Jakub Wojtaszczyk
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Własności zmiennych logarytmicznie wklęsłych

Klasyfikacja Tematyczna: 41A63, 41A05, 65D30

Przypomnijmy, że miarę probabilistyczną μ w $\mathbb{R}^n$ nazywamy *logarytmicznie wklęsłą*, jeżeli dla każdej pary zbiorów Borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}^n$ oraz każdego $t \in [0,1]$ spełniona jest zależność

$$\mu(tA + (1-t)B) \geqslant (\mu(A))^t (\mu(B))^{1-t},$$

gdzie $tA = \{ta : a \in A\}$ zaś $A+B$ to suma Minkowskiego: $\{a+b : a \in A, b \in B\}$. Miara logarytmicznie wklęsła to pojęcie pochodzące z pogranicza rachunku prawdopodobieństwa i geometrii wypukłej — przykładami miar logarytmicznie wklęsłych o powiązaniach probabilistycznych są np. n–wymiarowa miara Gaussowska czy n–wymiarowa miara wykładnicza, zaś przykładem pochodzącym z geometrii wypukłej jest miara jednostajna na dowolnym ograniczonym zbiorze wypukłym o niepustym wnętrzu i objętości 1 (zbiory wypukłe, ograniczone o niepustym wnętrzu będziemy dalej nazywać ciałami wypukłymi). Ogólniej, C. Borell udowodnił w pracy [4] (patrz też [3]), że miara, której nośnik nie jest skupiony na żadnej podprzestrzeni niższego wymiaru jest logarytmicznie wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy ma gęstość i ta gęstość wyraża się wzorem $e^{-f(x)}$ dla pewnej funkcji wypukłej f.

Za początek prac, które patrzą na wysokowymiarową geometrię wypukłą w języku miary można uznać prace Brunna [5] i Minkowskiego [16] z końca XIX wieku. Nierówność Brunna-Minkowskiego (patrz [7], tam też opis historii tej nierówności) mówi, w języku użytym powyżej, że miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$ jest logarytmicznie wklęsła.

Pierwsze dowody tej nierówności były geometryczne, używające odpowiednio dobranego ciągu symetryzacji Steinera. W latach siedemdziesiątych XX wieku Prekopa [17] i Leindler [12] zaproponowali funkcyjną wersję nierówności Brunna–Minkowskiego:

Twierdzenie 1. *Niech $0 < \lambda < 1$ i niech $f, g, h : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ będą funkcjami mierzalnymi spełniającymi zależność*

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$$

dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \right)^{\lambda}.$$

Nierówności tej dowodzi się poprzez stosunkowo prostą indukcję po wymiarze, zaś poprzez wstawienie za f, g i h odpowiednio funkcji charakterystycznych zbiorów A, B i $(1-\lambda)A + \lambda B$ otrzymamy klasyczną nierówność Brunna–Minkowskiego. Ten sposób myślenia — podejście do problemów dotyczących geometrii wypukłej przez język miar i funkcji — jest charakterystyczny dla dziedziny, którą zajmuje się ta rozprawa.

Dla nas ciekawy będzie nurt badań, który rozpoczął się w tzw. teorii lokalnej w analizie funkcjonalnej, czyli badaniu wysoko–, ale skończenie–wymiarowych przestrzeni Banacha. Punktem wyjścia do interesujących nas pojęć bedzie udowodnione w roku 1960 Tw. Dworeckiego [6]:

Twierdzenie 2. *Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N(k, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ takie, że jeśli $(X, \|\cdot\|)$ jest unormowaną przestrzenią Banacha wymiaru większego niż $N(k, \varepsilon)$, to istnieje podprzestrzeń $E \subset X$ wymiaru k i norma $|\cdot|$ na E pochodząca od pewnego iloczynu skalarnego taka, że*

$$|x| \leqslant \|x\| \leqslant (1+\varepsilon)|x|$$

dla każdego $x \in E$.

