Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Janusz Dybizbański

Liczby Ramseya z cyklem C_4

autoreferat rozprawy doktorskiej

Promotor rozprawy

prof. UG dr hab. Andrzej Szepietowski

Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytet Gdański

Listopad 2013

Klasyczne liczby Ramseya

U podstaw prezentowanej rozprawy leży twierdzenie udowodnione na początku 1930 roku przez angielskiego matematyka Franka Ramseya. Twierdzenie to, dzisiaj nazywane jego imieniem, jest przedmiotem badań wielu matematyków. Analiza niektórych problemów możliwa była dzięki zaprojektowaniu i implementacji nietrywialnych algorytmów często działających równolegle na sieci komputerów.

Twierdzenie 1 (Ramsey [40])**.** *Dla dowolnych liczb naturalnych r i m oraz dla dowolnego ciągu liczb naturalnych $k_1, k_2, ..., k_m$ istnieje liczba naturalna n taka, że:*
(*) dla dowolnego zbioru X, $|X| \geq n$ oraz podziału $\binom{X}{r} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ istnieje $1 \leq i \leq m$ oraz zbiór $Y \subseteq X$ o co najmniej k_i elementach taki, że $\binom{Y}{r} \subseteq A_i$,

gdzie $\binom{X}{r}$ oznacza wszystkie r-elementowe podzbiory zbioru X. W przypadku $r = 1$ twierdzenia to jest równoważne zasadzie szufladkowej Dirichleta. W prezentowanej rozprawie zajmować się będziemy wyłącznie przypadkiem, gdy $r = 2$. Pięć lat po śmierci Ramseya, w 1935 roku podobnym problemem zajmowała się grupa węgierskich matematyków, w której znajdował się 20 letni wówczas Paul Erdős. Esther Klein udowodniła, że w dowolnym zbiorze 5 punktów takich, że żadne 3 z nich nie są współliniowe, zawsze można znaleźć czworokąt wypukły oraz zapytała, czy możemy wyznaczyć liczbę $N(n)$ taką, że w dowolnym zbiorze $N(n)$ punktów, w którym żadne 3 nie są współliniowe, znajduje się n punktów wyznaczających n-kąt wypukły. Erdős i Szekeres w pracy [11] przedstawili dwa dowody faktu istnienia tych liczb. Pierwszy z nich zawiera nowy dowód twierdzenia Ramseya dający lepsze górne oszacowanie dla liczb Ramseya. Nieformalnie mówiąc, twierdzenie 1 orzeka, że w dostatecznie dużej strukturze znajdziemy zorganizowaną podstrukturę o arbitralnym rozmiarze. Naturalną konsekwencją tego faktu jest pytanie jak duża musi być ta struktura? Inaczej mówiąc, jaka jest najmniejsza wartość liczby n spełniającej warunek (*)?

Definicja 2. Dla $r = 2$ oraz dowolnego ciągu liczb naturalnych $k_1, k_2, ..., k_m$ najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą warunek (*) nazywamy ***liczbą Ramseya*** i oznaczamy $R(k_1, k_2, ..., k_m)$.

W 1955 roku Greenwood i Gleason opublikowali pierwszą pracę [17], w której wyznaczone zostały liczby Ramseya. Dwa lata wcześniej, na zawodach matematycznych The William Lowell Putnam Mathematical Competition, uczestnicy mieli do rozwiązania zadanie polegające na udowodnieniu, że każdy graf o 6 wierzchołkach i 15 krawędziach pokolorowanych na czerwono lub niebiesko posiada 3 wierzchołki takie, że łączące je krawędzie tworzą jednobarwny trójkąt. Rozwiązanie tego zadania jest dowodem nierówności $R(3,3) \leq 6$. Równość $R(3,3) = 6$ wynika z istnienia kolorowania grafu o 5 wierzchołkach i 10 krawędziach niezawierającego jednobarwnego trójkąta.

Dotychczas wyznaczono tylko 9 dokładnych (nietrywialnych) wartości dwukolorowych liczb Ramseya. Wszystkie znane wartości wraz z autorami i rokiem odkrycia przedstawia tabela 1.

Rok wyznaczenia	Liczba i wartość	Autorzy
≤ 1953	$R(3,3) = 6$	
1955	$R(3,4) = 9$ $R(3,5) = 14$ $R(4,4) = 18$	Greenwood, Gleason [17]
1964	$R(3,6) = 18$	Kéry [24]
1968	$R(3,7) = 23$	Graver, Yackel [16]
1982	$R(3,9) = 36$	Grinstead, Roberts [18]
1992	$R(3,8) = 28$	McKay, Zhang Ke Min [34]
1995	$R(4,5) = 25$	McKay, Radziszowski [32]

Tabela 1: Wartości klasycznych liczb Ramseya.

