Płaszczyzny homologiczne z osobliwościami
(Singular $\mathbb{Q}$-homology planes)

Autoreferat rozprawy doktorskiej.

Karol Palka*

grudzień 2008

1. Motywacje i stan wiedzy

Niech S' będzie nieredukowalną zespoloną powierzchnią algebraiczną. S' nazywana jest osobliwą płaszczyzną $\mathbb{Q}$-homologiczną gdy jest normalna (co zapewnia, że osobliwości są izolowane) oraz znikają jej zredukowane wymierne homologie, tzn. $H_i(S', \mathbb{Q}) = 0$ dla $i > 0$. Zainteresowanie tego typu powierzchniami ma swoje dwie podstawowe motywacje.

Pierwszą jest próba zrozumienia klasy powierzchni podobnych do płaszczyzny $\mathbb{C}^2$ i umiejscowienia w tej klasie roli $\mathbb{C}^2$, przy czym słowu "podobne" próbuje się nadać jak najogólniejszy sens. Badania te mają swoje źródło w pierwszym, na owe czasy zaskakującym, przykładzie podanym przez C.P.Ramanujama ([Ram71]), który próbował udowodnić hipotezę o skracaniu: jeśli dla afinicznej rozmaitości X zachodzi $X \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n+2}$, to $X \cong \mathbb{C}^2$. Taka powierzchnia X musi być oczywiście gładką płaszczyzną $\mathbb{Q}$-homologiczną, więcej, można pokazać że musi być ściągalna, afiniczna, gładka i wymierna. Ramanujam skonstruował przykład powierzchni spełniającej powyższe założenia i różnej od $\mathbb{C}^2$. (Często zdarza się, że trywialność topologiczna, a nawet analityczna, zagadnienia ma niewielki związek z jego trywialnością algebraiczną. Rozumie to każdy, kto słyszał np. o twierdzeniu Quillena-Suslina). Ramanujam pokazał również, że jeśli doda się warunek jednospójności w nieskończoności ($\pi_1^\infty(X) = 0$), to $X \cong \mathbb{C}^2$. Twierdzenie to okazało się mieć małą wartość praktyczną ze względu na duże trudności w obliczaniu π_1^∞. Najbardziej przydatne okazały się być charakteryzacje odwołujące się do znikania homologii S' (wymiernych lub całkowitych) oraz do wymiaru Kodairy $\overline{\kappa}(S')$. Należy zaznaczyć, że o ile można mówić o klasyfikacji zwartych powierzchni algebraicznych, o tyle dla powierzchni otwartych niczego takiego nie udało sie jeszcze osiągnąć. Metody stworzone w ciągu ostatnich 30 lat głównie przez geometrów japońskich dają jednak możliwości systematycznego badania powierzchni otwartych, a przy ograniczeniu do jakichś szczególnych klas nadzieję na klasyfikację.

Mówimy, że X ma $\mathbb{C}^1$- (odpowiednio $\mathbb{C}^*$-) rozwłóknienie, jeśli istnieje morfizm X na krzywą gładką z generycznych włóknem $\mathbb{C}^1$ (odpowiednio $\mathbb{C}^*$). Gładkie płaszczyzny $\mathbb{Q}$-homologiczne były szeroko badane (Dieck, Gurjar, Miyanishi, Petrie, Pradeep, Shastri, Sugie, Tsunoda). Osiągnięto następujące wyniki (por. [Miy01, III.4]):

Twierdzenie 1. *Niech S' będzie gładką płaszczyzną $\mathbb{Q}$-homologiczną.*

(i) S' jest wymierna ([GP99]).

(ii) Jeśli $\overline{\kappa}(S') = -\infty$, to S' ma $\mathbb{C}^1$-rozwłóknienie. Jest klasyfikacja. $H_1(S', \mathbb{Z})$ może być dowolną skończoną grupą abelową. Jeśli $H_1(S', \mathbb{Z}) = 0$, to $S' \cong \mathbb{C}^2$.

