Autoreferat rozprawy doktorskiej

Umieszczanie zbiorów częściowo uporządkowanych w książce o minimalnej liczbie stron

Anna Beata Kwiatkowska

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Głównym przedmiotem pracy jest problem liczby stron, rozważany w dziedzinie zbiorów częściowo uporządkowanych. Ten problem został wprowadzony w dziedzinie grafów i pierwsze istotne wyniki uzyskali Bernhart i Kainen w pracy [2]. W dziedzinie zbiorów częściowo uporządkowanych, problem pojawił się na konferencji *Algorithms and Order* w Ottawie w 1988 roku i pierwsze wyniki w tym zakresie zostały uzyskane przez Nowakowskiego i Parkera [10] oraz przez Sysłę [12].

Problem liczby stron polega w ogólności na umieszczeniu grafu w książce o możliwie najmniejszej liczbie stron. Jeśli G jest grafem, to jego umieszczenie w książce jest definiowane przez dwa przyporządkowania. Wierzchołki grafu G zostają w wybranej kolejności (permutacji) umieszczone na grzbiecie książki, a krawędzie są przyporządkowywane stronom książki, każda jednej stronie i w taki sposób, że na żadnej stronie krawędzie nie przecinają się. Jeśli $(P, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to jego umieszczenie w książce polega na umieszczeniu w książce jego digrafu pokrycia (diagramu Hassego), przy czym elementy zbioru P na grzbiecie książki tworzą rozszerzenie liniowe zbioru $(P, \leq)$, a zatem łuki tego digrafu są skierowane ku górze. Oznaczamy przez $pn(G)$ liczbę stron grafu G, a przez $pn(P)$ liczbę stron częściowo uporządkowanego zbioru $(P, \leq)$.

Problem liczby stron w dziedzinie grafów, digrafów i zbiorów uporządkowanych jest rozważany również jako problem geometrii obliczeniowej (patrz np. [3]). Na tym gruncie uzyskano wiele istotnych i ważnych rezultatów odnoszących się do grafów i digrafów, jako obiektów geometrycznych, w tym również do digrafów pokrycia zbiorów częściowo uporządkowanych.

Problem liczby stron w dziedzinie zbiorów częściowo uporządkowanych wydaje się być znacznie trudniejszy niż problem liczby stron rozważany dla grafów. W pracy [2] scharakteryzowano grafy G, dla których liczba stron $pn(G)$ jest równa 1 i 2 i chociaż przypuszczano, że liczba stron grafów planarnych nie jest ograniczona, to jednak, jak udowodnił Yannakakis [13], wystarczą cztery strony do umieszczenia w książce jakiegokolwiek grafu planarnego, ale dla niektórych grafów cztery strony są niezbędne, czyli to oszacowanie jest istotne.

W dziedzinie zbiorów częściowo uporządkowanych, znana jest pełna charakteryzacja zbiorów, które można umieścić na jednej stronie – są to porządki drzewiaste. Natomiast brak jest pełnej charakteryzacji zbiorów, które wymagają tylko dwóch stron i nie jest znane żadne oszacowanie liczby stron potrzebnych do umieszczenia w książce dowolnego zbioru planarnego. Podano natomiast przykład zbioru, który wymaga czterech stron [8] i nadal przypuszcza się, że liczba stron planarnych zbiorów częściowo uporządkowanych nie jest ograniczona.

W pracy zajęto się tymi dwoma szczególnymi przypadkami problemu liczby stron dla zbiorów częściowo uporządkowanych:

— scharakteryzować zbiory, które mogą być umieszczone na dwóch stronach w książce,

— określić liczbę stron planarnych zbiorów uporządkowanych.

Dotychczasowe badania, na przykład dotyczące złożoności obliczeniowej [3] wskazują, że te dwa problemy mogą być trudne do rozwiązania w pełnej ogólności, dlatego zajęto się szczególnymi klasami zbiorów częściowo uporządkowanych.

Znaczna część pracy jest poświęcona zbiorom, które mają drzewiastą strukturę, dlatego w Rozdziale 4 krótko przedstawiono algorytm służący do umieszczania zbiorów drzewiastych na jednej stronie. Algorytm jest rekurencyjny i jego poprawność bazuje na (rekurencyjnej) własności elementów zbioru (Twierdzenie 17), dzięki której każda gałąź drzewa może być niezależnie umieszczona na jednej stronie. W dalszej części pracy (w Rozdziałach 5 i 6) ten algorytm tworzy ramy dla algorytmów umieszczania w książce zbiorów o bardziej rozbudowanej strukturze drzewiastej.