Innymi słowy można wyrazić to twierdzenie mówiąc, że dowolne symetryczne ciało wypukłe wystarczająco wysokiego wymiaru ma cięcie wymiaru k, które jest bardzo blisko k–wymiarowej elipsoidy (kule w normie pochodzącej od iloczynu skalarnego to elipsoidy). Tu również z naszego punktu widzenia interesujący jest późniejszy dowód tego twierdzenia, pochodzący od V. Milmana [15]. Wykorzystuje on udowodnioną przez P. Levy'ego nierówność izoperymetryczną na sferzę, by wydedukować zjawisko zwane obecnie *koncentracją miary na sferze*. Przez A_ε oznaczmy *ε–otoczkę zbioru A*, czyli zbiór punktów odległych od A o nie więcej niż ε (jako metrykę na S^n przyjmijmy dla uproszczenia metrykę Euklidesową na $\mathbb{R}^n$ obciętą do sfery). Niech μ_S oznacza unormowaną miarę Haara na sferze (czyli naturalną miarę obrotowo niezmienniczą, unormowaną tak, by miara całej sfery była równa 1). Wtedy zachodzi następujące Twierdzenie:

Twierdzenie 3. *Dla dowolnego zbioru $A \subset S^n$ o mierze przynajmniej $1/2$ zachodzi*

$$\mu(S^n \setminus A_\varepsilon) \leqslant C e^{-cn\varepsilon^2}.$$

Z koncentracji miary natychmiast wynika koncentracja funkcji Lipszycowskich wokół ich mediany:

Stwierdzenie 4. *Niech f będzie dowolną funkcją Lipszycowską na S^n, niech $\mathrm{Med} f$ oznacza medianę f (czyli taką liczbę M, że $\mu_S(f \leqslant M) \geqslant 1/2$ i $\mu_S(f \geqslant M) \geqslant 1/2$). Wtedy*

$$\mu_S(\{x : |f(x) - \mathrm{Med} f| \geqslant t\}) \leqslant C e^{-cn\varepsilon^2}.$$

Teoria koncentracji miary od tego czasu znalazła zastosowania m.in. w kombinatoryce, rachunku prawdopodobieństwa oraz — co dla nas będzie najbardziej interesujące — w geometrii wypukłej. Nieformalnie o zjawisku koncentracji miary dla przestrzeni metrycznej (X, ρ) z miarą μ mówimy wtedy, gdy dla dowolnego zbioru A o mierze nie mniejszej niż jedna druga miara $\mu(X \setminus A_\varepsilon)$ bardzo szybko (najchętniej wykładniczo) maleje gdy ε rośnie, gdzie przez A_ε rozumiemy jakieś epsilonowe rozszerzenie zbioru A — np., jak wyżej, ε–otoczkę.

Ważnym zastosowaniem pojęcia koncentracji dla konkretnej funkcji Lipszycowskiej — mianowicie normy Euklidesowej wektora — okazało się Centralne Twierdzenie Graniczne. Okazuje się, że aby udowodnić Centralne Twierdzenie Graniczne dla ciągu wektorów losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kluczowym warunkiem jest skoncentrowanie wartości $\|(X_1, \ldots, X_n)\|$ wokół jej wartości średniej. Pierwszymi ciałami wypukłymi, dla których udało się udowodnić jakiś wariant Centralnego Twierdzenia Granicznego (oprócz szczególnych przypadków — kostki oraz kuli Euklidesowej) były kule B_p^n. Przypomnijmy, że kulą B_p^n nazywamy $\{x : \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leqslant 1\}$. Dowód pochodzi od Antilli, Balla i Perisinaki, którzy w roku 2003 udowodnili następującą wersję Centralnego Twierdzenia Granicznego:

Twierdzenie 5. *Niech X będzie losowym wektorem o rozkładzie jednostajnym na kuli B_p^n. Niech θ będzie losowym wektorem z S^n. Przez g oznaczmy gęstość jednowymiarowej miary Gaussowskiej, czyli $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, a przez g_θ gęstość zmiennej $\langle X, \theta\rangle$. Wtedy zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(\sup_t \left| \int_{-t}^{t} g(t) - g_\theta(t) dt \right| > Cn^{-1/3} \right) \leqslant Cne^{-cn^{1/3}},$$

gdzie prawdopodobieństwo jest brane względem naturalnej miary probabilistycznej na sferze (czyli miary Haara).

