities.* Risk 1, pp. 117-121.

4. Derman E., Kani I. (1994). *Riding on a Smile.* Risk 7, pp. 32-39.

5. Derman E., Kani I. (1998). *Stochastic Impied Trees: Arbitrage Pricing with Stochastic Term and Strike Structure of Volatility.* International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1(1), pp. 61-110.

6. Dupire B. (1994). *Pricing with a Smile.* Risk 7(1), pp. 18- 20.

7. Dupire B. (1997). *Pricing and Hedging with Smiles.* Cambridge Univesrity Press, pp. 103-111.

8. Gupta A., Subrahmanyam M. (2002). *Pricing and Hedging Interest Rate Options: Evidence from Cap-Floor Markets. EFMA 2002 London Meetings.* Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=314878

9. Hagan P., Kumar D., Lesniewski A., Woodward D. (2002). *Managing Smile Risk.* Wilmott Magazine, September, pp. 84-108.

10. Hagan P. (2003). *Convexity Conundrums: Pricing CMS Swaps, Caps and Floors.* Wilmott Magazine, March, pp.38-44.

11. Jourdain B. (2004). *Loss of Martingality in Asset Price Model with Lognormal Stochastic Volatility.* ENPC-CERMICS, Working paper.

12. Mercurio F. (2002). *Pricing the Smile in a Forward Libor Market Model.* Quantitative Finance, 3 15-27.

13. Ravindran K. (1993). *Low Fat Spread.* Risk Magazine, 6:10, pp. 66-7.

14. Rebonato R. (2002). *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The Libor Market Model and Beyond.* Princeton University Press.

15. Rebonato R. (2004). *Volatility and Correlation. The Perfect Hedger and the Fox.* John Wiley and Sons (II Ed).

16. Rutkowski M. (1999). *Modeling of forward Libor and swap rates.* Applied Mathematical Finance, Vol. 6., No. 1, pp. 29-60.

17. West G. (2005). *Calibration of The SABR Model in Illiquid Markets.* Applied Mathematical Finance, Vol. 12., December, No. 4, pp. 371-385.