Autoreferat rozprawy doktorskiej

Deterministyczne i statystyczne rozwiązania układu równań płynu mikropolarnego.

Agnieszka Tarasińska

Promotor: prof. dr hab. Grzegorz Łukaszewicz

Rozprawa doktorska poświęcona jest badaniu rozwiązań układu równań płynu mikropolarnego będącego uogólnieniem znanego w hydromechanice modelu Naviera-Stokesa. Rozważane w pracy równania zaproponowane zostały przez A.C.Eringena w [8]. Uwzględniają one mikrostrukturę płynu, przez którą rozumiemy mikrorotację jego cząsteczek. Eksperymenty pokazują, iż taki model lepiej odzwierciedla przepływy w mikrokanałach ([18]). Również w przypadku polimerów czy cieczy takich jak krew (czyli zawierających elementy o kształcie cylindrycznym) (np.[16]), rozważany jest model płynu mikropolarnego.
Model A.C. Eringena w przypadku trójwymiarowym opisują następujące równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\triangle u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r rot\ \omega + f(t),$$

$$div\ u = 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\triangle\omega - \beta\nabla div\ \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r\omega = 2\nu_r rot\ u + g(t).$$

Wielkość $u = (u_1, u_2, u_3)$ jest polem prędkości, funkcja p opisuje ciśnienie, natomiast $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ prędkość kątową cząsteczek. Ponadto f i g są zewnętrznymi siłami i momentami sił odpowiednio. Stałe ν, ν_r, α i β charakteryzują dany płyn. W szczególności ν jest lepkością, a ν_r tak zwaną lepkością mikrorotacji.
W rozprawie doktorskiej skupimy się na ograniczonych obszarach dwywymiarowych. Takie problemy można interpretować jako trójwymiarowe przepływy, w których cząsteczki płynu wirują wokół osi OX_3 oraz siły i momenty zewnętrzne oraz prędkość u nie zależą od trzeciej składowej x_3.
Zajmiemy się przypadkiem jednorodnych warunków brzegowych typu Dirichleta.

Pracę doktorską stanowią dwie główne części. Pierwsza z nich poświęcona jest badaniu własności deterministycznych rozwiązań opisanego wyżej układu równań dla dużych czasów. Wtym celu użyjemy teorii atraktorów cofniętych. Są one dosyć naturalnym uogólnieniem pojącia atraktora globalnego w momencie, kiedy mamy do czynienia z nieautonomicznym układem równań.
Atraktor cofnięty w przestrzeni metrycznej X jest rodziną zbiorów indeksowanych zmienną czasową $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ takich, że każdy zbiór $A(t)$ jest zwarty w przestrzeni X. Ponadto

rodzina ta przyciąga pewną z góry określoną klasę zbiorów X, a także spałnia warunek niezmienniczości.

Streśćmy krótko historię i dotychczasowe rezultaty dotyczące teroii atraktorów w zastosowaniu do równań płynu mikropolarnego.
Pierwszym artykułem poświęconym atraktorom w dwuwymiarowych przepływach jest praca G.Łukaszewicza [12], w której autor pokazuje istnienie atraktora globalnego w przestrzeni L^2 (w przypadku, gdy siły i momenty sił działające na układ nie zależą od czasu). Następnie temat badań kontynuują w [6] J.Chen, Z.M.Chen i B.Dong uzyskując wynik dotyczący lepszej regularności tego atraktora. Powstają też prace poświęcone szacowaniu wymiaru atraktora globalnego (np.[2]).
W przypadku przepływów w obszarach nieograniczonych, mamy artykuł G.Łukaszewicza i W.Sadowskiego ([13]). Autorzy uogólniają w nim metodę energetyczną R.Rosy na przypadek nieautonomicznego układu płynu magneto-mikropolarnego w obszarze nieograniczonym.
Wracając do atraktorów cofniętych dla płynów mikropolarnych, poświęcona jest im praca [5], w której pokazane jest istnienie atraktora w przestrzeni L^2. W przypadku, gdy siły zewnętrzne są funkcjami prawie okresowymi, J.Chen, B-Q.Dong i Z-M.Chen ([7]) udowadniają istnienie atraktora cofniętego w przestrzeni H^1.

W rozprawie doktorskiej rozwijamy badania dotyczące atraktorów cofniętych dla przepływu płynu mikropolarnego. W pierwszych rozdziałach przytaczamy uzyskane przez innych wyniki, a także ogólną teorię.