Twierdzenie to w istocie mówi, że rzut miarowy kuli B_p^n na losową prostą jest z bardzo dużym prawdopodobieństwem w przybliżeniu Gaussowski.

Dowód tego Twierdzenia składa się z dwóch zasadniczych kroków. Pierwszy to dowód własności zwanej podniezależnością cięć współrzędnościowych kul B_p^n. Dokładne sformułowanie tej własności nie jest dla nas istotne, warto tylko zauważyć, że jest ona dużo słabsza od zdefiniowanego dalej ujemnego stowarzyszenia modułów; interesujący będzie dla nas natomiast następujący wniosek z podniezależności cięć — ujemna korelacja kwadratów:

Stwierdzenie 6. *Niech $(X_1, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym o jednostajnym rozkładzie na B_p^n. Wtedy zachodzi*

$$\mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) \leqslant \mathbb{E}X_i^2 \mathbb{E}X_j^2.$$

Z ujemnej korelacji kwadratów łatwo dostać (przez oszacowanie wariancji) następującą własność, opisującą koncentrację normy Euklidesowej (a konkretnie jej kwadratu) wokół wartości średniej:

Stwierdzenie 7. *Niech $X = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym o jednostajnym rozkładzie na B_p^n. Wtedy*

$$\mathbb{P}\Big(\Big| |X|^2 - \mathbb{E}|X|^2 \Big| \geqslant nt \Big) \leqslant \frac{C}{nt^2}.$$

Od tego czasu badanie Centralnego Twierdzenia Granicznego systematycznie posuwało się do przodu — patrz m.in. [8], [14], [23]. Obecnie najmocniejszym twierdzeniem w tym nurcie badań jest Centralne Twierdzenie Graniczne dla dowolnych miar logarytmicznie wklęsłych B. Klartaga [9] (patrz też [10], gdzie jest dane mocniejsze oszacowanie dla tzw. miar 1–symetrycznych):

Twierdzenie 8. *Niech $1 \leqslant l \leqslant n$ będą liczbami całkowitymi, przy czym $l \leqslant cn^\kappa$. Niech X będzie losowym wektorem o rozkładzie jednostajnym na pewnym ciele wypukłym K. Wtedy istnieje l–wymiarowa podprzestrzeń $E \subset \mathbb{R}^n$ oraz $r > 0$ takie, że dla każdego $A \subset E$ mamy*

$$\left| \mathbb{P}\Big(P_E(X) \in A\Big) - \frac{1}{(2\pi r)^{l/2}} \int_A \exp\Big(-\frac{|x|^2}{2r} \Big) dx \right| \leqslant \frac{1}{n^\kappa},$$

gdzie P_E oznacza rzut prostopadły na E.

Twierdzenie to oznacza, że dla dowolnego ciała wypukłego istnieje taka podprzestrzeń stosunkowow wysokiego wymiaru, że rzut na tę podprzestrzeń jest bardzo bliski odpowiednio znormalizowanej mierze Gaussowskiej. Można to twierdzenie traktować jako miarowy odpowiednik Twierdzenia Dworeckiego. Istnieje też odpowiednik Twierdzenia 5 (który mówi, że z bardzo dużym prawdopodobieństwem zadziała losowa podprzestrzeń l–wymiarowa, natomiast wtedy niekoniecznie dostaniemy kanoniczną miarę Gaussowską (odpowiadającą kuli), a dowolną (odpowiadającą elipsoidzie).

Warto zaznaczyć, że we wszystkich wspomnianych pracach przejście przez koncentrację normy Euklidesowej wokół wartości średniej jest kluczowym fragmentem dowodu.

