AUTOREFERAT

Nierówności Hardy'ego i nieliniowe zagadnienia własne

Iwona Skrzypczak

1 Streszczenie

Celem rozprawy jest przedstawienie nowej konstruktywnej metody wyprowadzania nierówności typu Hardy'ego i Hardy'ego–Sobolewa. Konstruujemy je znając rozwiązania u zagadnienień p oraz A–harmonicznych, odpowiednio. Pierwszym krokiem jest wyprowadzenie nierówności typu Caccioppoli dla u. Jako wniosek z nich otrzymujemy ważone nierówności typu Hardy'ego dla funkcji Lipschitzowskich o zwartym nośniku. Rozprawa jest oparta o prace [43, 44, 45].

W pierwszej części rozprawy, dotyczącej prac [43, 44], wyprowadzamy jednoparametrową rodzinę nierówności typu Hardy'ego postaci

$$\int_\Omega |\xi(x)|^p \mu_{1,\beta}(dx) \leqslant \int_\Omega |\nabla\xi(x)|^p \mu_{2,\beta}(dx),$$

gdzie $1 < p < \infty$, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ jest funkcją Lipschitzowską o zwartym nośniku, Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ nie koniecznie ograniczonym. Miary $\mu_{1,\beta}(dx)$, $\mu_{2,\beta}(dx)$ zależą od pewnego parametru β oraz u — nieujemnego rozwiązania antykoercytywnej nierówności różniczkowej:

$$-\Delta_p u \geqslant \Phi \quad \text{w} \quad \Omega, \tag{1}$$

z lokalnie całkowalną funkcją Φ. Dopuszczamy dość ogólną postać Φ, która może być ujemna lub zmieniająca znak jeśli tylko istnieje skończona liczba

$$\sigma_0 := \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \Phi \cdot u + \sigma|\nabla u|^p \geqslant 0 \quad \text{p.w. w } \Omega \cap \{u > 0\}\ \} \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Przedstawiamy szereg zastosowań tych wyników otrzymując między innymi klasyczną nierówność Hardy'ego z optymalną stałą.

Druga część roprawy jest poświęcona wynikom pracy [45] — nierównościom typu Hardy'ego–Sobolewa postaci

$$\int_\Omega F_{\bar{A}}(|\xi|)\mu_1(dx) \leqslant \int_\Omega \bar{A}(|\nabla\xi|)\mu_2(dx),$$

gdzie $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ jest funkcją Lipschitzowską o zwartym nośniku, Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ nie koniecznie ograniczonym, $\bar{A}(\lambda) = A(|\lambda|)\lambda$ jest N–funkcją spełniającą warunek Δ', a $F_{\bar{A}}(\lambda) = 1/(\bar{A}(1/t))$. Miary $\mu_1(dx)$, $\mu_2(dx)$ zależą od u — nieujemnego rozwiązania antykoercytywnej nierówności różniczkowej

$$\Delta_A u = -\mathrm{div} A(\nabla u) \geqslant \Phi \quad \text{na} \quad \Omega, \tag{3}$$

z lokalnie całkowalną funkcją Φ, spełniającej warunek odpowiadający (2) — istnieje $\sigma \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\Phi + \sigma \, \frac{\bar{A}(|\nabla u|)}{g(u)} \chi_{\{\nabla u \neq 0\}} \geqslant 0 \quad \text{p.w.} \tag{4}$$

Wyniki drugiej części implikują te z części pierwszej ze wszystkimi szczegółami. Nawet otrzymane stałe są równe w obu podejściach.

Nasza metoda konstrukcji nierówności jest poręcznym narzędziem. Nie tylko jest łatwa do przeprowadzenia. Pozwala uzyskać głębokie wyniki, jak na przykład klasyczne nierówności Hardy'ego i Hardy'ego–Poincaré z najlepszymi stałymi.

2 Motywacje

Nierówności typu Hardy'ego są ważnymi narzędziami w analizie funkcjonalnej, analizie harmonicznej, probabilistyce oraz równaniach różniczkowych. Powstała na ich temat niezmierzona liczba prac, w szczególności książek [35, 34, 37, 38, 40].

W teorii równań różniczkowych są używane do otrzymania oszacowań a priori, istnienia oraz regularności ([5, 10, 21], Sekcja 2.5 w [38]), jak również do badania jakościowych własności rozwiązań i ich zachowań asymptotycznych [46]. Nierówności Hardy'ego są również stosowane w dowodach twierdzeń o zanurzeniu (Twierdzenie 3.1 w [15], [27, 28]), nierówności interpolacyjnych Gagliardo–Nirenberga [16, 26, 30] oraz w rzeczywistej teorii interpolacji [19].

Nierówności Hardy'ego w zagadnieniach różniczkowych

Powiązania pomiędzy nieliniowymi zagadnieniami własnymi typu eliptycznego czy parabolicznego z nierównościami Hardy'ego są powszechnie znane. Znajdujemy je między innymi w pracach [1, 3, 4, 9, 12, 13, 29, 31, 39]. Wiadomo, że funkcje realizujące najlepsze stałe w nierównościach Hardy'ego–Sobolewa są rozwiązaniami nieliniowych zagadnień własnych [11, Chapter 5]. Ponadto najlepsze stałe są wykorzystywane w badaniu istnienia dla zagadnień parabolicznych [5, 17, 21]. Rzadziej spotykamy się z sytuacją odwrotną — jak rozwiązania czy podrozwiązania zagadnień różniczkowych są przydatne w odtworzeniu nierówności Hardy'ego–Sobolewa.

