

# Fundamental problems to equations of compressible chemically reacting flows

Ewelina Zatorska

Autoreferat rozprawy doktorskiej pod kierownictwem:  
prof. dr hab. Piotra Bogusława Muchy oraz Doc. Mgr. Milana Pokornego, Ph.D.

Motywacją do badania równań przepływów wieloskładnikowych jest bardzo szerokie spektrum zastosowań inżynierskich. Pojawiają się one na przykład w modelowaniu wzrostu kryształów, działania reaktorów, formowania się zanieczyszczeń atmosferycznych, ponownego wchodzenia w atmosferę ziemską pojazdów kosmicznych czy w nanotechnologiach [15]. W niniejszej rozprawie zawarte zostały rezultaty dotyczące istnienia rozwiązań dla układu równań różniczkowych cząstkowych opisujących ruch mieszanin chemicznie reagujących gazów ze szczególnym uwzględnieniem reakcji odwracalnych oraz zależności ciśnienia od składu substancji. Układ ten tworzą równania Naviera-Stokesa-Fouriera uzupełnione równaniami reakcji-dyfuzji składników.

W pierwszej kolejności rozważamy izotermiczny przepływ stacjonarny z diagonalną, liniową dyfuzją. Jednak bezpośrednia próba przeniesienia tego wyniku na przypadek płynów przewodzących ciepło prowadzi do sprzeczności z drugą zasadą termodynamiki. Aby temu zapobiec, konieczne jest rozpatrzenie bardziej ogólnej postaci strumienia dyfuzji składników, tzw. dyfuzji wieloskładnikowej. W rezultacie, z jednej strony możemy nadal posługiwać się bardzo wygodnym pojęciem entropii, które daje nam podstawowe oszacowanie a-priori, równocześnie jednak, mamy do czynienia z nowym rodzajem degeneracji w równaniach bilansu masowego składników.

Badanie układów tego typu napotyka na rozmaite problemy powiązane głównie z silną cross-dyfuzją oraz brakiem wystarczającej informacji o gęstości mieszaniny spełniającej – zaledwie hiperboliczne – równanie ciągłości. Z tego powodu, w większości dotychczasowych prac na ten temat, odnaleźć można jedynie rezultaty cząstkowe, dla modeli upraszczających poszczególne aspekty zjawiska. Mowa tu, na przykład, o założeniu, że ciśnienie nie zależy od koncentracji reagentów, czy o powszechnie stosowanym przybliżeniu Ficka nieuwzględniającym wzajemnego oddziaływania składników [14]. Jednak większość współczesnych zastosowań wymaga bardziej precyzyjnego opisu. Właściwie, nawet w modelowaniu spalania wodoru w tlenie, powinno się brać pod uwagę 20 różnych reakcji zachodzących pomiędzy ośmioma składnikami:



Co więcej, w zależności od temperatury, ciśnienia czy zakresu reakcji, konieczne może okazać się uwzględnienie odwracalności każdej z tych reakcji [22].

Warto podkreślić, że dotychczasowe najbardziej zaawansowane rezultaty odnośnie globalnego w czasie istnienia słabych rozwiązań dla tego typu układów, dotyczyły jedynie badania zachowań blisko equilibrium [15]. Zgodnie z naszą wiedzą, problem ten, bez ograniczeń na wielkość danych początkowych, podjęty został w niniejszej rozprawie po raz pierwszy.