Innym ważnym przykładem koncentracji jest koncentracja Talagranda dla miary wykładniczej ν^n. Miarą wykładniczą nazywamy miarę na $\mathbb{R}^n$ o gęstości $2^{-n}e^{-|x_1|-|x_2|-\ldots-|x_n|}$. Okazuje się, że najszybsze tempo koncentracji Euklidesowej, jakie można dostać dla miary wykładniczej wskazuje następujące Twierdzenie:

Twierdzenie 9. *Jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ spełnia $\nu^n(A) \geqslant 1/2$, to*

$$\nu^n\Big(\mathbb{R}^n \setminus (A + tB_2^n)\Big) \leqslant Ce^{-ct}.$$

Tempo koncentracji jest zatem kwadratowo gorsze od koncentracji dla sfery (podobna koncentracja co dla sfery zachodzi też dla miary Gaussowskiej, patrz [21]). Okazuje się, ze powodem takiego zjawiska jest to, że zwykła koncentracja, a więc taka, w której dodajemy wielokrotności kuli B_2^n, jest w pewnym sensie źle dopasowana do miary wykładniczej. To zjawisko uchwycił Talagrand w następującym Twierdzeniu [22]:

Twierdzenie 10. *Jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ spełnia $\nu^n(A) \geqslant 1/2$, to*

$$\nu^n\Big(\mathbb{R}^n \setminus (A + \sqrt{t}B_2^n + tB_1^n)\Big) \leqslant Ce^{-ct}.$$

Jak widać przez dodanie czynnika tB_1^n (który można interpretować jako poprawkę związaną z "kształtem" miary wykładniczej) udało się odzyskać tempo zbieżności takie, jak dla sfery czy miary gaussowskiej.

Najprostszy znany dowód powyższej własności pochodzi od Maurey'a z pracy [13]. Wprowadza on tak zwaną własność (τ):

Definicja 11. *Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$, zaś $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ będzie funkcją mierzalną. Powiemy, że para (μ, φ) spełnia* własność (τ) *jeżeli dla każdej ograniczonej funkcji mierzalnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{f\Box\varphi} d\mu \int_{\mathbb{R}^n} e^{-f} d\mu \leqslant 1, \tag{0.0.1}$$

gdzie dla dwóch funkcji f i g na $\mathbb{R}^n$

$$f\Box g(x) := \inf\{f(x-y) + g(y)\colon y \in \mathbb{R}^n\}$$

oznacza splot infimum *f i g.*

Stosunkowo prosto jest dowieść, że własność (τ) implikuję koncentrację miary μ (dokładna postać koncentracji zależy oczywiście od funkcji φ). Maurey w swojej pracy dowodzi, że para $(\nu, C\min\{|x|, x^2\})$ spełnia własność (τ), z czego już prosto wynika twierdzenie 10. Tym tropem pójdziemy w jednej z części rozprawy.

W rozprawie zajmuję się badaniem własności probabilistycznych miar logarytmicznie wklęsłych pochodzących od konkretnych rodzin klas wypukłych. Jeden wątek rozprawy (oparty na wynikach prac [23] i [18]) rozszerza ujemną korelację cięć współrzędnościowych Anttili, Balla i Perissinaki. Okazuje się, że w statystyce rozpatrywane jest pojęcie, które można traktować jako istotne rozszerzenie ujemnej korelacji, a mianowicie ujemna stowarzyszoność. Mówimy, że ciąg zmiennych $X_1, \ldots, X_n$ jest ujemnie stowarzyszony, gdy dla każdej pary funkcji rosnących $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ oraz dowolnego podziału $X_1, X_2, \ldots, X_n$ na dwa rozłączne podzbiory $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ oraz $X_{j_1}, \ldots, X_{j_{n-k}}$ zachodzi

$$\mathbb{E}f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})g(X_{j_1}, \ldots, X_{j_{n-k}}) \leqslant \mathbb{E}f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})\mathbb{E}g(X_{j_1}, \ldots, X_{j_{n-k}}).$$

