Modele Dynamiki Populacyjnej w Przestrzeniach Metrycznych

(Structured Population Models in Metric spaced)

Autoreferat Rozprawy Doktorskiej

AGNIESZKA ULIKOWSKA

1. Wstęp

Celem naukowym niniejszej rozprawy jest analiza matematyczna dynamiki modeli strukturalnych ([9, 17, 18, 20, 28, 29, 37, 41, 49, 50]) w przestrzeniach metrycznych. Modele strukturalne opisują ewolucję populacji organizmów, zróżnicowanej ze względu na wybrane cechy. Cechy te zależą od modelowanej populacji, mogą być to, między innymi, wiek [49] lub rozmiar osobnika [4], dojrzałość pojedynczej komórki [48], stan jej zróżnicowania [20] lub fenotyp [9]. Przestrzenią metryczną, w której analizujemy równania dynamiki populacyjnej jest przestrzeń skończonych, nieujemnych miar Radona $\mathcal{M}^+$ z metryką flat ρ_F [22, 4.1.12], [39], [53]. Nasze wyniki dotyczą między innymi istnienia i jednoznaczności miarowych rozwiązań dla szerokiej klasy modeli ze strukturą. W szczególności, rozpatrujemy modele mające zastosowanie w demografii, biologii i epidemiologii. Otrzymane rezultaty gwarantują także stabilność rozwiązań względem współczynników modelu, co bezpośrednio przekłada się na możliwość tworzenia stabilnych schematów numerycznych. Budowa takich schematów, opartych na metodzie cząstek i algorytmie split-up oraz ich zastosowanie do wyżej wymienionych modeli jest jednym z elementów rozprawy.

Przy założeniu struktury o charakterze ciągłym, większość modeli dynamiki populacyjnej sprowadza się do ewolucyjnych równań różniczkowych cząstkowych [18, 50] dla rozkładu populacji względem wybranej cechy. Typową przestrzenią, w której analizuje się takie zagadnienia jest przestrzeń funkcji $\mathbf{L^1}$. Równania różniczkowe w abstrakcyjnych przestrzeniach metrycznych rozpatruje się od lat 50' XX wieku. Analiza ta zazwyczaj ograniczana była do przestrzeni Banacha [36]. Warto tutaj wspomnieć o podejściu, które opiera się na rozwiązywaniu równań w nieujemnym stożku przestrzeni Banacha. Stosuje się wtedy teorię równań różniczkowych dla funkcji przyjmujących wartości w przestrzeniach Banacha (kraty Banacha). Takie podejście pozwala na udowodnienie istnienia globalnych rozwiązań przy słabszych założeniach, np. [5]. Niestety narzędzie to nie pozwala na udowodnienie stabilności otrzymanych rozwiązań względem danych początkowych i współczynników modelu, co z naszego punktu widzenia jest kluczowe. Ponadto, metody opierające się na kratach Banacha są odpowiednie dla problemów, gdzie główna część jest liniowa. Dlatego też, w pracy stosujemy podejście z [15], gdzie przy pewnych założeniach pokazano lokalne istnienie jednoznacznych rozwiązań dla równań różniczkowych w przestrzeniach metrycznych oraz udowodniono twierdzenia dotyczące algorytmu split-up dla operatorów nieliniowych.

2. Przestrzeń miar Radona z metryką flat

Jak już wspominaliśmy, w ramach tej rozprawy rozpatrujemy przestrzeń skończonych, nieujemnych miar Radona z metryką flat, która jest ściśle powiązana z metrykami Wassersteina. Zależności pomiędzy ww. metrykami a zagadnieniem optymalnego transportu analizowane są wielu współczesnych pracach, np. [3, 46, 47]. Autor dwóch ostatnich pozycji jest laureatem Medalu Fieldsa 2010, co potwierdza aktualność i zainteresowanie jaką cieszy się ta dziedzina matematyki. Jako motywację do rozpatrywania przestrzeni miar z metrykami powiązanymi z zagadnieniem optymalnego transportu przedstawiamy następujący problem