Równania ruchu płynu wieloskładnikowego wyrażają fizyczne prawa zachowania masy, pędu, całkowitej energii oraz mas każdego ze składników:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbf{S} + \nabla \pi &= \varrho \mathbf{f} \\ \partial_t(\varrho E) + \operatorname{div}(\varrho E \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\pi \mathbf{u}) + \operatorname{div} \mathbf{Q} - \operatorname{div}(\mathbf{S} \mathbf{u}) &= \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \\ \partial_t \varrho_k + \operatorname{div}(\varrho_k \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{F}_k) &= \varrho \vartheta \omega_k, \quad k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \right\} \quad \text{w } (0, T) \times \Omega, \quad (1)$$

gdzie,  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  oznacza pole prędkości,  $\varrho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jest gęstością całkowitą czyli sumą gęstości składników  $\varrho_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Ostatnią nieznaną wielkością jest temperatura  $\vartheta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  występująca w sposób niejawni we wszystkich równaniach układu (1) poza równaniem ciągłości. Następnie,  $\mathbf{S}$  oznacza tensor naprężeń lepkich,  $\pi$  jest ciśnieniem wewnętrznym,  $\mathbf{f}$  jest zadaną siłą zewnętrzną,  $E$  jest energią całkowitą (na jednostkę masy), tzn. sumą energii wewnętrznej  $e$  i energii kinetycznej  $\frac{\mathbf{u}^2}{2}$ ,  $\mathbf{Q}$  strumieniem ciepła,  $\mathbf{F}_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  oznacza strumień dyfuzji składników zaś  $\omega_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  opisuje tempo produkowania się  $k$ -tego składnika,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  oraz  $T < +\infty$ . Równoważnie, równania bilansu mas składników mogą być zapisane w języku koncentracji składników  $Y_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  zdefiniowanych jako  $Y_k = \frac{\varrho_k}{\varrho}$ .

Wyprowadzenie modelu (1) z kinetycznej teorii gazów można znaleźć m.in. w [7, 15, 23], możliwy jest także model przypisujący osobne pola prędkości każdemu ze składników [21].

Domknięcie układu (1) wymaga uzupełnienia go zbiorem relacji konstytutywnych charakterystycznych dla lepkich, przewodzących ciepło oraz chemicznie reagujących gazów. Z uwagi na złożość niniejszego opisu, skupimy się jedynie na tych cechach, które, w kontekście istnienia globalnych w czasie słabych rozwiązań bez ograniczeń na wielkość danych początkowych, pojawiają się w niniejszej rozprawie po raz pierwszy; opis bardziej szczegółowy, w zależności od rozważanego przypadku, znajduje się we wstępie do każdego z rozdziałów.

Jak już wspomniano, skład chemiczny mieszaniny jest uwzględniony w wartościach wszystkich wielkości termodynamicznych opisujących układ. W szczególności, zakładamy, że ciśnienie  $\pi = \pi(\varrho, \vartheta, Y)$  jest postaci  $\pi = \pi_c + \pi_m$ . Pierwsza część odpowiada za ciśnienie barotropowe  $\approx \varrho^\gamma$ ,  $\gamma > 1$ , zaś druga opisuje klasyczne molekularne ciśnienie mieszaniny określone, zgodnie z *prawem Boyla*, jako suma ciśnień cząstkowych

$$\pi_m(\varrho, \vartheta, Y) = \sum_{k=1}^n p_k(\varrho, \vartheta, Y_k) = R \sum_{k=1}^n \frac{\vartheta \varrho Y_k}{m_k}, \quad (2)$$

gdzie  $m_k$  oznacza masę molową  $k$ -tego składnika a  $R$  jest stałą gazową.

Naturalnie, chcemy aby model był spójny z prawami mechaniki ośrodków ciągłych i termodynamiki. Szczególnie znaczącą rolę odgrywa tu *druga zasada termodynamiki*, zgodnie z którą istnieje funkcja stanu, zwana *entropią*, niemalejąca dla układu termodynamicznie izolowanego. Innymi słowy, produkcja entropii dla takiego układu jest zawsze nieujemna. Z matematycznego punktu widzenia entropia (ze znakiem „-”) jest to po prostu pewna wielkość (funkcjonał Lyapunova), która nie rośnie wzdłuż trajektorii. Równanie entropii  $s$  jest wyprowadzone z równania energii układu (1) przy użyciu relacji Gibbsa