Wstawiając $f(x) = x^2$ i $g(y_1, \ldots, y_{n-1}) = y_1^2$ otrzymujemy w szczególności ujemną korelację kwadratów taką, jak w [1]. Jest to jednak istotne wzmocnienie ujemnej korelacji kwadratów, co czyni ciekawym i nowym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 12. *Niech $p \in [1.\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, zaś $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie dowolną funkcją log–wklęsłą (tj. taką, że jej logarytm jest wklęsły). Niech μ będzie miarą na $\mathbb{R}^n$ z gęstością $m(\sum |x_i|^p)$, załóżmy dodatkowo, że $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ (ten ostatni warunek jest tylko kwestią przeskalowania). Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym o rozkładzie μ. Wtedy ciąg zmiennych $|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|$ jest ujemnie stowarzyszony.*

O ile jednak poprzednie twierdzenie jest — gdy już się wie, czego dowodzić — stosunkowo proste, to jednym z głównych wyników rozprawy jest ujemna stowarzyszoność modułów dla kul Orlicza. Kule Orlicza to naturalne uogólnienie kul B_p^n, gdzie zamiast funkcji $|x_i|^p$ stosujemy inne funkcje:

Definicja 13. *Rozważmy ciąg funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_n$ z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Niech dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ spełnione będą następujące warunki:*

- *Funkcja f_i jest parzysta,*
- *Funkcja f_i jest wypukła,*
- *$f_i(0) = 0$,*
- *Istnieje takie $s \neq 0$, że $f_i(s) < \infty$ i takie t, że $f(t) > 0$.*

Wtedy zbiór $\{x : \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \leqslant 1\}$ nazywamy uogólnioną kulą Orlicza.

Uogólnione kule Orlicza to klasa ciał wypukłych, która zawiera w szczególności kule B_p^n, ale jest też o wiele szersza. W szczególności w wymiarze 2 wszystkie ciała wypukłe symetryczne względem osi $\{x = 0\}$ i $\{y = 0\}$ są uogólnionymi kulami Orlicza. W wyższych wymiarach już tak nie jest, natomiast wciąż jest to dość szeroka klasa. Jednym z głównych wyników rozprawy jest następujące Twierdzenie dla uogólnionych kul Orlicza:

Twierdzenie 14. *Niech μ będzie miarą jednostajnie rozłożoną na uogólnionej kuli Orlicza o objętości 1. Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym o rozkładzie μ. Wtedy ciąg zmiennych $|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|$ jest ujemnie stowarzyszony.*

Okazuje się, że ujemna stowarzyszoność modułów jest znacznie mocniejsza, aniżeli po prostu ujemna korelacja kwadratów. W szczególności Centralne Twierdzenie Graniczne uzyskane z ujemnej stowarzyszoności okazuje się znacznie mocniejsze w sformułowaniu, aniżeli to uzyskane w pracy [1] (choć nie silniejsze od najnowszych wyników B. Klartaga z [9], które używają innych narzędzi). Ujemna stowarzyszoność ma też szereg innych zastosowań — na podstawie wyników Q–M. Shao [19] można uzyskać następujące twierdzenie o porównywaniu momentów dla kuli Orlicza:

Twierdzenie 15. *Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie uogólnioną kulą Orlicza, niech $(a_i)_{i=1}^n$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych, p — parzystą liczbą naturalną, zaś f będzie funkcją wypukłą. Niech $X = (X_i)_{i=1}^n$ będzie wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na K. Dodatkowo przez $X_i^\star$ oznaczmy ciąg niezależnych zmiennych losowych, przy czym rozkład $X_i^\star$ niech będzie taki sam jak rozkład X_i. Wtedy zachodzą następujące nierówności*

$$\mathbb{E}f\Big(\sum_{i=1}^n |a_i X_i|\Big) \leqslant \mathbb{E}f\Big(\sum_{i=1}^n |a_i X_i^\star|\Big),$$