(iii) Jeśli $\overline{\kappa}(S') = 0$, to S' jest albo NC-minimalne albo $\mathbb{C}^*$-rozwłóknione, są trzy typy takich rozwłóknień - nieskręcone z bazą $\mathbb{P}^1$ lub $\mathbb{C}^1$ i skręcone z bazą $\mathbb{P}^1$. Jest klasyfikacja. Nie jest możliwe $H_1(S', \mathbb{Z}) = 0$.

*Praca doktorska powstała przy wsparciu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego z grantu promotorskiego N201 016 32/0782

(iv) Jeśli $\overline{\kappa}(S')=1$, to S' jest $\mathbb{C}^*$-rozwłóknione jak wyżej. Jest klasyfikacja. Jeśli $H_1(S',\mathbb{Z})=0$, to S' ma nieskręcone $\mathbb{C}^*$-rozwłóknienie z bazą $\mathbb{P}^1$.

(v) Jeśli $\overline{\kappa}(S')=2$, to S' nie zawiera krzywej ściągalnej. Wszystkie znane przykłady S' wymiaru $\overline{\kappa}(S')=2$ mają brzeg ściągalny do konfiguracji prostych na $\mathbb{P}^2$ ([tDP89]). Jest ich nieskończenie wiele.

Wspomnijmy, że punkt (i) implikuje pozytywne rozwiązanie problemu skracania sformułowanego powyżej.

Drugą motywacją badania płaszczyzn homologicznych jest badanie ilorazów dwuwymiarowych, tzn. powierzchni, które powstają jako ilorazy rozmaitości przez działania grup. Tutaj istotne są płaszczyzny osobliwe. Niech $\epsilon : S \to S'$ będzie rozwiązaniem osobliwości osobliwej płaszczyzny $\mathbb{Q}$-homologicznej S' i niech $(\overline{S}, D)$ będzie snc-uzupełnieniem S, tzn. parą złożoną z gładkiej powierzchni zwartej $\overline{S}$ i snc-dywizora D, takiego że $S=\overline{S}\setminus D$. Oznaczmy dywizor na powierzchni S będący przeciwobrazem zbioru punktów osobliwych S' jako $\widehat{E}$. Oprócz wymiaru Kodairy S', zdefiniowanego jako $\overline{\kappa}(S)$, kluczową rolę odgrywa tutaj wymiar Kodairy części gładkiej $S_0 = S'\setminus \operatorname{Sing} S'$. Z ogólnych własności wymiaru Kodairy wiadomo, że

$$-\infty \leqslant \kappa(\overline{S}) \leqslant \overline{\kappa}(S) = \overline{\kappa}(S') \leqslant \overline{\kappa}(S_0) \leqslant 2.$$

Osobliwe płaszczyzny $\mathbb{Q}$-homologiczne były badane dotąd prawie wyłącznie przy założeniu, że osobliwości są ilorazowe (tzw. *log-płaszczyzny $\mathbb{Q}$-homologiczne*). Wówczas, jak w przypadku gładkim, wiadomo m.in. że S' musi być wymierna [PS97], skąd np. $\kappa(\overline{S})=-\infty$. Sprawa komplikuje sie tym bardziej, im bardziej skomplikowane osobliwości dopuszczamy. Najmocniejszym wynikiem do tej pory było następujące

Twierdzenie 2. *[KR07] Niech S' będzie ściągalną, afiniczną płaszczyzną $\mathbb{Q}$-homologiczną z osobliwościami typu ilorazowego. Niech S_0 będzie częścią gładką S'. Załóżmy, że $\overline{\kappa}(S')=-\infty$. Wtedy $\overline{\kappa}(S_0)=-\infty$. Jeśli S' ma jeden punkt osobliwy to $S'\cong \mathbb{C}^2/G$ dla pewnego skończonego $G<GL(2,\mathbb{C})$. Jeśli punktów osobliwych jest więcej, to S' ma $\mathbb{C}^1$-rozwłóknienie, które jest dokładnie opisane.*