$$\vartheta Ds = De + \pi D \left( \frac{1}{\varrho} \right) - \sum_{k=1}^n g_k DY_k,$$

gdzie  $g_k(\varrho, \vartheta, Y)$  to funkcje Gibbsa a  $\mathbf{D}$  oznacza różniczkę zupełną, mamy zatem

$$\partial_t(\varrho s) + \operatorname{div}(\varrho s \mathbf{u}) + \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{Q}}{\vartheta} - \sum_{k=1}^n \frac{g_k}{\vartheta} \mathbf{F}_k \right) = \sigma.$$

W powyższym wzorze  $\sigma$  oznacza produkcję entropii, która wynosi

$$\sigma = \underbrace{\frac{\mathbf{S} : \nabla \mathbf{u}}{\vartheta}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\kappa |\nabla \vartheta|^2}{\vartheta^2}}_{\geq 0} - \underbrace{\sum_{k=1}^n g_k m_k \omega_k}_{\geq 0} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{F}_k}{m_k} \cdot \nabla (\log p_k)}_{\geq 0}. \quad (3)$$

Niejemność pierwszego z wyrazów wynika z założeń na tensor naprężeń lepkich spełniający *prawo Newtona*, czyli  $\mathbf{S} = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \nu \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{1}$ , gdzie  $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$  oraz  $\mu, \nu$  są współczynnikami lepkości  $\mu > 0$ ,  $2\mu + 3\nu \geq 0$ . Drugi z członów w wyrażeniu (3) jest nieujemny ze względu na dodatni współczynnik przewodnictwa ciepła,  $\kappa > 0$ . Niejemność trzeciej części może być założona jako warunek determinujący dopuszczalność reakcji (patrz [15]). Wreszcie, zakładając poniższą formę strumienia dyfuzji

$$\mathbf{F}_k = - \sum_{l=1}^n C_{kl} \mathbf{d}_l, \quad \mathbf{d}_k = \nabla \left( \frac{p_k}{\pi_m} \right) + \left( \frac{p_k}{\pi_m} - \frac{\varrho_k}{\varrho} \right) \nabla \log \pi_m, \quad (4)$$

gdzie  $C_{kl}$  oznacza macierz współczynników dyfuzji, można sprawdzić, że czwarty z członów w (3) jest także nieujemny. Wynika to z założenia, że macierz  $D_{kl} = \frac{C_{kl}}{\varrho_k}$  jest symetryczna i dodatnio określona na pewnej podprzestrzeni o kowymiarze 1 (na  $U^\perp$  – dopełnieniu ortogonalnym  $\operatorname{lin}(U)$ , gdzie  $U = (1, \dots, 1)^T$ , patrz [15, 23]).

Zauważmy, że zastosowanie przybliżenia Ficka przy równoczesnym założeniu, że ciśnienie molekularne jest zadane przez (2), doprowadziłoby do niespójności z drugą zasadą termodynamiki. W takim przypadku, produkcja entropii mogłaby być ujemna, co przeczy dopuszczalności procesu. To z kolei nie pozwala na uzyskanie fundamentalnego oszacowania a-priori, na którym opierają się metody energetyczne.

Na rozprawę doktorską składają się cztery rozdziały. Każdy z nich jest oddzielnym rezultatem opartym na artykułach [18, 19, 24–26]. W Rozdziale 2 badamy następujące uproszczenie układu (1)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) &= 0 \\ \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbf{S} + \nabla \pi &= \varrho \mathbf{f} \\ \operatorname{div}(\varrho Y_A \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{F}_A) &= \varrho \omega_A \\ \operatorname{div}(\varrho Y_B \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{F}_B) &= \varrho \omega_B \\ \operatorname{div}(\varrho Y_C \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{F}_C) &= \varrho \omega_C \end{aligned} \right\} \text{ w } \Omega \quad (5)$$

modelujące przepływ stacjonarny czteroskładnikowej mieszaniny gazów biorących udział w izotermicznej, odwracalnej reakcji chemicznej  $A + B \rightleftharpoons C$ , która odbywa się w obecności rozpuszczalnika  $D$ . Równania układu (5) uzupełniamy warunkami brzegowymi Dirichleta dla pola prędkości oraz warunkiem nieprzepuszczalności dla dyfuzji składników. Ponadto, ponieważ nie ma potrzeby posługiwania się pojęciem entropii, ograniczamy się do prawa dyfuzji Ficka.