$$\partial_t \mu + \partial_x \mu = 0, \quad \mu_o = \delta_0,$$

gdzie δ_0 jest deltą Diraca w $x = 0$. Jeżeli stosujemy wariację miary $|\cdot|$, nie możemy spodziewać się ciągłości rozwiązań, co to z faktu, iż $|\delta_{t_1} - \delta_{t_2}| = 2$ dla $t_1 \neq t_2$. Wprowadzenie metryki Wassersteina rozwiązuje powyższy problem. Ponieważ równania dynamiki populacyjnej nie są zazwyczaj w formie zachowawczej (a odległość Wassersteina jest skończona jedynie dla miar o jednakowej masie), w naszej pracy używamy zatem metryki flat ρ_F zdefiniowanej jako

$$\rho_F(\mu,\nu) = \sup\left\{\int \psi(x) d(\mu-\nu) \ : \ \psi \in \mathbf{C^1}, \ \|\psi\|_{\mathbf{W^{1,\infty}}} \leq 1\right\}, \quad \mu,\nu \in \mathcal{M}^+.$$

Dla ww. metryki otrzymujemy $\rho_F(\delta_{t_1}, \delta_{t_2}) = |t_1 - t_2|$, co gwarantuje ciągłość rozwiązań. Kolejnym powodem, który uzasadnia kierunek naszych badań jest empiryczna stabilność, czyli kompatybilność modelu z danymi eksperymentalnymi. W istocie, rezultatem eksperymentu są zazwyczaj dane zagregowane na przestrzeni pewnego przedziału I (np. dane dotyczące struktury wiekowej populacji to liczba osobników w danych kohortach). Bazując na takich danych możemy aproksymować rzeczywisty rozkład populacji poprzez funkcję klasy $\mathbf{L^1}$ lub sumę delt Diraca. Zdefiniujmy zbiór

$$A = \left\{\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+) \ : \ \int_{[nh,(n+1)h)} \mathrm{d}\mu = a_n, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Jeżeli rozważymy wariację miary $|\cdot|$ lub normę $\mathbf{L^1}$, zauważamy że średnica zbioru A nie zależy od długości h przedziału I, a dokładniej $\mathrm{diam}_{|\cdot|}(A) = \mathrm{diam}_{\|\cdot\|_{\mathbf{L^1}}}(A \cap \mathbf{L^1}) = 2\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. W przypadku metryki ρ_F otrzymujemy $\mathrm{diam}_{\rho_F}(A) \leq h \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Zaletą stosowania tego podejścia jest zatem korelacja pomiędzy błedem aproksymacji a długością przedziału I ([29, Section 1]). Jest to powodem, dla którego przestrzeń skończonych, nieujemnych miar Radona z meryką flat wydaje się być właściwa z punktu widzenia stabilności rozwiązań względem danych początkowych. Wybór przestrzeni $(\mathcal{M}^+, \rho_F)$ spowodowany jest także jej dobrymi własnościami – przestrzeń ta jest zupełna i ośrodkowa.

3. Rezultaty

Pierwsza część pracy (Rozdział 2 oraz Rozdział 3) skupiona jest na uzyskaniu analitycznych wyników dotyczących istnienia jednoznacznych i stabilnych rozwiązań dla równań (1) oraz (3) w przestrzeni miar $(\mathcal{M}^+, \rho_F)$. Równanie (1) opisuje ewolucję jednopłciowej populacji ze strukturą

$$\begin{cases} \partial_t \mu + \partial_x \left(b(t,\mu)\,\mu \right) + c(t,\mu)\,\mu &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\eta(t,\mu) \right)(y)\,\mathrm{d}\mu(y), \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+, \\ \mu_o &\in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+). \end{cases} \tag{1}$$