W Rozdziale 5 jest rozważana klasa zbiorów uporządkowanych, które również mają strukturę drzewiastą, ale każda składowa zbioru jest diamentem, a ogólniej – cyklem. Ta klasa zbiorów nie pojawiła się dotychczas w badaniach, ale mimo swej prostoty w budowie i drzewiastej strukturze bloków, będących cyklami, dwie strony nie wystarczają do umieszczenia tych zbiorów uporządkowanych w książce. Zbiór będący kombinacją cykli jest planarny. Udowodniono między innymi, że każda kombinacja diamentów (cykli) może być umieszczona w książce na trzech stronach (Twierdzenie 18), jednocześnie przedstawiono przykład takiej kombinacji, której nie można umieścić na dwóch stronach (Rysunek 5.7 i Lemat 7). Kombinacja diamentów jest więc przykładem rodziny planarnych zbiorów uporządkowanych o drzewiastej strukturze, dla umieszczenia których w książce nie wystarczają dwie strony.

Najrozleglejszą część pracy stanowią rozważania w Rozdziałach 6 i 7 dotyczące N-wolnych zbiorów uporządkowanych, [11]. Dla rodziny zbiorów N-wolnych otrzymano wcześniej wiele istotnych i ciekawych wyników, między innymi w przypadku problemów, które polegają na znalezieniu rozszerzenia liniowego o pewnej własności. Jednym z takich problemów jest problem skoków (patrz Punkt 3.3, gdzie zamieszczono dolne oszacowanie liczby stron przez wyrażenie zależne od liczby skoków zbioru, Twierdzenie 11). Rozważania bazują na podejściu teorio-grafowym, w którym digrafy pokrycia N-wolnych zbiorów uporządkowanych są interpretowane jako digrafy łukowe. Zbiór częściowo uporządkowany $(P, \leq)$ jest N-wolny, jeśli jego digraf pokrycia, czyli diagram Hassego, nie zawiera poddigrafu indukowanego, izomorficznego z digrafem N na Rysunku 6.1.

Na początku Rozdziału 6 jest omówiona struktura N-wolnych digrafów łukowych i charakteryzacje takich digrafów (Twierdzenie 20), z których korzysta się w dalszej części pracy. Wśród wielu charakteryzacji digrafów łukowych najbardziej pożyteczny okazał się warunek, który ustanawia, że digraf D jest digrafem łukowym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwa równoliczne rozkłady zbioru jego wierzchołków takie, że zbiór łuków digrafu D może być rozłożony na sumę zbiorów łuków digrafów dwudzielnych pełnych.

W Podrozdziale 6.2 podano wzór na liczbę stron dla N-wolnych zbiorów uporządkowanych o strukturze drzewiastej (Twierdzenie 22). Następnie podano oszacowanie liczby stron dla dowolnego zbioru N-wolnego (Twierdzenie 23), uwzględniające strukturę zbiorów N-wolnych oraz liczbę cykli niezależnych w (di)grafie pokrycia. Następnie, podano algorytm służący do umieszczania w książce dowolnych zbiorów uporządkowanych, który w pierwszym kroku sprowadza dowolny zbiór uporządkowany do zbioru N-wolnego, a następnie korzysta z algorytmu dla zbiorów N-wolnych.

Rozważania w Rozdziału 7 skupiają się na planarnych zbiorach uporządkowanych. Podano warunki konieczne o charakterze lokalnym na to, aby N-wolny zbiór uporządkowany był planarny (Twierdzenie 24) – istnienie warunków koniecznych i dostatecznych bowiem jest mało prawdopodobne, gdyż problem pełnej charakteryzacji takich zbiorów jest NP-zupełny. Z tych warunków wywnioskowano, że planarny N-wolny zbiór uporządkowany o strukturze drzewiastej może być umieszczony w książce na dwóch stronach.

Najważniejszym wynikiem pracy jest dowód, że planarny N-wolny zbiór uporządkowany, reprezentowany przez swój do góry płaski digraf pokrycia może być umieszczony w książce na dwóch stronach. Dowód ma postać algorytmu, bazującego na strukturalnej analizie N-wolnych zbiorów uporządkowanych, z której wynika struktura połączeń między poddigrafami dwudzielnymi pełnymi, na które można zdekomponować digraf pokrycia takiego zbioru oraz z płaskiej realizacji tych poddigrafów. Dowód (algorytm) składa się z kilku etapów:

— sprawdzenie warunków koniecznych na to, aby dany zbiór uporządkowany był N-wolny i planarny;
— redukcja składowych wiszących i rozmiarów poddigrafów dwudzielnych pełnych;
— umieszczenie na dwóch stronach w książce digrafu zredukowanego;
— uzupełnienie otrzymanego włożenia digrafu zredukowanego do włożenia oryginalnego (przed redukcją) digrafu pokrycia.