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n a_i X_i\Big)^p \leqslant \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n a_i X_i^\star\Big)^p,$$

oraz, jeśli dodatkowo f jest rosnąca

$$\mathbb{E}f\Big(\max_{k=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^k |a_i X_i| - c_i\Big) \leqslant \mathbb{E}f\Big(\max_{k=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^k |a_i X_i^\star| - c_i\Big).$$

Wynik ten znalazł już też zastosowanie w pracy innych — parę dni temu otrzymałem wstępną wersję pracę B. Fleury'ego, który przy pomocy Twierdzenia 14 udowodnił odwrotną nierówność Holdera:

Twierdzenie 16. *Niech X będzie wektorem losowym jednostajnie rozłożonym na uogólnionej kuli Orlicza w $\mathbb{R}^n$. Niech $p \in [2, C\sqrt{n}]$. Wtedy zachodzi*

$$\Big(\mathbb{E}|X|^p\Big)^{1/p} \leqslant \left(1 + \frac{C'p}{n}\right)\Big(\mathbb{E}|X|^2\Big)^{1/2}.$$

Drugi wątek, oparty na wynikach pracy [11], jest motywowany Twierdzeniem 10. Skoro dla miary wykładniczej okazuje się, że optymalną koncentracją nie jest koncentracja Euklidesowa, a znacznie od niej silniejsza koncentracja mieszana, to może warto poszukać takiej "dobrze dopasowanej" koncentracji też dla innych miar? Na tę część pracy składają się dwa kierunki badawcze. Pierwszym jest sformułowanie hipotezy o tym, jak taka optymalna koncentracja mogłaby wyglądać. Zdefiniujmy następujące zbiory (występujące już m.in. w pracach Paourisa):

Definicja 17. *Niech μ będzie dowolną miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$. Dla $p \geqslant 1$ definiujemy następujące zbiory:*

$$\mathcal{M}_p(\mu) := \Big\{v \in \mathbb{R}^n \colon \int |\langle v, x\rangle|^p d\mu(x) \leqslant 1\Big\},$$

$$\mathcal{Z}_p(\mu) := (\mathcal{M}_p(\mu))^\circ = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon |\langle v, x\rangle|^p \leqslant \int |\langle v, y\rangle|^p d\mu(y) \textit{ for all } v \in \mathbb{R}^n\Big\}$$

Naszym kandydatem na "dobrze dopasoną" koncentrację jest koncentracja używająca ciał $\mathcal{Z}_p$. W rozprawie formułuję zatem następującą definicję:

Definicja 18. *Powiemy, że miara μ spełnia hipotezę koncentracyjną ze stałą β, (w skrócie $CI(\beta)$, od* concentration inequality*), jeżeli*

$$\forall_{p\geqslant 2}\forall_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}\ \mu(A) \geqslant \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ 1 - \mu(A + \beta\mathcal{Z}_p(\mu)) \leqslant e^{-p}(1 - \mu(A)).$$

Dlaczego akurat tak? Tu z pomocą przychodzi nam analiza znanych wcześniej wyników dotyczących koncentracji (i izoperymetrii) dla miar logarytmicznie wklęsłych. Przykładowo, zarówno w koncentracji Talagranda, jak i dla miary Gaussowskiej, zbiorami, dla których "powiększanie" przy koncentracji następuje najwolnej są półpłaszczyzny. Pierwszym krokiem jest zatem następujący wynik:

Stwierdzenie 19. *Niech μ będzie symetryczną miarą logarytmicznie wklęsłą na $\mathbb{R}^n$, zaś K takim zbiorem wypukłym, że dla każdej półpłaszczyzny A oraz pewnego $p > C$ zachodzi*

$$\mu(A) \geqslant 1/2 \ \Rightarrow \ 1 - \mu(A + K) \leqslant e^{-p}/2.$$

Wtedy $K \supset c\mathcal{Z}_p$.