Wcześniejsze wyniki dotyczące ww. problemu bazowały m.in. na słabych* półgrupach [17], gdzie udowodniono globalne istnienie slabo* ciągłych rozwiązań względem czasu i danych początkowych. W [28] i [29] zastosowano teorię półgrup nieliniowych, co zaowocowało pierwszymi rezultatami stabilności dla mniej ogólnego równania, w którym zamiast operatora całkowego po prawej stronie równania występuje warunek brzegowy. Jeszcze innym sposobem postępowania było wykorzystanie teorii kinetycznej w [10, 11, 19]. W naszej pracy podążamy i rozwijamy podejście z [28, 29]. Konstruujemy rozwiązania za pomocą metody split-up w przestrzeniach metrycznych [14, 15], co pozwala na znaczne skrócenie dowodów w porównaniu z [28, 29], a jednocześnie pozwala na osiągnięcie ogólniejszych rezultatów. Wynikiem naszej pracy w tym zakresie jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Niech*

$$\begin{aligned} b, c &\in \mathbf{C_b^{1,\infty}}\big([0,T] \times \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+); \mathbf{W^{1,\infty}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})\big), \\ \eta &\in \mathbf{C_b^{1,\infty}}\big([0,T] \times \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+); (\mathbf{C_b} \cap \mathbf{Lip})(\mathbb{R}_+; \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+))\big). \end{aligned}$$

Wtedy, istnieje jednoznaczne rozwiązanie $\mu \in (\mathbf{C_b} \cap \mathbf{Lip})\left([0,T]; \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+)\right)$ *problemu* (1). *Ponadto,*

i) dla każdego $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ *istnieją stałe* K_1 *i* K_2*, takie że*

$$\rho_F\left(\mu_{t_1}, \mu_{t_2}\right) \le K_1 \mathrm{e}^{K_2(t_2-t_1)} \mu_o(\mathbb{R}_+)(t_2 - t_1).$$

ii) Niech $\tilde{\mu}_o \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+)$ *i funkcje* $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{\eta}$ *spełniają założenia twierdzenia. Niech* $\tilde{\mu}$ *będzie rozwiązaniem* (1) *z danymi początkowymi* $\tilde{\mu}_o$ *i współczynnikami* $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{\eta}$*. Wtedy, istnieją stałe* C_1, C_2 *i* C_3 *takie że, dla każdego* $t \in [0,T]$ *zachodzi*

$$\rho_F\left(\mu_t, \tilde{\mu}_t\right) \le \mathrm{e}^{C_1 t} \rho_F\left(\mu_o, \tilde{\mu}_o\right) + C_2 \mathrm{e}^{C_3 t} t \,\|(b,c,\eta) - (\tilde{b},\tilde{c},\tilde{\eta})\|.$$

W powyższym twierdzeniu $\mathbf{C_b^{1,\infty}}\big([0,T] \times \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+); X\big)$ oznacza przestrzeń funkcji ograniczonych względem normy $\|\cdot\|_X$, Hölderowsko ciągłych z wykładnikiem α względem czasu i Lipschitzowsko ciągłych względem zmiennej miarowej. $(\mathbf{C_b} \cap \mathbf{Lip})(\mathbb{R}_+; \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+))$ oznacza przestrzeń funkcji ograniczonych i Lipschitzowskich o wartościach w przestrzeni miar, zaś $\mathbf{W^{1,\infty}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ jest standardową przestrzenią Soboleva. Kolejnym rozpatrywanym przez nas zagadnieniem jest model dwupłciowej populacji ze strukturą wiekową wprowadzony w [24, 32].

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^i + \partial_y \mu_t^i + \xi_f(t, \mu_t^m, \mu_t^f)\mu_t^i &= 0, \qquad (t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+, \\ D_\lambda \mu_t^i(0^+) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} b_i(t, \mu_t^m, \mu_t^f)(z)\mathrm{d}\mu_t^c(z), \\ \mu_o^f &\in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+), \quad \text{dla } i = m, f, \end{cases} \tag{3}$$

$$
\begin{cases}
\partial_t \mu_t^c + \partial_{z_1}\mu_t^c + \partial_{z_2}\mu_t^c + \xi_c(t,\mu_t^m,\mu_t^f,\mu_t^c)\mu_t^c &= \mathcal{T}(t,\mu_t^m,\mu_t^f,\mu_t^c), \quad (t,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}_+^2,\\
\mu_t^c(\{0\}\times B) &= \mu_t^c(B\times\{0\}) = 0,\\
\mu_o^c &\in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+^2).
\end{cases}
$$