Rozdział 4 poświęcony jest zagadnieniu konwekcji ciepła w płynie mikropolarnym. Zajmujemy się dwywumiarowym obszarem, którego dolna część brzegu jest podgrzewana. Rozważamy więc warunek brzegowy, który jest funkcją zmieniającą się w czasie. Pokazujemy istnienie jednoznacznych słabych rozwiązań dla takiego problemu. Następnie korzystamy z twierdzenia o istnieniu atraktorów cofniętych zaczerpniętego z pracy [4] autorstwa T.Caraballo, G.Łukaszewicza i J.Real. Używamy też metody równania energetycznego R.Rosy ([19]) uogólnionej w [17] i [3] na przypadek nieautonomiczny. W ten sposób pokazujemy istnienie atraktora cofniętego w przestrzeni L^2 dla rozważanego problemu. Następnie szacujemy jego wymiar fraktalny korzystając z wersji nierówności Lieba-Thirringa ([2]), która uwzględnia geometrię obszaru.
Rezultaty zaprezentowane w rozdziale 4 rozprawy są treścią artykułu [21].

Rozdział 5 poświęcony jest układowi równań płynu mikropolarnego z warunkami początkowymi należącymi do przestrzeni Sobolewa H^1. Przypomnijmy, że podobny problem był rozważany w pracy [7]. We wspomnianym artykule udowodniono, że jeśli siły zewnętrzne są funkcjami prawie okresowymi, atraktor cofnięty w przestrzeni H^1 istnieje.
W rozprawie doktorskiej pokazujemy, że założenie o siłach i momentach sił można osłabić. Dokładniej, warunek

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda s}\{||f(s)||_{L_2}^2 + ||g(s)||_{L_2}^2\}ds < \infty \quad \text{dla każdego } t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

dla pewnej stałej $\lambda > 0$ wystarcza, aby udowodnić istnienie atraktora cofniętego w H^1. Korzystamy tu z nowych metod przedstawionych w [20] i [23], opartych na pojęciu miary

niezwartości Kuratowskiego oraz uogólnionych dalej w [10]. Udowadniamy też bardzo przydatną nierówność typu Gronwall'a.
Rezultat ten został opublikowany w [14].

Rozdział 6 rozprawy jest kontynuacją poprzedniego. Zainspirowany został pracą [6]. Rozważamy nieautonomiczne równania płynu mikropolarnego. Pokazujemy, że przy pewnych założeniach podobnych w charakterze do (1), atraktor cofnięty należy do przestrzeni H^2.

Druga część rozprawy doktorskiej poświęcona jest rozwiązaniom statystycznym dla dwuwymiarowego modelu płynu mikropolarnego. Zanim opiszemy rezultaty, wspomnijmy, iż idea statystycznego opisu przepływu za pomocą takich rozwiązań motywowana jest zjawiskiem turbulencji. Historycznie wywodzi się od E.Hopfa ([15]), który jako pierwszy sformułował tzw. równanie Hopfa, czyli równanie opisujące ewolucję funkcjonałów charakterystycznych pewnej rodziny miar. Pracę nad problemem kontynuował C.Foias ([9]), definiując rozwiązanie statystyczne jako pewną rodzinę miar indeksowanych zmienną czasową. Przy danej mierze początkowej μ_0 opisującej rozkład warunków początkowych, miary μ_t opisują rozkład prędkości płynu w chwili t.
Inna koncepcja rozwiązań statystycznych wywodzi się od M.Vishika ([22]). Ten wprowadza miarę skupioną na całych trajektoriach układu.

Obaj autorzy zajmowali się przepływami modelowanymi za pomocą równań Naviera-Stokesa. Jesĺi zaś chodzi o równania płynu mikropolarnego, powstała praca, której autorem jest G.Ahmadi ([1]). Formułuje on w niej tzw. równania Reynoldsa opisujące ewolucję średniej prędkości oraz średniej prędkości kątowej. Nie są one jednak we wspomnianej pracy wyprowadzone w sposób ścisły matematycznie. Artykuł ten był inspiracją do zajęcia się zagadnieniem rozwiązań statystycznych dla modelu płynu mikropolarnego.

Rozdział 7 rozprawy poświęcony jest przypadkowi, gdy zewnętrzne siły i momenty sił nie zależą od czasu. Wtedy istnienie rozwiązań statystycznych w obszarach dwuwymiarowych jest właściwie oczywiste. W związku z tym skupiamy się na dowodzie twierdzenia mówiącego, iż stacjonarne rozwiązanie statystyczne jest tym samym, co miara niezmiennicza dla rozpatrywanego układu równań płynu mikropolarnego. Nośnik tejże niezmienniczej miary zawarty jest w globalnym atraktorze.
Następnie wyprowadzamy równania Reynoldsa precyzując, czym są średnia prędkość i średnia prędkość kątowa płynu.

