Półpozycyjna determinacja gier nieskończonych

autoreferat rozprawy doktorskiej

Eryk Kopczyński

11 września 2008

1 Wprowadzenie

Teoria gier nieskończonych jest ważna dla informatyki ze względu na jej potencjalne zastosowanie w weryfikacji systemów interakcyjnych. W tym zastosowaniu system i środowisko modelujemy jako graczy w grze nieskończonej rozgrywanej na grafie (zwanym *areną*), którego wierzchołki reprezentują możliwe stany systemu. Gracze (tutaj zwani Ewą i Adamem) decydują, którą krawędź (przejście do innego stanu, czyli *ruch*) wybrać; każdy ruch ma określony *kolor*. Pożądane zachowanie systemu jest wyrażane jako warunek zwycięstwa gry — zwycięzca zależy od ciągu kolorów, który wystąpił podczas nieskończonej rozgrywki. Jeśli istnieje strategia wygrywająca, to implementujący ją system będzie zachowywał się zgodnie z naszymi wymaganiami. Strategie *pozycyjne* — takie, które zależą tylko od pozycji, a nie od historii rozgrywki — są szczególnie interesujące ze względu na ich dobre własności algorytmiczne mogące prowadzić do efektywnej implementacji. Wśród najczęściej używanych warunków zwycięstwa są warunki parzystości, mające własność pozycyjnej determinacji dla obu graczy ([Mos91], [EJ91], [McN93]).

Gry nieskończone są mocno związane z teorią automatów. Warunek parzystości jest bardzo ważnym pojęciem w obu dziedzinach. Na przykład, pozycyjna determinacja gier parzystości jest używana w nowoczesnych dowodach twierdzenia Rabina o dopełnieniu dla automatów skończonych na drzewach nieskończonych z warunkiem akceptacji parzystości.

Nie zawsze jednak możliwe jest wyrażenie pożądanego zachowania systemu jako warunku parzystości. Interesuje nas, jakie własności musi spełniać warunek zwycięstwa, by był pozycyjnie zdeterminowany, tzn. by zwycięzca miał strategie pozycyjne niezależnie od areny. Ostatnio znaleziono kilka interesujących charakteryzacji takich warunków zwycięstwa ([CN06], [GZ04], [GZ05]).

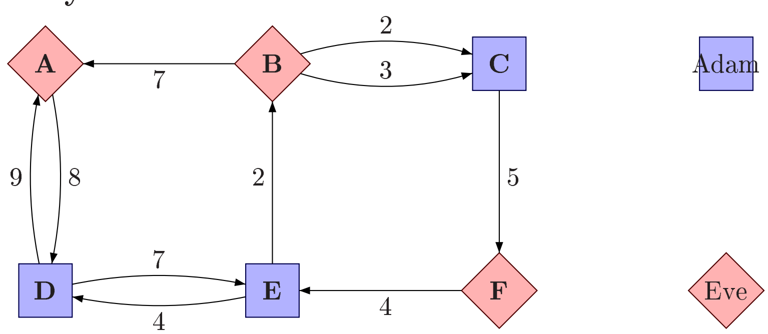
Naszym celem jest znalezienie analogicznych charakteryzacji i własności (jak np. własności domknięcia) dla warunków półpozycyjnych, czyli takich, że w każdej grze z takim warunkiem zwycięstwa tylko jeden z graczy (na przykład my) musi mieć pozycyjną strategię wygrywającą (o ile w ogóle ma strategię wygrywającą). Jeśli strategię wygrywającą ma drugi gracz (środowisko), to może ona być dowolna.

1.1 Przegląd

Badamy gry nieskończone, w których jeden z graczy ma zawsze pozycyjną (bezpamięciową) strategię wygrywającą, podczas gdy drugi graczy może używać strategii zależnej od historii. Badamy warunki zwycięstwa gwarantujące taką własność dla wszystkich aren, oraz dla wszystkich skończonych aren. Pokazujemy warunki domknięcia tej klasy warunków zwycięstwa, prowadzące do klasy XPS warunków półpozycyjnych, a także znajdujemy wspólne powody dla kilku znanych i nowych wyników dotyczących pozycyjnej determinacji. Pokazujemy, że własność półpozycyjnej determinacji danego ω-regularnego warunku zwycięstwa jest rozstrzygalna w czasie wykładniczym. Pokazujemy kilka nowych klas warunków półpozycyjnych: warunki wklęsłe (dla aren skończonych), monotoniczne i geometryczne (dla aren o dowolnej mocy).

2 Przygotowanie

2.1 Przykład



Powyższy rysunek przedstawia *arenę* na której toczy się gra. Kwadraty i romby to *pozycje*; romby to pozycje Ewy, a kwadraty — pozycje Adama.

Na początku gry kładziemy żeton w jednej z pozycji. Może to być albo pozycja Ewy, albo Adama. Właściciel wybiera jeden z dostępnej z tej pozycji ruchów (krawędzie, oznaczone strzałkami) i przesuwa żeton do pozycji wskazanej strzałką. Na przykład, jeśli zaczynamy w **B**, Ewa może wybrać, czy chce się ruszyć do **A** (również pozycja Ewy), czy do pozycji Adama **C** (tutaj Ewa może wybrać, czy chce użyć ruchu oznaczonego liczbą 2, czy 3). Właściciel nowej pozycji wybiera następny ruch, i tak dalej.

Gra nigdy się nie kończy (to właśnie oznacza nazwa gra nieskończona). Decyzje podjęte przez obu graczy w trakcie nieskończonego czasu określają nieskończoną rozgrywkę. Zwycięzca jest określony przez *warunek zwycięstwa* (warunek wygrywający), który określa, kto wygrywa na podstawie ciągu kolorów (etykiet — w naszym przypadku liczb) ruchów, które zostały użyte podczas danej rozgrywki.

W powyższej grze jako warunku zwycięstwa możemy użyć *warunku parzystości*: Ewa wygrywa, jeśli największa liczba występująca nieskończenie często jest parzysta. W przeciwnym przypadku wygrywa Adam.

W tej grze strategię wygrywającą ma Adam: w **C** Adam zawsze idzie do **F**; Ewa idzie do **E**. W **E**, idziemy do **D**, a w **D**, idziemy do **A**. Ewa będzie musiała wrócić do **A**, skąd Adam zawsze będzie szedł do **D**. W ten sposób (nie licząc początkowej fazy gry) otrzymamy ciąg kolorów 8, 9, 8, 9, ... i Adam wygra.

Ta strategia Adama ma następującą własność: w każdej pozycji decydujemy się zawsze na ten sam ruch, niezależnie od tego, co działo się wcześniej w trakcie rozgrywki. Strategie mające taką własność nazywamy *pozycyjnymi*. Istnieją gry, w których istnieją pozycyjne strategie wygrywające, a także takie, w których wszystkie strategie wygrywające są niepozycyjne.

Przez *grę półpozycyjnie zdeterminowaną* rozumiemy grę, w której dla każdej pozycji początkowej albo Ewa ma pozycyjną strategię wygrywającą, albo Adam ma dowolną strategię wygrywrającą.

2.2 Gry

Badamy antagonistyczne gry nieskończone z pełną informacją.

Niech C będzie pewnym zbiorem, nazywanym zbiorem **kolorów**.