Głównym rezultatem tego rozdziału jest dowód istnienia słabych rozwiązań kiedy wykładnik adiabaty dla mieszaniny jest większy niż  $7/3$ . Konstrukcja rozwiązania przebiega poprzez relaksację i eliptyczną regularyzację równania ciągłości, relaksację i wygładzenie współczynników równań reakcji-dyfuzji składników w połączeniu z zastosowaniem twierdzenia o punkcie stałym. Główną różnicą, w porównaniu z analogiczną konstrukcją przeprowadzoną dla przypadku ewolucyjnego [14], jest brak możliwości wykluczenia próżni. Dlatego wykazanie nieujemności koncentracji składników wymaga rozważenia także przypadku gdy  $\varrho = 0$ . Drugim etapem dowodu jest przejście do granicy z parametrami aproksymacji. Adaptujemy tu podejście Lionsa dla przypadku przepływu barotropowego [17], oparte na teorii rozwiniętej dla równania transportu przez DiPernę i Lionsa [9]. Podejście to wymaga całkowalności gęstości w  $L^2(\Omega)$ , które w naszym przypadku może być uzyskane dzięki przetestowaniu równania pędu funkcją  $\Phi = \mathcal{B}(\pi^\beta - 1/|\Omega| \int_\Omega \pi^\beta dx)$ ,  $\beta \in (0, 1]$ , gdzie  $\mathcal{B}$  jest operatorem Bogovskiego. Mając to oszacowanie sprawdzamy, że funkcje graniczne  $\varrho$ ,  $\mathbf{u}$  są automatycznie zrenormalizowanym rozwiązaniem stacjonarnego równania ciągłości. Z tego ostatniego korzystamy aby pokazać silną zbieżność w członie nieliniowym ciśnienia  $\varrho^\gamma$ . Zbieżność ta wymaga zwartości ciągu  $\varrho_n^\gamma$ , która nie może być wywnioskowana bezpośrednio z oszacowań a-priori. Brakującą informację zastępuje się poprzez wykazanie trochę lepszych własności ciśnienia efektywnego, tj.  $\pi(\varrho, Y) - (2\mu + \nu)\mathbf{u}$ . Najpierw jednak należy udowodnić tzw. *effective viscous flux equality*. Jest to kluczowa równość we wszystkich dowodach istnienia rozwiązań dla układów opartych na równaniach Naviera-Stokesa dla ściśliwego przepływu barotropowego. Wykorzystujemy tutaj teorię operatorów zdefiniowanych za pomocą mnożników Fouriera (podwójna transformata Rieszsa oraz operator odwróconej dywergencji). Metoda, którą się posługujemy prowadzi do wartości  $\gamma > 7/3$ . Dla przepływów barotropowych możliwe jest poprawienie założenia na  $\gamma$  poprzez zastosowanie techniki Feireisla [10] do badania oscylacji gęstości (tzw. *oscillations defect measure*). W naszym przypadku jest to jednak niemożliwe z uwagi na obecność molekularnej części ciśnienia, której nie udaje się wyeliminować z podstawowego oszacowania energetycznego (w przypadku stacjonarnym oszacowanie to nie daje żadnej informacji o gęstości).