Pierwsze z równań opisuje ewolucję populacji męskiej (równanie dla populacji żeńskiej jest analogiczne), zaś drugie ewolucję par. Istotnym elementem powyższego modelu jest operator $\mathcal{T}$, który odpowiada za interakcje pomiędzy przeciwnymi płciami i jednocześnie jest głównym źródłem nieliniowości. Dla powyższego systemu udowodniliśmy twierdzenie o istnieniu, jednoznaczności i stabilności, analogiczne do Twierdzenia 2. W tym przypadku, w dowodzie wykorzystaliśmy metodę regularyzacji.

Rozdział 4 oraz Rozdział 5 poświęcone są rozwijaniu i analizie schematów numerycznych opartych o metodę cząstek i algorytm split-up dla (1). Pierwsza z metod pochodzi z fizyki matematycznej i jest szeroko stosowana do modeli opisujących zachowanie dużych grup oddziałujących ze sobą cząstek lub osobników. Jest ona z powodzeniem wykorzystywana do numerycznego rozwiązywania modeli kinetycznych [31, 33, 43, 44], równania Eulera w mechanice płynów [7, 25, 51], równania Vlasov'a w fizyce plazmowej, równania Boltzmann'a czy równania Fokker-Planck'a. Podejście to staje się coraz bardziej popularne w dynamice populacyjnej o czym świadczyć mogą między innymi prace takie jak [1, 2, 11, 21, 27, 28, 29, 42]. Powodem intensywnego rozwoju tejże gałęzi matematyki jest kompatybilność kinetycznego podejścia z danymi eksperymentalnymi, czyli z pomiarami (zazwyczaj) dyskretnymi. Wykorzystywanie metody cząstek do problemów dynamiki populacyjnej wymaga jednak dostosowania jej do specyfiki tych modeli. Warunkiem koniecznym do stosowania tej metody jest bowiem to, aby rozwiązanie było sumą delt Diraca dla każdego momentu czasu. W równaniu (1) regularyzujący efekt nielokalnego operatora całkowego sprawia, iż rozwiązanie może natychmiast przestać być sumą delt Diraca, nawet dla danych początkowych będących w takiej formie. Kolejnym problemem jest pojawianie się nowych osobników (równania dynamiki populacyjnej zazwyczaj nie są konserwatywne). Każdy krok schematu numerycznego skutkuje pojawieniem się nowych cząstek, co jest odzwierciedleniem procesu narodzin. W przypadku np. populacji komórek, które ulegają podziałowi w procesie mitozy, każdy krok skutkuje podwojeniem ilości delt Diraca, co z kolei prowadzi do nieakceptowalnych kosztów numerycznych. Innym z problemów związanym z niekonserwatywnym charakterem modeli jest brak możliwości stosowania metryk Wassersteina, o czym była już mowa powyżej.

W ramach naszej pracy dostosowaliśmy metodę cząstek do rozpatrywanych przez nas modeli. Jednym z zaproponowanych rozwiązań jest wykorzystanie algorytmu split-up. Idea tej metody polega na rozdzieleniu równania na dwa problemy o prostszej strukturze - problem z operatorem transportu i z całkowym operatorem nielokalnym. Formalnie, półgrupa generowana przez rozwiązania przedstawiona zostaje jako produkt dwóch półgrup o prostszej strukturze. Jeśli chodzi o wzrost liczby delt Diraca, stosujemy dwie metody aproksymacji takiej miary przez mniejszą liczbę delt - rekonstrukcję „równych przedziałów" oraz rekonstrukcję „równych mas". Pierwsza z ww. metod polega na zcałkowaniu danej miary μ po równych przedziałach o długości Δx i położeniu delty Diraca o odpowiedniej masie w środku każdego przedziału. Przy takiej aproksymacji odległość między miarą μ a jej aproksymacją przez sumę delt Diraca $\tilde{\mu}$ szacuje się następująco $\rho_F(\mu, \tilde{\mu}) \le \Delta x/2$. W drugim podejściu dzielimy przedział na takie podprzedziały I_j, $j = 1, \dots, N$, że $\int_{I_j} \mathrm{d}\mu$ są równe dla każdego j. Oszacowanie błędu jest tutaj podobne. Rezultatem dotyczącym metody split-up jest następujące twierdzenie dostarczające informacji o zbieżności i jej prędkości w zależności od parametrów.