Co więcej, stosunkowo proste sprawdzenie pokazuje, że faktycznie znane już wyniki optymalnej koncentracji dla miar logarytmicznie wklęsłych — dla miary wykładniczej [22] i dla miary Gaussowskiej [21] faktycznie wpasowują się w ten schemat.

Praca z tą hipotezą składa się w rozprawie z dwóch części. Jedną jest dowód szeregu ogólnych faktów dotyczących $CI(\beta)$. W szczególności okazuje się, że do hipotezy CI można równoważnie zastosować podejście przez własność (τ), sformułowaną w pracy Maurey'a [13], która służyła do dowodu koncentracji Talagranda. Drugą natomiast jest poszukiwanie innych przykładów, dla których CI zachodzi, aniżeli miara wykładnicza czy Gaussowska. Stosunkowo prosto udaje się udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 20. *Jeżeli μ jest produktową miarą logarytmicznie wklęsłą (tj. jest produktem jednowymiarowych miar logarytmicznie wklęsłych), to μ spełnia $CI(\beta)$ dla stałej $\beta \leqslant 1044$.*

Bardziej zaawansowanych narzędzi wymaga badanie przypadku, w którym μ nie jest miarą produktową, żeby wykluczyć możliwość, że CI to własność związana *stricte* ze strukturą produktową miary i nie przenosi się na inne przypadki. Temu służy jeden z dwóch głównych wyników rozprawy:

Twierdzenie 21. *Jeśli μ jest miarą probabilistyczną jednostajnie rozłożoną na kuli $B_p^n = \{x : \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leqslant 1\}$, to μ spełnia $CI(\beta)$ ze stałą β niezależną od p i n.*

Niejako przy okazji dowodzenia tego Twierdzenia pojawiły się też dwa inne, warte zacytowania wyniki. Jeden jest modyfikacją koncentracji Talagranda, która pokazuje, że składnik $\sqrt{t}B_2^n$ jest istotny jedynie dla zbiorów leżących blisko środka układu współrzędnych. Dla zbiorów leżących stosunkowo daleko od środka układu współrzędnych wystarcza sam składnik tB_1^n:

Twierdzenie 22. *Niech A będzie dowolnym zbiorem Borelowskim spełniającym $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \geqslant 5t\sqrt{n}\}$. Wtedy*

$$\nu^n(A + tB_1^n) \geqslant \frac{1}{8} e^{t/2} \nu^n(A).$$

Drugim wynikiem, o którym warto wspomnieć jest nierówność izoperymetryczna dla kul B_p^n, gdzie $p > 2$. Dla $p \leqslant 2$ S. Sodin w roku 2007 udowodnił tzw. nierówność Poincare (patrz [20]):

Twierdzenie 23. *Niech $\mu_{p,n}$ będzie miarą probabilistyczną jednostajnie rozłożoną na $n^{1/p}B_p^n$. Wtedy zachodzi następująca nierówność:*

$$\mu_{p,n}^+(A) \geqslant c \min\{\mu_{p,n}(A), 1 - \mu_{p,n}(A)\} \log^{1-1/p} \frac{1}{\min\{\mu_{p,n}(A), 1 - \mu_{p,n}(A)\}}$$

dla pewnej uniwersalnej stałej c, gdzie $\mu^+(A) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mu(A+\varepsilon B_2^n) - \mu(A)}{\varepsilon}$ oznacza miarę brzegu A.