Algorytm znajduje kolejność wierzchołków digrafu pokrycia na grzbiecie książki, będącą rozszerzeniem liniowym zbioru uporządkowanego, dla którego digraf zredukowany jest digrafem pokrycia. Ta kolejność jest znajdowana podczas przejścia płaskiej reprezentacji zredukowanego digrafu pokrycia, w którym wykorzystuje się tę reprezentację digrafu (wierzchołki, łuki i ściany są odwiedzane w kolejności od prawej) oraz to, że digraf jest acykliczny i do góry płaski (wierzchołki są odwiedzane w kolejności topologicznego uporządkowania w digrafie pokrycia). Umieszczenie digrafu pokrycia na dwóch stronach jest następnie uzupełniane, także na tych dwóch stronach, fragmentami oryginalnego digrafu pokrycia, wyredukowanymi na początku całego postępowania.

W algorytmie, łuki digrafu zredukowanego i oryginalnego są przydzielane do jednej ze stron w książce, a następnie dowodzi się, że nie przecinają się na żadnej z nich.

Przedstawione postępowanie ma złożoność wielomianową.

W tej pracy, w rozważaniach dotyczących zbiorów uporządkowanych, istotnie korzysta się z własności (di)grafów powiązanych z tymi zbiorami oraz z technik dowodzenia i konstrukcji algorytmicznych pochodzących z teorii grafów.

Niektóre wyniki zamieszczone w pracy były prezentowane na kilku konferencjach i ich opis znalazł się w materiałach konferencyjnych [4], [6], [7].

Podziękowania

Szczególne podziękowania za pomoc przy tworzeniu tej pracy kieruję do mojego promotora, prof. dra hab. Macieja M. Sysły.

Bibliografia

[1] Alzohairi M., N-free planar ordered sets that contain no covering four-cycle have page number two, *Arab. J. Sci. Eng.* **31**(2006), 1-8.

[2] Bernhart F., Kainen P.C., The book thickness of a graph, *J. Combin. Theory* **B 27**(1979), 320-321.

[3] Garg A., Tamassia R., Upward planarity testing, *Order* **12**(1995), 109-133.

[4] Kwiatkowska A.B., Syslo M.M., On Posets of Page Number 2, *Electronic Notes In Discrete Mathemtics* **22**(2005), 549-552; Materiały konferencji 7th International Colloquium on Graph Theory, Giens, Francja, 12-16.09.2005.

[5] Kwiatkowska A.B., Syslo M.M., *On page number of some planar posets*, Manuskrypt, 2005.

[6] Kwiatkowska A.B., Sysło M.M, On Page Number of N-free Posets, *Electronic Notes In Discrete Mathemtics* **24**(2006), 243-249; Materiały konferencji 5th Cracow Conference on Graph Theory, Ustroń, 11-15.09.2006.

[7] Kwiatkowska A.B., Sysło M.M, Book embedding of N-free posets, Materiały konferencji EuroCG 2012, Assisi, Włochy, 19-21.03.2012.

[8] Le Tu Quoc Hung, A planar poset which requires four pages, *Ars Combin.* **35**(1993), 291-302.

[9] Mchedlidze T., Symvonis A.. Crossing-optimal acyclic hamiltonian path completion and its application to upward topological book embeddings, in: Das S., Uehara R. (eds.), *WALCOM 2009*, LNCS 5431, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009, 250–261.

[10] Nowakowski R., Parker A., Ordered sets, pagenumbers and planarity, *Order* **6**(1989), 209-218.

[11] Rival I., Stories about order and the letter N, in: *Combinatorics and Odered Sets*, Contemp. Math. 57, AMS, 1986, 263-285.

[12] Syslo M.M., Bounds to the page number of partially ordered sets, in: M. Nagel (ed.), *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, LNCS **411**(1990), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 181-195.

[13] Yannakakis M., Four pages are necessary and sufficient for planar graphs, in: *Proceedings of the 18th ACM Symposium on Theory of Computing*, 1986, 104-108; see also Embedding planar graphs in four pages, *J. Computer and System Sciences* **38**(1989) 36-67.