Twierdzenie 4. *Niech Δt będzie długością kroku czasowego i Δx będzie parametrem (dokładnością) aproksymacji danych początkowych. Niech μ będzie rozwiązaniem* (1) *i $\tilde{\mu}$ będzie rezultatem metody split-up. Załóżmy, iż t_m jest momentem rekonstrukcji miary i niech j będzie ilością przeprowadzonych rekonstrukcji do momentu t_m. Wtedy, istnieją stałe C_1, C_2, C_3, C_4 takie że*

$$\rho_F\left(\mu_{t_m}, \mu(t_m)\right) \le C_1 \Delta t + C_2 (\Delta t)^\alpha + C_3(\Delta x) + C_4(\Delta x) j, \tag{5}$$

gdzie α związana jest z regularnością współczynników względem czasu.

W Rozdziale 5 analizujemy numeryczna metodę „Escalator Boxcar Train” opisaną ponad 20 lat temu w [16]. Metoda ta może być stosowana do szczególnego przypadku równania (1), gdzie operator całkowy redukuje się do warunku brzegowego. Idea metody EBT polega na aproksymowaniu rozkładu populacji sumą delt Diraca, z których każda reprezentuje średni stan osobników x^i oraz ich liczbę m^i w pewnych przedziałach, tzw. kohortach. Pojedynczy krok schematu polega na rozwiązaniu następującego systemu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x^i(t) = b(t, \mu_t^n)(x^i(t)), & \text{dla } i = B+1, \dots, J, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} m^i(t) = -c(t, \mu_t^n)(x^i(t)) m^i(t), & \text{dla } i = B+1, \dots, J, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \pi^B(t) = b(t, \mu_t^n)(x_b) m^B(t) + \partial_x b(t, \mu_t^n)(x_b) \pi^B(t) \\ \qquad\qquad -c(t, \mu_t^n)(x_b) \pi^B(t), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} m^B(t) = -c(t, \mu_t^n)(x_b) m^B(t) - \partial_x c(t, \mu_t^n)(x_b) \pi^B(t) \\ \qquad\qquad + \sum_{i=B}^J \beta(t, \mu_t^n)(x^i(t)) m^i(t), \end{cases} \tag{7}$$

gdzie

$$\mu_t^n = \sum_{i=B}^J m^i(t) \delta_{x^i(t)} \quad \text{oraz} \quad x^B(t) = \begin{cases} \frac{\pi^B(t)}{m^B(t)} + x_b, & \text{dla } m^B(t) > 0, \\ x_b, & \text{wpp.} \end{cases}$$

W naszej pracy po raz pierwszy (zgodnie z wiedzą autora) podajemy dowód istnienia rozwiązań systemu (6)-(7) na pewnym przedziale czasowym $[0, q^*]$, gdzie q^* zależy od współczynników modelu. Jeśli chodzi o samą metodę, pomimo iż od momentu jej opisania jest ona szeroko stosowana w naukach przyrodniczych [8, 26, 40, 52], pierwszy wynik dotyczący jej zbieżności został uzyskany dopiero kilka miesięcy temu w [6]. Rezultat ten nie podaje jednak oszacowania na prędkości zbieżności. W niniejszej rozprawie uogólniamy powyższy wynik dowodząc zbieżności schematu EBT w przestrzeni $(\mathcal{M}^+, \rho_F)$ i jednocześnie podając oszacowanie na rząd zbieżności.

Literatura

[1] A.S. Ackleh, B.G. Fitzpatrick, H.R. Thieme, *Rate distributions and survival of the fittest: A formulation on the space of measures,* Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 5: 917–928, 2005.

[2] A. S. Ackleh, K. Ito, *Measure-valued solutions for a hierarchically size-structured population,* Journal of Differential Equations, 217: 431–455, 2005.