Najlepsze stałe i istnienie. Analiza najlepszych stałych $c_{n,\gamma,p}$ w klasycznej n–wymiarowej nierówności Hardy'ego jest ważna w dowodach istnienia. W pracy [5] P. Baras i J. A. Goldstein badają istnienie, nieistnienie i wybuchy rozwiązań następującego zagadnienia parabolicznego

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda \frac{u}{|x^2|}, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x) > 0, & u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{5}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ i $t \in (0,T)$. Zagadnienie to ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda \leqslant (n-2)^2/4$. Zauważmy, że krytyczne λ jest równe optymalnej stałej w następującej klasycznej n–wymiarowej nierówności Hardy'ego

$$\frac{(n-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\xi|^2 |x|^{-2}\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\nabla \xi|^p |x|^2\, dx, \quad \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Powiązanie z nierównością Hardy'ego krytycznej wartości λ dla (5) zostało wskazane w [21] autorstwa J. P. Garcia–Azorero i I. Peral–Alonso. Tam też autorzy badają związek nierówności Hardy'ego z własnościami rozwiązań dla zagadnienia

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = \lambda \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p}, & x \in \Omega,\ t > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x) \geqslant 0, & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases} \tag{6}$$

gdzie $-\Delta_p u \geqslant 0$, Ω jest ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i $1 < p < N$. Istnienie i wybuchy zależą od związku λ z najlepszą stałą w nierówności Hardy'ego.

Zachowania asymptotyczne. W [46] J. L. Vazquez i E. Zuazua opisują zachowania asymptotyczne równania ciepła postaci

$$u_t = \Delta u + V(x)u \quad \text{and} \quad \Delta u + V(x)u + \mu u = 0,$$

gdzie $V(x)$ jest potencjałem odwrotnie kwadratowym (np. $V(x) = \lambda/|x|^2$). Kluczowym narzędziem jest ulepszona nierówność Hardy'ego–Poincaré i jej nowe ważone wersje. Główne wyniki dotyczą tempa zanikania rozwiązań oraz jednoznaczności. Co więcej, autorzy wyjaśniają i uogólniają wspomnianą już pracę [5].

Radialność. Nierówność Hardy'ego została użyta do dowodzenia istnienia, nieistnienia, ale też radialności rozwiązań w [22] autorstwa M. Garcia–Huidobro, A. Kufnera, R. Manásevicha oraz C. S. Yarura. Autorzy ustanawiają krytyczny wykładnik dla włożenia pewnej ważonej przestrzeni Sobolewa w ważoną przestrzeń Lebesgue'a. Ten wynik został zastosowany w dowodzie własności jakościowych rozwiązań zagadnienia

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(|x|)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = b(|x|)|\nabla u|^{q-2}\nabla u & \text{in } B \subseteq \mathbb{R}^n, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial B, \end{cases} \tag{7}$$

gdzie $1 < p < q$, funkcje a, b są wagamia B jest kulą.

Związek między istnieniem zagadnień różniczkowych a istnieniem nierówności Hardy'ego

Równania różniczkowe zwyczajne. W pracy [24] Gurka bada istnienie jednowymiarowej nierówności Hardy'ego między L^q oraz L^p (dopuszczając przypadek $p = q$)

$$\left(\int_0^a s(x)|u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\int_0^a r(x)|u'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

wskazując warunki równoważne jej istnieniu w pewnej klasie funkcji. Jednym z nich jest istnienie rozwiązań zagadnienia

$$\lambda \frac{d}{dr}\left(V^{\frac{q}{p}}(r)(y'(r))^{\frac{q}{p'}}\right) + W(r)y^{\frac{q}{p'}}(r) = 0, \quad y > 0, \quad y' > 0.$$

W pracy [23] Ghoussoub i Moradifam autorzy dowodzą równoważności nierówności

$$c\int_B |\xi(x)|^2 W(x)dx \leqslant \int_B |\nabla\xi(x)|^2 V(x)dx \text{ for all } u \in C_0^\infty(B),$$

z radialnie symetrycznymi funkcjami V i W oraz kulą B, z istnieniem rozwiązań zagadnienia

$$y''(r) + \left(\frac{n-1}{r} + \frac{V'(r)}{V(r)}\right)y'(r) + \frac{cW(r)}{V(r)}y(r) = 0, \quad y > 0.$$

Równania różniczkowe cząstkowe. Barbatis, Filippas, and Tertikas w [6] wyprowadzają nierówności Hardy'ego z zagadnień p–harmonicznych. Autorzy rozważają taką funkcję $d(x) = dist(x, K)$, dla pewnego zbioru $K \subseteq \overline{\Omega}$, która spełnia

$$-\Delta_p\left(d^{\frac{p-k}{p-1}}\right) \geqslant 0 \quad \text{in} \quad \Omega \setminus K,$$

gdzie $p \neq k$. Otrzymana nierówność Hardy'ego z czynnikiem dodatkowym zawiera zależność od d. Co więcej, pokazano jaki wykładnik d w funkcji wagowej jest krytyczny.

