mgr Agnieszka Stocka
Instytut Matematyki
Uniwersytet w Białymstoku

O uogólnieniach skończonych grup modularnych

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Początki teorii krat sięgają pierwszej połowy XIX wieku, a systematyczne badania tej dziedziny rozpoczęły się prawie sto lat później, w latach trzydziestych XX wieku. Jednym ze źródeł motywacji dla tych badań było zapotrzebowanie z innych działów matematyki w tym z teorii pierścieni, skąd m.in. wywodzi się pojęcie krat modularnych, sformułowane jeszcze w dziewiętnastym wieku przez R. Dedekinda. Przypomnijmy, że kratę L nazywamy *modularną*, jeśli dla dowolnych elementów $x, y, z \in L$,

$$x \leq y \implies x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y.$$

Badania związków między grupami a ich kratami podgrup zapoczątkowane zostały przez A. Rottländer w latach dwudziestych XX wieku. Z czasem okazało się, że kratowe podejście przynosi wiele korzyści również teorii grup, która teorii krat dostarczyła znacznie więcej motywacji niż teoria pierścieni. Jedną z przyczyn tych wzajemnych relacji wyjaśnia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 ([23],[11])**.** *Dla dowolnej kraty (kraty skończonej) L istnieje grupa (grupa skończona) G, taka że L jest izomorficzna z pewną podkratą kraty wszystkich podgrup grupy G.*

Związki własności grupy z własnościami kraty jej podgrup mają charakter swego rodzaju sprzężenia zwrotnego. Nas interesować będą kratowe motywacje w teorii grup wyrosłe z klasycznych zagadnień sięgających pojęcia krat modularnych.

Grupy, których kraty podgrup należą do ważnych klas krat, takich jak właśnie kraty modularne lub rozdzielne były skutecznie badane już w latach trzydziestych XX wieku. W 1938 r. O. Ore ([10]) udowodnił, że grupa ma rozdzielną kratę podgrup wtedy i tylko wtedy, gdy jest lokalnie cykliczna. W latach 1941-43 K. Iwasawa ([5, 6]) scharakteryzował modularne grupy lokalnie skończone i modularne grupy zawierające element nieskończonego rzędu. Klasyfikację grup modularnych zakończył R. Schmidt dopiero w 1986 roku opisem modularnych grup torsyjnych ([13]), co było możliwe dzięki konstrukcjom grup Tarskiego, uzyskanym przez A. Olshanskii'ego na początku lat osiemdziesiątych XX wieku.

Przegląd najważniejszych wyników uzyskanych przed rokiem 1994 i dotyczących relacji między własnościami grup i krat ich podgrup można znaleźć w obszernej (bo liczącej prawie 600 stron) monografii R. Schmidta poświęconej tej tematyce ([14]).

W niniejszej pracy zajmować się będziemy skończonymi grupami, dla których grupy modularne stanowią ważny punkt odniesienia. Przypomnijmy więc opis struktury skończonych grup modularnych. Istotną rolę odgrywają tu skończone p-grupy i pewne $\{p, q\}$-grupy o szczególnej postaci, zwane P^*-grupami. Skończone modularne p-grupy można, dla skrótu, scharakteryzować jako te, które nie zawierają sekcji izomorficznej z nieabelową grupą o wykładniku p i rzędu p^3 dla $p > 2$ lub diedralną grupą rzędu 8 dla $p = 2$. Nieabelową grupę G nazywamy *P^*-grupą*, jeśli jest iloczynem półprostym normalnej elementarnej abelowej p-grupy P i q-podgrupy Sylowa $\langle y \rangle$, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Przy tym y działa na P przez automorfizm potęgowy rzędu q.

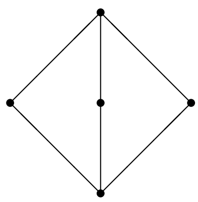
Twierdzenie 2 ([14]). *Skończona grupa G jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzna z jedną z następujących grup:*

(a) *modularną p-grupą;*

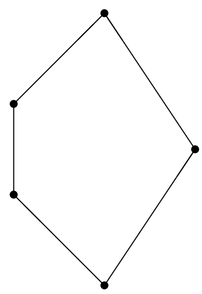
(b) *P^*-grupą;*

(c) *iloczynem prostym grup danych w (a) i (b), których rzędy są parami względnie pierwsze.*