[3] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, *Gradient Flows in Metric spaces and in the space of Probability Measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[4] O. Arino, R. Rudnicki, *Phytoplankton dynamics*, Comptes Rendus Biologies, 327(11):961–969, 2004.

[5] J. Banasiak, W. Lamb, *Coagulation, fragmentation and growth processes in a size structured population*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 11:563–585, 2006.

[6] A. Brannstrom, L. Carlsson, D. Simpson, *On the convergence of the escalator boxcar train*, arXiv:1210.1444v1.

[7] Y. Brenier, W. Gangbo, G. Savaré, M.Westdickenberg, *Sticky particle dynamics with interactions,* J. Math. Pures Appl. 9: 577–617, 2013.

[8] C.J. Briggs, R.M. Nisbet, W.W. Murdoch, T.R. Collier, J.A.J. Metz, *Dynamical effects of host-feeding in parasitoids*, Journal of Animal Ecology, 64:403–416, 1995.

[9] R. Bürger, *The mathematical theory of selection, recombination, and mutation*, Wiley Series in Mathematical and Computational Biology, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2000.

[10] J. A. Cañizo, J. A. Carrillo, S. Cuadrado, *Measure solutions for some models in population dynamics*, Acta Applicandae Mathematicae, 1–16, 2012.

[11] J.A. Cañizo, J.A. Carrillo, J. Rosado, *A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 21(3):515–539, 2011.

[12] J. A. Carrillo, R. M. Colombo, P. Gwiazda, A. Ulikowska, *Structured populations, cell growth and measure valued balance laws*, Journal of Differential Equations, 252:3245–3277, 2012.

[13] J. Carrillo, M. Difrancesco, A. Figalli, T. Laurent, D. Slepcev, *Global-in-time weak measure solutions, finite-time aggregation and confinement for nonlocal interaction equation,* Duke Math. J., 156, No 2 (2011), pp. 229–271.

[14] R.M. Colombo, A. Corli, *A semilinear structure on semigroups in a metric space*, Semigroup Forum, 68(3):419–444, 2004.

[15] R.M. Colombo, G. Guerra, *Differential equations in metric spaces with applications*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 23(3):733–753, 2009.

[16] A.M. de Roos, *Numerical methods for structured population models: the escalator boxcar train*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 4(3):173–195, 1988.

[17] O. Diekmann, P. Getto, *Boundedness, global existence and continuous dependence for nonlinear dynamical systems describing physiologically structured populations*, Journal of Differential Equations, 215(2):268–319, 2005.

[18] O. Diekmann, J.A.J. Metz, *The dynamics of physiologically structured populations*, Lecture Notes in Biomathematics, 68, springer-Verlag, Berlin, 1986.

[19] R.L. Dobrušin, *Vlasov equations*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 13(2):48–58, 96, 1979.

[20] M. Doumic, A. Marciniak-Czochra, B. Perthame, J. Zubelli, *Structured population model of stem cell differentiation*, SIAM Journal on Applied Mathematics 71:1918-1940, 2011.

[21] J. Evers, S. Hille, A. Muntean, Solutions to a measured-valued mass evolution problem with flux boundary conditions inspired by crowd dynamics, arXiv:1210.4118

[22] H. Federer, *Geometric measure theory,* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[23] P. Frasca, A. Tosin, Existence and approximation of probability measure solutions to models of collective behaviors, *Networks and Heterogeneous Media*, 6 (3):561 – 596, 2011.

[24] A. Fredrickson, *A mathematical theory of age structure in sexual populations: random mating and monogamous models*, Mathematical Biosciences, 10:117–143, 1971.

[25] W. Gangbo, M. Westdickenberg, *Optimal transport for the system of isentropic Euler equations.* Comm. Partial Differential Equations 34: 1041–1073, 2009.

[26] R. Goetz, N. Hritonenko, A. Xabadia, Y. Yatsenko, *Using the escalator boxcar train to determine the optimal management of a size-distributed forest when carbon sequestration is taken into account*, Large-Scale Scientific Computing, vol. 4818 of Lectures Notes in Computer Science, springer, Berlin, 2008.

