AUTOREFERAT

ZASTOSOWANIA PRZESTRZENI ORLICZA W RÓWNANIACH RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

ANETA WRÓBLEWSKA-KAMIŃSKA

1. Streszczenie

Naszym celem jest zbadanie matematycznych własności pewnych układów nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, dla których człon nielinowy jest monotoniczny a jego warunki wzrostu i koercytywności zadane są za pomocą pewnej ogólnej funkcji wypukłej, definiującej przestrzenie Orlicza.

Naszym pierwszym rezultatem jest istnienie słabych rozwiązań dla niestacjonarnego przepływu nieściśliwej, niejednorodnej (gęstość nie jest stała) cieczy nienewtonowskiej z niestandardowymi warunkami wzrostu dla tensora naprężeń. Motywacją do badań jest problem anizotropowego zachowania płynów charakteryzujących się wzrostem lepkości wraz ze wzrostem wartości naprężenia. Jesteśmy zainteresowani reologią ogólniejszą niż typu potęgowego, dlatego zadajemy warunki wzrostu za pomocą wypukłej funkcji zależnej od x i formułujemy problem w uogólnionych przestrzeniach Orlicza (Musielaka-Orlicza).

Jako kolejny rezultat przedstawiamy dowód istnienia słabych rozwiązań dla problemu ruchu jednego lub kilku niejednorodnych ciał sztywnych zanurzonych w jednorodnej nieściśliwej cieczy nienewtonowskiej. Nieliniowy człon lepkościowy w równaniu jest opisany przy wykorzystaniu ogólnej funkcji wypukłej definiującej izotropowe przestrzenie Orlicza. Główna część dowodu polega na wykazaniu zbieżności członu nielinowego, co osiągamy za pomocą metody lokalnego ciśnienia.
Trzecia część badań dotyczy istnienia słabych rozwiązań dla uogólnionego systemu Stokesa z nielinowym członem o warunkach wzrostu opisanych przez anizotropową $\mathcal{N}$–funkcję. Nasza uwaga skierowana jest na osłabienie założeń na $\mathcal{N}$–funkcję, ponieważ chcielibyśmy uwzględnić w naszych badaniach płyny nienewtonowskie, których lepkość maleje pod wpływem ścinania i których reologia zbliżona jest do liniowej. Ponadto, w celu przeprowadzenia dowodu, wyprowadzamy nierówność typu Korna-Sobolewa dla przestrzeni Orlicza.

W ostatniej części pracy studiujemy ogólną klasę nieliniowych problemów eliptycznych, gdzie dana prawa strona należy jedynie do przestrzeni L^1. Co więcej, pole wektorowe jest monotoniczne względem drugiej zmiennej i spełnia niestandardowe warunki wzrostu zadane przez, zależną od x, funkcję wypukłą. Tak postawiony problem uogólnia zarówno rozważania dla zagadnienia sformułowanego w przestrzeni

$L^{p(x)}$ jak i w klasycznych przestrzeniach Orlicza. Wykorzystując metodę obcięć oraz "trik Minty'iego" uogólniony dla przestrzeni nierefleksywnych udowadniamy istnienie rozwiązań zrenormalizowanych z danymi w L^1. Przy dodatkowym założeniu ścisłej monotoniczności wykazujemy również jednoznaczność rozwiązań. Podajemy także warunki gwarantujące, że rozwiązanie zrenormalizowane jest słabym rozwiązaniem problemu.

2. Opis problemów, cele i motywacje.

Naszym głównym celem jest rozwinięcie matematycznej teorii dla mechaniki płynów oraz teorii rozwiązań zrenormalizowanych dla abstrakcyjnych równań eliptycznych. Nasze rozważania koncentrują się głównie na istnieniu różnych typów rozwiązań dla nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych.

Podjęte badania dotyczą dość ogólnego przypadku warunku wzrostu dla członu najwyższego rzędu. Takie sformułowanie wymusza zastosowanie ogólnych przestrzeni funkcyjnych, problemy będą zatem rozważane w przestrzeniach Orlicza i Musielaka-Orlicza. Poziom uogólnienia ma tutaj zasadnicze znaczenie przy wyborze stosowanych metod. Będziemy studiować zatem różne przypadki funkcji definiujących przestrzenie: izotropowe, anizotropowe, jednorodne i niejednorodne przestrzennie. Jest to naturalne uogólnienie wielu badań nad przestrzeniami Lebesgue'a, uogólnionymi przestrzeniami Lebesgue'a i przestrzeniami Sobolewa, które mogą być ujęte jako szczególny przypadek naszego podejścia. Razem z zaawansowaniem metod dla równań różniczkowych cząstkowych rozwiniemy też teorię przestrzeni funkcyjnych. Struktury dla przestrzeni Sobolewa-Orlicza są dobrze rozwinięte jedynie dla klasycznego przypadku, tj. dla tych zdefiniowanych przez $\mathcal{N}$–funkcję (ciągła, wypukła, nieujemna, o ponadliniowym wzroście) zależącą tylko od wartości bezwzględnej argumentu i niezależną od punktu w przestrzeni i na którą zazwyczaj nakłada się dodatkowe założenia na wzrost (tzw. warunek Δ_2, patrz Rozdział 3) jak również na $\mathcal{N}$–funkcję do niej sprzężoną w sensie Fenchela-Younga.

Nasze badania nad przestrzeniami mogą służyć również za bazę w innych dziedzinach wykorzystujących przestrzenie Orlicza jak: nierówności wariacyjne, homogenizacja równań eliptycznych i parabolicznych oraz wiele innych. Można wyróżnić następujące warianty $\mathcal{N}$–funkcji:

- izotropowa $\mathcal{N}$–funkcja, tj. $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
- anizotropowa $\mathcal{N}$–funkcja, tzn. zależna od pełnego wektora $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$,
- niejednorodna w przestrzeni, tj. zależna od x $\mathcal{N}$–funkcja $M : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$,
- szybko lub wolno rosnąca $\mathcal{N}$–funkcja (brak warunku Δ_2 na funkcję M lub do niej sprzężoną - M^*).

Rozszerzenie narzędzi analitycznych w tym kierunku jest nie tylko korzystne dla tematów poruszanych w pracy, ale również ma znaczenie dla innych problemów wspomnianych powyżej, gdzie zjawisko anizotropowości i/lub niejednorodności w przestrzeni może być obiektem badań. Ważne jest podkreślenie faktu, że gdy rozważamy $\mathcal{N}$–funkcje, które są izotropowe, jednorodne oraz M jak i M^* spełniają warunek Δ_2, to większość własności, nawet takich jak ciągłość singularnych operatorów Riesza czy twierdzenia interpolacyjne Marcinkiewicza, działają w sposób analogiczny jak dla przestrzeni L^p, patrz [1].

Rozważamy szeroką klasę problemów opisujących przepływ cieczy nienewtonowskich o niestandardowej reologii. W szczególności chcielibyśmy zbadać efekt zmieniającej się lepkości pod wpływem naprężeń, pola elektrycznego lub magnetycznego. To wymusza na nas wykorzystanie niejednorodnych anizotropowych przestrzeni Orlicza. Nasze badania koncentrują się na istnieniu i na własnościach rozwiązań.

Istotna część naszych rozważań motywowana jest efektem znacznego wzrostu lepkości substancji w odpowiedzi na wzrost szybkości ścinania. Z tego powodu chcemy rozważać procesy, gdzie wzrost tensora naprężeń jest szybszy niż wielomianowy. W konsekwencji $\mathcal{N}$–funkcja definiująca przestrzeń nie spełnia warunku Δ_2.

W pracy doktorskiej rozważamy istnienie słabych rozwiązań dla czterech problemów. Na początku nasza uwaga skupia się na nieściśliwych cieczach nienewtonowskich o niejednorodnej gęstości. Uwzględniamy, że tensor naprężeń może mieć różny wzrost w różnych kierunkach tensora ścinania i może zależeć od pewnego zewnętrznego pola i gęstości cieczy.