W 4 ostatnich wierszach tabeli przedstawieni są autorzy górnych oszacowań. Dolne oszacowania wyznaczone zostały wcześniej przez Kalbfleischa w pracy [25] dla liczb $R(3,7)$ i $R(3,9)$ oraz w pracy [26] dla liczby $R(4,5)$. Dolne oszacowanie liczby $R(3,8)$ wyznaczone zostało wraz z wartością liczby $R(3,9)$ przez Grinsteada i Robertsa [18]. Przy wyznaczaniu trzech ostatnich wartości z tabeli 1 używane były komputery.

W przypadku większej liczby kolorów dokładna wartość klasycznych liczb Ramseya znana jest tylko w jednym przypadku. W 1955 roku Greenwood i Gleason [17] wyznaczyli wartość $R(3,3,3) = 17$. Oczywiście badane są także inne liczby i znane są ograniczenia ich wartości. Wszystkie znane dokładne wartości oraz oszacowania dla różnego typu liczb Ramseya można znaleźć w regularnie aktualizowanej pracy przeglądowej Radziszowskiego [36].

Zadanie wyznaczenia liczb Ramseya $R(k,k)$ można przeformułować i zapytać: ile osób należy zaprosić na przyjęcie, aby było wśród nich k osób znających się wzajemnie lub k osób, które się wzajemnie nie znają? Trudność wyznaczania dokładnych wartości liczb Ramseya Paul Erdős często opisywał w formie zabawnej anegdoty. W filmie dokumentalnym z 1993 roku „N is a Number - A Portrait of Paul Erdős" opowiada:

> Przypuśćmy, że zły duch powie ludzkości: podajcie odpowiedź dla 5 osób albo doprowadzę do eksterminacji ludzkiej rasy. Najlepszym co moglibyśmy zrobić, to zaangażowanie wszystkich matematyków oraz wszystkich komputerów, aby obliczyć żądaną wartość. Jeżeli jednak zapyta o 6 osób, najlepsze co moglibyśmy zrobić, to starać się zniszczyć go, zanim on zniszczy nas.

Faktycznie, 20 lat po opowiedzeniu tej historii ciągle nie jest znana dokładna wartość $R(5,5)$. Wiadomo jedynie, że liczba ta jest pomiędzy 43 [12] a 49 [33]. O liczbie $R(6,6)$ wiadomo, że jest pomiędzy 102 [26] a 165 [31].

Liczby Ramseya w języku teorii grafów

Definicja 3. Dla dowolnych grafów $H_1, H_2, ..., H_m$ ***grafowa liczba Ramseya*** $R(H_1, H_2, ..., H_m)$ to najmniejsza liczba naturalna n taka, że dla dowolnego m-kolorowania krawędziowego grafu pełnego $G = K_n$ istnieje i $(1 \leq i \leq m)$ takie, że graf G zawiera podgraf izomorficzny z H_i, którego wszystkie krawędzie są w kolorze i.

Gdy grafy H_i są grafami pełnymi, to powyższa definicja jest równoważna definicji 2. W prezentowanej rozprawie zajmować się będziemy grafowymi liczbami Ramseya, w których jednym z parametrów jest cykl C_4.

W 1974 roku Faudree, Lawrence, Parsons oraz Schelp [15] wyznaczyli dokładne wartości wszystkich dwukolorowych liczb Ramseya dla ścieżek i cykli. Wnioskiem z udowodnionego przez nich twierdzenia jest fakt, że $R(C_4, P_n) = 4$ dla $n = 2, 3$ oraz $R(C_4, P_n) = n + 1$ dla $n \geq 4$. Podobnie jak w przypadku ścieżek, znane są wszystkie wartości liczb Ramseya dla dwóch cykli. Wyznaczyli je w 1973 roku Rosta [41] oraz niezależnie w 1974 r. Faudree i Schelp [14]. W przypadku cyklu C_4 wartości te wynoszą $R(C_4, C_n) = 7, 6, 7$ dla $n = 3, 4, 5$ oraz $R(C_4, C_n) = n + 1$ dla $n \geq 6$. Trudniejszym zadaniem okazało się wyznaczenie liczb

Ramseya $R(C_4, K_n)$. Dokładne wartości tych liczb znane są tylko dla $n \leq 8$ a wyniki te podsumowuje tabela 2.

n	3	4	5	6	7	8
$R(C_4, K_n)$	7 [4]	10 [6]	14 [7]	18 [42]	22 [22]	26 [38]

Tabela 2: $R(C_4, K_n)$ dla $3 \leq n \leq 8$.