Począwszy od Rozdziału 3, rozważamy współczynniki lepkości będące funkcjami gęstości związanymi relacją

$$\nu(\varrho) = 2\varrho\mu'(\varrho) - 2\mu(\varrho), \quad (6)$$

zaproponowaną przez Brescha i Desjardinsa w [3]. Główną trudnością, w porównaniu z układami ze współczynnikami lepkości oddzielonymi od zera [12, 17], jest brak wystarczającej informacji o polu prędkości. Degeneracja ta powoduje dodatkowe trudności, jednak, pod warunkiem, że relacja (6) jest spełniona, niesie ze sobą także pewne korzyści. Zapewnia ona bowiem taką strukturę układu, która implikuje ograniczoność  $\nabla\sqrt{\varrho}$ . Własność ta została zauważona po raz pierwszy przez Brescha, Desjardinsa i Lina [6] dla równań Kortewega oraz dla dwuwymiarowego modelu płytkiej wody [2]. Następnie, Mellet i Vasseur uzupełnili tę obserwację dodatkowym oszacowaniem na normę  $\varrho^2$  w przestrzeni  $L^\infty(0, T; L \log L(\Omega))$  i udowodnili ciągłą stabilność słabych rozwiązań dla barotropowych równań Naviera-Stokesa.

Zakładając (6), badamy układ równań opisujący przepływ dwuskładnikowej izotermicznej mieszaniny gazów w obszarze ograniczonym z periodycznymi warunkami brzegowymi, tj.  $\Omega = \mathbb{T}^3$ . Na pierwszy rzut oka, sytuacja tu omawiana wydaje się być mniej złożona, niż ta z poprzedniego rozdziału. Jednakże teraz naszym celem było rozważenie zjawiska silnej cross-dyfuzji występującej w większości interesujących nas przepływów. Skupiamy się na najprostszej formie macierzy  $C$ , która, po uwzględnieniu przewodnictwa ciepła, prowadzi do modelu spójnego z drugą zasadą termodynamiki. Lecz nawet w tym przypadku musimy zmierzyć się z silną degeneracją głównego członu

w równaniach reagujących składników, spowodowaną właśnie tą bardziej szczegółową, a przez to nieliniową, formą strumienia dyfuzji

$$\mathbf{F}_i = -C_0 \mathbf{d}_i = -\frac{C_0}{\pi_m} \left( \left( \frac{\rho_k}{\rho m_i} + \frac{\rho_i}{\rho m_k} \right) \nabla \rho_i - \frac{\rho_i}{\rho m_k} \nabla \rho \right), \quad i \neq k.$$

Pierwsza część tego rozdziału poświęcona jest dowodowi ciągowej stabilności słabych rozwiązań. Główną obserwacją poczynioną na tym etapie jest to, że brakująca część informacji o gęstościach składników może zostać zastąpiona wyższą regularnością całkowitej gęstości wywnioskowaną z oszacowania wykorzystującego strukturę (6). Mimo, iż rezultaty tego typu są uznawane za najtrudniejszy krok, kompletny dowód istnienia rozwiązań w tym ujęciu jest nadal poza naszym zasięgiem. Największą trudnością jest zaproponowanie takiej aproksymacji, dla której możliwe byłoby powtórzenie oszacowania dającego zwartość ciągu aproksymującego człon konwekcyjny. W chwili obecnej, bez dodatkowych założeń, np. o obecności siły oporu, pytanie o istnienie rozwiązań, nawet dla przypadku barotropowego, pozostaje otwarte.