Drugi problem dotyczy ruchu ciał sztywnych zanurzonych w cieczy o rosnącej pod wpływem ścinania lepkości. Ciała posiadają strukturę niejednorodną i są zanurzone w jednorodnej nieściśliwej cieczy. Aby uniknąć kolizji między ciałami i ciał z brzegiem obszaru wystarczy założyć odpowiednio wysoką całkowalność dla tensora ścinania (przynajmniej w L^4). Naturalne zatem wydaje się rozważanie $\mathcal{N}$–funkcji o wysokich wzrostach.

Obecność członu konwekcyjnego w obu powyższych problemach pozwala jedynie na rozważanie płynów o lepkości rosnącej pod wpływem ścinania. Jeśli założymy, że przepływ jest wolny, wtedy pominięcie członu konwekcyjnego jest uzasadnione. Możemy zatem rozpatrywać również płyny o malejącej lepkości opisane przez uogólniony system Stokesa. Wzrost lepkościowego tensora naprężeń może być bliski linowemu i dany przez anizotropową $\mathcal{N}$–funkcję, dla której funkcja sprzężona nie spełnia warunku Δ_2.

Na końcu koncentrujemy się na ogólnej klasie równań eliptycznych z daną prawą stroną całkowalną jedynie w przestrzeni L^1. Rozwijamy teorię rozwiązań zrenormalizowanych na przestrzenie Orlicza zadane prze niejednorodną anizotropową $\mathcal{N}$–funkcję bez górnego ograniczenia typu wielomianowego.

Aby umożliwić czytelnikowi trochę głębszy wgląd w osiągnięte rezultaty zaprezentujemy poniżej krótki przegląd rozważanych problemów.

W głównej części pracy zajmujemy się problemami związanymi z przepływem cieczy nienewtonowskich o niestandardowej reologii. Rozważamy materiały, których własności takie jak lepkość mogą nie być stałe. W naszych badaniach bierzemy pod uwagę fakt, że mogą się one zmieniać w znaczący sposób pod wpływem takich czynników jak: ścinanie, pole magnetyczne lub elektryczne. Koncentrujemy się na istnieniu i własnościach rozwiązań dla układów równań wywodzących się z mechaniki płynów nieściśliwych. Mogą one przyjmować następującą formę:

$$
\begin{aligned}
\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho \boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{w} \quad (0,T)\times\Omega,\\
\partial_t(\varrho\boldsymbol{u}) + \operatorname{div}_x(\varrho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) - \operatorname{div}_x \mathbf{S}(\mathbf{D}\boldsymbol{u}) + \nabla_x p = \varrho\boldsymbol{f} \quad \text{w} \quad (0,T)\times\Omega,\\
\operatorname{div}_x \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{w} \quad (0,T)\times\Omega,
\end{aligned} \tag{1}
$$

gdzie $\boldsymbol{u}$ opisuje pole prędkości płynu, ϱ - jego gęstość, p to ciśnienie, Ω jest ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^d$ o wystarczająco gładkim brzegu, $T < \infty$, $\boldsymbol{f}$ to dane siły zewnętrzne, $\mathbf{D}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\nabla_x\boldsymbol{u} + \nabla_x^T\boldsymbol{u})$ jest symetryczną częścią gradientu pola prędkości. Pierwsze równanie to równanie ciągłości, drugie – równanie momentu, ostatnie to warunek nieściśliwości. Zakładamy warunek braku poślizgu na brzegu (zerowy warunek Dirichleta).

W celu zamknięcia systemu musimy dołożyć relację konstytutywną, reologią, opisującą związek pomiędzy $\mathbf{S}$ a $\mathbf{D}\boldsymbol{u}$. W naszych rozważaniach nie chcemy zakładać, że $\mathbf{S}$ ma jedynie wielomianową strukturę, tj. $\mathbf{S} \approx (\kappa + |\mathbf{D}\boldsymbol{u}|)^{p-2}\mathbf{D}\boldsymbol{u}$ lub $\mathbf{S} \approx (\kappa + |\mathbf{D}\boldsymbol{u}|^2)^{(p-2)/2}\mathbf{D}\boldsymbol{u}$ (gdzie $\kappa > 0$). Standardowe warunki wzrostu tensora naprężeń (wielomianowy wzrost), patrz np. [7, 18]

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{S}(\mathbf{D}\boldsymbol{u})| \leqslant c(1+|\mathbf{D}\boldsymbol{u}|^2)^{(p-2)/2}|\mathbf{D}\boldsymbol{u}|,\\
\mathbf{S}(\mathbf{D}\boldsymbol{u}) : \mathbf{D}\boldsymbol{u} \geqslant c(1+|\mathbf{D}\boldsymbol{u}|^2)^{(p-2)/2}|\mathbf{D}\boldsymbol{u}|^2,
\end{aligned} \tag{2}
$$

mogą okazać się niewystarczające aby opisać niestandardowe zachowania płynu. Motywowani zjawiskiem znacznego wzrostu lepkości pod wpływem ścinania chcielibyśmy opisać substancje, dla których wzrost ten jest wyższy niż wielomianowy oraz może być różny w różnych kierunkach tensora ścinania. Chcielibyśmy uwzględnić również wzrosty zbliżone do liniowego. Lepkość cieczy nie jest zatem stała, ale może zależeć od pełnego gradientu symetrycznego pola prędkości. Aby opisać warunki wzrostu tensora naprężeń wykorzystujemy dość ogólną funkcję wypukłą, zwaną $\mathcal{N}$–funkcją, podobnie jak w [10, 11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25]. Jesteśmy wtedy w stanie uwzględnić efekt rosnącej lub malejącej lepkości płynu pod wpływem wzrostu szybkości ścinania. Warunki wzrostu/koercytywności przyjmują następującą formę:

$$
\mathbf{S}(x,\mathbf{D}\boldsymbol{u}) : \mathbf{D}\boldsymbol{u} \geqslant c\left\{M(x,\mathbf{D}\boldsymbol{u}) + M^*(x,\mathbf{S}(x,\mathbf{D}\boldsymbol{u}))\right\}, \tag{3}
$$

gdzie M jest $\mathcal{N}$–funkcją.

W klasycznym przypadku, tzn. z wielomianowymi warunkami wzrostu, odpowiednimi przestrzeniami funkcyjnymi są przestrzenie Lebesgue'a i Sobolewa. W naszych rozważaniach warunek (3) wymusza na nas wykorzystanie przestrzeni Orlicza i Sobolewa-Orlicza, zdefiniowanych przez $\mathcal{N}$–funkcję. Pragniemy podkreślić tutaj, że nie chcemy zakładać, że M spełnia tzw. warunek Δ_2. Z tego powodu tracimy wiele dobrych własności przestrzeni funkcyjnych. Między innymi nasze przestrzenie mogą nie być refleksywne ani ośrodkowe, funkcje gładkie mogą nie być w nich gęste względem normy. Brak założenia warunku Δ_2 powoduje, że dowody są bardziej wymagające oraz wymuszają wykorzystanie metod innych niż te znane z klasycznego podejścia.

W pierwszej części pracy rozważamy równianie ewolucyjne dla przepływu nieściśliwej cieczy nienewtonowskiej, które może być zapisane w postaci układu (1). Dowód istnienia słabych rozwiązań rozpoczynamy od aproksymacji Galerkina i wykazania istnienia rozwiązania aproksymacyjnego. Główną trudnością jest wykazanie odpowiedniej zbieżności w członie nieliniowym. Wynik osiągniemy wykorzystując metody monotoniczności zaadaptowane do przestrzeni nierefleksywnych [22, 11] oraz metody skompensowanej zwartości. Chcemy tutaj rozszerzyć dostępną teorię istnienia na klasę równań z nielinowym członem o wzroście bardziej ogólnych niż wielomianowy poprzez sformułowanie problemu w niejednorodnych anizotropowych przestrzeniach Orlicza jak w [10, 11, 22]. Ponadto, uzupełniamy teorię, którą można tamże znaleźć poprzez uwzględnienie równania ciągłości $(6)_1$ w rozważanym systemie oraz uzależnienie $\mathbf{S}$ od gęstości płynu (nie zakładamy, że gęstość płynu jest stała). Dodatkowo uzyskujemy wyższą regularność względem zmiennej czasowej niż w [7, 6, 10, 11], tj. w przestrzeni Nikolskiego. Rezultat ten sformułowany jest w Rozdziale 4.1, oparty jest o pracę Wróblewskiej-Kamińskiej [23], a częściowe wcześniejsze wyniki można znaleźć w [11, 14, 22].