[27] P. Gwiazda, G. Jamróz, A. Marciniak-Czochra, *Models of discrete and continuous cell differentiation in the framework of transport equation*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 44:1103–1133, 2012.

[28] P. Gwiazda, T. Lorenz, A. Marciniak-Czochra, *A nonlinear structured population model: Lipschitz continuity of measure-valued solutions with respect to model ingredients*, Journal of Differential Equations, 248:2703–2735, 2010.

[29] P. Gwiazda, A. Marciniak-Czochra, *Structured population equations in metric spaces*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, 7:733–773, 2010.

[30] M. Gyllenberg, G.F. Webb. *Quiescence in structured population dynamics: applications to tumor growth*, volume 131 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* Dekker, New York, 1991.

[31] F.H. Harlow, *The particle-in-cell computing method for fluid dynamics*, Methods in computational physics, 3:319-343, 1964.

[32] F. Hoppensteadt, *Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1975.

[33] D. Issautier, *Convergence of a weighted particle method for solving the Boltzmann (BGK) equation*, SIAM J. Numer. Anal., 33(6):2099–2119, 1996.

[34] L. V. Kantorovich, *On a problem of Monge*, Journal of Mathematical Sciences, 133, 4:1383, 2006 (translation).

[35] L. V. Kantorovich, *On one effective method of solving certain classes of extremal problems*, Doklady Akademii Nauk SSSR, 28, 212–215, 1940.

[36] T. Kato, *Linear differential equations in Banach spaces*, Res. Rep. No. BR-11. Div. Electromag. Res., Inst. Math. Sci., New York Univ., 1955.

[37] A. McKendrick, *Application of mathematics to medical problems*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1926.

[38] G. Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 666–704, 1781.

[39] S. Müller, M. Ortiz, *On the* Γ*-convergence of discrete dynamics and variational integrators*, Journal of Nonlinear Science, 14(3):279–296, 2004.

[40] L. Persson, K. Leonardsson, A.M. de Roos, M. Gyllenberg, B. Christensen, *Ontogenetic scaling of foraging rates and the dynamics of a size-structured consumer-resource model*, Theoretical Population Biology, 54:270–293, 1998.

[41] B. Perthame, *Transport equations in biology*, Frontiers in Mathematics, Birkhauser Verlag, Basel, 2007.

[42] B. Piccoli, F. Rossi, *Generalized Wasserstein distance and its application to transport equations with source*, arXiv:1206.3219, 2012.

[43] P.A. Raviart, *An analysis of particle methods,* In Numerical methods in fluid dynamics, Lecture Notes in Math., 243–324, Springer, Berlin, 1985.

[44] E. Tadmor, *A review of numerical methods for nonlinear partial differential equations.* Bulletin of the American Mathematical Society, 49:507-554, 2012.

[45] A. Ulikowska, *An age-structured, two-sex model in the space of Radon measures: Well posedness*, Kinetic and Related Models, 5(4), 873–900, 2012.

[46] C. Villani, *Optimal transport: old and new*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[47] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 58, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.

[48] G.F. Webb, *Periodic and chaotic behavior in structured models of cell population dynamics*, Recent Developments in Evolution Equations, Pitman Res. Notes Math. Series 324, Longman, 1995.

[49] G.F. Webb, *Structured Population Dynamics*, Banach Center Publications, vol. 63, Polish Academy of Science, Warsaw, 2004.

[50] G.F. Webb, *Theory of nonlinear age-dependent population dynamics*, vol. 89 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker Inc., New York, 1985.

[51] M. Westdickenberg, J. Wilkening, *Variational particle schemes for the porous medium equation and for the system of isentropic Euler equations*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 44(1):133–166, 2010.

[52] A. Xabadia, R.U. Goetz, *The optimal selective logging regime and the faustmann formula*, Journal of Forest Economics, 16:63–82, 2010.

[53] P.E. Zhidkov, *On a problem with two-time data for the Vlasov equation*, Nonlinear Analysis, 31(5-6):537–547, 1998.