Areną nad C nazywamy krotkę $G = (\mathrm{Pos}_A, \mathrm{Pos}_E, \mathrm{Mov})$, gdzie:

- Elementy $\mathrm{Pos} = \mathrm{Pos}_E \cup \mathrm{Pos}_A$ to **pozycje**; Pos_A i Pos_E to, odpowiednio, (rozłączne) zbiory pozycji Adama i Ewy.
- $\mathrm{Mov} \subseteq \mathrm{Pos} \times \mathrm{Pos} \times (C \cup \{\epsilon\})$; elementy Mov nazywamy **ruchami**. (v_1, v_2, c) to ruch z v_1 do v_2 z kolorem (etykietą) c. Stosujemy następujące oznaczenia: $\mathrm{source}((v_1, v_2, c)) = v_1$, $\mathrm{target}((v_1, v_2, c)) = v_2$, $\mathrm{rank}((v_1, v_2, c)) = c$. Ruchy piszemy jako $v_1 \xrightarrow{c} v_2$ zamiast (v_1, v_2, c).
- kolor ruchu ϵ oznacza słowo puste; ruch $v \xrightarrow{\epsilon} w$ nie ma koloru. Zakładamy, że w arenie nie ma nieskończonych ścieżek składających się jedynie z ruchów bezkolorowych.

Grą nazywamy parę (G, W), gdzie G jest areną, a W jest warunkiem zwycięstwa. **Warunkiem zwycięstwa** W nad C nazywamy niezależny od prefiksu podzbiór C^ω, tzn. taki, że $u \in W \iff cu \in W$ dla każdych $c \in C, u \in C^\omega$. Poszczególne warunki zwycięstwa nazywamy WA, WB, ...

Jak w przykładzie powyżej, gra (G, W) toczy się w następujący sposób. Rozgrywka zaczyna się w pewnej pozycji v_1. Właściciel v_1 (np. Ewa jeśli $v_1 \in \mathrm{Pos}_E$) wybiera jeden z ruchów wychodzących z v_1, $v_1 \xrightarrow{c_1} v_2$. Jeśli takiego ruchu nie ma, to ten gracz przegrywa. Następny ruch jest wybierany przez właściciela v_2; oznaczmy go przez $v_2 \xrightarrow{c_2} v_3$. I tak dalej. Jeśli $c_1 c_2 c_3 \ldots \in W$, to Ewa wygrywa, w przeciwnym przypadku wygrywa Adam.

Rozgrywką w arenie G nazywamy ścieżkę w grafie areny. Rozgrywka może być skończona albo nieskończona. Zbiór wszystkich rozgrywek nazywamy Play, a $\mathrm{Play}_\infty, \mathrm{Play}_F, \mathrm{Play}_A, \mathrm{Play}_E \subseteq \mathrm{Play}$ oznaczają odpowiednio rozgrywki nieskończone, skończone, skończone kończące się w pozycji Adama, i Ewy. Przez $\mathrm{source}(\pi)$ i $\mathrm{target}(\pi)$ oznaczamy odpowiednio początkową i końcową pozycję rozgrywki (oczywiście, rozgrywki nieskończone nie mają pozycji końcowej).

2.3 Strategie

Strategią dla gracza X (tzn. $X \in \{\mathrm{Eve}, \mathrm{Adam}\}$) nazywamy funkcję częściową $s : \mathrm{Play}_X \to \mathrm{Mov}$. Intuicyjnie, $s(\pi)$ dla π kończącego się w Pos_X określa, co X powinien zrobić w następnym ruchu.

Strategia s jest **wygrywająca** (dla X) z pozycji v jeśli każda rozgrywka π rozpoczynająca się w v zgodna z s jest zwycięska dla gracza X. Strategia jest wygrywająca z $M \subseteq \mathrm{Pos}$ wtw jest wygrywająca z każdej pozycji $v \in M$.

Strategia s jest **pozycyjna** jeśli $s(\pi)$ zależy tylko od $\mathrm{target}(\pi)$.

Definicja 2.1 *Dla gry (G, W) i gracza X,* **zbiorem zwycięskim** *(zbiorem wygrywającym) gracza X, Win_X, nazywamy zbiór pozycji, z których X ma strategię wygrywającą.*

2.4 Determinacja

Definicja 2.2 *Gra jest* **zdeterminowana** *jeśli dla każdej pozycji v jeden z graczy ma strategię wygrywającą z v, t.j.* $\mathrm{Win}_E \cup \mathrm{Win}_A = \mathrm{Pos}$.

Gra jest **pozycyjnie zdeterminowana** *wtw dla każdej pozycji jeden z graczy ma* pozycyjną *strategię wygrywającą z tej pozycji.*

Gra jest **półpozycyjnie zdeterminowana** *wtw dla każdej pozycji albo Ewa ma pozycyjną strategię wygrywającą z tej pozycji, albo Adam ma (dowolną) strategię wygrywającą z tej pozycji.*

Warunek zwycięstwa W jest **zdeterminowany, pozycyjny, półpozycyjny** *wtw dla każdej areny G gra (G, W) jest odpowiednio zdeterminowana, pozycyjnie zdeterminowana, półpozycyjnie zdeterminowana.*

Warunek zwycięstwa W jest **skończenie zdeterminowany, pozycyjny, półpozycyjny** *wtw dla każdej* skończonej *areny G gra (G, W) jest odpowiednio zdeterminowana, pozycyjnie zdeterminowana, półpozycyjnie zdeterminowana.*

Powyżej zdefiniowaliśmy 6 klas warunków zwycięstwa. W rozprawie koncentrujemy się na warunkach półpozycyjnie zdeterminowanych. Niektóre z naszych wyników jednak dają się jednak sformułować i udowodnić w bardzo podobny sposób dla każdej z powyższych klas. Żeby uniknąć powtarzania, wprowadzamy następujące pojęcie.

Definicja 2.3 **Podstawowym typem areny** *jest klasa aren γ zamknięta na podareny.*

Definicja 2.4 **Podstawowy typ determinacji** $D = (\alpha_E, \alpha_A, \gamma)$ *określają trzy parametry:*

- α_E *— klasa dopuszczalnych strategii Ewy (pozycyjne albo dowolne),*
- α_A *— klasa dopuszczalnych strategii Adama (pozycyjne albo dowolne),*
- γ *— podstawowy typ aren.*

*Mówimy, że strategia gracza X jest D-***strategią** *wtw jest w klasie α_X. Mówimy, że arena jest D-***areną***, jeśli jest w klasie γ. Mówimy, że gra (G, W) jest D-***zdeterminowana** *jeśli dla każdej pozycji początkowej jeden z graczy ma D-strategię. Mówimy, że warunek zwycięstwa W jest D-***zdeterminowany***, jeśli dla każdej D-areny G gra (G, W) jest D-zdeterminowana.*

Będziemy również pracować z innymi klasami strategii niż dowolne i pozycyjne (strategie zawieszalne, uparte, skończenie pamięciowe, itd.) — w takich przypadkach będziemy używać jeszcze ogólniejszej definicji **typu determinacji**.

2.5 Typy aren

W literaturze występują trzy typy aren.

- ϵ-areny (C), jak wyżej.
- *Areny etykietowane na krawędziach* (B). Ruchy z kolorem ϵ nie są dozwolone.
- *Areny etykietowane w pozycjach* (A). Wszystkie definicje są analogiczne, poza tym, że kolory są przypisane pozycjom, nie ruchom. Pozycje z kolorem ϵ również nie są dozwolone.