W rozdziale 8 pracy zajmujemy się niautonomicznym układem równań płynu mikropolarnego. Pokazujemy istnienie niestacjonarnych rozwiązań statystycznych. Korzystamy tu zarówno z koncepcji C.Foiasa, jak i M.Vishika. Pokazujemy, iż otrzymana na dwa sposoby rodzina miar μ_t ma nośnik zawarty w atraktorze cofniętym, o ile miara początkowa należy do cięcia tego atraktora.

Literatura

[1] G.Ahmadi, *Turbulent shear flow of micropolar fluids,* Int. J. Engng Sci. Vol.13 (1975), 959-964.

[2] M.Boukrouche, G.Łukaszewicz, *Attractor dimension estimate for plane shear flow of micropolar fluid with free boundary*, Math. Methods Appl. Sci., Vol.28 (2005), 1673-1694.

[3] T.Caraballo, G.Łukaszewicz, and J.Real, *Pullback attractors for non-autonomous 2D-Navier-Stokes equations in some unbounded domains*, CR. Acad. Sci. Paris, Ser. 1, Vol.342 (2006), 263-268.

[4] T. Caraballo, G. Łukaszewicz, and J.Real, *Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems*, Nonlinear Analysis, Vol.64 (2006), 484-498.

[5] G.Chen, *Pullback atrractor for non-homogeneous micropolar fluid flows in non-smooth domains*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 10 (2009), 3018-3027.

[6] J.Chen, Z-M.Chen, and B-Q.Dong, Existence of H^2-global attractors of two-dimensional micropolar fluid flows, J.Math. Anal. Appl., Vol.322 (2006), 512-522.

[7] J.Chen, B-Q.Dong, and Z-M.Chen, *Pullback attractors of non-autonomous micropolar fluid flows*, J.Math. Anal. Appl., Vol.336 (2007), 1384–1394.

[8] A.C. Eringen, *Theory of micropolar fluids*, J. Math. Mech. Vol.16 (1966), 1–18.

[9] C.Foias, *Statistical Study of Navier-Stokes Equations I*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova, Vol 48 (1973), 219-348.

[10] Y. Li, C.K. Zhong, *Pullback attractors for the norm-to-weak continuous process and application to the nonautonomous reaction-diffusion equations*, Applied Mathematics and Computation, vol. 190, (2007), 1020–1029.

[11] G.Łukaszewicz, *Micropolar Fluids. Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1999.

[12] G.Łukaszewicz, *Long time behavior of 2D Micropolar Fluid Flows*, Math. Comp. Mod. Vol.34 (2001), 487–509.

[13] G.Łukaszewicz, W.Sadowski, *Uniform attractor for 2D magneto-micropolar fluid flow in some unbounded domains*, Z.Angew.Math.Phys., Vol.55 (2004), 247-257.

[14] G.Łukaszewicz, A.Tarasińska, *H1-pullback attractors for nonautonomous micropolar fluid equations in a bounded domain*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol 71 (2009) 782-788.

[15] E.Hopf, *Statistical Hydrodynamics and functional calculus*, J.Rat.Mech.Anal. 1 (1952), 87-123.

[16] Kh.S.Mekheimer, M.A.El Kot, *The micropolar fluid model for blood flow through a taped artery with a stenosis*, Acta Mechanica Sinica, Vol.24, Nr 6 (2008).

[17] I.Moise, R.Rosa, X.Wang, *Attractors for noncompact nonautonomous systems via energy equations*, Discrete and Continous Dynamical Systems 10 (2004) 473-496.

[18] I.Papautsky, J.Brazzle, T.Ameel, B.Frazier *Laminar fluid behavior in microchannels using micropolar fluid theory*, Sensors and actuators A: Physical 73 (1999) 101-108.

[19] R.Rosa, *The global attractor for the 2D Navier-Stokes flow on some unbounded domains*, Nonlinear Analysis TMA 32(1) (1998)(1) 71-8

[20] H. Song, H. Wu, *Pullback attractors of nonautonomous reaction-diffusion equations*, J.Math. Anal. Appl. Vol.325 (2007), 1200–1215.

[21] A.Tarasińska, *Pullback Attractor for Heat Convection Problem in a Micropolar Fluid*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, in press, available on-line since 18.03.2009.

[22] M.Visik, A.Fursikov, *Matematiceskie zadaci statisticieskoj gidromechaniky.*

[23] Y.J.Wang, C.K.Zhou, and S.F.Zhou, *Pullback attractors of nonautonomous dynamical systems*, Discrete Cont. Dyn.Syst., Vol.16 (2006), 587–614.