Bardziej ogólnie podobne zagadnienie rozważa D'Ambrosio w [18]. Autor przedstawia konstrukcyjną metodę wyprowadzenia nierówności Hardy'ego z zagadnień typu $-\Delta_p u \geqslant 0$ oraz bardziej ogólnych wyrażonych w terminach grup Heisenberga $\mathbb{H}^n$. Praca [18] skupia się na pokazaniu warunków dostatecznych istnieniu ważonych nierówności Hardy'ego, uwzględniających również odległość od brzegu obszaru. W szczególności otrzymywana jest nierówność

$$\int |\xi(x)|^p W(x)dx \leqslant C\int |\nabla\xi(x)|^p V(x)dx, \quad \text{for every } \xi \in C_0^1(\Omega),$$

z wagami $V(x)$ i $W(x)$ zależnymi od u, które jest nieujemnym rozwiązaniem zagadnienia $-\Delta_p(u^\alpha) \geqslant 0$, i stałej α.

W rozprawie przedstawiono rozszerzenie tego podejścia przez dopuszczenie do konstrukcji funkcji, których $-p$–Laplasjan może być ujemny. W drugiej części rozprawy dopuszczamy również bardziej ogólny operator — A–Laplasjan.

Nierówności Hardy'ego–Poincaré a modele nieliniowych dyfuzji

W rozprawie otrzymujemy nierówności Hardy'ego–Poincaré postaci

$$\bar{C}_{\gamma,n,p} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi(x)|^p (1+|x|^{\frac{p}{p-1}})^{(p-1)(\gamma-1)} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\xi(x)|^p (1+|x|^{\frac{p}{p-1}})^{(p-1)\gamma}\, dx, \quad (9)$$

ze stałą $\bar{C}_{\gamma,n,p}$ z dowodem jej optymalności dla dostatecznie dużych wartości parametru γ. Wersja tego wyniku gdy $p = 2$

$$C \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 (1+|x|^2)^{\gamma-1} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\xi|^2 (1+|x|^2)^{\gamma} dx, \quad (10)$$

jest rozważana w teorii nieliniowych dyfuzji — równaniach ewolucyjnych postaci $u_t = \Delta u^m$. Są one nazywane równaniami szybkiej dyfuzji — fast diffusion equation (FDE) gdy $m < 1$ oraz równaniami ośrodka porowatego — porous media equation (PME) gdy $m > 1$. W teorii FDE, nierówności Hardy'ego–Poincaré (10) z $\gamma < 0$ są podstawowymi narzędziami do badania zachowań asymptotycznych rozwiązań [2, 7, 14]. W szczególności, najlepsze stałe w (10) są użyte w [8] do pokazania najszybszego tempa zbieżności rozwiązań FDE.

W rozprawie pokazujemy (9) z $\gamma > 1$, ponadto bierzemy pod uwagę $p \in (1, \infty)$, nie tylko $p = 2$. Dowodzimy tę nierówność oraz optymalność stałej w pewnym zakresie parametrów. Poprawiamy stałe otrzymane przez Blanchet, Bonforte, Dolbeault, Grillo i Vázquez'a w [8], jak również przez Ghoussoub'a i Moradifam'a w [23].

3 Wyniki pierwszej części rozprawy

W tej części koncentrujemy się na metodzie wyprowadzania ważonych nierówności Hardy'ego z zagadnień p–harmonicznych, konkretnie $-\Delta_p u \geqslant \Phi$ oraz na wnioskach z niej płynących. Głównym wynikiem pierwszej części rozprawy, jak również pracy [43], jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1. *Niech $1 < p < \infty$, funkcja $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ jest słabym nieujemnym i nie stałym rozwiązaniem zagadnienia $-\Delta_p u \geqslant \Phi$ z lokalnie całkowalną funkcją Φ spełniającą warunek (2) z $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Przypuśmy jeszcze, że β oraz σ są dowolnymi liczbami takimi, że $\beta > 0$ oraz $\beta > \sigma > \sigma_0$. Wówczas dla każdej funkcji Lipschitzowskiej o zwartym nośniku zachodzi nierówność*

$$\int_{\Omega} |\xi|^p \mu_1(dx) \leqslant \int_{\Omega} |\nabla\xi|^p \mu_2(dx), \quad (11)$$

gdzie

$$\mu_1(dx) = \left(\frac{\beta-\sigma}{p-1}\right)^{p-1} [\Phi \cdot u + \sigma|\nabla u|^p] \cdot u^{-\beta-1}\chi_{\{u>0\}}\, dx, \tag{12}$$

$$\mu_2(dx) = u^{p-\beta-1}\chi_{\{|\nabla u|\neq 0\}}\, dx. \tag{13}$$

3.1 O dowodzie

Konstrukcja nierówności typu Hardy'ego zaczyna się od wyprowadzenia nierówności Caccioppoli dla słabych rozwiązań zagadnienia różniczkowego (1) (w drugiej części dla (3)). Otrzymaną przekształcamy i interpretujemy jako nierówność Hardy'ego z wagami dla funkcji testowych — funkcji Lipschitzowskich o zwartym nośniku.