Można pokazać, że A-areny są (w pewnym sensie) podzbiorem B-aren. Oczywiście, B-areny są podzbiorem C-aren. Można pokazać przykłady warunków, które są półpozycyjne, jeśli ograniczymy się do A-aren, ale nie są takie na niektórych B-arenach. Nie wiadomo, czy istnieją warunki w analogiczny sposób rozróżniające klasy B-aren i C-aren.

3 Podstawowe narzędzia

3.1 Naturalność typów determinacji

Następujące znane własności stosują się do strategii w grach z niezależnymi od prefiksu warunkami zwycięstwa.

Twierdzenie 3.1 *Każdy podstawowy typ determinacji ma następujące własności dla każdej areny G, gracza X, i warunku zwycięstwa W:*

- *(w przód) Jeśli X ma D-strategię s wygrywającą z M, to ma też D-strategię wygrywającą ze wszystkich pozycji, które są osiągane przez s w pewnej rozgrywce rozpoczynającej się w M.*
- *(w tył) Jeśli X ma D-strategię s wygrywającą z M, to ma też D-strategię s wygrywającą ze wszystkich pozycji, z których ma strategię gwarantującą dojście do M.*

- *(globalizacja) Niech S będzie zbiorem D-strategii dla X takich, że każda $s \in S$ wygrywa z $U(s) \subseteq \mathrm{Pos}$. Wówczas X ma D-strategię wygrywającą z $\bigcup_{s \in S} U(s)$.*
- *(wycinanie) Niech s będzie D-strategią wygrywającą z M dla X, gdzie M jest zamknięte na operacje „w przód" i „w tył". Niech G' będzie grą otrzymaną przez usunięcie wszystkich pozycji z M. Jeśli gracz Y (może to być X albo przeciwnik) ma D-strategię wygrywającą z M' w (G', W), to ma też D-strategię wygrywającą z M' w G.*

3.2 Użyteczny lemat

Lemat 3.2 *Niech D będzie podstawowym typem determinacji. Niech $W \subseteq C^\omega$ będzie warunkiem zwycięstwa takim, że dla każdej niepustej D-areny G nad C istnieje niepusty podzbiór $M \subseteq \mathrm{Pos}_G$ taki, że w grze (G, W) jeden z graczy ma D-strategię wygrywającą z M. (Równoważnie, dla każdej niepustej D-areny G istnieje pozycja $v \in \mathrm{Pos}_G$ taka, że w grze (G, W) jeden z graczy ma D-strategię wygrywającą z v.) Wówczas W jest D-zdeterminowany.*

Tego lematu używamy w wielu spośród dowodów zawartych w rozprawie.

3.3 Warunki Büchi i co-Büchi

Definicja 3.3 *Dla $S \subseteq C$, przez WB_S oznaczamy zbiór słów nieskończonych nad C takich, że elementy S występują nieskończenie często, t.j. $(C^*S)^\omega$. Takie warunki zwycięstwa nazywamy* warunkami Büchi*. Dopełnienia warunków Büchi, $WB'_S = C^*(C - S)^\omega$, nazywamy warunkami co-Büchi.*

Twierdzenie 3.4 *Niech D będzie podstawowym typem determinacji. Niech $W \subseteq C^\omega$ będzie warunkiem zwycięstwa, i $S \subseteq C$. Jeśli W jest D-zdeterminowany, to $W \cup WB_S$ również.*

Dualnie, jeśli W jest D-zdeterminowany, to $W \cap WB'_S$ również.

3.4 Warunek parzystości

Warunkiem parzystości rzędu n nazywamy następujący warunek zwycięstwa nad zbiorem $C = \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$WP_n = \{w \in C^\omega : \limsup_{i \to \infty} w_i \text{ is even}\}. \tag{1}$$

Jest to jeden z najważniejszych, klasycznych, warunków zwycięstwa. Istnieje wiele dowodów jego pozycyjnej determinacji. Twierdzenie 3.4 daje jeszcze jeden: zaczynamy od warunku $W = \emptyset$ (który jest pozycyjny) i stosujemy Twierdzenie 3.4 i jego twierdzenie dualne n razy.

Twierdzenie 3.5 *Niech $W \subseteq C^\omega$ będzie warunkiem zwycięstwa. Następujące warunki są równoważne:*

1. $W = h^{-1}(WP_n)$ *dla pewnego* $h : C \to \{0, 1, \ldots, n\}$;
2. W *jest pozycyjnie zdeterminowany;*
3. (G, W) *is pozycyjnie zdeterminowany dla wszystkich aren* G *dla* C *dla których* $\mathrm{Pos}_E = \emptyset$ *albo* $\mathrm{Pos}_A = \emptyset$;
4. $W_f^\omega \subseteq W$ *i* $(C^+ - W_f)^\omega \subseteq C^\omega - W$, *gdzie* $W_f = \{u \in C^+ | u^\omega \in W\}$.

Równoważność (1) i (2) została pokazana w [CN06] (przy użyciu warunku (4)). W przypadku aren skończonych zachodzi równoważność warunków (2) i (3) [GZ05].

4 Wklęsłe warunki zwycięstwa

4.1 Definicja

Definicja 4.1 *Słowo* $w \in C^* \cup C^\omega$ *jest* **kombinacją** *(shuffle) słów* w_1 *i* w_2 *wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego ciągu słów* (u_n), $u_n \in C^*$,

- $w = \prod_{k \in \mathbb{N}} u_k = u_0 u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 \ldots$,
- $w_1 = \prod_{k \in \mathbb{N}} u_{2k+1} = u_1 u_3 u_5 u_7 \ldots$,
- $w_2 = \prod_{k \in \mathbb{N}} u_{2k} = u_0 u_2 u_4 u_6 \ldots$.

Definicja 4.2 *Warunek zwycięstwa* W *jest* **wypukły** *jeśli jako podzbiór* C^ω *jest zamknięty na kombinacje, i* **wklęsły** *jeśli jego dopełnienie jest wypukłe.*

Przykład 4.3 *Warunki parzystości są i wklęsłe, i wypukłe.*

Dalsze przykłady w Sekcji 5 poniżej.

4.2 Półpozycyjna determinacja

Twierdzenie 4.4 *Wklęsłe warunki zwycięstwa są półpozycyjne.*

Dowód przez indukcję po $|\mathrm{Mov}|$ jest oparty na następującym pomyśle. Niech v będzie pozycją Ewy, z której wychodzą ruchy $p_1, p_2, \ldots$. Załóżmy, że Ewa nie może wygrać, używając tylko jednego z tych ruchów. Wówczas, skoro warunek zwycięstwa jest wklęsły, nie może ona również wygrać używając różnych ruchów — dlatego, że wówczas rozgrywka byłaby kombinacją podrozgrywek, które się pojawiają po każdym z ruchów $p_1, p_2, \ldots$ (a Adam może wygrać każdą z tych podrozgrywek, stosując odpowiednią strategię).

Twierdzenie to daje jeszcze jeden dowód skończonej pozycyjnej determinacji gier parzystości, a także skończonej pozycyjnej determinacji gier z warunkiem Rabina (zapisującego się jako suma rodziny warunków parzystości, z których dla każdego koloru $c \in C$ każdy może używać innej wartości rangi dla c).

W ogólności z wklęsłości nie wynika półpozycyjna determinacja na arenach nieskończonych. Ponadto, z półpozycyjnej determinacji (nawet nieskończonej) nie wynika wklęsłość.