W drugiej części rozdziału przedstawiamy szczegóły aproksymacji i udowadniamy istnienie globalnych w czasie słabych rozwiązań, gdy ciśnienie barotropowe jest zmodyfikowane w obszarze małych gęstości, tak jak to zostało zaproponowane w pracy [5]. Dzięki temu, zbieżność w członie konwekcyjnym może być pokazana bezpośrednio, więc aby skonstruować rozwiązanie należy tylko zadbać o podtrzymanie struktury umożliwiającej powtórzenie oszacowania na gęstość. Podstawy pomysłu zaczerpnięte zostały z pracy [4], jest to wprowadzenie do równania pędu silnie wygładzającego członu  $\delta \rho \nabla (\mu'(\rho) \Delta^{2s+1} \mu(\rho))$  z dostatecznie dużym  $s$ , który imituje kapilarność [6]. Następnie, poprawiamy regularność pola prędkości przez dodanie operatora biharmonicznego  $\eta \Delta^2 \mathbf{u}$ . W końcu, aby uzyskać oszacowanie na normę  $\Delta^{s+1} \rho$  w  $L^2((0, T) \times \Omega)$  na poziomie przybliżeń Galerkinowskich, regularyzujemy także same równanie ciągłości, a zatem i równania bilansu masowego składników, poprzez dodanie  $\varepsilon \Delta \rho$ . Dodatkowo, stosujemy obciążenia gęstości składników we wszystkich członach nieliniowych oraz w ciśnieniu molekularnym a także wygładzamy współczynniki dyfuzji tak aby na pierwszym poziomie aproksymacji możliwe było zastosowanie klasycznych narzędzi dla liniowych równań parabolicznych.

W rozdziale 4, skupiamy się tylko na równaniach reakcji-dyfuzji składników, mając jednak w pamięci wszystkie fizyczno-matematyczne implikacje pełnego modelu. Naszym głównym rezultatem jest dowód istnienia słabych rozwiązań dla układu dowolnie wielu reagujących składników, pod warunkiem, że całkowita gęstość i pole prędkości są tak regularne jak to wynika z konstrukcji przeprowadzonej w poprzednim rozdziale. Nasz wynik można zinterpretować na trzy różne sposoby.

- W najprostszym przypadku gdy  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ , gęstość  $\rho$  jest daną ustaloną funkcją dostajemy więc rozwiązanie dla modelu, który opisuje tylko dyfuzję (silnie nieliniową) bez uwzględniania transportu.
- Gdy pole prędkości jest zadane, reakcje chemiczne nie mają wpływu na prędkość cząstek, nie produkują też żadnej siły wewnętrznej (związanej z ciśnieniem). Taki model jest właściwy reakcjom "zimnym", gdzie nie obserwuje się gwałtownych zmian energii.
- Jeżeli równania reakcji-dyfuzji są częścią pełnego modelu, to nasz wynik jest dodatkowym narzędziem, które może zostać wykorzystane na jednym z pierwszych etapów konstrukcji rozwiązania dla układu (1).

Podkreślmy, iż w modelu, który udało nam się zbadać, człony nieliniowe pojawiają się w każdym z równań (każdy ze składników pełni równorzędną rolę), przy czym macierz współczynników dyfuzji

spełnia wszystkie ogólne założenia postawione w [15], Rozdział 7. Właśnie to stanowi największą przeszkodę w stosowaniu klasycznego podejścia, takiego jak dla zwykłych układów parabolicznych [1, 8, 16]. W części głównej układu pojawia się bowiem zdegenerowany operator eliptyczny, który nie jest ani diagonalny, ani symetryczny. Dlatego, żadna z bezpośrednich metod renormalizacji nie może być zastosowana, tak jak w przypadku układów skalarnych [20]. Jedyną informacją jaką można się tu posłużyć jest oszacowanie produkcji entropii (3), ale nadal informacja ta nie jest pełna, gdyż macierz  $D_{kl} = \frac{C_{kl}}{\varrho_k}$  jest dodatnio określona jedynie na podprzestrzeni o kowymiarze 1. Jest to jednak wskazówką, że cała analiza powinna być przeprowadzona dla układu zapisanego w języku tzw. *zmiennych entropijnych*, czyli  $\log p_k$  zamiast  $\varrho_k$ . To podejście implikuje równocześnie, że gęstości składników są nieujemne. Dzięki tym obserwacjom, przez logarytmiczną relaksację układu wyjściowego oraz stosowne wzmocnienie członu eliptycznego, możemy dostać istnienie rozwiązań metodą przybliżeń Galerкина. Zwartość ciągu rozwiązań aproksymacyjnych jest uzyskana dzięki jednostajnemu w czasie oszacowaniu w przestrzeni  $L \log L$  oraz założeniom na regularność gęstości całkowitej  $\varrho$ . To ostatnie pozwala na kontrolowanie regularności przestrzennej otrzymanych rozwiązań.