Metoda została zainspirowana pracą [32], gdzie rozważane jest nieistnienie nieujemnych nietrywialnych słabych rozwiązań dla zagadnień A–harmonicznych postaci

$$-\Delta_A u \geqslant \Phi(u) \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

z nieujemną funkcją Φ. W tej pracy autorki wyprowadzają nierówność typu Caccioppoli dla nieujemnych nietrywialnych słabych rozwiązań zagadnienia (14). Wówczas, otrzymują pewne oszacowanie a priori zależne od pewnej klasy funkcji testowych, by w końcu — wybierając odpowiednie funkcje testowe uzyskać nieistnienie.

My zatrzymujemy się na otrzymanej nierówności typu Caccioppoli. Dzięki ostrożnej analizie dowodu z [32] możemy wyprowadzić to oszacowanie bez założeń, że $\Phi = \Phi(u)$, $\Phi \geqslant 0$ oraz że rozpatrywany obszar musi być całym $\mathbb{R}^n$. Zamiast tego zakładamy że Φ jest w pewnym sensie ograniczone z dołu (warunek (2) lub odpowiadający mu w drugiej części pracy (4)).

Najważniejszym pomysłem tej części dowodu jest testowanie wyjściowego zagadnienia funkcją $G = (\min[u+\delta, R])^{-\beta}\phi$ (w drugiej części $G = \Psi(\min[u+\delta, R])\phi$), gdzie ϕ jest dowolną funkcją Lipschitzowską o zwartym nośniku spełniającą pewien warunek całkowalności, a parametry δ, R, β są dodatnie. Następnie korzystając między innymi z nierówności Younga i reorganizując nierówność przenosząc pewne składniki na inną stronę nierówności otrzymujemy odpowiednik nierówności typu Caccioppoli, w którym rozważamy podniesione i obcięte u — oddzielone jest od zera oraz nieskończoności. Osiągamy cel przechodząc z parametrami δ oraz R do granicy w zerze oraz w nieskończoności, odpowiednio.

Kolejnym krokiem jest reinterpretacja nierówności typu Caccioppoli dla rozwiązań, jako ważonej nierówności Hardy'ego dla funkcji testowych. W pierwszej części pracy, dotyczącej p–Laplasjanu, wystarczy jedno proste podstawienie — po wyborze postaci funkcji testowej od razu otrzymujemy główne twierdzenie. W drugiej części, gdzie rozważamy A–Laplasjan, musimy skorzystać również kilkakrotnie z warunku Δ' dla $\bar{A}$.

3.2 Niektóre wyniki

Wprowadzoną w rozprawie metodą można uzyskać klasyczną nierówność Hardy'ego

$$\int_0^\infty \left(\frac{|\xi(x)|}{x}\right)^p x^\gamma\, dx \leqslant C_{min} \int_0^\infty |\xi'(x)|^p x^\gamma\, dx, \quad \gamma \neq p-1$$

z optymalną stałą C_{min} dla wszystkich dopuszczalnych wartości γ i p.

Rozważanie radialnych rozwiązań zagadnienia (1) na $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ prowadzi do nierówności Hardy'ego w któtej miary mają postać $\mu_i(dx) = \varrho_i(|x|)dx$, gdzie $\varrho_i(|x|)$ są radialnymi oraz lokalnie całkowalnymi funkcjami. Bezpośrednim wnioskiem z ich rozważania jest n–wymiarowa nierówność Hardy'ego

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} |\xi(x)|^p |x|^{\gamma-p}\ dx \leqslant C_{min} \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} |\nabla\xi(x)|^p |x|^\gamma\ dx,$$

z optymalną stałą C_{min} dla pewnego zakresu parametrów γ i p.

Przedstawiamy również przykłady uzyskanych nierówności Hardy'ego z wagami exponencjalnymi. Rozważając funkcje p–superharmoniczne (to jest takie, że $-\Delta_p u \geqslant \Phi \equiv 0$) otrzymujemy nierówności Hardy'ego z miarami o prostszej postaci. Takie nierówności mogą zostać skonstruowane przy użyciu funkcji harmonicznej u, spełniającej warunek brzegowy. Odnosimy się tu też do opisanej już pracy D'Ambrozio [18] podając przykłady, gdzie $-p$–Laplasjan jest ograniczony z dołu przez ujemną funkcję Φ from (1)).

Otrzymujemy również nierówności Hardy'ego–Poincaré postaci

$$\bar{C}_{\gamma,n,p} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi(x)|^p (1+|x|^{\frac{p}{p-1}})^{(p-1)(\gamma-1)} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\xi(x)|^p (1+|x|^{\frac{p}{p-1}})^{(p-1)\gamma}\ dx,$$

ze stałą $\bar{C}_{\gamma,n,p}$ z dowodem jej optymalności dla dostatecznie dużych wartości parametru γ. Informacje o jej zastosowaniach można znaleźć w rozdziale Motywacje.