4.3 Osłabianie wklęsłości

W [GZ04] został otrzymany wynik analogiczny do Twierdzenia 4.4 w przypadku pełnej pozycyjnej determinacji. Przedstawimy go przy użyciu następującej definicji:

Definicja 4.5 *Warunek zwycięstwa W jest* **słabo wypukły** *wtw dla każdego ciągu słów (u_n), $u_n \in C^*$, jeśli*

1. $u_1u_3u_5u_7 \ldots \in W$,
2. $u_2u_4u_6u_8 \ldots \in W$,
3. *($\star$)* $\forall i\ (u_i)^\omega \in W$,

to $u_1u_2u_3u_4 \ldots \in W$.

Warunek zwycięstwa W jest **słabo wklęsły** *wtw jego dopełnienie jest słabo wklęsłe.*

Twierdzenie 1 z [GZ04] mówi, że warunki słabo wklęsłe i słabo wypukłe (a właściwie ich „jakościowe” uogólnienie, funkcje wypłaty *fairly mixing*) są pozycyjne. Niestety, słaba wklęsłość nie wystarcza do półpozycyjnej determinacji.

5 Warunki geometryczne

5.1 Definicja

Niech $C = [0,1]^d$, gdzie $[0,1]$ jest przedziałem liczb rzeczywistych. Dla $w \in C^+$, niech $P(w)$ będzie średnim kolorem w, t.j., $\frac{1}{|w|}\sum_{k=1}^{|w|} w_k$. Dla słowa $w \in C^\omega$, niech $P_n(w) = P(w_{|n})$ ($w_{|n}$ będzie n-literowym prefiksem w).

Niech $A \subseteq C$. Konstruujemy warunek zwycięstwa W w ten sposób, żeby $w \in W$ jeśli granica ciągu $P_n(w)$ należy do A. Ponieważ nie każdy ciąg ma granicę, musimy także zdefiniować zwycięzcę dla pozostałych ciągów.

Niech $WF(A)$ będzie zbiorem w takich, że każdy punkt skupienia ciągu $P_n(w)$ jest elementem A. Niech $WF'(A)$ będzie zbiorem w takich, że co najmniej jeden punkt skupienia $P_n(w)$ jest elementem A. Te definicje są dualne: $WF'(A) = C^\omega - WF(C - A)$.

Warunki geometryczne są w pewnym sensie uogólnieniem *gier z wypłatą średnią*.

5.2 Warunki wklęsłe i wypukłe

Twierdzenie 5.1

1. *$WF'(A)$ jest słabo wypukły wtw A jest domkniętym wypukłym podzbiorem C.*
2. *$WF'(A)$ jest wypukły wtw A jest trywialnym podzbiorem C ($A = \emptyset$ lub $A = C$).*

3. *$WF'(A)$ jest słabo wklęsły wtw A jest ko-wypukłym podzbiorem C (tzn. jego dopełnienie jest wypukłe).*

4. *$WF'(A)$ jest wklęsły wtw A jest ko-wypukłym podzbiorem C.*

Własności $WF(A)$ są dualne.

5.3 Pozycyjna determinacja

Z Twierdzeń 5.1 i 4.4, jeśli A jest ko-wypukły, to $WF'(A)$ jest wklęsły, zatem jest półpozycyjny. Jednak dla aren nieskończonych sytuacja przedstawia się inaczej.

Stwierdzenie 5.2 *Jeśli A jest nietrywialnym podzbiorem C, to $WF'(A)$ nie jest półpozycyjny.*

Stwierdzenie 5.3 *Jeśli A nie jest zbiorem otwartym, to $WF(A)$ nie jest półpozycyjny.*

5.4 Prosty zbiór otwarty

Twierdzenie 5.4 *Niech $C = [0,1]$, $A = [0, 1/2)$. Warunek*

$$WF(A) = \{w : \limsup P_n(w) < 1/2\}$$

jest półpozycyjny.

Dowód

Niech $G = (\mathrm{Pos}_A, \mathrm{Pos}_E, \mathrm{Mov})$ będzie areną. Rozważmy następujący (zależny od prefiksu) warunek zwycięstwa, dla każdego $x \in [0,1]$:

$$WL_x = \{w : \forall_n P_n(w) \le x\} \tag{2}$$

Niech $L_x = \mathrm{Win}_E(G, WL_x)$, tzn. zbiór pozycji, w których istnieje strategia wygrywająca dla Ewy w grze rozpoczynającej się w v.

Lemat 5.5 *Dla $x < 1/2$, w L_x Ewa ma pozycyjną strategię wygrywającą z $(G, WF(A))$.*

Dowód tego lematu wykorzystuje arenę (G^x, WP_1) (WP_1 jest warunkiem parzystości nad $C = \{0,1\}$), gdzie $\mathrm{Pos}^x_X = \mathrm{Pos}_X \times \mathbb{R}$ for $X \in \{A, E\}$.

Korzystamy z powyższego lematu oraz Lematu 3.2. Należy jeszcze udowodnić, że jeśli L_x jest pusty dla każdego $x < 1/2$, to Adam ma wszędzie strategię wygrywającą. ■

Wniosek 5.6 *Niech $A = f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x < 0\})$ dla pewnej funkcji afinicznej $f : C \to \mathbb{R}$. Wówczas warunek $WF(A)$ jest półpozycyjny.*

5.5 Podsumowanie

Poniższa tabela podsumowuje naszą wiedzę na temat wklęsłości i półpozycyjnej determinacji warunków geometrycznych.

Nr	A	warunek	wklęsłość	sk. półp.	niesk.
0	trywialny	$WF'(A)$ or $WF(A)$	tak	tak	tak
1	nie ko-wypukły	$WF'(A)$ or $WF(A)$	nie	nie	nie
2	ko-wypukły	$WF'(A)$	tak	tak	nie
3	ko-wypukły, nie otwarty	$WF(A)$	nie	tak?	nie
4	ko-wypukły, otwarty	$WF(A)$	tylko słaba	tak?	tak?
5	$[\frac{1}{2}, 1] \subset [0, 1]$	$WF(A)$	tylko słaba	tak	tak

6 Gry a automaty skończone

6.1 Definicja

Definicja 6.1 Deterministycznym automatem skończonym (DFA) na słowach nieskończonych z warunkiem parzystości *nazywamy krotkę* $A = (Q, q_I, \delta, \mathrm{rank})$*, gdzie* Q *jest skończonym zbiorem stanów,* $q_I \in Q$ *stanem początkowym,* $\mathrm{rank} : Q \to \{0, \dots, d\}$*, i* $\delta : Q \times C \to Q$*. Rozszerzamy definicję* δ *do* $\delta : Q \times C^* \to Q$ *przez* $\delta(q, \epsilon) = q, \delta(q, wu) = \delta(\delta(q, w), u)$ *dla* $w \in C^*, u \in C$*. Dla* $w \in C^\omega$*, niech* $q_0(w) = q_I$ *i* $q_{n+1}(w) = \delta(q_n, w_{n+1}) = \delta(q_I, w_0 \dots w_{n+1})$*. Mówimy, że* A **akceptuje** *słowo* $w \in C^\omega$*, wtw* $\limsup_{n \to \infty} \mathrm{rank}(q_n(w))$ *jest parzysta. Zbiór wszystkich słów akceptowanych przez* A *nazywamy* **językiem akceptowanym przez** A*.*

6.2 Automaty monotoniczne

W tej sekcji pokazujemy jeszcze jedną klasę warunków półpozycyjnych, zdefiniowaną przy użyciu automatu skończonego (na słowach skończonych).