Wykorzystując wynik, o którym wspomnieliśmy wyżej, rozważamy problem ruchu jednego lub kilku niejednorodnych ciał sztywnych zanurzonych w jednorodnej cieczy nienewtonowskiej znajdującej się w ograniczonym obszarze. Przepływ płynu może być zatem zadany układem typu (1) uzupełnionym o równanie opisujące ruch ciał sztywnych. Używamy przy tym faktu, udowodnionego prze Starowoitowa, że dwa ciała nie zderzają się, jeśli są zanurzone w cieczy, której lepkość znacznie rośnie wraz ze wzrostem prędkości ścinania. Strategia by rozwiązać problem, w pierwszym kroku, polega na zastąpieniu ciał sztywnych cieczą o wysokiej lepkości dążącej do nieskończoności w granicy. Idea ta była rozwinięta przez Hoffmana [16] oraz San Marina i innych [20]. Ponieważ rozważamy ciecze nieściśliwe, istnienie i oszacowania na ciśnienie nie są kluczowe w rozważaniach istnienia słabych rozwiązań. Wynika to z faktu, że w słabym sformułowaniu funkcja ciśnienia znika. W naszym przypadku lokalizujemy problem zbieżności członu nielinowego jedynie w części "płynnej" układu, zatem musimy przedstawić lokalne oszacowania na funkcję ciśnienia, dokładniej – na jej odpowiednie elementy składowe. W tym celu rozkładamy funkcję ciśnienia na dwie części. Wykorzystujemy przy tym transformatę Riesza, która w ogólności nie jest ciągła z przestrzeni Orlicza w nią samą (co zachodzi, gdy $\mathcal{N}$–funkcja i funkcja do niej sprzężona spełniają warunek Δ_2). Przestrzeń, w której znajduje się regularna część ciśnienia jest większa niż ta zawierająca nieliniowy człon lepkościowy. Co więcej nie jesteśmy w stanie użyć twierdzeń typu Maricnkiewicza ani teorii interpolacji w tej samej wersji co dla przestrzeni Lebesgue'a czy Sobolewa. Z tego powodu przejście do granicy od problemu aproksymacyjnego w członach związanych z regularną częścią ciśnienia wymaga subtelniejszego podejścia niż w [8]. Ta część badań oparta jest o prace [24, 25] Wróblewskiej-Kamińskiej a rezultat sformułowany jest w Rozdziale 4.2.

W dwóch powyższych problemach obecność członu konwekcyjnego $\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})$ wymusza, przy wykorzystywanych przez nas metodach, przyjęcie co najmniej wielomianowego wzrostu tensora naprężeń $\mathbf{S}$ względem $\mathbf{D}\boldsymbol{u}$. Z tym założeniem jesteśmy w stanie rozważać jedynie płyny typu STF. Zmotywowało nas to do podjęcia badań nad uogólnionym systemem Stokesa:

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{u} - \operatorname{div}_x \mathbf{S}(\mathbf{D}\boldsymbol{u}) + \nabla_x p = \boldsymbol{f} \quad &\text{w } (0,T) \times \Omega, \\ \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} = 0 \quad &\text{w } (0,T) \times \Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

W szczególności powyższy problem pozwala nam uwzględnić w badaniach ciecze, których lepkość maleje ze wzrostem prędkości ścinania. Zauważmy, że jeśli przepływ jest powolny a gęstość stała, wtedy system dany przez (1) redukuje się do (4). Problem istnienia słabych rozwiązań postawiony jest w anizotropowych przestrzeniach Orlicza. W dowodzie potrzebujemy wykazać nierówność typu Korna-Sobolewa dla anizotropowych przestrzeni Orlicza bez założenia warunku Δ_2. Pokazujemy również, że domknięcie funkcji gładkich o zwartym nośniku względem dwóch topologii jest równoważne, a dokładniej zbieżność symetrycznych gradientów w topologii modularnej i słabej z gwiazdką w przestrzeni Orlicza. Możemy wtedy przedstawić formułę na całkowanie przez części. Istnienie słabych rozwiązań dla tego problemu jest postawione w Twierdzeniu 4.4. Rezultat oparty jest na pracy Gwiazdy, Świerczewskiej-Gwiazdy i Wróblewskiej-Kamińskiej [12]. Ponadto problem zbieżności pełnej dyskretyzacji quasi-linowego równania parabolicznego w izotropowych i anizotropowych przestrzeniach Orlicza jest rozważany przez Emmrich'a i Wróblewską-Kamińską w [4].

Ostatnia część badań dotyczy teorii rozwiązań zrenormalizowanych dla problemów eliptycznych związanych z inkluzją różniczkową

$$\beta(\cdot, u) - \operatorname{div}\left(\boldsymbol{a}(\cdot, \nabla u) + \boldsymbol{F}(u)\right) \ni f,$$

gdzie $f \in L^1(\Omega)$. Pole wektorowe $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$ jest monotoniczne względem drugiej współrzędnej i spełnia niestandardowe warunki wzrostu opisane przez zależną od x anizotropową funkcję wypukłą. Dokładniej $\boldsymbol{a}$ spełnia:

$$\boldsymbol{a}(x,\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} \geqslant c_a\{M^*(x, \boldsymbol{a}(x,\boldsymbol{\xi})) + M(x,\boldsymbol{\xi})\} - a_0(x) \tag{5}$$

dla p.w. $x \in \Omega$ i wszystkich $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, gdzie a_0 jest nieujemną funkcją całkowalną. Powyższy warunek uogólnia problemy tego typu postawione w przestrzeniach Lebesgue'a lub klasycznych (izotropowych) przestrzeniach Orlicza.

Koncepcja rozwiązań zrenormalizowanych pozwala poradzić sobie z problemem "dobrego postawienia" przy bardzo ogólnych założeniach, które nie zapewniają istnienia słabych rozwiązań. Notacja ta została wprowadzona przez P.-L. Lionsa i DiPernę w [2] dla równania Boltzmanna. Idea ta została wykorzystana również dla modeli mechaniki cieczy przez P.-L. Lions [17] i gra ważną rolę w teorii istnienia oraz regularności dla systemów uwzględniających przepływy zależne od gęstości.

Badania nasze podjęte są dla przypadku dość ogólnych warunków wzrostu dla nielinowego członu najwyższego rzędu. Rezultat osiągnięty w pracy rozszerza teorię istnienia dla równań z daną prawą stroną jedynie w przestrzeni L^1. Zgodnie z naszą wiedzą wynik jest bardziej ogólny niż te dotychczas dostępne. Jesteśmy w stanie uwzględnić szerszą klasę operatorów poprzez postawienie problemu w anizotropowych niejednorodnych przestrzeniach Orlicza. Jest to naturalne uogólnienie ostatnich badań nad przestrzeniami $L^{p(x)}$, które mogą być szczególnym przypadkiem przyjętej przez nas struktury. Zastosowanie metod związanych z rozwiązaniami zrenormlizowanymi jest kluczowe, ze względu na człon z przestrzeni L^1 w równaniu. Główn rezultat tej części pracy to istnienie rozwiązania zrenormalizowanego dla (5) dla danego f z L^1, jednoznaczność tego rozwiązania przy założeniu ścisłej monotoniczności wykresu β oraz istnienie słabych rozwiązań przy dodatkowych założeniach na f. Ta część pracy oparta jest na wspólnym artykule Gwiazdy, Wittbold, Wróblewskiej-Kamińskiej i Zimmermann [15], a rezultat dokładnie sformułowany jest w Rozdziale 4.4.