Najtrudniejszą częścią jest wyeliminowanie możliwości $\overline{\kappa}(S_0)=2$. Z twierdzenia tego można wywnioskować pozytywne rozwiązanie długo atakowanego problemu linearyzacji ([KR99]: Każde działanie algebraicznie $\mathbb{C}^*$ na $\mathbb{C}^3$ jest liniowe) oraz opis ilorazów dwuwymiarowych $\mathbb{C}^n/G$ dla grup reduktywnych ([Gur07]: Jeśli X jest dwuwymiarowych ilorazem $\mathbb{C}^n$ przez działanie grupy reduktywnej G to $X\cong\mathbb{C}^2/\Gamma$ dla skończonej podgrupy $\Gamma<GL(2,\mathbb{C})$).

2. Problemy i rezultaty

Podstawowym celem rozprawy jest uzyskanie opisu analogicznego do twierdzenia 2 przy jak najsłabszych założeniach. W opinii autora na uwagę zasługują również następujące ogólne:

Pytania.

(A) Czy osobliwe płaszczyzny $\mathbb{Q}$-homologiczne muszą być wymierne, jeśli dopuszcza się ogólne osobliwości?

(B) Jakie osobliwości są możliwe?

(C) Wiadomo, że jeśli część gładka S_0 płaszczyzny $\mathbb{Q}$-homologicznej ma wymiar $\overline{\kappa}=1$, to S_0 ma $\mathbb{C}^*$-rozwłóknienie. W przypadku $\overline{\kappa}(S_0)=0$ takie rozwłóknienia się zdarzają i są opisane ([MS91]). Co można powiedzieć, jeśli takiego rozwłóknienia nie ma?

Pytanie (C) jest ważne gdy chce mieć opis możliwych osobliwych płaszczyzn $\mathbb{Q}$-homologicznych, takich że $\overline{\kappa}(S_0)<2$. Niech $S', S, \overline{S}, D$ i $\widehat{E}$ będą jak wyżej. W rozdziale 2 studiujemy topologię pary $(\overline{S}, D+\widehat{E})$. Oczywiście podobna analiza była robiona wcześniej przy słabszych założeniach. Przede wszystkim dowodzimy, że

(i) S' jest afiniczna, co implikuje znikanie grup $H_i(S',\mathbb{Z})$ dla $i>1$.

(ii) $\overline{S}$ jest rozdmuchaniem uogólnionej powierzchni Hirzebrucha, tzn. istnieje morfizm $\overline{S}$ na pewną gładką krzywą zupełną o generycznym włóknie $\mathbb{P}^1$. W szczególności $\kappa(\overline{S})=-\infty$. Co więcej, wymierność $\overline{S}$ jest równoważna każdej z równości: (a) $b_1(D)=0$, (b) $b_1(\widehat{E})=0$.

(iii) Grupa Nerona-Severiego S_0 jest torsyjna.

(iv) Otrzymujemy związek między wyznacznikami $d(D) = det(-Q(D))$ i $d(\widehat{E}) = det(-Q(\widehat{E}))$, gdzie $Q(T)$ jest macierzą przecięć dywizora T. Wyznaczniki te są co do modułu równe w przypadku S' ściągalnego, w ogólnym przypadku związek ma postać $d(D) = -d(\widehat{E}) \cdot |H_1(S', \mathbb{Z})|^2$.