Dla $p \geqslant 2$ naturalnym wynikiem, którego można oczekiwać jest analogiczna nierówność, w której potęga przy logarytmie będzie wynosiła $1/2$, niezależnie od p (fakt, że nie da się uzyskać wyższej potęgi wynika z Centralnego Twierdzenia Granicznego). I faktycznie, w rozprawie podaję dowód następującego Twierdzenia:

Twierdzenie 24. *Niech* $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_x^\infty \exp(-y^2/2)$ *będzie dystrybuantą miary Gaussowskiej, niech* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *i* $p \geqslant 2$. *wtedy*

$$\mu_{p,n}(A) = \Phi(x) \;\Rightarrow\; \mu_{p,n}(A + 20tB_2^n) \geqslant \Phi(x+t) \text{ for all } t > 0.$$

W szczególności istnieje uniwersalna stała C *taka, że*

$$\mu_{p,n}{}^{+}(A) \geqslant \frac{1}{C}\min\left\{\mu_{p,n}(A)\sqrt{\ln\frac{1}{\mu_{p,n}(A)}}, (1-\mu_{p,n}(A))\sqrt{\ln\frac{1}{1-\mu_{p,n}(A)}}\right\}.$$

Wyniki w rozprawie doktorskiej oparte są na pracach [23], [18] oraz [11].

Literatura

[1] M. Anttila, K. Ball i I. Perissinaki, *The central limit problem for convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc., 355 (2003), pp. 4723—4735.

[2] K. Ball i I. Perissinaki, *The subindependence of coordinate slabs in* ℓ_p^n *balls*, Israel J. Math., 107 (1998), pp. 289-299.

[3] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. 12 (1974), 239–252.

[4] C. Borell, *Convex set functions in d-space*, Period. Math. Hungar. 6 (1975), 111–136.

[5] H. Brunn, *Ueber Ovale und Eiflaechen*, dysertacja, Monachium.

[6] A.Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960) pp. 123–160 Jerusalem Academic Press, Jerozolima

[7] R. J. Gardner, *The Brunn-Minkowski Inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), pp. 355-405

[8] B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets*, Invent. Math. 168 (2007), 91–131.

[9] B. Klartag, *Power–law estimates for the central limit theorem for convex sets*, J. Funct. Anal., Vol. 245, (2007), 284–310

[10] B. Klartag, *A Berry-Esseen type inequality for convex bodies with an unconditional basis*, dostępne na http://www.math.princeton.edu/˜bklartag/papers/neumann.pdf

[11] R. Latała i J. O. Wojtaszczyk, *On the infimum convolution inequality*, przyjęte do druku przez Studia Mathematica, dostępne na arXiv:0801.4036

[12] L. Leindler, *On a certain converse of Hoelder's inequality in Linear operators and approximation*, Birkhaeuser, Basel 1972, 182-184

[13] B. Maurey, *Some deviation inequalities,* Geom. Funct. Anal. 1 (1991), 188–197.

[14] E. Meckes i M. Meckes, *The Central Limit Problem for Random Vectors with Symmetries*, J. Theoret. Probab. 20 (2007), 697-720

[15] V. Milman, *A new proof of A. Dvoretzky's theorem on cross-sections of convex bodies* (po rosyjsku), Funkcional. Anal. i Prilozhen. 5 (1971), 4, 28–37

[16] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig: Teubner.

[17] A. Prekopa, *On logarithmic concave measures and functions*, Acta Sci. Math.(Szeged) 34 (1973), 335-343

[18] M. Pilipczuk i J. O. Wojtaszczyk, *The negative association property for the absolute values of random variables equidistributed on a generalized Orlicz ball*, przyjęte do druku w Positivity, dostępne na arXiv:0803.0434

[19] Qi-Man Shao, *A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables*, J. Theoret. Probab. 13 (2000), 343-356.

[20] S. Sodin, *An isoperimetric inequality on the l_p balls*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 44 (2008), 362–373.

[21] V.N. Sudakov i B. S. Tsirel'son, *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures* (po rosyjsku), Zap. Nauchn. Sem. L.O.M.I. 41 (1974), 14–24.

[22] M. Talagrand, *A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon*, Israel Seminar (GAFA), Lecture Notes in Math. 1469, 94–124, Springer, Berlin 1991.

[23] J. O. Wojtaszczyk, *The square negative correlation property for generalized Orlicz balls*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Israel Seminar, 2004–2005, pp. 305-313