Po dokładny opis problemów, opis istniejącego stanu wiedzy oraz motywacji odsyłamy zainteresowane osoby odpowiednio do Rozdziałów IV, V, VI, VII pracy doktorskiej Wróblewskiej-Kamińskiej [21].

Chcielibyśmy jeszcze krótko wspomnieć o niektórych dobrze znanych już wynikach dotyczących wykorzystania przestrzeni Orlicza. Pragniemy tutaj przywołać analityczny wynik dotyczący abstrakcyjnego równania parabolicznego w nieośrodkowych przestrzeniach Orlicza z zerowym warunkiem brzegowym Dirichleta. Donaldson [3] zakłada, że nielinowy operator drugiego rzędu jest eliptyczny, monotoniczny w postaci dywergencyjnej. Warunki wzrostu i koercytywności są bardziej ogólne niż w L^p, tj. przy wykorzystaniu $\mathcal{N}$–funkcji M, o której zakłada się, że $\xi^2 << M(|\xi|)$ (tzn. ξ^2 rośnie istotnie wolniej niż $M(|\xi|)$) oraz że M^* spełnia warunek Δ_2. Przy takich założeniach autor wykazał istnienie rozwiązań. Część tych obostrzeń opuszczono w [5].

Przeglądowa praca [19] Mustonena podsumowuje techniki dla odwzorowań typu monotonicznego w przestrzeniach Orlicza i Orlicza–Sobolewa. Autorzy potrzebowali wprowadzić pojęcia takie jak: monotoniczność, pseudomonotoniczność, operatory typu (M), (S_+) i inne. Powodem jest to, że przestrzenie Orlicza, czy też Orlicza–Sobolewa nie są w ogólności refleksywne.

Pragniemy jeszcze raz podkreślić, że jednym z głównych problemów jakie napotykamy, to fakt, że nie zakładamy, że warunek Δ_2 musi być spełniony. Tracimy zatem wiele dobrych własności przestrzeni funkcyjnych, z którymi pracujemy. Jedną z napotkanych przez nas przeszkód jest brak klasycznej formuły na całkowanie przez części, patrz [9, Rozdział 4.1]. Aby ją uzyskać wprost w przestrzeniach Orlicza potrzebowalibyśmy gęstości funkcji C^∞ w $L_M(Q)$ oraz że $L_M(Q) = L_M(0,T;L_M(\Omega))$. Pierwsze zachodzi jeśli M spełnia warunek Δ_2. Drugie nie zachodzi dla przypadku uogólnionych przestrzeni Orlicza. Możemy przywołać tu stwierdzenie z [3], że nawet dla izotropowych przestrzeni Orlicza jest to spełnione jedynie pod silnymi założeniami, które gwarantują, że M jest równoważne z funkcją wykładniczą oraz że $L_M(Q)$ jest ośrodkowa i refleksywna.

3. Notacja i własności przestrzeni Orlicza

Definicja 3.1. Niech Ω będzie zbiorem ograniczonym w $\mathbb{R}^d$, funkcję $M : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ nazywamy *uogólnioną $\mathcal{N}$–funkcją*, jeśli spełnia następujące warunki

(1) M jest funkcją Carathéodory'ego, $M(x, \mathbf{K}) = M(x, -\mathbf{K})$ p.w. w Ω oraz $M(x, \mathbf{K}) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{K} = 0$,

(2) $M(x, \mathbf{K})$ jest wypukła względem $\mathbf{K}$,

(3)
$$\lim_{|\mathbf{K}| \to 0} \frac{M(x, \mathbf{K})}{|\mathbf{K}|} = 0 \quad \text{dla wszystkich } x \in \Omega,$$

(4)
$$\lim_{|\mathbf{K}| \to \infty} \frac{M(x, \mathbf{K})}{|\mathbf{K}|} = \infty \quad \text{dla wszystkich } x \in \Omega.$$

Definicja 3.2. *Funkcja sprzężona* M^* do funkcji M to funkcja spełniająca:
$$M^*(x, \mathbf{L}) = \sup_{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^n} (\mathbf{K} : \mathbf{L} - M(x, \mathbf{K}))$$
dla $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega$.

Funkcja sprzężona M^* jest również $\mathcal{N}$–funkcją.

Niech $Q := \Omega \times (0, T)$. *Uogólniona klasa Orlicza* $\mathcal{L}_M(Q; \mathbb{R}^n)$ to zbiór funkcji mierzalnych $\mathbf{K} : Q \to \mathbb{R}^n$, takich że
$$\int_Q M(x, \mathbf{K}(t, x))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty.$$
Uogólnioną przestrzeń Orlicza $L_M(Q; \mathbb{R}^n)$ definiuje się jako zbiór wszystkich funkcji mierzalnych: $\mathbf{K} : Q \to \mathbb{R}^n$ spełniających
$$\int_Q M(x, \lambda\mathbf{K}(t, x))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{gdy } \lambda \to 0.$$
Uogólniona przestrzeń Orlicza jest przestrzenią Banacha z normą Luxemburga
$$\|\mathbf{K}\|_M = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \int_Q M\left(x, \frac{\mathbf{K}(t, x)}{\lambda}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant 1 \right\}.$$
Oznaczmy przez $E_M(Q; \mathbb{R}^n)$ domknięcie w $L_M(Q; \mathbb{R}^n)$ wszystkich funkcji mierzalnych i ograniczonych na Q. Przestrzeń $L_{M^*}(Q; \mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią dualną do $E_M(Q; \mathbb{R}^n)$. Łatwo zauważyć, że $E_M \subseteq \mathcal{L}_M \subseteq L_M$.

Funkcjonał
$$\varrho(\mathbf{K}) = \int_Q M(x, \mathbf{K}(x))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

jest modularem w przestrzeni funkcji mierzalnych $\mathbf{K} : Q \to \mathbb{R}^n$. Mówimy, że ciąg $\{\mathbf{z}^j\}_{j=1}^{\infty}$ zbiega w modularze do z w $L_M(Q;\mathbb{R}^n)$, jeśli istnieje takie $\lambda > 0$, że

$$\int_Q M\left(x, \frac{\mathbf{z}^j - \mathbf{z}}{\lambda}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{gdy } j \to \infty.$$

Będziemy pisać $\mathbf{z}^j \xrightarrow{M} \mathbf{z}$ w celu oznaczenia zbieżności w modularze w $L_M(Q;\mathbb{R}^n)$.

Mówimy, że $\mathcal{N}$–funkcja M spełnia *warunek* Δ_2, jeśli dla pewnej nieujemnej, całkowalnej na Ω funkcji g_M i stałej $C_M > 0$ zachodzi

$$M(x, 2\mathbf{K}) \leqslant C_M M(x, \mathbf{K}) + g_M(x) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{K} \in \mathbb{R}^n \text{oraz p.w. } x \in \Omega.$$

Jeśli ten warunek nie jest spełniony, to tracimy wtedy takie własności przestrzeni $L_M(Q;\mathbb{R}^n)$ jak: ośrodkowość, gęstość funkcji z C^∞, refleksywność.

W zależności od badanego problemu rozważamy $\mathcal{N}$–funkcje w różnych postaciach: w pełnej ogólności, jak w definicji powyżej, anizotrtropową $\mathcal{N}$–funkcją – $M(x, \mathbf{K}) = M(\mathbf{K})$ lub izotropową $\mathcal{N}$–funkcją – $M(x, \mathbf{K}) = M(|\mathbf{K}|)$.