4 Wyniki drugiej części rozprawy

W tej części rozprawy koncentrujemy się na wyprowadzeniu nierówności Hardy'ego

$$\int_\Omega F_{\bar{A}}(|\xi|)\mu_1(dx) \leqslant \int_\Omega \bar{A}(|\nabla\xi|)\mu_2(dx),$$

gdzie $\bar{A}$ jest funkcją wypukłą, $F_{\bar{A}}(\lambda) = 1/(\bar{A}(1/t))$, a miary zależą od pewnego rozwiązania zagadnienia A–harmonicznego. Zanim podamy konkretne sformułownia potrzebujemy wprowadzić pewne oznaczenia, definicje oraz założenia.

Przez zagadnienie A–harmoniczne rozumiemy takie, w których występuje operator A–Laplace'a $\Delta_A u = \mathrm{div}(A(\nabla u))$, rozumiany w słabym sensie, gdzie $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją klasy C^1. Wybierając $A(\lambda) = |\lambda|^{p-2}\lambda$ pracujemy z

p–Laplasjanem. Ograniczamy się do A postaci $A(\lambda) = B(|\lambda|)\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}^n$, i wprowadzamy oznaczenie

$$\bar{A}(s) = B(s)s^2, \quad \text{where } s \in [0, \infty). \tag{15}$$

Zakładamy, że $\bar{A}$ jest N–funkcją, to znaczy — jest wypukła oraz $\lim_{s\to 0} \frac{\bar{A}(s)}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{\bar{A}(s)} = 0$. Odwołujemy się do monografii [33, 41] jako źródła podstawowych informacji o przestrzeniach Orlicza.

Wykorzystujemy warunki Δ_2 oraz Δ' zdefiniowane poniżej.

Definicja 4.1. *Mówimy, że funkcja $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ spełnia warunek Δ_2, jeśli istnieje stała $\bar{C}_F > 0$ taka, że dla każdego $s > 0$ zachodzi*

$$F(2s) \leqslant \bar{C}_F F(s). \tag{16}$$

Definicja 4.2. *Mówimy, że funkcja $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ spełnia warunek Δ', jeśli istnieje stała $C_F > 0$ taka, że dla każdych $s_1, s_2 > 0$ zachodzi*

$$F(s_1 s_2) \leqslant C_F F(s_1) F(s_2). \tag{17}$$

Zauważmy, że warunek Δ' jest mocniejszym wymaganiem niż warunek Δ_2.

Typowymi przykładami N–funkcji spełniających warunek Δ' są funkcje postaci $F_b(s) = s^p \log^\alpha(b + s)$, $b, p > 1$, $\alpha > 0$.

Fakt 4.1. *Niech $F_b(s) = s^p \log^\alpha(b+s)$, $b, p > 1$, $\alpha > 0$. Wówczas stała z warunku Δ' spełnia oszacowanie $C_F \leqslant \left(\frac{2}{\log b}\right)^\alpha$.*

Lemat 4.1 ([29], Lemat 4.2)**.** *Przypuśćmy, że F jest różniczkowalną N–funkcją spełniającą warunek Δ_2. Wówczas istnieją stałe $1 \leqslant d_F \leqslant D_F$, takie że dla każdego $r > 0$*

$$d_F \frac{F(r)}{r} \leqslant F'(r) \leqslant D_F \frac{F(r)}{r}. \tag{18}$$

Ponadto dla każdych $r, s > 0$ zachodzi poniższe oszacowanie

$$\frac{F(r)}{r} s \leqslant \frac{D_F - 1}{d_F} F(r) + \frac{1}{d_F} F(s). \tag{19}$$

Fakt 4.2. *Niech $F(s) = s^p \log^\alpha(b + s)$, $b, p > 1$, $\alpha > 0$. Wówczas stałe w nierówności* (18) *wynoszą $D_F = p + \frac{\alpha}{\log b}$ i $d_F = p$.*

Przestrzenie Orlicza—Sobolewa

Przez $W^{1,\bar{A}}(\Omega)$ rozumiemy uzupełnienie zbioru

$$\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{W^{1,\bar{A}}(\Omega)} := \|u\|_{L^{\bar{A}}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{\bar{A}}(\Omega)} < \infty\},$$

w normie Luxemburga

$$\|f\|_{L^{\bar{A}}(\Omega)} = \inf\left\{K > 0 : \int_\Omega \bar{A}\left(\frac{|f(x)|}{K}\right) dx \leqslant 1\right\}$$

(zakładamy, że $\inf\emptyset = +\infty$). Przez $W^{1,\bar{A}}_{loc}(\Omega)$ oznaczamy takie funkcje $u : \Omega \to \mathbb{R}$, że $u\phi \in W^{1,\bar{A}}(\Omega)$ dla każdej $\phi \in C^1_0(\Omega)$ (analogiczna notacja jest używana dla funkcji leżących lokalnie w przestrzeniach Orlicza $L^{\bar{A}}_{loc}(\Omega)$). Zauważmy, że zawsze $W^{1,\bar{A}}_{loc}(\Omega) \subseteq W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Przez $W^{1,\bar{A}}_0(\Omega)$ oznaczamy dopełnienie zbioru gładkich funkcji o zwartym nośniku w przestrzeni $W^{1,\bar{A}}(\Omega)$.