Grupy modularne mają jeszcze jedną charakteryzację opartą na znanym opisie krat modularnych: *Krata L jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy L nie zawiera podkraty izomorficznej z kratą $\mathcal{N}_5$.*



$\mathcal{M}_3$



$\mathcal{N}_5$

Rysunek 1

Opis grup, których kraty podgrup nie zawierają pewnych szczególnych podkrat jest jednym z interesujących kierunków rozwoju teorii krat podgrup. Oprócz grup modularnych takimi są również grupy rozdzielne, tzn. grupy których kraty podgrup nie zawierają ani $\mathcal{N}_5$ ani $\mathcal{M}_3$. W ramach badań w tym obszarze, R. Schmidt opisał m.in. skończone grupy z planarną kratą podgrup ([16, 17]) oraz skończone grupy, których kraty podgrup nie zawierają podkraty izomorficznej z kratą podgrup grupy diedralnej rzędu 8 ([18]).

Motywacja dla badań, którymi zajmujemy się w pracy, sięga do zagadnień z teorii pierścieni i modułów, które przeniesione do teorii krat dały w następstwie interesujący impuls do badań w teorii grup. W latach osiemdziesiątych

P. Grzeszczuk i E. Puczyłowski podjęli udaną próbę uogólnienia pojęcia wymiaru jednolitego modułów (zwanego też wymiarem Goldiego). W [4] rozszerzyli oni to pojęcie na kraty modularne z zerem i wykazali, że wymiar jednolity dowolnego modułu jest równy wymiarowi kraty wszystkich podmodułów tego modułu. W pracy [8] J. Krempa i B. Terlikowska-Osłowska pokazali, że wymiar jednolity jest dobrze określony w znacznie szerszej klasie krat, nazwanych tam „permutable", a obecnie nazywanych *kratami zrównoważonymi.* Tam też wprowadzono pojęcie *krat silnie zrównoważonych* („globally permutable") i ich silnego wymiaru jednolitego. Grupy skończone, których kraty podgrup lub kraty do nich dualne są silnie zrównoważone, będą właśnie stanowić przedmiot naszych badań.

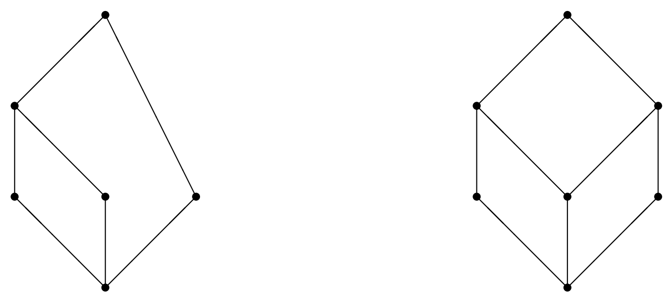
Warto odnotować, że niezależnie od [8], klasa krat zrównoważonych pojawiła się w pracy Zolotareva ([24]).

Kratę L nazywamy *silnie zrównoważoną*, jeśli dla dowolnych elementów $x, y, z \in L$,

$$(x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge z) = x \wedge y \wedge z \implies ((y \vee z) \wedge x) = x \wedge y \wedge z.$$

W pracy [8] została także podana charakteryzacja krat silnie zrównoważonych analogiczna do charakteryzacji krat modularnych i rozdzielnych:

Skończona krata jest silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podkraty izomorficznej ani z $\mathcal{T}_1$, ani z $\mathcal{T}_2$.



$\mathcal{T}_1$ $\mathcal{T}_2$

Rysunek 2

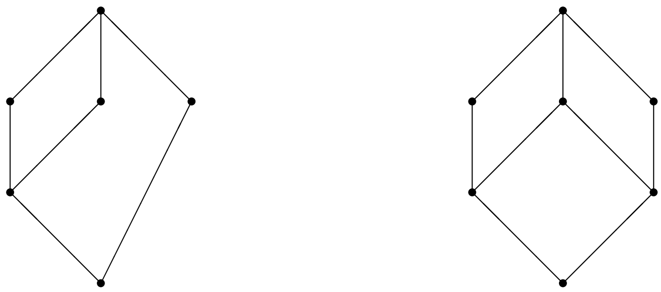
Przytoczone charakteryzacje pokazują, że dowolna krata modularna jest kratą silnie zrównoważoną.