4. Osiągnięte rezultaty

4.1. Istnienie rozwiązań dla niestacjonarnego przepływu niejednorodnej, nieściśliwej cieczy nienewtonowskiej. Rozważamy istnienie i własności słabych rozwiązań układu opisującego przepływ niejednorodnej, nieściśliwej cieczy nienewtonowskiej, który przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned}
\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho \boldsymbol{u}) &= 0 \quad \text{w} \quad Q,\\
\partial_t(\varrho \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}_x(\varrho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div}_x \mathbf{S}(t, x, \varrho, \mathbf{D}\boldsymbol{u}) + \nabla_x p &= \varrho \boldsymbol{f} \quad \text{w} \quad Q,\\
\operatorname{div}_x \boldsymbol{u} &= 0 \quad \text{w} \quad Q,\\
\boldsymbol{u}(0, x) &= \boldsymbol{u}_0 \quad \text{w} \quad \Omega,\\
\varrho(0, x) &= \varrho_0 \quad \text{w} \quad \Omega,\\
\boldsymbol{u}(t, x) &= 0 \quad \text{na} \quad (0, T) \times \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $\varrho : Q \to \mathbb{R}$ to gęstość cieczy, $\boldsymbol{u} : Q \to \mathbb{R}^3$ - pole prędkości, $p : Q \to \mathbb{R}$ - ciśnienie, $\mathbf{S}$ tensor naprężeń, $\boldsymbol{f} : Q \to \mathbb{R}^3$ - dane siły zewnętrzne. Zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ jest ograniczonym obszarem o wystarczająco gładkim brzegu $\partial\Omega$. Oznaczamy $Q = (0, T) \times \Omega$ jako cylinder czasowo-przestrzenny z $T \in (0, +\infty)$. Tensor $\mathbf{D}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\nabla_x \boldsymbol{u} + \nabla_x^T \boldsymbol{u})$ jest symetryczną częścią gradientu pola prędkości.

Zakładamy, że tensor $\mathbf{S} : (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}}$ spełnia ($\mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}}$ - przestrzeń symetrycznych macierzy wymiaru 3×3):

S1: $\mathbf{S}(t, x, \varrho, \mathbf{K})$ jest funkcją Carathéodory'ego (tj. mierzalna funkcja względem t, x dla wszystkich $\varrho > 0$ i $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}}$ oraz ciągła względem ϱ i $\mathbf{K}$ dla p.w. $x \in \Omega$). Ponadto $\mathbf{S}(t, x, \varrho, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

S2: Istnieje pewna stała c_c, $\mathcal{N}$–funkcje $M : \Omega \times \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}_+$ i M^* (funkcja sprzężona do M), takie że dla wszystkich $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$, $\varrho > 0$ i p.w. t, $x \in Q$ zachodzi

$$\mathbf{S}(t,x,\varrho,\mathbf{K}) : \mathbf{K} \geqslant c_c\{M(x,\mathbf{K}) + M^*(x,\mathbf{S}(t,x,\varrho,\mathbf{K}))\}.$$

S3: $\mathbf{S}$ jest funkcją monotoniczną, tj. dla wszystkich $\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$, $\varrho > 0$ i p.w. $x \in \Omega$ zachodzi

$$[\mathbf{S}(t,x,\varrho,\mathbf{K}_1) - \mathbf{S}(t,x,\varrho,\mathbf{K}_2)] : [\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2] \geqslant 0.$$

Wprowadźmy również następujące oznaczenia przestrzeni funkcyjnych:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\Omega) &:= \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \,|\, \varphi \text{ ma zwarty nośnik zawarty w } \Omega\},\\
\mathcal{V}(\Omega) &:= \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,|\, \mathrm{div}\varphi = 0\},\\
L^2_{\mathrm{div}}(\Omega) &:= \text{ domknięcie } \mathcal{V} \text{ względem normy } \|\cdot\|_{L^2},\\
W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) &:= \text{ domknięcie } \mathcal{V} \text{ względem normy } \|\nabla(\cdot)\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Definicja 4.1. Parę ϱ, $\boldsymbol{u}$ nazywamy *słabym rozwiązaniem* (6), jeśli

$$\begin{aligned}
&0 < \varrho_* \leqslant \varrho(t,x) \leqslant \varrho^* \quad \text{dla p.w. } (t,x) \in Q,\\
&\varrho \in C([0,T]; L^q(\Omega)) \quad \text{dla dowolnego } q \in [1,\infty),\\
&\partial_t \varrho \in L^{5p/3}(0,T; (W^{1,5p/(5p-3)})^*),\\
&\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T; L^2_{\mathrm{div}}(\Omega;\mathbb{R}^3)) \cap L^p(0,T; W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega;\mathbb{R}^3)) \cap N^{1/2,2}(0,T; L^2_{\mathrm{div}}(\Omega;\mathbb{R}^3)),\\
&\mathbf{D}\boldsymbol{u} \in L_M(Q;\mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}) \quad \text{oraz} \quad (\varrho\boldsymbol{u},\boldsymbol{\psi}) \in C([0,T]) \text{ dla wszystkich } \boldsymbol{\psi} \in L^2_{\mathrm{div}}(\Omega;\mathbb{R}^3).
\end{aligned}$$

Ponadto ϱ i $\boldsymbol{u}$ spełniają

$$\int_0^T \langle \partial_t \varrho, z\rangle - (\varrho\boldsymbol{u}, \nabla_x z)\,\mathrm{d}t = 0$$

dla wszystkich $z \in L^r(0,T; W^{1,r}(\Omega))$ z $r = 5p/(5p-3)$, tj.

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_\Omega \varrho \partial_t z + (\varrho\boldsymbol{u}) \cdot \nabla_x z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega \varrho z(s_2) - \varrho z(s_1)\,\mathrm{d}x$$

dla wszystkich z gładkich i s_1, $s_2 \in [0,T]$, $s_1 < s_2$ oraz

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \varrho\boldsymbol{u} \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} - \varrho\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{S}(t,x,\varrho,\mathbf{D}\boldsymbol{u}) : \mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T \int_\Omega \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega \varrho_0 \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(0)\,\mathrm{d}x \quad \text{dla wszystkich } \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}((-\infty,T);\mathcal{V}),
\end{aligned}$$

co więcej zachodzi

$$\lim_{t\to 0^+} \|\varrho(t) - \varrho_0\|_{L^q(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{dla dowolnego } q \in [1,\infty).$$

Twierdzenie 4.2 ([23]). *Niech M będzie $\mathcal{N}$–funkcją spełniającą dla pewnych stałych $\underline{c} > 0$, $C > 0$ i*

$$p \geqslant \frac{11}{5}$$

warunek

$$M(x, \boldsymbol{\xi}) \geqslant \underline{c}|\boldsymbol{\xi}|^p - C$$

dla p.w. $x \in \Omega$ i wszystkich $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}$. Załóżmy, że funkcja sprzężona

$$M^* \text{ spełnia warunek } \Delta_2 \quad \text{oraz} \quad \lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to\infty} \inf_{x\in\Omega} \frac{M(x\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|} = \infty.$$

Niech S spełnia warunki **S1.-S3.** *oraz $\boldsymbol{u}_0 \in L^2_{\mathrm{div}}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $\varrho_0 \in L^\infty(\Omega)$ z $0 < \varrho_* \leqslant \varrho_0(x) \leqslant \varrho^* < +\infty$ dla p.w. $x \in \Omega$ i $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^3))$. Wtedy istnieje słabe rozwiązanie problemu (6).*

4.2. **Istnienie rozwiązań dla problemu ruchu ciał sztywnych zanurzonych w nieściśliwej cieczy nienewtonowskiej.** Stawiamy następujący problem: niech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem ograniczonym z odpowiednio gładkim brzegiem $\partial\Omega$, który zawiera nieściśliwą ciecz nienewtonowską z zanurzonymi niejednorodnymi ciałami sztywnymi. Początkowe położenie ciał sztywnych zadane jest przez rodzinę wystarczająco regularnych obszarów $S_i \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$. Ruch $\boldsymbol{\eta}_i$ stowarzyszony z ciałem S_i jest następującym odwzorowaniem

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\eta}_i(t, x),\ t \in [0, T),\ x \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{\eta}_i(t, \cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ jest izometrią},\\
&\boldsymbol{\eta}_i(0, x) = x \text{ dla wszystkich } x \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Zgodnie z tym, położenie ciała S_i w chwili t dane jest przez:

$$S_i(t) = \boldsymbol{\eta}_i(t, S_i),\ i = 1, \dots, n.$$

Słabym rozwiązaniem problemu jest para $(\varrho, \boldsymbol{u})$ z funkcją gęstości $\varrho = \varrho(t, x)$ oraz polem prędkości $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t, x)$ spełniającą:

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(\varrho \partial_t \varphi + \varrho \boldsymbol{u} \cdot \nabla_x \varphi\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_\Omega \varrho_0 \varphi\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

dla dowolnej funkcji testującej $\varphi \in C^1([0, T) \times \Omega)$ oraz

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \Big(\varrho \boldsymbol{u} \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} + \varrho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} : \mathbf{D}\boldsymbol{\varphi} - \mathsf{S} : \mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^T \int_\Omega \varrho \nabla_x F \cdot \boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega \varrho_0 \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{8}$$

dla dowolnego $\boldsymbol{\varphi} \in C^1_c([0, T) \times \Omega; \mathbb{R}^3)$,

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \cdot) \in [\mathcal{R}M](t), \tag{9}$$

które jest związane z położeniem ciała sztywnego, tj.