Cykle i pełne grafy dwudzielne

Liczby Ramseya dla cykli i pełnych grafów dwudzielnych były szeroko badane między innymi w pracach [20, 30, 35]. Harborth i Mengersen [20] badali liczby postaci $R(K_{2,2} = C_4, K_{m,n})$ dla $2 \leq m \leq 3$ oraz $m \leq n$. Przypadek $m = 1$ szczegółowo badał Parsons [35] a wartości dla $m = 3$ i $3 \leq n \leq 10$ wyznaczył Lortz [30].

Harborth i Mengersen [20] udowodnili następujące górne oszacowanie:

Dla $n \geq 2$ *niech* $q = \lceil \sqrt{n} \rceil$, $s = n - (q-1)^2$ *oraz* $M = \{2, 5, 37, 3137\}$. *Wtedy*

$$R(C_4, K_{2,n}) \leq \begin{cases} n + 2q - 1 & \textit{dla } s = 1 \textit{ oraz } n \notin M \\ n + 2q & \textit{dla } 2 \leq s \leq q - 1 \textit{ lub } n \in M \\ n + 2q + 1 & \textit{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Ponadto, pokazali, że w nieskończenie wielu przypadkach dokładna wartość badanych liczb jest równa wskazanemu górnemu oszacowaniu. Dokładne wartości dla małych n wyznaczyli Chvátal i Harary [5, 6] dla $n = 1$ i 2 oraz Harborth i Mengersen [20] dla $3 \leq n \leq 13$ oraz $n = 16, 17, 20, 21$.

Cykle i koła

W 1983 r. Burr i Erdős [3] udowodnili, że $R(C_3, W_n) = 2n - 1$ dla $n \geq 6$. Dokładne wartości liczb $R(C_m, W_n) = 2n - 1$ dla nieparzystego m oraz $n \geq 5m - 6$ wyznaczył Zhou Huai Lu [51]. Surahmat i inni postawili hipotezę [45, 46, 47] mówiącą, że $R(C_m, W_n) = 3m - 2$ dla parzystego $n \geq 4$ oraz $m \geq n - 1$, $m \neq 3$. Częściowo została ona udowodniona w pracach [28, 29, 47] a kompletny dowód przedstawili Yaojun Chen i inni [49]. Surahmat postawił także hipotezę $R(C_m, W_n) = 2m - 1$ dla nieparzystego $n \geq 3$ oraz $m > n$ i $m \geq 5$ [45]. Hipoteza ta została początkowo udowodniona dla $2m \geq 5n-7$ [47] a w 2009 r. dla $2m \geq 3n-1$ [50].

Dokładne wartości liczb typu $R(C_4, W_n)$ dla $4 \leq n \leq 6$ wyznaczone zostały w pracach [6, 7, 23] oraz dla $7 \leq n \leq 13$ przez Kung-Kuen Tse w pracy [27]. Surahmat i inni [48] udowodnili następujące górne oszacowanie:

$$R(C_4, W_n) \leq n + \lceil (n-1)/3 \rceil.$$

Trój- i czterokolorowe liczby z cyklem C_4

Liczbami Ramseya dla trzech grafów o co najwyżej 4 wierzchołkach zajmowano się między innymi w pracach [1, 3, 17, 21, 43]. Poza tym Radziszowski i inni [37, 39] pokazali, że: $19 \leq R(C_4, C_4, K_4) \leq 22$, $25 \leq R(C_4, K_3, K_4) \leq 32$, $52 \leq R(C_4, K_4, K_4) \leq 72$. Wartość $R(C_4, P_4, K_4) = 14$ została wyznaczona w pracy [2].