Głównym wynikiem rozdziału 2 jest:

Twierdzenie 1. *Jeśli $\overline{\kappa}(S') \geqslant 0$ to S' ma osobliwości ilorazowe. W przypadku $\overline{\kappa}(S_0) = 2$ powierzchnia S' ma jeden, a w przypadku $\overline{\kappa}(S_0) \in \{0, 1\}$ co najwyżej dwa punkty osobliwe.*

Biorąc pod uwagę pytania (A) i (B) twierdzenie 2 mówi, że niespodzianki zdarzyć się mogą tylko dla $\overline{\kappa}(S') = -\infty$. Podstawowym narzędziem w badaniu powierzchni o części gładkiej ogólnego typu, tzn. o wymiarze Kodairy równym dwa, jest nierówność Kobayashi [Kob90]. Autor przegryzł się przy wsparciu A. Langera przez pracę [Lan03], w której zawarte jest ciągle mało znane uogólnienie tej nierówności stosujące się również w przypadku wymiaru Kodairy zero i jeden. Twierdzenie 1 opiera się na powyższych nierównościach oraz na rozwiązaniu problemu (C). Rozwiązanie to jest treścią rozdziału 3. Główny wynik (którego uzyskanie dostarczyło autorowi niespodziewanie wiele zabawy) sformułować można następująco:

Twierdzenie 2. *Jest możliwe, że $\overline{\kappa}(S_0) = 0$ i S_0 nie ma $\mathbb{C}^*$-rozwłóknienia. Z dokładnością do izomorfizmu dzieje się tak dla dokładnie dwóch osobliwych płaszczyzn $\mathbb{Q}$-homologicznych S'. W obu przykładach $\overline{\kappa}(S') = 0$, istnieje jeden punkt osobliwy i jest on typu ilorazowego.*

Narzędziem, które się tutaj stosuje jest wyszukiwanie, przy założeniu że $\mathbb{C}^*$-rozwłóknienie nie istnieje, specyficznych dywizorów $F \subseteq \overline{S}$ o zerowym samoprzecięciu. Tego typu dywizor na powierzchni wymiernej indukuje $\mathbb{P}^1$-rozwłóknienie $\overline{S}$ z F jako jednym z włókien. Mozolna analiza możliwych włókien osobliwych prowadzi do sprzeczności (czasem dosyć subtelnej natury) poza dwoma przypadkami, w których udaje się znaleźć wystarczająco dużo warunków na wyróżnione włókna i cięcia, że możliwe jest podanie konstrukcji. Co ciekawe, konstrukcja jednego przykładu S_1' jest jednoznaczna, a konstrukcję drugiego S_2' można wykonać na dwa pozornie nierównoważne sposoby uzyskując płaszczyzny $\mathbb{Q}$-homologiczne S_{2a}' i S_{2b}'. Problem istnienia izomorfizmu $S_{2a}' \cong S_{2b}'$ udało się rozwiązać pozytywnie dzięki skonstruowaniu morfizmu par $(\overline{S}, D + \widehat{E}) \to (\mathbb{P}^1, U)$, gdzie U jest układem linii. Tą metodą policzono też grupy automorfizmów obu przykładów.

Rozdział 4 jest właściwie przypomnieniem klasyfikacji osobliwych płaszczyzn $\mathbb{Q}$-homologicznych o ujemnym wymiarze Kodairy części gładkiej. Opis taki został uzyskany w pracy [MS91] w przypadku S' o osobliwościach ilorazowych. Zauważamy jedynie, że założenie $\overline{\kappa}(S_0) = -\infty$ jest na tyle mocne, że wyklucza osobliwości nieilorazowe. Opis sprowadza się tutaj w zasadzie do zastosowania ogólnych twierdzeń strukturalnych. W tej klasie znajdują się powierzchnie typu $\mathbb{C}^2/G$ dla $G < GL(2, \mathbb{C})$ oraz powierzchnie S' mające $\mathbb{C}^1$-rozwłóknienie. Wszystkie są wymierne, mogą mieć dowolną ilość punktów osobliwych.