(10)
$$[\mathcal{R}M](t) = \big\{\boldsymbol{\phi} \in C^1_c(\Omega;\mathbb{R}^3) \mid \mathrm{div}_x \boldsymbol{\phi} = 0 \text{ in } \Omega,$$
$$\mathbf{D}\boldsymbol{\phi} \text{ ma zwarty nośnik zawarty w } \Omega \setminus \cup_{i=1}^n \overline{S}_i(t)\big\}.$$

Symbol $\mathbf{S}$ oznacza tensor naprężeń określony przez (11 - 16) - patrz poniżej, $\nabla_x F$ to dany potencjał sił zewnętrznych, ϱ_0, $\boldsymbol{u}_0$ oznacza odopwiednio rozkład początkowy gęstości i pola prędkości.

Zakładamy, że tensor naprężeń $\mathbf{S}$ zależy od symetrycznej części gradientu pola prędkości $\boldsymbol{u}$, tj. $\mathbf{S} : \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}} \to \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$ oraz spełnia

$$\mathbf{S}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{D}\boldsymbol{u}) \quad \text{jest funkcją ciągłą,} \tag{11}$$

$$\Big(\mathbf{S}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta})\Big) : \Big(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}\Big) \geqslant 0 \text{ dla wszystkich } \boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}} \tag{12}$$

oraz istnieje dodatnia stała c, izotropowa $\mathcal{N}$–funkcja $M : R_+ \to \mathbb{R}_+$ i sprzężona do niej M^*, takie że dla wszystkich $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$ i p.w. $x \in \Omega$ zachodzi

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{\xi} \geqslant c_c\{M(|\boldsymbol{\xi}|) + M^*(|\mathbf{S}(\boldsymbol{\xi})|)\}. \tag{13}$$

Ponadto zakładamy, że $\mathcal{N}$–funkcja M spełnia dodatkowe warunki wzrostu

$$c_1|\cdot|^p \leqslant M(\cdot) \leqslant c_2 \exp^{\frac{1}{\beta+1}}(|\cdot|) \quad \text{dla } p \geqslant 4,\ \beta > 0 \tag{14}$$

dla pewnych dodatnich stałych c_1, c_2, funkcja sprzężona do M

$$M^* \text{ spełnia warunek } \Delta_2 \tag{15}$$

oraz

$$M(|\cdot|^{\frac{1}{4}}) \quad \text{jest wypukła.} \tag{16}$$

Przyjmujemy warunek braku poślizgu na brzegu Ω, jak również na powierzchni ciał sztywnych, tzn. $\boldsymbol{u}(t,x)|_{\partial\Omega} = 0$ dla $t \in [0,T]$ oraz prędkość cieczy na brzegu każdego ciała sztywnego S_i $(i = 1, \dots, n)$ równa się prędkości brzegu tego obiektu.

W celu zamknięcia systemu określamy również relację pomiędzy polem prędkości $\boldsymbol{u}$ a ruchem ciał sztywnych zadanym poprzez izometrie $\boldsymbol{\eta}_i$. Możemy to sformulować w następujący sposób: ponieważ odwzorowania $\boldsymbol{\eta}_i(t,\cdot)$ są izometriami w $\mathbb{R}^3$, mogą być zapisane jako

$$\boldsymbol{\eta}_i(t,x) = x_i(t) + \mathbf{O}_i(t)x,$$

gdzie $\mathbf{O}_i(t) \in SO(3)$ (tj. macierze spełniające $\mathbf{O}_i^T\mathbf{O}_i = \mathbf{Id}$). Położenie $x_i(t)$ opisuje, gdzie znajduje się środek masy ciała S_i w czasie t

$$x_i(t) = \frac{1}{m_i}\int_{\overline{S}_i(t)} \varrho_{S_i}(t,x)x \,\mathrm{d}x,$$

gdzie

$$m_i = \int_{\overline{S}_i(t)} \varrho_{S_i}(t,x)\,\mathrm{d}x$$

jest całkowitą masą i-tego ciała o gęstości ϱ_{S_i}. Mówimy, że pole prędkości $\boldsymbol{u}$ jest zgodne z rodziną przemieszczeń $\{\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n\}$, jeśli

$$\boldsymbol{u}(t,x) = \boldsymbol{u}^{S_i}(t,x) = \boldsymbol{U}_i(t) + \mathbf{Q}_i(t)(x - x_i(t)) \text{ dla p.w. } x \in \overline{S}_i(t),\ i = 1,\ldots,n \tag{17}$$

dla p.w. $t \in [0,T)$, gdzie $\boldsymbol{u}^{S_i}$ jest prędkością sztywnych obiektów, $\boldsymbol{U}_i(t)$ opisuje przesunięcie, a $\mathbf{Q}$ - prędkość kątową, tak że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i(t) = \boldsymbol{U}_i(t),\ \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{O}_i(t)\Big)\mathbf{O}_i^T(t) = \mathbf{Q}_i(t) \text{ p.w. na } (0,T). \tag{18}$$

Twierdzenie 4.3 ([25])**.** *Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^3$ oraz niech następujące warunki będą spełnione:*

- *Początkowe położenie ciał sztywnych dane jest przez rodzinę zbiorów otwartych*

  $$S_i \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3,\ S_i \textit{ dyfeomorficznych z kulą jednostkową } i = 1,\ldots,n,$$

  gdzie ∂S_i, $i = 1,\ldots,n$ oraz $\partial\Omega$ są odpowiednio regularne.
- $\operatorname{dist}[\overline{S}_i, \overline{S}_j] > 0$ *dla* $i \neq j$, $\operatorname{dist}[\overline{S}_i, \mathbb{R}^3 \backslash \Omega] > 0$ *dla dowolnych* $i, j = 1,\ldots,n$.
- *Tensor naprężeń $\mathbf{S}$ spełnia hipotezy (11 - 13).*
- *$\mathcal{N}$–funkcja M spełnia warunki (14 - 16) z $p \geqslant 4$ oraz funkcja sprzężona M^* spełnia warunek Δ_2.*
- *Dane siły zewnętrzne $F \in W^{1,\infty}(\Omega)$.*
- *Początkowy rozkład gęstości dany jest przez*

$$\varrho_0 = \begin{cases} \varrho_f = \text{const} > 0 \ \textit{w}\ \Omega \backslash \cup_{i=1}^n \overline{S}_i, \\ \varrho_{S_i} \ \textit{on}\ S_i,\ \textit{gdzie}\ \varrho_{S_i} \in L^\infty(\Omega),\ \operatorname{ess\,inf}_{S_i} \varrho_{S_i} > 0,\ i = 1,\ldots,n, \end{cases}$$

a początkowa prędkość $\boldsymbol{u}_0$ spełnia

$$\boldsymbol{u}_0 \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3),\ \operatorname{div}_x \boldsymbol{u}_0 = 0 \ \textit{w}\ \mathcal{D}'(\Omega),\ \mathbf{D}\boldsymbol{u}_0 = 0 \ \textit{w}\ \mathcal{D}'(S_i;\mathbb{R}^{3\times 3}) \ \textit{dla}\ i = 1,\ldots,n.$$