Czterokolorowymi liczbami Ramseya typu $R(C_4, C_4, H_1, H_2)$, gdzie H_1 oraz H_2 były jednym z grafów C_4, K_3 lub K_4 zajmowano się między innymi w pracach [13, 37, 39, 44]. Jedyną znaną dokładną wartością tego typu liczb jest $R(C_4, C_4, C_4, C_4) = 18$. Dolne oszacowanie wyznaczył w 1983r. Exoo [13], a górne zostało wyznaczone w 2007r. przez Sun Yongqi i innych [44]. Liczbami tego typu zajmował się Radziszowski i Xu w pracy [39] oraz razem z Shao w pracy [37] wyznaczając następujące oszacowania: $21 \leq R(C_4, C_4, C_4, K_3) \leq 27$, $31 \leq R(C_4, C_4, C_4, K_4) \leq 50$, $28 \leq R(C_4, C_4, K_3, K_3) \leq 36$, $42 \leq R(C_4, C_4, K_3, K_4) \leq 76$, $87 \leq R(C_4, C_4, K_4, K_4) \leq 179$.

Wyniki rozprawy

Prezentowana rozprawa poświęcona jest grafowym liczbom Ramseya, których przynajmniej jednym z parametrów jest cykl długości cztery, czyli C_4.

W rozdziale 3 zajmujemy się dwukolorowymi liczbami Ramseya dla cyklu C_4 oraz pełnych grafów dwudzielnych $K_{2,n}$. Głównym wynikiem jest twierdzenie, które w nieskończenie wielu przypadkach daje lepsze od dotychczas znanego górne oszacowanie dla tego typu liczb. Dokładniej, pokazujemy, że:

Jeżeli $n \geq 2$ *jest parzyste i* $q = \lceil \sqrt{n} \rceil$ *nieparzyste oraz* $n - (q-1)^2 \leq q/2$*, to* $R(C_4, K_{2,n}) \leq n + 2q - 1$.

Dodatkowo, za pomocą powyższego twierdzenia i zaprojektowanego algorytmu komputerowego wyznaczymy dokładne wartości liczb:

- $R(C_4, K_{2,14}) = 22$,
- $R(C_4, K_{2,15}) = 24$,
- $R(C_4, K_{2,18}) = 27$,
- $R(C_4, K_{2,38}) = 51$.

Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały opisane w zaakceptowanej do druku pracy [8].

W rozdziale 4 omówimy dwukolorowe liczby Ramseya dla cyklu C_4 oraz koła o n wierzchołkach W_n. Głównym wynikiem jest twierdzenie, które wyznacza górne oszacowanie tego typu liczb.

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 11$

$$R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1.$$

Ponadto, pokażemy, że wyznaczone górne oszacowanie jest równe dokładnej wartości dla nieskończenie wielu n. Dokładniej, za pomocą modyfikacji grafu Erdősa-Rényiego, pokażemy, że

$R(C_4, W_{q^2+1}) = q^2 + q + 1$ *dla* $q \geq 4$ *będącego potęgą liczby pierwszej.*

Na zakończenie wyznaczymy następujące liczby:

- $R(C_4, W_{14}) = 18$,
- $R(C_4, W_{15}) = 19$,
- $R(C_4, W_{16}) = 20$,
- $R(C_4, W_{17}) = 21$.

Wyniki tego rozdziału zostały opisane we wspólnej z Dzido pracy [10].

W rozdziale 5 zajmujemy się trój- i czterokolorowymi liczbami Ramseya, których jednym z parametrów jest cykl C_4 a jako pozostałe parametry przyjmiemy dowolne grafy o maksymalnie czterech wierzchołkach. Za pomocą metod kombinatorycznych oraz algorytmów komputerowych wyznaczymy liczby:

- $R(C_4, C_4, B_2) = 16$,
- $R(C_4, B_2, K_3) = 17$,
- $R(C_4, B_2, B_2) = 19$, gdzie B_2 oznacza książkę.

oraz dolne oszacowania:

- $R(C_4, C_4, K_4) \geq 20$,
- $R(C_4, C_3, K_4) \geq 27$,
- $R(C_4, B_2, K_4) \geq 28$,
- $R(C_4, C_4, C_4, C_3) \geq 24$,
- $R(C_4, C_4, C_4, K_4) \geq 34$,
- $R(C_4, C_4, C_3, C_3) \geq 30$,
- $R(C_4, C_4, C_3, K_4) \geq 43$.

Ponadto pokażemy, że $R(C_4, B_2, K_4) \leq 36$ oraz

- $R(C_4, B_2, K_3 + e) = R(C_4, B_2, K_3) = 17$,
- $R(C_4, K_3 + e, K_4) \leq \max\{R(C_4, K_3, K_4), 29\} \leq 32$.

Wyniki opisane w tym rozdziale są częścią wspólnej z Dzido pracy [9] oraz wspólnej z Bozą i Dzido pracy [2].