W dalszej części pracy ograniczamy się wyłącznie do płaszczyzn $\mathbb{Q}$-homologicznych S' o ujemnym wymiarze Kodairy. Dzięki twierdzeniu 2 do rozpatrzenia pozostają S', dla których S_0 jest $\mathbb{C}^*$-rozwłóknione i $\overline{\kappa}(S_0) \in \{0, 1\}$ oraz S' takie że $\overline{\kappa}(S_0) = 2$ (w tym przypadku $\mathbb{C}^*$-rozwłóknienie S_0 jest niemożliwe). W rozdziale 5 badamy powyższe $\mathbb{C}^*$-rozwłóknienia i analizujemy możliwe S'. Znów, przy założeniu że osobliwości S' są ilorazowe rozwłóknienia takie zostały zbadane w pracy [MS91]. Z jednej strony nasze rozważania biorą pod uwagę ogólniejszą sytuację osobliwości nieilorazowych, a z drugiej, jak wspomniano wyżej, zainteresowani jesteśmy płaszczyznami S' spełniającymi $\overline{\kappa}(S') = -\infty$, co pozwala na bardziej szczegółowy opis. Okazuje się, że są trzy typy takich możliwych $\mathbb{C}^*$-rozwłóknień S_0: gyoza (z jednym cięciem dwukrotnym w D), sandwich I (z jednym cięciem w D i jednym w $\widehat{E}$), sandwich II (z dwoma rozłącznymi cięciami w D). Uzyskano następujące:

Twierdzenie 3. *Niech S' będzie osobliwą płaszczyzną $\mathbb{Q}$-homologiczną, taką że $\overline{\kappa}(S') = -\infty$ oraz istnieje $\mathbb{C}^*$-rozwłóknienie $p : S_0 \to B$ na pewną krzywą gładką B. Wówczas:*

(i) Jeśli p jest typu gyoza, to istnieje inne $\mathbb{C}^*$-rozwłóknienie S_0 typu sandwich I lub II.

(ii) Jeśli p jest typu sandwich II to osobliwość S' jest jedna i cykliczna. Podana jest klasyfikacja (jest nieskończenie wiele przykładów) i konstrukcje.

(iii) *Jeśli p jest typu sandwich I to osobliwość S' jest jedna i pomijając przypadki $\overline{\kappa}(S_0) = -\infty$ nie jest ilorazowa. Powierzchnia S' jest tutaj ściągalna. Może, ale nie musi być wymierna. Można zrealizować dowolną osobliwość dopuszczalną na normalnych powierzchniach z 'dobrym' działaniem $\mathbb{C}^*$. S' nie musi być wymierna, a nawet jeśli jest, to osobliwość może nie być wymierna. Podana jest klasyfikacja (jest nieskończenie wiele przykładów) i konstrukcje.*

Należy zauważyć, że rozwłóknienia S_0 typu sandwich I nie są indukowane przez $\mathbb{C}^*$-rozwłóknienia S' i w związku z tym nie były wcześniej rozpatrywane. Punkt trzeci powyższego twierdzenia pokazuje m.in, że twierdzenie [PS97] o wymierności S' nie przenosi się na przypadek osobliwości nieilorazowych. Powierzchnie z tego punktu mają prostą konstrukcję i, ku radości autora, dostarczają bogatej gamy nowych przykładów.

Najistotniejszym wynikiem pracy jest zawarte w rozdziale 6 uogólnienie wyniku [KR07]:

Twierdzenie 4. *Jeśli S' jest osobliwą płaszczyzną $\mathbb{Q}$-homologiczną o ujemnym wymiarze Kodairy to $\overline{\kappa}(S_0) \neq 2$.*