Wtedy istnieje funkcja gęstości ϱ,

$$\varrho \in C([0,T];L^1(\Omega)),\ 0 < \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} \varrho(t,\cdot) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \varrho(t,\cdot) < \infty \ \textit{dla wszystkich}\ t \in [0,T],$$

oraz rodzina izometrii $\{\boldsymbol{\eta}_i(t,\cdot)\}_{i=1}^n$, $\boldsymbol{\eta}_i(0,\cdot) = \mathbf{Id}$, pole prędkości $\boldsymbol{u}$,

$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)), \quad \mathbf{D}\boldsymbol{u} \in L_M(Q;\mathbb{R}^{3\times 3}),$$

zgodne z $\{\boldsymbol{\eta}_i\}_{i=1}^n$ w sensie (17), (18), takie że ϱ, $\boldsymbol{u}$ spełniają równości całkowe (7) dla dowolnej funkcji testującej $\varphi \in C^1([0,T) \times \Omega)$ oraz (8) dla wszystkich $\boldsymbol{\varphi}$ spełniających (9), (10).

4.3. **Uogólniony system Stokesa.** Chcemy wykazać istnienie rozwiązań dla następującego uogólnionego układu Stokesa:

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{u} - \mathrm{div}\mathbf{S}(t,x,\mathbf{D}\boldsymbol{u}) + \nabla p = \boldsymbol{f} &\quad \text{w } (0,T)\times\Omega,\\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 &\quad \text{w } (0,T)\times\Omega,\\ \boldsymbol{u}(0,x) = \boldsymbol{u}_0 &\quad \text{w } \Omega,\\ \boldsymbol{u}(t,x) = 0 &\quad \text{na } (0,T)\times\partial\Omega, \end{aligned}$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ jest ograniczonym zbiorem otwartym o wystarczająco gładkim brzegu $\partial\Omega$, $(0,T)$ jest przedziałem czasowym z $T<\infty$, $Q=(0,T)\times\Omega$, $\boldsymbol{u}: Q\to\mathbb{R}^d$ jest polem prędkości cieczy, a $p: Q\to\mathbb{R}$ – ciśnieniem, $\mathbf{S}+\mathbf{I}p$ jest tensorem naprężeń Cauchy'ego. Zakładamy, że $\mathbf{S}$ spełnia następujące warunki

(S1) $\mathbf{S}$ jest funkcją Carathéodory'ego.

(S2) Istnieje $\mathcal{N}$–funkcja $M:\mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}\to\mathbb{R}_+$ i sprzężona do niej funkcja M^* oraz stała $c>0$, takie że dla wszystkich $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$

$$\mathbf{S}(t,x,\boldsymbol{\xi}):\boldsymbol{\xi} \geqslant c(M(\boldsymbol{\xi}) + M^*(\mathbf{S}(t,x,\boldsymbol{\xi}))).$$

(S3) Dla wszystkich $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$ i p.w. $t,\ x\in Q$

$$(\mathbf{S}(t,x,\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{S}(t,x,\boldsymbol{\eta})):(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}) \geqslant 0.$$

Twierdzenie 4.4 ([12]). *Niech będzie spełniony jeden z poniższych warunków:*

(D1) Ω jest ograniczonym zbiorem gwiaździstym,

(D2) Ω jest ograniczonym ograniczonym zbiorem niegwiaździstym oraz

$$\overline{m}(r) \leqslant c_m((\underline{m}(r))^{\frac{d}{d-1}} + |r|^2 + 1)$$

dla wszystkich $r\in\mathbb{R}_+$ i $\underline{m}$ spełnia warunek Δ_2.

Ponadto niech M będzie $\mathcal{N}$–funkcją i niech $\mathbf{S}$ spełnia warunki (S1)-(S3). Wtedy dla danych $\boldsymbol{u}_0\in L^2_{\mathrm{div}}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ i $\boldsymbol{f}\in E_{\underline{m}^*}(Q;\mathbb{R}^d)$ istnieje $\boldsymbol{u}\in Z^M_0$, takie że

$$\int_Q -\boldsymbol{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{S}(t,x,\mathbf{D}\boldsymbol{u})\cdot\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_Q \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega \boldsymbol{u}_0\boldsymbol{\varphi}(0)\,\mathrm{d}x$$

dla wszystkich $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{D}(-\infty,T;\mathcal{V})$.

W powyższym sformułowaniu zastosowaliśmy oznaczenie:

$$\begin{aligned} Z^M_0 = \{\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;L^2_{\mathrm{div}}(\Omega;\mathbb{R}^d)),\ \mathbf{D}\boldsymbol{u}\in L_M(Q;\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}) \mid \exists\ \{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}((-\infty,T);\mathcal{V}) :\\ \boldsymbol{u}^j \xrightarrow{*} \boldsymbol{u} \text{ in } L^\infty(0,T;L^2_{\mathrm{div}}(\Omega;\mathbb{R}^d))\\ \text{oraz } \mathbf{D}\boldsymbol{u}^j \xrightarrow{*} \mathbf{D}\boldsymbol{u} \text{ słabo z gwiazdką w } L_M(Q;\mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}})\}. \end{aligned}$$

oraz funkcje $\underline{m}$, $\overline{m}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ zą zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} \underline{m}(r) &:= \min_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}},|\boldsymbol{\xi}|=r} M(\boldsymbol{\xi}),\\ \overline{m}(r) &:= \max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}},|\boldsymbol{\xi}|=r} M(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

4.4. **Rozwiązania zrenormalizowane dla problemów eliptycznych w przestrzeniach Orlicza.** Niech Ω będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 1$) z wystarczająco gładkim brzegiem $\partial\Omega$. Naszym celem jest wykazanie istnienia i jednoznaczoności rozwiązań zrenormalizowanych dla następującej nieliniowej eliptycznej inkluzji:

$$(E,f) \qquad \begin{aligned} \beta(x,u) - \operatorname{div}_x \left(\boldsymbol{a}(x,\nabla u) + \boldsymbol{F}(u)\right) &\ni f \text{ w } \Omega \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie prawa strona $f \in L^1(\Omega)$. O funkcji $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ zakładamy, że jest lokalnie lipschitzowska a pole wektorowe $\boldsymbol{a} : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ spełnia:

(A1): $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$ jest funcją Carathéodory'ego.

(A2): istnieją $\mathcal{N}$-funkcja $M : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, sprzężona do niej M^*, stała $c_a \in (0,1]$ i nieujemna funkcja $a_0 \in L^1(\Omega)$, takie że

$$\boldsymbol{a}(x,\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} \geqslant c_a\{M^*(x,\boldsymbol{a}(x,\boldsymbol{\xi})) + M(x,\boldsymbol{\xi})\} - a_0(x)$$

dla p.w. $x \in \Omega$ i wszystkich $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$.

(A3): $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$ jest funkcją monotoniczną, tj.

$$(\boldsymbol{a}(x,\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{a}(x,\boldsymbol{\eta})) \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \geqslant 0$$

dla p.w. $x \in \Omega$ i każdego $\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$.

Ponadto zakładamy, że funkcja sprzężona

$$M^* \text{ spełnia warunek } \Delta_2$$

oraz że istnieją $c > 0$, $\nu > 0$ oraz $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$, takie że

$$M(x,\boldsymbol{\xi}) \geqslant c|\boldsymbol{\xi}|^{1+\nu}$$

dla p.w. $x \in \Omega$ i wszystkich $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant |\boldsymbol{\xi}_0|$.