Definicja 6.2 Automatem monotonicznym $A = (n, \delta)$ *nad alfabetem* C *nazywamy deterministyczny automat skończony (na słowach skończonych), w którym*

- *zbiorem stanów jest* $Q = \{0, \dots, n\}$*;*
- *stanem początkowym jest 0, a akceptującym* n*;*
- *funkcja przejścia* $\delta : Q \times C \to Q$ *dla ustalonej wartości drugiej współrzędnej jest niemalejąca, tzn. jeśli* $q \leq q'$ *to* $\delta(q, c) \leq \delta(q', c)$*.*

Funkcję przejścia δ rozszerzamy do C^* tak samo, jak w definicji 6.1 (rozszerzona funkcja δ jest również niemalejąca). Niech L_A oznacza *język akceptowany przez* A, tzn. zbiór słów $w \in C^*$, dla których $\delta(0, w) = n$.

Przykład 6.3 *Niech* $C = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$*. Istnieją automaty monotoniczne akceptujące języki* $C^*\mathbf{a}^nC^*$*,* $C^*\mathbf{a}^{n-1}\mathbf{b}C^*$*,* $C^*\mathbf{b}\mathbf{a}^{n-1}C^*$*, a nie istnieją automaty akceptujące języki* $C^*\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2C^*$*,* $C^*\mathbf{bab}C^*$*,* $C^*\mathbf{bac}C^*$*.*

Definicja 6.4 **Warunkiem monotonicznym** *nazywamy warunek zwycięstwa* $WM_A = C^\omega - L_A^\omega$ *dla pewnego automatu* A*.*

Twierdzenie 6.5 *Warunki monotoniczne są półpozycyjne.*

Dowód Dowód jest oparty na następującym pomyśle. Niech (G, W) będzie naszą grą. Konstruujemy nową grę (G', W'), gdzie $\mathrm{Pos}' = \mathrm{Pos} \times Q$; druga współrzędna pozycji w nowej arenie oznacza obecny stan automatu sprawdzającego, czy automat A zaakceptował słowo. Można to zrobić w ten sposób, że otrzymana gra jest grą parzystości. Im większa wartość q w nazwie pozycji (v, q), tym trudniej dla Ewy; jeśli dla danego v istnieje q takie, że Ewa ma strategię wygrywającą z (v, q), to Ewa ma też strategię wygrywającą z v w oryginalnej grze — polega ona na tym, że Ewa zawsze zachowuje się tak, jakby była w najgorszej możliwej sytuacji, czyli w pozycji v' gra analogicznie do ruchu wybieranego przez jej strategię w grze (G', W') z (v', q'), gdzie q' jest największym stanem, z którego jeszcze może wygrać. Jeśli w grze (G', W') nie ma pozycji, z której Ewa ma strategię wygrywającą, to można pokazać, że w grze (G, W) również Adam wszędzie ma strategię wygrywającą. Półpozycyjna determinacja wynika z lematu 3.2. ∎

Stwierdzenie 6.6 *Warunki monotoniczne są słabo wklęsłe i zamknięte na sumę skończoną.*

6.3 Upraszczanie świadków

Twierdzenie 6.7 *Niech* W *będzie* ω*-reularnym warunkiem zwycięstwa. Jeśli* W *nie jest skończenie półpozycyjny, to istnieje arena-świadek (tzn. taka, że Ewa ma strategię wygrywającą, ale nie ma pozycyjnej strategii wygrywającej), w której jest tylko jedna pozycja Ewy, i tylko 2 ruchy z tej pozycji. (Ruchów i pozycji Adama może być dowolnie wiele.)*

Dowód Niech G będzie areną. Dowód przebiega przez stworzenie aren $G^0 = (\mathrm{Pos}_A \times Q, \mathrm{Pos}_E \times Q, \mathrm{Mov}^0)$ i $G^1 = (\mathrm{Pos}_A \times Q, \mathrm{Pos}_E \times Q, \mathrm{Mov}^1)$ w ten sposób, że gry (G, W), (G_0, W) i (G^1, WP_d) są równoważne w tym sensie, że każda rozgrywka w jednej z nich może być zinterpretowana jako rozgrywka w innej (z tym samym zwycięzcą). Wiemy, że w grze parzystości Ewa ma strategię wygrywającą pozycyjną, czyli ma ją też w G^1. Znajdujemy taką pozycyjną strategię wygrywającą, która (interpretowana jako strategia w G^0) zależy od przeszłości w minimalnym zbiorze pozycji. Niech v_0 będzie jedną z tych pozycji. Następnie z G^1 tworzymy nową arenę G^2, w której sklejamy pozycje pochodzące od G_2, a z pozostałych pozycji wyrzucamy nieużywane ruchy (i oddajemy je Adamowi). Otrzymana arena musi spełniać zadane warunki.

Następnie, przez sklejanie doprowadzamy naszą arenę z jedną pozycją Ewy do takiej, w której ma ona tylko 2 ruchy do wyboru. ∎

6.4 Rozstrzygalność

Twierdzenie 6.8 *Niech W będzie ω-regularnym parzystości, akceptowanym przez DFA z warunkiem parzystości*

$$A = (Q, q_I, \delta, \mathrm{rank} : Q \to \{0 \dots d\}),$$

gdzie $|Q| = n$. Wówczas skończona półpozycyjna determinacja W jest rozstrzygalna w czasie $n^{O(n^2)}$.

Dowód Wystarczy sprawdzić wszystkie możliwe areny-świadków zgodne z tezą Twierdzenia 6.7. Mimo, że to Twierdzenie nie nakłada ograniczenia na ruchy i pozycje Adama, możliwości w „strefie" Adama dają się ograniczyć przez liczbę skończoną. ∎

Stwierdzenie 6.9 *Niech G będzie areną z n pozycjami, a W półpozycyjnym językiem ω-regularnym, określonym przez automat o s stanach i d rangach. Wówczas zbiory zwycięskie w grze (G, W) można znaleźć w czasie $O((ns)^{d/2})$, a pozycyjną strategię Ewy w czasie $O((ns)^{d/2}t)$, gdzie $t = \sum_{v \in \mathrm{Pos}_E} \log |v\mathrm{Mov}|$, gdzie $|v\mathrm{Mov}|$ jest liczbą ruchów wychodzącyh z v.*

6.5 ω-regularne warunki wklęsłe

Stwierdzenie 6.10 *Załóżmy, że warunek W jest zadany przez DFA na słowach nieskończonych z warunkiem parzystości o s stanach i d rangach. Wówczas istnieje algorytm sprawdzający, czy W jest wklęsły (albo wypukły) w czasie $O(s^6 d^3 |C|)$.*

7 Sumy warunków półpozycyjnych

W Twierdzeniu 3.4 pokazaliśmy, że suma warunku półpozycyjnego i warunku Büchi jest warunkiem półpozycyjnym. Suma dowolnej rodziny warunków wklęsłych jest wklęsła, a zatem także półpozycyjna. Suma skończonej rodziny warunków monotonicznych jest monotoniczna, a zatem także monotoniczna. Fakty te prowadzą do następującej hipotezy.

Hipoteza 7.1 *Niech $\mathcal{W}$ będzie (skończoną, przeliczalną, ...) rodziną (skończenie) półpozycyjnych warunków zwycięstwa. Wówczas $\bigcup \mathcal{W}$ jest (skończenie) półpozycyjnym warunkiem zwycięstwa.*

Hipotezy tej nie udało się rozstrzygnąć w przypadku sum skończonych i przeliczalnych.