Kilka słów o metodzie dowodu. Oznaczmy dywizor kanoniczny jako K. Dzięki nierówności Kobayashi od początku jest jasne, że osobliwość S' jest jedna, typu ilorazowego, co implikuje wymierność S'. Panuje jednak zasada: im D i $\widehat{E}$ są prostsze tym trudniej je wykluczyć, zależność ma naturę ekspotencjalną. Kluczowym narzędziem jest metoda wyszukiwania specyficznie leżących (-1)-krzywych, mająca swoje źródła w lemacie Fujity (przypomnijmy: Jeśli F jest dywizorem na powierzchni wymiernej oraz $\kappa(K+D) = -\infty$ to dla dużych n zachodzi $\kappa(F + n(K + D)) = -\infty$). Metoda ta została wynaleziona przez M.Korasa i P.Russella i znajduje zastosowanie również tutaj. Istotna część metod z pracy [KR07] działa w naszym ogólniejszym przypadku, korzystamy z nich intensywnie. Niech $\epsilon = -1 - (K + D + \widehat{E})^2$, jest to liczba naturalna zależna tylko od S'. Udaje się osiągnąć następujące ograniczenia:

(i) $3 \leqslant K\widehat{E} + 2\epsilon \leqslant 5$,

(ii) D ma jedną składową rozgałęziającą (jest *widelcem*).

Wówczas, chociaż ciągle pozostaje do wyeliminowania nieskończenie wiele możliwości, sytuacja jest prostsza: znany jest konkretnie rozkład Zariskiego dywizora $K + D + \widehat{E}$, ograniczone są możliwe typy osobliwości. Droga do celu wiedzie przez pokazanie, że po dodaniu do S_0 składowej rozgałęziającej D (*powierzchnia* W) wymiar Kodairy, mimo że potencjalnie może zmaleć do $-\infty$, pozostaje równy 2. Dowód tego faktu jest chyba najcięższą częścią pracy. Wielokrotnie używamy stworzonych na jej potrzeby programów komputerowych, które eliminują wiele możliwych par $(D, \widehat{E})$. Jako wniosek dostajemy kilkuelementową listę możliwych $\widehat{E}$ oraz dodatkowe ograniczenia na D. Praca kończy się wyeliminowaniem pozostałych przypadków przy użyciu równań spełnianych przez pary charakterystyczne (pary Hamburger-Noether) opisujące własności obrazu dywizora $\widehat{E}$ przy specyficznie dobranym ściągnięciu $\overline{S} \to \mathbb{P}^2$.

Literatura

[GP99] R. V. Gurjar and C. R. Pradeep, *$\mathbf{Q}$-homology planes are rational. III*, Osaka J. Math. **36** (1999), no. 2, 259–335.

[Gur07] R. V. Gurjar, *Two-dimensional quotients of $\mathbf{C}^n$ are isomorphic to $\mathbf{C}^2/\Gamma$*, Transform. Groups **12** (2007), no. 1, 117–125.

[Kob90] Ryoichi Kobayashi, *Uniformization of complex surfaces*, Kähler metric and moduli spaces, Adv. Stud. Pure Math., vol. 18, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 313–394.

[KR99] Mariusz Koras and Peter Russell, *$\mathbf{C}^*$-actions on $\mathbf{C}^3$: the smooth locus of the quotient is not of hyperbolic type*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 4, 603–694.

[KR07] ______, *Contractible affine surfaces with quotient singularities*, Transform. Groups **12** (2007), no. 2, 293–340.

[Lan03] Adrian Langer, *Logarithmic orbifold Euler numbers of surfaces with applications*, Proc. London Math. Soc. (3) **86** (2003), no. 2, 358–396.

[Miy01] Masayoshi Miyanishi, *Open algebraic surfaces*, CRM Monograph Series, vol. 12, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[MS91] M. Miyanishi and T. Sugie, *Homology planes with quotient singularities*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), no. 3, 755–788.

[PS97] C. R. Pradeep and Anant R. Shastri, *On rationality of logarithmic $\mathbf{Q}$-homology planes. I*, Osaka J. Math. **34** (1997), no. 2, 429–456.

[Ram71] C. P. Ramanujam, *A topological characterisation of the affine plane as an algebraic variety*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 69–88.

[tDP89] Tammo tom Dieck and Ted Petrie, *Homology planes: an announcement and survey*, Topological methods in algebraic transformation groups (New Brunswick, NJ, 1988), Progr. Math., vol. 80, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1989, pp. 27–48.