Literatura

[1] Arste J., Klamroth K., Mengersen I., Three color Ramsey numbers for small graphs, *Utilitas Mathematica*, **49** (1996) 85–96.

[2] L. Boza, J. Dybizbański, T. Dzido, Three color Ramsey numbers for graphs with at most 4 vertices, *Electronic Journal of Combinatorics*, **19**(4) (2012) #P47.

[3] S. A. Burr, P. Erdős, Generalizations of a Ramsey-Theoretic Result of Chvátal, *Journal of Graph Theory*, **7** (1983) 39–51.

[4] G. Chartrand, S. Schuster, On the existence of specified cycles in complementary graphs, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **77** (1971) 995–998.

[5] V. Chvátal, F. Harary, Generalized Ramsey Theory for Graphs, II. Small Diagonal Numbers, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **32** (1972) 389–394.

[6] V. Chvátal, F. Harary, Generalized Ramsey Theory for Graphs, III. Small Off-Diagonal Numbers, *Pacific Journal of Mathematics*, **41** (1972) 335–345.

[7] M. Clancy, Some Small Ramsey Numbers, *Journal of Graph Theory*, **1** (1977) 89–91.

[8] J. Dybizbański, On some Ramsey numbers of C_4 versus $K_{2,n}$, przyjęta do druku w *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing.*

[9] J. Dybizbański, T. Dzido, On Some Ramsey Numbers for Quadrilaterals, *Electronic Journal of Combinatorics*, **18** (2011) #P154.

[10] J. Dybizbański, T. Dzido, On some Ramsey numbers for quadrilaterals versus wheels, przyjęta do druku w *Graphs and Combinatorics.*

[11] P. Erdős, G. Szekeres, A Combinatorial Problem in Geometry, *Compositio Mathematica*, **2** (1935) 463—470.

[12] G. Exoo, A Lower Bound for $R(5,5)$, *Journal of Graph Theory*, **13** (1989) 97–98.

[13] G. Exoo, Constructing Ramsey Graphs with a Computer, *Congressus Numerantium*, **59** (1987) 31–36.

[14] R. J. Faudree, R. H. Schelp, All Ramsey Numbers for Cycles in Graphs, *Discrete Mathematics*, **8** (1974) 313–329.

[15] R. J. Faudree, S. L. Lawrence, T. D. Parsons, R. H. Schelp, Path-Cycle Ramsey Numbers, *Discrete Mathematics*, **10** (1974) 269–277.

[16] J. E. Graver, J. Yackel, Some Graph Theoretic Results Associated with Ramsey's Theorem, *Journal of Combinatorial Theory*, **4** (1968) 125–175.

[17] R. E. Greenwood, A. M. Gleason, Combinatorial Relations and Chromatic Graphs, *Canadian Journal of Mathematics*, **7** (1955) 1–7.

[18] C. Grinstead, S. Roberts, On the Ramsey Numbers $R(3,8)$ and $R(3,9)$, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **33** (1982) 27–51.

[19] F. Harary, Recent results in generalized Ramsey theory for graphs, *Graph Theory and Applications*, Springer (1972) 125–138.

[20] M. Harborth, I. Mengersen, Some Ramsey Number for Complete Bipartite Graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, **13** (1996) 119–128.

[21] M. S. Jacobson, On the Ramsey Number for Stars and a Complete Graph, *Ars Combinatoria*, **17** (1984) 167–172.

[22] C. J. Jayawardene, C. C. Rousseau, An Upper Bound for the Ramsey Number of a Quadrilateral versus a Complete Graph on Seven Vertices, *Congressus Numerantium*, **130** (1998) 175–188.

[23] C. J. Jayawardene, C. C. Rousseau, The Ramsey Numbers for a Quadrilateral vs. All Graphs on Six Vertices, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **35** (2000) 71-87. Errata JCMCC 51 (2004) 221.

[24] G. Kéry, On a Theorem of Ramsey (po węgiersku), *Matematikai Lapok*, **15** (1964) 204–224.

[25] J. G. Kalbfleisch, Chromatic Graphs and Ramsey's Theorem, rozprawa doktorska, University of Waterloo, (1966).

[26] J. G. Kalbfleisch, Construction of Special Edge-Chromatic Graphs, *Canadian Mathematical Bulletin*, **8** (1965) 575–584.

[27] Kung-Kuen Tse, On the Ramsey number of the quadrilaterals versus the book and the wheel, *Australasian Journal of Combinatorics*, **27** (2003) 163–167.