7.1 Sumy nieprzeliczalne

Twierdzenie 7.2 *Istnieje rodzina 2^ω warunków Büchi, których suma nie jest półpozycyjna.*

Istnieje rodzina 2^ω warunków co-Büchi, których suma nie jest półpozycyjna.

7.2 Warunki pozycyjno/zawieszalne

Definicja 7.3 Zawieszalną strategią wygrywającą *dla gracza X nazywamy parę (s, Σ), gdzie $s : \mathrm{Play}_X \to \mathrm{Mov}$ jest strategią, a $\Sigma \subseteq \mathrm{Play}_F$ zbiorem takim, że:*

- *s jest okreslone dla każdej rozgrywki skończonej π takiej, że $\mathrm{target}(\pi) \in \mathrm{Pos}_X \cap \mathrm{Win}_X$, gdzie Win_X jest zbiorem wygrywającym X;*
- *każda nieskończona rozgrywka π zgodna z s od pewnego momentu t ma prefik $s\pi$' dłuższy niż t taki, że $\pi' \in \Sigma$ i $\mathrm{target}(\pi') \in \mathrm{Win}_X$;*
- *Każda nieskończona rozgrywka π mająca nieskończenie wiele prefiksów w Σ jest zwycięska dla X.*

Intuicyjnie, jeśli w pewnym momencie X zdecyduje się grać zgodnie ze strategią s, to rozgrywka w pewnym momencie osiągnie element zbioru Σ; Σ jest zbiorem momentów, w których X może tymczasowo zawiesić użytwanie strategii s i wrócić do niej później bez ryzyka zepsucia swojego zwycięstwa, pod warunkiem, że rozgrywka nie opuściła zbioru zwycięskiego gracza X. Strategia zawieszalna jest strategią wygrywającą.

Definicja 7.4 *Warunek zwycięstwa W jest* **pozycyjno/zawieszalny***, jeśli dla każdej areny G w grze (G, W) Ewa ma pozycyjną strategię wygrywającą ze swojego zbioru zwycięskiego Win_E, Adam ma zawieszalną strategię wygrywającą ze swojego zbioru Win_A, i $\mathrm{Win}_E \cup \mathrm{Win}_A = \mathrm{Pos}$.*

Spośród omawianych w pracy warunków półpozycyjnych wiele jest w rzeczywistości pozycyjno-zawieszalnych.

Przykład 7.5 *Warunek co-Büchi WB'_S jest pozycyjno/zawieszalny.*

Twierdzenie 7.6 *Niech $C = [0, 1]$, $A = [0, 1/2)$. Warunek $WF(A) = \{w : \limsup P_n(w) < 1/2\}$ z Tw 5.6 jest pozycyjno/zawieszalny.*

Twierdzenie 7.7 *Warunki monotoniczne (Tw 6.5) są pozycyjno/zawieszalne.*

Twierdzenie 7.8 *Suma przeliczalnie wielu warunków pozycyjno/zawieszalnych jest również pozycyjno/zawieszalna.*

7.3 XPS: rozszerzona klasa warunków pozycyjno/zawieszalnych

Poniższa klasa warunków półpozycyjnych uogólnia warunki Rabina i pozycyjno/zawieszalne. Należą do niej wszystkie konkretne warunki półpozycyjne wymienione w tej pracy.

Definicja 7.9 *Rozszerzona klasa warunków pozycyjno/zawieszalnych* **(XPS)** *nad C to najmniejszy zbiór warunków zwycięstwa zawierający wszystkie warunki Büchi i pozycyjno/zawieszalne, zamknięta na skończoną sumę, i zamknięta na przecięcia z warunkami co-Büchi.*

Twierdzenie 7.10 *Warunki w klasie XPS są półpozycyjne.*

Dowód jest uogólnieniem dowodu półpozycyjnej determinacji warunków Rabina z [Gra04].

7.4 Łączenie warunków wklęsłych i monotonicznych

Twierdzenie 7.11 *Niech $W_1 \subseteq C^\omega$ będzie warunkiem wklęsłym, a A automatem monotonicznym. Wówczas suma $W = W_1 \cup WM_A$ jest warunkiem półpozycyjnym.*

Zarówno warunki wklęsłe, jak i monotoniczne są zamknięte na sumy skończone; otrzymujemy zatem, że Hipoteza 7.1 jest prawdziwa dla klasy warunków zamkniętej na sumy skończone i zawierającej wszystkie warunki monotoniczne i wklęsłe.

Dowód Analogiczny do dowodu Twierdzenia 4.4. ■

8 Poza strategiami pozycyjnymi

Jeśli niemożliwe jest wygranie gry przy użyciu strategii pozycyjnej, może się zdarzyć, że jest to możliwe przy użyciu strategii mającej słabszą własność. W tym rozdziale pokazujemy dwa rodzaje takich strategii: strategie z (małą) pamięcią i strategie uparte.

8.1 Strategie z pamięcią

Definicja 8.1 **Pamięcią** *dla gry (G, W) jest para $\mathcal{M} = (M, \mu)$, gdzie M określa możliwe stany pamięci, a $\mu : M \times \mathrm{Mov} \to M$ jest* **funkcją aktualizacji pamięci**. *Rozszerzamy μ w zwyczajowy sposób do $\mu : M \times \mathrm{Mov}^* \to M$.*

Strategia z pamięcią *$\mathcal{M}$ jest funkcją $\widehat{s} : \mathrm{Pos}_X \times M \to \mathrm{Mov}$. Mówimy, że $\widehat{s}$ jest* **wygrywająca** *z pozycji v i* **początkowego stanu pamięci** *m wtw strategia $\widehat{s}_m$ spełniająca $\widehat{s}_m(\pi) = \widehat{s}(\mathrm{target}(\pi), \mu(m, \pi))$ jest wygrywająca z v. Mówimy, że $\widehat{s}$ jest* **wygrywająca** *z pozycji v wtw jest wygrywająca z* **każdego** *początkowego stanu pamięci $m \in M$.*

Ta definicja różni się trochę od standardowej definicji z literatury, w której początkowy stan pamięci jest określony w strukturze pamięci.

Definicja 8.2 *Dla warunku zwycięstwa W i gracza X, niech* $\mathrm{mm}_X(W)$ *będzie najmniejszym n takim, że dla każdej areny G gracz X może wygrać w* $\mathrm{Win}_X(G)$ *używając strategii z pamięcią mocy co najwyżej n.*

8.2 Pamięć chromatyczna

Definicja 8.3 *Pamięć $\mathcal{M}$ nazywamy* **chromatyczną** *jeśli zależy jedynie od kolorów ruchów, tzn. istnieje funkcja $\widehat{\mu} : M \times C \to M$ taka, że $\mu(m,p) = m$ gdy* $\mathrm{rank}(p) = \epsilon$, *i* $\mu(m,p) = \widehat{\mu}(m, \mathrm{rank}(p))$ *w przeciwnym przypadku.*

Strategią z pamięcią chromatyczną $(M, \widehat{\mu})$ *nazywamy strategię z pamięcią (M, μ), gdzie μ jest pamięcią chromatyczną zadaną przez $\widehat{\mu}$.*

Stwierdzenie 8.4 *Niech W będzie ω-regularnym warunkiem zwycięstwa rozpoznawanym przez silnie spójny DFA z warunkiem parzystości* $A = (Q, q_I, \delta, \mathrm{rank})$. *Wówczas obaj gracze mają w swoich zbiorach wygrywających strategie z pamięcią chromatyczną $\mathcal{M} = (Q, \delta)$.*

Stwierdzenie 8.5 *Niech $W = WM_A$ będzie warunkiem monotonicznym, dla $A = (n, \delta)$. Wówczas Adam ma w swoim zbiorze wygrywającym strategię wygrywającą z pamięcią chromatyczną $\mathcal{M} = (\{0, \ldots, n-1\}, \widehat{\mu})$, gdzie* $\widehat{\mu}(k,c) = \delta(k,c) \bmod n$.