Fakt 4.3 ([32], Fact 2.3)**.** *Jeśli $\bar{A}$ jest N–funkcją a $u \in W^{1,\bar{A}}_{loc}(\Omega)$, to*

$$B(|\nabla u|)\nabla u = \frac{\bar{A}(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\chi_{\{|\nabla u|\neq 0\}} \in L^{\bar{A}^*}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

gdzie B i $\bar{A}$ są jak w (15), a $\bar{A}^*$ oznacza transformację Legendre'a funkcji $\bar{A}$.

Analizę opieramy na następującej definicji słabego rozwiązania

Definicja 4.3. *Niech Ω będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ a Φ będzie lokalnie całkowalną funkcją zdefiniowaną na Ω oraz taką, że dla każdej nieujemnej $w \in W^{1,\bar{A}}(\Omega)$ o zwartym nośniku zachodzi $|\int_\Omega \Phi w\, dx| < \infty$. Niech $u \in W^{1,\bar{A}}_{loc}(\Omega)$. Powiemy, że*

$$-\Delta_A u \geqslant \Phi \tag{20}$$

jeśli dla każdej nieujemnej $w \in W^{1,\bar{A}}(\Omega)$ o zwartym nośniku zachodzi

$$\langle -\Delta_A u, w\rangle = \int_\Omega B(|\nabla u|)\langle \nabla u, \nabla w\rangle\, dx \geqslant \int_\Omega \Phi w\, dx. \tag{21}$$

Zestaw założeń. W dalszej części będziemy rozważać funkcje spełniające poniższe założenia

($\bar{A}$) $\bar{A}$ jest N–funkcją spełniającą warunek Δ';

(Ψ) istnieje funkcja $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, należąca do $C^1((0,\infty))$ spełniająca następujące warunki

i) nierówność

$$g(t)\Psi'(t) \leqslant -C\Psi(t) \quad \text{a.e.} \tag{22}$$

zachodzi ze stałą $C > 0$ niezależną od t oraz pewną ciągłą funkcją $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$, taką że funkcja $\Psi(t)/g(t)$ jest nierosnąca.

ii) funkcja

$$s \mapsto \Theta(s) := \frac{\bar{A}\left(g(s)\right)\Psi(s)}{g(s)} \tag{23}$$

jest nierosnąca lub ograniczona w pobliżu 0.

$\Psi(t)$	g(t)	C	uwagi
$t^{-\alpha}$	t	α	$\alpha > 0$
e^{-t}	ograniczona przez C, $g' \geqslant -C$	C	$C > 0$
e^{-t}/t	$t/(1+t)$	1	—
$e^{\frac{1}{2}\log^2(t)}$	$t/\vert\log t\vert$	1	rozważana na $(0,1)$

Tablica 1: Dobre pary Ψ i g

(u) $u \in W^{1,\bar{A}}_{loc}(\Omega)$ jest danym nieujemnym i nie stałym rozwiązaniem zagadnienia (20) oraz istnieje $\sigma \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\Phi + \sigma \frac{\bar{A}(|\nabla u|)}{g(u)} \chi_{\{\nabla u \neq 0\}} \geqslant 0 \quad \text{a.e.} \tag{24}$$

Definiujemy

$$\sigma_0 = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \text{zachodzi (24)}\}. \tag{25}$$

Uwaga 4.1. Pierwsza część rozprawy dotyczy przypadku, gdy powyższe założenia są spełnione dla $\bar{A}(s) = s^p$, $g(s) = s$, $\Psi(s) = s^{-\beta}, \beta > 0$. Są one również szczegółowo rozważane w pracach [43, 44].

Uwaga 4.2. Rozważmy założenie (Ψ) **i)**. W szczególności implikuje ono, że Ψ jest funkcją malejącą. Elementarne rachunki pokazują, że pary Ψ i g z Tabeli 1 spełniają warunek $g(t)\Psi'(t) \leqslant -C\Psi(t)$. Aby zapewnić dodatkowo, że funkcja $\Psi(t)/g(t)$ jest niemalejąca musimy założyć, że $g'(t) \geqslant -C$ z tą samą stałą C. Istotnie, Ψ/g jest niemalejąca, gdy

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Psi(t)}{g(t)}\right)' &= \tfrac{\Psi'(t)g(t)-\Psi(t)g'(t)}{g^2(t)} &\leqslant \frac{-C\Psi(t) - \Psi(t)g'(t)}{g^2(t)} = \\ &= -\tfrac{\Psi(t)}{g^2(t)}(C + g'(t)) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

To jest, gdy $g'(t) \geqslant -C$.

Następujące pary spełniają warunek (Ψ) (patrz Tabela 1).