Celem ostatniego rozdziału było złożenie i uzupełnienie rezultatów z poprzednich części pracy, tak aby na tej podstawie móc zanalizować kompletny model opisany układem (1). W ten sposób udowodniona została ciągowa stabilność *słabych wariacyjnych rozwiązań entropijnych* przy założeniu tej samej modyfikacji ciśnienia co w pracy [26] oraz gdy strumienie dyfuzji składników zależą od pełnych gradientów ciśnień, podobnie jak w [19]. Po raz pierwszy, w wyrażeniu tym pojawia się także temperatura, co prowadzi do powstania kolejnego silnego sprzężenia w układzie. Tak jak poprzednio, kluczowa jest zależność między współczynnikami lepkości (6). W tym przypadku nie pozwala ona jednak na uzyskanie pożądanego oszacowania gęstości od razu, z uwagi na obecność temperatury. Dlatego korzystamy z oszacowania entropijnego, które, dzięki zastosowaniu odpowiedniego wariantu nierówności Korna, poza ograniczeniem gradientu, daje nam także informację o dodatniości temperatury. Dopiero na tym etapie możemy zastąpić brakującą część oszacowania gradientów gęstości składników lepszą całkowalnością gradientu  $\varrho^\vartheta$ . Jest to niezbędne, aby udowodnić silną zbieżność ciągów aproksymujących gęstości cząstkowe, która, w związku z ogólną postacią strumienia dyfuzji (4), nie jest a-priori dostępna jak w przypadku układów liniowych równań parabolicznych.

Należy odnotować, że w przeciwieństwie np. do pracy [5], przechodzimy do granicy w słabym wariacyjnym sformułowaniu entropijnym. Dla układu równań Naviera-Stokesa-Fouriera, pojęcie słabych wariacyjnych rozwiązań entropijnych (t.j. rozwiązań spełniających słabe sformułowanie równań balansu masy, pędu, nierówności entropijnej oraz globalnej energii całkowitej) zostało wprowadzone przez Feireisla i Novotnego, którzy udowodnili ciągowa stabilność [11], a następnie globalne w czasie istnienie tych rozwiązań [12]. Rezultat ten uogólniono potem na przypadek przepływów wieloskładnikowych, kiedy ciśnienie nie zależy od koncentracji składników a strumienie dyfuzji przybliżone są liniowym prawem Ficka [14]. Ostatnio, w [13], zostało także udowodnione, że rozwiązania te są równoważne rozwiązaniom silnym, pod warunkiem, że te ostatnie istnieją, spełniającym te same warunki początkowe (tzw. *weak-strong uniqueness*).

Tym, czego nadal brakuje aby przejść do granicy w ramach standardowego słabego sformułowania, jest lepsza regularność temperatury konieczna do pokazania zwartości ciągu aproksymującego strumień ciepła  $\mathbf{Q}_N$ . Trudnością jest już samo wykazanie, że ciąg ten jest jednostajnie ograniczony w  $L^1(0, T; W^{-m,1}(\Omega))$  dla jakiegokolwiek  $m \geq 0$ . Z tego powodu nie udaje się udowodnić zwartości (po czasie) ciągu aproksymującego temperaturę, korzystając bezpośrednio z równania na

energię wewnętrzną. Ostatni z problemów zdołaliśmy jednak rozwiązać przez zastosowanie metod skompensowanej zwartości do nierówności entropijnej [8, 12].