Definicja 8.6 *Dla warunku zwycięstwa W i gracza X, niech* $\mathrm{mm}^{\chi}_X(W)$ *będzie najmniejszym n, dla którego dla każdej areny G X może wygrać z* $\mathrm{Win}_X(G)$ *używając strategii z pamięcią* **chromatyczną** *rozmiaru n.*

Stwierdzenie 8.7 *Niech W będzie warunkiem zwycięstwa takim, że* $\mathrm{mm}^{\chi}_X(W) = n$. *Wówczas istnieje pamięć chromatyczna $\mathcal{M}_W$ rozmiaru n taka, że dla każdej areny G i pozycji początkowej v_0 w G X wygrywa w* $\mathrm{Win}_X(G)$ *używając $\mathcal{M}_W$.*

Stwierdzenie 8.8 *Niech W będzie warunkiem zwycięstwa nad C, a $\mathcal{M} = (M, \widehat{\mu})$ pamięcią chromatyczną.*

Niech $W \times \mathcal{M}$ będzie następującym warunkiem mzwycięstwa nad $C \times M$:

$$(c_0, m_0)(c_1, m_1)(c_2, m_2) \ldots \in W \times \mathcal{M}$$

wtw zachodzą następujące dwa warunki: $c_0 c_1 c_2 \ldots \in W$, i, dla prawie wszystkich k, $\widehat{\mu}(m_k, c_k) = m_{k+1}$.

Wówczas Ewa ma strategię wygrywającą używającą pamięci $\mathcal{M}$ dla każdej A-areny wtedy i tylko wtedy, gdy $W \times \mathcal{M}$ jest warunkiem półpozycyjnym.

Stwierdzenie 8.9 *Określamy* $\mathrm{mm}^{\chi,A}_E(W)$ *dokładnie jak* $\mathrm{mm}^{\chi}_E(W)$ *z tą różnicą, że ograniczamy się do A-aren. Wówczas, jeśli zachodzi Hipoteza 7.1, to* $\mathrm{mm}^{\chi,A}_E(W_1 \cup W_2) \leq \mathrm{mm}^{\chi,A}_E(W_1)\mathrm{mm}^{\chi,A}_E(W_2)$.

8.3 Wymagana pamięć chromatyczna

Definicja 8.10 *Mówimy, że arena G jest* **zgodna** *z pamięcią chromatyczną $\mathcal{M} = (M, \widehat{\mu})$ wtw istnieje funkcja $\phi : \mathrm{Pos} \to M$ taka, że dla każdego ruchu $v \xrightarrow{c} w$ w G mamy $\phi(w) = \widehat{\mu}(\phi(v), c)$.*

Twierdzenie 8.11 *Niech W będzie ω-regularnym warunkiem zwycięstwa, a $\mathcal{M}$ będzie pamięcią chromatyczną. Areną-świadkiem nazywamy arenę G, dla której w grze (G, W) z pewnej pozycji v_I Ewa ma strategię wygrywającą, ale nie strategię wygrywającą z pamięcią $\mathcal{M}$. Jeśli istnieje arena-świadek, to istnieje arena-świadek G taka, że G jest zgodna z $\mathcal{M}$, i Ewa ma tylko jedną pozycję w G, z której wychodzą tylko 2 ruchy.*

Dowód Niech G_0 będzie areną-świadkiem. Najpierw konstruujemy arenę-świadka G_1 zgodną z $\mathcal{M}$. Następnie upraszczamy ją tak samo, jak w Twierdzeniu 6.7. Ta konstrukcja zachowuje własność zgodności. ■

Twierdzenie 8.12 *Niech W będzie warunkiem zwycięstwa akceptowanym przez DFA z warunkiem parzystości. Wówczas $\mathrm{mm}_E^{\chi}(A)$ jest obliczalny w czasie pojedynczo wykładniczym.*

Dowód Sprawdzamy wszystkie pamięci chromatyczne aż do rozmiaru $|Q|$, aż znajdziemy taką, która działa. ■

8.4 Pamięć chromatyczna a chaotyczna

Powyższe własności dotyczyły ograniczeń na pamięć chromatyczną. Nasuwa się pytanie, czy coś tracimy na tym, że rozważamy tylko takie pamięci? Czy dałoby się zmniejszyć ilość potrzebnej pamięci, gdybyśmy mogli używać dowolnej pamięci; innymi słowy, czy $\mathrm{mm}_X^{\chi}(W) = \mathrm{mm}_X(W)$?

Mamy kilka przykładów, dla których równość zachodzi, aczkolwiek nie jest ona trywialna do udowodnienia.

Stwierdzenie 8.13 *Dla warunku zwycięstwa $WR = C^\omega - (C^* a^n)^\omega$ nad $C = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ mamy $\mathrm{mm}_A(WR) = \mathrm{mm}_A^{\chi}(WR) = n$.*

Stwierdzenie 8.14 *Niech $C = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Niech $W_{\mathbf{ab}} = W_{\mathbf{a}} \cap W_{\mathbf{b}}$, gdzie*

$$W_{\mathbf{a}} = C^\omega - (C^*(\mathbf{ab}^*)^A)^\omega \text{ i } W_{\mathbf{b}} = C^\omega - (C^*(\mathbf{ba}^*)^B)^\omega.$$

Wówczas $\mathrm{mm}_A(W_{\mathbf{ab}}) = \mathrm{mm}_A^{\chi}(W_{\mathbf{ab}}) = AB$.

8.5 Strategie uparte

Strategie pozycyjne zawsze używają tego samego ruchu w tej samej pozycji. Tak samo jest ze strategiami upartymi — jeśli pozycja Ewy jest odwiedzana wiele razy podczas rozgrywki, to zawsze używa ona tego samego ruchu. Jednak mają one przewagę nad strategiami pozycyjnymi. Strategia pozycyjna jest „zapisana" przed grą, czyli Adam może przewidzieć przyszłe ruchy Ewy i dostosować swoją strategię do nich. W przypadku strategii upartych jest inaczej — Ewa może udawać, że używa strategię pozycyjną, używając zawsze tego samego ruchu w danej pozycji, chociaż w rzeczywistości ruch ten wybrała dopiero w czasie pierwszej wizyty w tej pozycji. Strategie uparte zostały wprowadzone w [MT02].

Definicja 8.15 *Strategia wygrywająca s jest* uparta *wtw* $s(\pi_1)$ *jest równe* $s(\pi_1\pi_2)$ *wtw* $\mathrm{target}(\pi_1) = \mathrm{target}(\pi_1\pi_2)$.

Definicja 8.16 *Warunek zwycięstwa W nazywamy* **półupartym** *wtw gdy dla każdej areny i każdej pozycji początkowej albo Ewa ma upartą strategię wygrywającą, albo Adam ma strategię wygrywającą.*

Gdy ograniczamy klasę dozwolonych aren, dodajemy "skończenie" (dla aren skończonych) albo "A-", "B-", "C-" (odpowiednio dla A-aren, B-aren, C-aren, sekcja 2.5).