Głównym wynikiem tej części rozprawy jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1. *Niech $u \in W^{1,\bar{A}}_{loc}(\Omega)$ będzie nieujemnym i nietrywialnym rozwiązaniem zagadnienia $-\Delta_A u \geqslant \Phi$, w sensie Definicji 4.3, gdzie Φ jest lokalnie całkowalna a założenia ($\bar{A}$), (Ψ), (u) są spełnione ze stałymi $C > 0$ i $\sigma \in [\sigma_0, C)$, gdzie σ_0 jest zdefiniowane w (25). Ustalmy $F_{\bar{A}}(\lambda) = \frac{1}{\bar{A}(1/\lambda)}$, gdy $\lambda > 0$ i $F_{\bar{A}}(0) = 0$.*

Wówczas dla dowolnej funkcji Lipschitzowskiej ξ o nośniku zwartym w Ω zachodzi

$$\int_\Omega F_{\bar{A}}(|\xi|)\mu_1(dx) \leqslant \widetilde{C} \int_\Omega \bar{A}(|\nabla\xi|)\mu_2(dx), \tag{26}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\mu_1(dx) &= \Psi(u)\left[\Phi + \sigma\frac{\bar{A}(|\nabla u|)}{g(u)}\right]\chi_{\{u>0\}}\,dx,\\ \mu_2(dx) &= \frac{\bar{A}\left(g(u)\right)\Psi(u)}{g(u)}\chi_{\{\nabla u\neq 0\}}\,dx,\end{aligned}$$

ze stałą $\widetilde{C} = (C-\sigma)\bar{A}\left(\frac{D_{\bar{A}}-1}{(C-\sigma)d_{\bar{A}}}\right)\frac{\bar{A}(D_{\bar{A}})C^4_{\bar{A}}}{D_{\bar{A}}-1}$, *gdzie* $C_{\bar{A}} > 0$ *pochodzącą z warunku* Δ' *dla* $\bar{A}$ *oraz* $D_{\bar{A}} > d_{\bar{A}} > 1$ *z* (18) *dla* $\bar{A}$.

Powyższe twierdzenie implikuje wszystkie wyniki z z pierwszej części rozprawy — od klasycznej nierówności Hardy'ego z optymalną stałą, po nierówności Hardy'ego-Poincaré z optymalną stałą dla pewnego zestawu parametrów.

Ponadto podajemy przykłady, gdzie funkcja $\bar{A}$ ma postać potęgowo–logarytmiczną. Mają one postać

$$\int_\Omega |\xi|^p \log^{-\alpha}(2+1/|\xi|)\mu_1(dx) \leqslant C\int_\Omega |\nabla\xi|^p \log^{\alpha}(2+|\nabla\xi|)\mu_2(dx)$$

i są sformułowane dla ξ Lipschitzowskich o zwartym nośniku.

Literatura

[1] M. Agueh, *Sharp Gagliardo-Nirenberg inequalities via p–Laplacian type equations*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 15 (2008), no. 4-5, 457–472.

[2] M. Agueh, A. Blanchet, J. A. Carrillo *Large time asymptotics of the doubly nonlinear equation in the non–displacement convexity regime*, J. Evol. Equ. 10 (2010), 59–84.

[3] A. Alvino, V. Ferone, G. Trombetti, *On the properties of some nonlinear eigenvalues,* SIAM J. Math. Anal. 29, no. 2 (1998), 437–451.

[4] M. Badiale, G. Tarantello, *A Sobolev–Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics*, Arch. Ration. Mech. Anal. 163 (2002) 259–293.

[5] P. Baras, J. A. Goldstein, Jerome *The heat equation with a singular potential*, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), no. 1, 121–139.

[6] G. Barbatis, S. Filippas, A. Tertikas, *A unified approach to improved L^p Hardy inequalities with best constants,* Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 6, 2169–2196.

[7] A. Blanchet, M. Bonforte, J. Dolbeault, G. Grillo, J.-L. Vázquez, *Hardy–Poincaré inequalities and application to nonlinear diffusions*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007), 431–436.

[8] M. Bonforte, J. Dolbeault, G. Grillo, J. L. Vázquez, *Sharp rates of decay of solutions to the nonlinear fast diffusion equation via functional inequalities*, PNAS 09/2010; 107(38):16459-64. DOI:10.1073/pnas.1003972107.

[9] B. Brandolini, F. Chiancchio, C. Trombetti, *Hardy type inequalities and Gaussian measure*, Comm. Pure and Appl. Anal. 6(2) (2007), 411–428.

[10] H. Brézis, J.L. Vazquez, *Blow–up solutions of some nonlinear elliptic problems*, Rev. Mat. Complut. 10, No. 2 (1997), 443–469.

[11] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *One–dimensional variational problems. An introduction.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 15. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[12] E. A. Carlen, J. A. Jose, M. Loss, *Hardy-Littlewood-Sobolev inequalities via fast diffusion flows*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 107 (2010), no. 46, 19696–19701.

[13] X. Cabré, Y. Martel, *Weak eigenfunctions for the linearization of extremal elliptic problems,* J. Funct. Anal. 156 (1998), 30–56.

[14] J. A. Carrillo, C. Lederman, P. A. Markowich, G. Toscani, *Poincaré inequalities for linearizations of very fast diffusion equations*, Nonlinearity 15 (2002), no. 3, 565–580.

[15] A. Cianchi, *Some results in the theory of Orlicz spaces and applications to variational problems, Nonlinear analysis, function spaces and applications*, Vol. 6 (Prague, 1998), Acad. Sci. Czech Rep., Prague, 1999, 50–92.