O nieliniowości β w problemie (E,f) zakładamy, że $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}\backslash\{\varnothing\}$ jest odwzorowaniem wielowartościowym, takim że dla p.w. $x \in \Omega$ $\beta(x,\cdot) : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}\backslash\{\varnothing\}$ jest operatorem maksymalnie monotonicznym oraz $0 \in \beta(x,0)$. Ponadto zakładamy, że

$$\beta^0(\cdot,l) \in L^1(\Omega)$$

dla każdego $l \in \mathbb{R}$, gdzie β^0 oznacza minimalną selekcję grafu β.

Wprowadźmy przestrzeń liniową

$$\begin{aligned} V := \{\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \mid \exists \{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega), \\ \text{taki że } \nabla\varphi_j \xrightharpoonup{*} \nabla\varphi \text{ w } L_M(\Omega;\mathbb{R}^d) \text{ gdy } j \to \infty\} \end{aligned}$$

z normą

$$\|\varphi\|_V = \|\nabla\varphi\|_{M,\Omega},\ \varphi \in V.$$

Definicja 4.5. Słabym rozwiązaniem problemu (E, f) nazywamy parę $(u, b) \in V \times L^1(\Omega)$ spełniającą: $b(x) \in \beta(x, u(x))$ p.w. w Ω, $\boldsymbol{a}(x, \nabla u) \in L_{M^*}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{F}(u) \in L_{M^*}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ oraz

$$b - \operatorname{div}(\boldsymbol{a}(\cdot, \nabla u) + \boldsymbol{F}(u)) = f \quad \text{ w } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Definicja 4.6. Rozwiązaniem zrenormalizowanym dla (E, f) jest funkcja u spełniają następujące warunki:

(R1): $u : \Omega \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, $b \in L^1(\Omega)$ oraz $b \in \beta(x, u(x))$ dla p.w. $x \in \Omega$.
(R2): Dla każdego $k > 0$ $T_k(u) \in V$, $\boldsymbol{a}(x, \nabla T_k(u)) \in L_{M^*}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ oraz

$$\int_\Omega bh(u)\varphi \, dx + \int_\Omega (\boldsymbol{a}(x, \nabla u) + \boldsymbol{F}(u)) \cdot \nabla(h(u)\varphi) \, dx = \int_\Omega fh(u)\varphi \, dx$$

zachodzi dla wszystkich $h \in C_c^1(\mathbb{R})$ oraz wszystkich $\varphi \in V \cap L^\infty(\Omega)$.
(R3): $\int_{\{l<|u|<l+1\}} \boldsymbol{a}(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx \to 0$ gdy $l \to \infty$.

Twierdzenie 4.7 ([15])**.** *Niech pole wektorowe $\boldsymbol{a}$ i graf β spełniają założenia wymienione powyżej. Wtedy dla $f \in L^1(\Omega)$ istnieje co najmniej jedno zrenormalizowane rozwiązanie u dla problemu (E, f).*

Twierdzenie 4.8. *Niech $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ będzie, takie że $\beta(x, \cdot)$ jest ściśle monotoniczne dla p.w. $x \in \Omega$. Dla $f \in L^1(\Omega)$ niech (u, b), $(\tilde{u}, \tilde{b})$ będą rozwiązaniami zrenormalizowanymi dla (E, f). Wtedy $u = \tilde{u}$ i $b = \tilde{b}$.*

Stwierdzenie 1. *Niech (u, b) będzie rozwiązaniem zrenormalizowanym dla (E, f). Załóżmy, że* **(A2)** *jest spełnione dla $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ i prawa strona f należy do $L^d(\Omega)$. Wtedy $u \in V \cap L^\infty(\Omega)$ i u jest słabym rozwiązaniem dla (E, f).*

Literatura

[1] M. Bulíček, P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda and K.R. Rajagopal. On flows of fluids described by an implicit constitutive equation characterized by a maximal monotone graph. London Math. Soc. Lecture Note, Cambridge Univ. Press, Cambridge. 2012.
[2] R. DiPerna and P.L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability. *Ann. of Math.* 130 (1989), 321–366.
[3] T. Donaldson. Inhomogeneous Orlicz-Sobolev spaces and nonlinear parabolic initial value problems. *J. Differential Equations.* 16:201-256, 1974.
[4] E.Emmrich, A.Wróblewska. Convergence of a Full Discretization of Quasilinear Parabolic Equations in Isotropic and Anisotropic Orlicz Spaces. Prepreprint PhD Programme: Mathematical Methods in Natural Sciences, Nr 2011- 006, 2011.
[5] A. Elmahi and D. Meskine. Parabolic equations in Orlicz spaces. *J. London Math. Soc. (2).* 72(2):410-428, 2005.
[6] J. Frehse and M. Růžička. Non-homogenous generalized Newtonian fluids. *Mathematische Zeitschrift.* 260:355-375, 2008.
[7] J. Frehse, J. Málek, M. Růžička. Large data existence results for unsteady flows of inhomogeneus heat-conducting incompressible fluids. *Communication in Partial Differential Equations.* 35(10):1891–1919, 2010.

[8] E. Feireisl, M. Hillairet and Š. Nečasová. On the motion of several rigid bodies in an incompressible non-Newtonian fluid. *Nonlinearity.* **21**:1349-1366, 2008.

[9] H. Gajewski, K. Gröger and K. Zacharias. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[10] P. Gwiazda and A. Świerczewska–Gwiazda. On non-Newtonian fluids with the property of rapid thickening under different stimulus. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 7(18):1073-1092, 2008.

[11] P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, and A. Wróblewska-Kamińska. Monotonicity methods in generalized Orlicz spaces for a class of non-Newtonian fluids. *Math. Methods Appl. Sci.* **33** (2010), 125–137.

[12] P. Gwiazda, A. Świerczewska–Gwiazda and A. Wróblewska-Kamińska. Generalized Stokes system in Orlicz spaces *Discrete and Continuous Dynamical Systems - A.* 32 (2012), Issue 6, 2125-2146.

[13] P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Wróblewska-Kamińska. Turbulent flow of rapidly thickening fluids. Proceedings of Polish-Japanese Days , GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., Vol.32 (2010), 307-325.

[14] P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Warzyński, A. Wróblewska-Kamińska. Well-posedness for non-Newtonian flows with general growth conditions, Banach Center Publications, 86 (2009), 115-128.

[15] P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wróblewska-Kamińska, A. Zimmermann. Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces. *Journal of Differential Equations* 253, 635 - 666, 2012.

[16] K. H. Hoffmann and V. N. Starovoitov. On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two dimensional case. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 9:633–648, 1999.

[17] P. L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford Science Publications, New York, 1996.

[18] J. Málek, J. Nečas and M. Růžička. On the non-Newtonian incompressible fluids. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 3(1):35–63, 1993.

[19] V. Mustonen and M. Tienari. On monotone-like mappings in Orlicz-Sobolev spaces. *Math. Bohem.*, 124(2-3):255–271, 1999.

[20] J.A. San Martin, V. Starovoitov and M. Tucsnak. Global weak solutions for the two dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **161**:93–112, 2002.

[21] A. Wróblewska-Kamińska. *An application of Orlicz spaces in partial differential equations.* Praca doktorska.

[22] A. Wróblewska-Kamińska. Steady flow of non-Newtonian fluids - monotonicity methods in generalized Orlicz spaces. *Nonlinear Analysis.* 72:4136-4147, 2010.

[23] A. Wróblewska-Kamińska. Existence results for unsteady flows of nonhomogeneous non-Newtonian incompressible fluids - monotonicity methods in generalized Orlicz spaces. Preprints of PhD Programme: Mathematical Methods in Natural Sciences, no. 2011 - 015, 2011.

[24] A. Wróblewska-Kamińska. Local pressure methods in Orlicz spaces for the motions of rigid bodies in an non-Newtonian fluid with general growth conditions. Przyjęta do *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, 2012.

[25] A. Wróblewska-Kamińska. Existence result to the motion of several rigid bodies in an incompressible non-Newtonian fluid with growth conditions in Orlicz spaces, Prepreprint PhD Programme: Mathematical Methods in Natural Sciences, Nr 2011 - 024, 2012.