Istnieją przykłady warunków B-półupartych, które nie są A-półpozycyjne. Nie znamy przykładu warunku C-półupartego, który by nie był C-półpozycyjny.

Twierdzenie 8.17 *Niech D będzie jednym z typów determinacji z powyższej definicji. Niech W będzie warunkiem zwycięstwa. Niech G będzie D-areną taką, że (G, W) jest D-zdeterminowany. Niech s będzie D-strategią Ewy wygrywającą z u. Załóżmy, że istnieje rozgrywka z u zgodna z s, gdzie w pozycji $v \in \mathrm{Pos}_E$ używa ruchu p. Niech G' będzie areną powstałą z G przez usunięcie pozostałych ruchów z v. Wówczas (G', W) jest również D-zdeterminowany, i zbiory wygrywające w G i G' są jednakowe.*

Wniosek 8.18 *Warunek zwycięstwa jest skończenie półuparty wtw jest skończenie półpozycyjny.*

Twierdzenie 8.19 *Niech D będzie jednym z typów determinacji wprowadzonych w tej sekcji, lub ich typów dualnych. Jeśli W jest D-zdeterminowany, to $W \cup WB_S$ również.*

9 Zakończenie

W ramach zakończenia przedstawiamy najciekawsze problemy otwarte związane z naszymi wynikami.

Zamknięcie na sumę Chcielibyśmy wiedzieć więcej o własnościach domknięcia klasy warunków półpozycyjnych. W szczególności, pytamy się o własność domknięcia na sumę (skończoną lub przeliczalną) — hipoteza 7.1. Wiadomo, że nie ma własności domknięcia na sumę nieprzeliczalną. W wielu przypadkach wiadomo, że sumy warunków półpozycyjnych rzeczywiście są półpozycyjne. W szczególności własność taką mają wszystkie warunki z klasy XPS. Wszystkie skonstruowane tutaj konkretne półpozycyjne warunki zwycięstwa są w klasie xPS, także jest możliwe, że klasa ta zawiera wszystkie powody, dla których warunek zwycięstwa może być półpozycyjny.

Warunki ω-regularne Pokazaliśmy, że skończona półpozycyjna determinacja warunku ω-regularnego jest rozstrzygalna (Twierdzenie 6.8). Co z nieskończoną? W tym przypadku nie mamy algorytmu o udowodnionej poprawności; jest możliwe, że skończenie półpozycyjny warunek ω-regularny jest półpozycyjny, ale nie mamy na to dowodu. Algorytm podany w Twierdzeniu 6.8 jest wykładniczy; jest możliwe, że istnieje prostsza charakteryzacja, którą się daje sprawdzić w krótszym czasie.

Typy aren Czy warunek zwycięstwa B-półpozycyjny musi być C-półpozycyjny? Innymi słowy, czy dopuszczenie krawędzi bez koloru zmniejsza klasę warunków półpozycyjnych?

Pamięć chromatyczna Czy dla każdego warunku zwycięstwa W zachodzi $\mathrm{mm}^{\chi}_{X}(W) = \mathrm{mm}_X(W)$?

Warunki geometryczne Wyniki Sekcji 5 nie są pełne. Nie dla wszystkich zbiorów A wiemy, czy warunek $WF(A)$ jest (skończenie) półpozycyjny.

Rozszerzenia Można próbować uogólniać nasze wyniki. Zamiast warunków zwycięstwa możemy rozważać funkcje wypłaty, które zwycięstwo określają jakościowo (np. liczbą rzeczywistą) zamiast binarnie (Adam lub Ewa wygrywa). Możemy osłabić nasze założenie o niezależności warunku zwycięstwa od prefiksu. W pracy skoncentrowaliśmy się na wszystkich arenach lub na arenach skończonych; można rozważać też inne klasy, np. przydałoby się więcej badań na temat A-aren (kolorowanych w wierzchołkach). Innym możliwym uogólnieniem są gry stochastyczne, w których w niektórych pozycjach ruch zależy od przypadku, a graczy interesuje wygranie z jak największym prawdopodobieństwem.

Literatura

[BSW03] A. Bouquet, O. Serre, I. Walukiewicz, *Pushdown games with unboundedness and regular conditions*, Proc. of FSTTCS'03, LCNS, volume 2914, pages 88-99, 2003.

[CDT02] T. Cachat, J. Duparc, W. Thomas, *Pushdown games with a Σ_3 winning condition*. Proc. of CSL 2002, LCNS, volume 2471, pages 322-336, 2002.

[CN06] T. Colcombet, D. Niwiński, *On the positional determinacy of edge-labeled games.* Theor. Comput. Sci. 352 (2006), pages 190-196

[DJW97] S. Dziembowski, M. Jurdziński, I. Walukiewicz. *How much memory is needed to win infinite games?* Proc. IEEE, LICS, 1997.

[EJ91] E. A. Emerson and C. S. Jutla, *Tree automata, mu-calculus and determinacy.* Proceedings 32th Annual IEEE Symp. on Foundations of Comput. Sci., pages 368-377. IEEE Computer Society Press, 1991.

[EM79] A. Ehrenfeucht, J. Mycielski, *Positional strategies for mean payoff games.* IJGT, 8:109-113, 1979.

[Gim04] H. Gimbert, *Parity and Exploration Games on Infinite Graphs*. Proc. of CSL '04, volume 3210 de Lect. Notes Comp. Sci., pages 56-70.

[Gra04] E. Grädel, *Positional Determinacy of Infinite Games.* In STACS 2004, LNCS, volume 2996, pages 4-18, 2004.

[GTW02] E. Grädel, W. Thomas, and T. Wilke, eds., *Automata, Logics, and Infinite Games*. No. 2500 in Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 2002.

[GW06] E. Grädel, I. Walukiewicz, *Positional determinacy of games with infinitely many priorities.* Logical Methods in Computer Science, Vol. 2 (4:6) 2006, pages 1–22.

[GZ04] H. Gimbert, W. Zielonka, *When can you play positionally?* Proc. of MFCS '04, volume 3153 of Lect. Notes Comp. Sci., pages 686-697. Springer, 2004.

[GZ05] H. Gimbert, W. Zielonka, *Games Where You Can Play Optimally Without Any Memory*. CONCUR 2005, LNCS 3653, Springer 2005, pages 428–442.

[GZ07] H. Gimbert, W. Zielonka, *Perfect information stochastic priority games.* ICALP 2007, LNCS 4596, pages 850–861.

[Kla92] N. Klarlund, *Progress measures, immediate determinacy, and a subset construction for tree automata.* Proc. 7th IEEE Symp. on Logic in Computer Science, 1992.

[Mar75] D. A. Martin, *Borel determinacy.* Ann. Math., 102:363–371, 1975.

[McN93] R. McNaughton, *Infinite games played on finite graphs.* Annals of Pure and Applied Logic, 65:149–184, 1993.

[Mos91] A. W. Mostowski, *Games with forbidden positions.* Technical Report 78, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1991.

[MT02] J. Marcinkowski, T. Truderung. *Optimal Complexity Bounds for Positive LTL Games.* Proc. CSL 2002, LNCS 2471, pages 262–275.

[Wal96] I. Walukiewicz, *Pushdown processes: games and model checking,* CAV'96, LNCS 1102 pp. 62-75

[Zie98] W. Zielonka, *Infinite Games on Finitely Coloured Graphs with Applications to Automata on Infinite Trees.* Theor. Comp. Sci. 200(1-2): 135-183 (1998)