Naturalnie, główną motywacją do studiowania ciągowej stabilności układu jest możliwość późniejszego użycia takiego rezultatu w pełnym dowodzie istnienia. W tym przypadku będzie to wyjątkowo złożone i techniczne skomplikowane zadanie, nawet przy założeniu dodatkowej modyfikacji ciśnienia.

## Literatura

- [1] H. Amann. *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*, volume 89 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1995. Abstract linear theory.
- [2] D. Bresch and B. Desjardins. Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Comm. Math. Phys.*, 238(1-2):211–223, 2003.
- [3] D. Bresch and B. Desjardins. Some diffusive capillary models of Korteweg type. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Section Mécanique*, 332(11):881–886, 2004.
- [4] D. Bresch and B. Desjardins. On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes models. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 86(4):362–368, 2006.
- [5] D. Bresch and B. Desjardins. On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 87(1):57–90, 2007.
- [6] D. Bresch, B. Desjardins, and C.-K. Lin. On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication, and shallow water systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(3-4):843–868, 2003.
- [7] S. Chapman and T. G. Cowling. *The mathematical theory of non-uniform gases. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases*. Third edition, prepared in co-operation with D. Burnett. Cambridge University Press, London, 1970.
- [8] R. J. DiPerna. Compensated compactness and general systems of conservation laws. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 292(2):383–420, 1985.
- [9] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98(3):511–547, 1989.
- [10] E. Feireisl. On compactness of solutions to the compressible isentropic Navier-Stokes equations when the density is not square integrable. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 42(1):83–98, 2001.
- [11] E. Feireisl and A. Novotný. Weak sequential stability of the set of admissible variational solutions to the Navier-Stokes-Fourier system. *SIAM J. Math. Anal.*, 37(2):619–650 (electronic), 2005.
- [12] E. Feireisl and A. Novotný. *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*. Advances in Mathematical Fluid Mechanics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [13] E. Feireisl and A. Novotný. Weak-strong uniqueness property for the full Navier-Stokes-Fourier system. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 204(2):683–706, 2012.
- [14] E. Feireisl, H. Petzeltová, and K. Trivisa. Multicomponent reactive flows: global-in-time existence for large data. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 7(5):1017–1047, 2008.
- [15] V. Giovangigli. *Multicomponent flow modeling*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.
- [16] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Uralceva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [17] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2*, volume 10 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Compressible models, Oxford Science Publications.
- [18] P. B. Mucha, M. Pokorný, and E. Zatorska. Approximate solutions to model of two-component reactive flow. <http://mmns.mimuw.edu.pl/preprints.html>, 2012-030, 2012.

- [19] P. B. Mucha, M. Pokorný, and E. Zatorska. Chemically reacting mixtures in terms of degenerated parabolic setting. <http://mmns.mimuw.edu.pl/preprints.html>, 2012-026, 2012.
- [20] B. Perthame. *Transport equations in biology*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [21] K. R. Rajagopal and L. Tao. *Mechanics of mixtures*, volume 35 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1995.
- [22] S. R. Turns. An introduction to combustion: Concepts and applications. *McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering*, 2000.
- [23] L. Waldmann and E. Trübenbacher. Formale kinetische Theorie von Gasgemischen aus anregbaren Molekülen. *Z. Naturforsch.*, 17a:363–376, 1962.
- [24] E. Zatorska. On a steady flow of multicomponent, compressible, chemically reacting gas. *Nonlinearity*, 24:3267–3278, 2011.
- [25] E. Zatorska. Mixtures: sequential stability of variational entropy solutions. <http://mmns.mimuw.edu.pl/preprints.html>, 2012-035, 2012.
- [26] E. Zatorska. On the flow of chemically reacting gaseous mixture. *J. Differential Equations*, 253(12):3471–3500, 2012.