[28] Lianmin Zhang, Yaojun Chen, T. C. Edwin Cheng, The Ramsey Numbers for Cycles versus Wheels of Even Order, *European Journal of Combinatorics*, **31** (2010) 254–259.

[29] Lingsheng Shi, Ramsey Numbers of Long Cycles versus Books or Wheels, *European Journal of Combinatorics*, **31** (2010) 828–838.

[30] R. Lortz, A Note on the Ramsey Number of $K_{2,2}$ versus $K_{3,n}$, *Discrete Mathematics*, **306** (2006) 2976–2982.

[31] J. Mackey, Combinatorial Remedies, rozprawa doktorska, Department of Mathematics, University of Hawaii (1994).

[32] B. D. McKay, S. P. Radziszowski, $R(4,5) = 25$, *Journal of Graph Theory*, **19** (1995) 309–322.

[33] B. D. McKay, S. P. Radziszowski, Subgraph Counting Identities and Ramsey Numbers, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **69** (1997) 193–209.

[34] B. D. McKay, Zhang Ke Min, The Value of the Ramsey Number $R(3,8)$, *Journal of Graph Theory*, **16** (1992) 99–105.

[35] T. D. Parsons, Ramsey Graphs and Block Designs I, *Transactions of the American Mathematical Society*, **209** (1975) 33–44.

[36] S. P. Radziszowski, Small Ramsey numbers, *The Electronic Journal of Combinatoric*, Dinamic Survey **1** (2011) #13, http://www.combinatorics.org/issue/view/Surveys.

[37] S. P. Radziszowski, Z. Shao, X. Xu, Bounds on some Ramsey numbers involving quadrilateral, *Ars Combinatoria*, **90** (2009) 337–344.

[38] S. P. Radziszowski, Kung-Kuen Tse, A Computational Approach for the Ramsey Numbers $R(C_4, K_n)$, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **42** (2002) 195–207.

[39] S. P. Radziszowski, X. Xu, $28 \leq R(C_4, C_4, C_3, C_3) \leq 36$, *Utilitas Mathematica*, **79** (2009) 353–357.

[40] F. P. Ramsey, On a Problem of Formal Logic, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **30** (1930) 264–286.

[41] V. Rosta, On a Ramsey Type Problem of J. A. Bondy and P. Erdős, I & II, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **15** (1973) 94–120.

[42] C. C. Rousseau, C. J. Jayawardene, The Ramsey Number for a Quadrilateral vs. a Complete Graph on Six Vertices, *Congressus Numerantium*, **123** (1997) 97–108.

[43] C. U. Schulte, Ramsey-Zahlen für Bäume und Kreise, rozprawa doktorska, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, (1992).

[44] Sun Yongqi, Yang Yuansheng, Lin Xiaohui, Zheng Wenping, The Value of the Ramsey Number $R_4(C_4)$, *Utilitas Mathematica*, **73** (2007) 33–44.

[45] Surahmat, Cycle-Wheel Ramsey Numbers. Some results, open problems and conjectures, *Math Track*, ISSN 1817-3462, **2** (2006) 56–64.

[46] Surahmat, E. T. Baskoro, I. Tomescu, The Ramsey Numbers of Large Cycles versus Odd Wheels, *Graphs and Combinatorics*, **24** (2008) 53–58.

[47] Surahmat, E. T. Baskoro, I. Tomescu, The Ramsey Numbers of Large Cycles versus Wheels, *Discrete Mathematics*, **306** (2006) 3334–3337.

[48] Surahmat, E. T. Baskoro, S. Uttunggadewa, H. J. Broersma, An upper bound for the Ramsey number of a cycle of length four versus wheels, *LNCS 3330*, Springer, Berlin (2005) 181–184.

[49] Yaojun Chen, T. C. Edwin Cheng, C. T. Ng, A Theorem on Cycle-Wheel Ramsey Number, *Discrete Mathematics*, **312** 5 (2012) 1059–1061.

[50] Yaojun Chen, T. C. Edwin Cheng, Zhengke Miao, C. T. Ng, The Ramsey Numbers for Cycles versus Wheels of Odd Order, *Applied Mathematics Letters*, **22** (2009) 1875–1876.

[51] Zhou Huai Lu, The Ramsey Number of an Odd Cycle with Respect to a Wheel, *Journal of Mathematics*, Shuxue Zazhi (Wuhan), **15** (1995) 119–120.