[16] S. K. Chua, *Sharp conditions for weighted Sobolev interpolation inequalities*, Forum Math. 17 (2005), 461–478.

[17] E. B. Davies, *The Hardy constant,* Q. J. Math (2) 46 (1995), 417–431.

[18] L. D'Ambrosio, *Hardy Type Inequalities Related to Degenerate Elliptic Differential Operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. ser. 5, vol IV (2005), 451–486.

[19] P. Fernandez–Martinez, T. Singes, *Real interpolation with symmetric spaces and slowly varying functions*, Q. J. Math. 63(1) (2012), 133–164.

[20] M. Fila, J. L. Vázquez, M. Winkler, E. Yanagida, *Rate of convergence to Barenblatt profiles for the fast diffusion equation,* Arch. Ration. Mech. Anal. 204 (2012), no. 2, 599–625.

[21] J. P. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems,* J. Diff. Eq., 144 (1998), 441–476.

[22] M. Garcia–Huidobro, A. Kufner, R. Manásevich, C. S. Yarur, *Radial solutions for a quasilinear equation via Hardy inequalities,* Adv. Differential Equations 6 (2001), no. 12, 1517–1540.

[23] N. Ghoussoub, A. Moradifam, *Bessel pairs and optimal Hardy and Hardy–Rellich inequalities*, Math. Ann. 349 (2011), no. 1, 1–57.

[24] P. Gurka, *Generalized Hardy's inequality*, Časopis Pěst. Mat. 109 (1984), no. 2, 194–203.

[25] J. Gustavsson, J. Peetre, *Interpolation of Orlicz spaces*, Studia Math. 60 (1977), 33–59.

[26] C. E. Gutierrez, R. L. Wheeden, *Sobolev interpolation inequalities with weights*, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 263-281.

[27] P. Hajłasz, P. Koskela, *Sobolev meets Poincaré,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 320 (1995), no. 10, 1211–215.

[28] D. Haroske, L. Skrzypczak, *Entropy numbers of embeddings of function spaces with Muckenhoupt weights, III. Some limiting cases*, J. Funct. Spaces Appl. 9 (2011), no. 2, 129-178.

[29] A. Kałamajska, K. Pietruska–Pałuba, *On a variant of Hardy inequality between weighted Orlicz spaces,* Studia Math. 193(1) (2009), 1–28.

[30] A. Kałamajska, K. Pietruska–Pałuba, *On a variant of Gagliardo–Nirenberg inequality deduced from Hardy*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 59(2) (2011), 133–149.

[31] A. Kałamajska, K. Pietruska–Pałuba, *Weighted Hardy–type inequalities in Orlicz spaces,* Math. Ineq. and Appl., vol. 12, no. 4 (2012), 745–766.

[32] A. Kałamajska, K. Pietruska–Pałuba, I. Skrzypczak, *Nonexistence results for differential inequalities involving A–Laplacian,* Adv. Diff. Eqs. (Vol. 17) no 3–4 (2012), 307–336.

[33] M. A. Krasnoselskii, Ya. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff Ltd. Groningen 1961.

[34] A. Kufner, L. Maliganda, L. E. Persson, *The Hardy inequality. About its history and some related results*, Vydavatelský Servis, Plzeň, 2007.

[35] A. Kufner, B. Opic, *Hardy-type Inequalities,* Longman Scientific and Technical, Harlow, 1990.

[36] A. Kufner, L. E. Persson, *Weighted Inequalities of Hardy Type*, World Sci., River Edge, NJ, 2003.

[37] Q. Lai, *Weighted modular inequalities for Hardy type operators*, Proc. London Math. Soc. 79(3) (1999), 649–672.

[38] V. G. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Springer–Verlag, Berlin, 1985.

[39] E. Mitidieri, *A simple approach to Hardy inequalities,* (Russian) Mat. Zametki 67 (2000), no. 4, 563–572; translation in Math. Notes 67 (2000), no. 3–4, 479–486.

[40] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric, A. M. Fink, *Inequalities Involving Functions and Their Derivatives*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1991.

[41] M. M. Rao, Z. D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, M. Dekker, Inc. New York, 1991.

[42] I. B. Simonenko, *Interpolation and extrapolation of linear operators in Orlicz spaces,* (in Russian) Mat. Sb. (N. S.) 63 (105) (1964), 536–553.

[43] I. Skrzypczak, *Hardy–type inequalities derived from p–harmonic problems,* http://www.mimuw.edu.pl/badania/preprinty/preprinty-imat/papers/68/pr-imat-68.pdf.

[44] I. Skrzypczak, *Hardy–Poincaré type inequalities derived from p–harmonic problems,* to appear in Banach Center Publications.

[45] I. Skrzypczak, *Hardy inequalities resulted from nonlinear problems dealing with A–Laplacian,* http://ssdnm.mimuw.edu.pl/pliki/prace-studentow/st/pliki/iwona-skrzypczak-2.pdf.

[46] J. L. Vazquez, E. Zuazua, *The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse–square potential,* J. Funct. Anal. 173 (2000), 103–153.