W przeciwieństwie do krat modularnych i rozdzielnych, które charakteryzują się tym, że kraty do nich dualne są odpowiednio modularne i rozdzielne, krata dualna do kraty silnie zrównoważonej na ogół nie jest silnie zrównoważona. Zatem kraty dualnie silnie zrównoważone tworzą nową klasę krat i można dla nich zdefiniować pojęcie silnego wymiaru jednolitego.

Kratę L nazywamy więc *dualnie silnie zrównoważoną*, jeśli dla dowolnych elementów $x, y, z \in L$,

$$(x \vee y) \wedge ((x \wedge y) \vee z) = x \vee y \vee z \implies ((y \wedge z) \vee x) = x \vee y \vee z.$$

Klasa ta również posiada kraty testowe i są one dualne do testowych krat dla klasy krat silnie zrównoważonych.



$\mathcal{D}_1$ $\mathcal{D}_2$

Rysunek 3

W niniejszej pracy przedstawiamy opis grup skończonych, których kraty podgrup są silnie zrównoważone lub dualnie silnie zrównoważone. W oparciu o wspomniane wyżej związki z wymiarem jednolitym modułów, badamy również własności wymiarów (kowymiarów) jednolitego i silnie jednolitego, wprowadzonych odpowiednio we wspomnianych klasach grup.

Wszystkie rozważane w rozprawie kraty i grupy są skończone. Pierwszy rozdział zawiera wprowadzenie do problematyki z punktu widzenia teorii krat. Za [8] i [24] przytaczamy tu charakteryzację skończonych krat silnie zrównoważonych i dualnie silnie zrównoważonych, definicje i własności silnego wymiaru jednolitego i silnego kowymiaru jednolitego. Część faktów przedstawiamy wraz z dowodami, jeśli założenie o skończoności kraty umożliwiło ich uproszczenie.

W rozdziale 2 przedstawiamy kompletną klasyfikację grup skończonych z silnie zrównoważoną kratą podgrup, czyli *grup silnie zrównoważonych*. W tej klasyfikacji ważną rolę odgrywają $P^{\#}$-grupy, będące odpowiednikami P^*-grup występujących w opisie skończonych grup modularnych.

Nieabelową grupę G nazywamy *$P^{\#}$-grupą*, jeśli G jest iloczynem półprostym normalnej elementarnej abelowej p-podgrupy Sylowa P i q-podgrupy Sylowa $\langle y \rangle$, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Przy tym y działa na P przez automorfizm potęgowy rzędu q^m, dla pewnego $m \geq 1$.

Twierdzenie 3. *Skończona grupa G jest silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy G jest izomorficzna z jedną z następujących grup:*

(a) *modularną p-grupą;*

(b) *$P^{\#}$-grupą;*

(c) *iloczynem prostym grup danych w (a) i (b), których rzędy są parami względnie pierwsze.*

Dowód tego twierdzenia wynika z dość skomplikowanych i żmudnych rozważań. Najpierw, na podstawie klasyfikacji minimalnych skończonych grup prostych dowodzimy, że każda grupa silnie zrównoważona jest rozwiązalna. Następnie pokazujemy, że są one superrozwiązalne, co w dalszej kolejności prowadzi do uzyskania wspomnianego wyżej rozkładu na iloczyn prosty i postaci jego czynników. Jak widać z Twierdzenia 3 i definicji $P^{\#}$-grup, w klasie skończonych grup nilpotentnych własność modularności jest równoważna własności silnego zrównoważenia. Natomiast silnie zrównoważone grupy nienilpotentne na ogół nie są modularne, chociaż algebraiczna struktura $P^{\#}$-grup bardzo przypomina strukturę P^*-grup. Charakteryzację silnie zrównoważonych grup lokalnie skończonych można znaleźć w [12].

Wyniki przedstawione w rozdziale 2 pochodzą z pracy [2], ale w stosunku do oryginalnych dowodów wprowadzono tu pewne ulepszenia. Inne modyfikacje tego dowodu podał R. Schmidt w [15].

Rozdział 3 poświęcony jest grupom skończonym, których kraty podgrup są dualnie silnie zrównoważone, czyli *grupom dualnie silnie zrównoważonym.* Podobnie jak grupy silnie zrównoważone, one również są rozwiązalne, ponadto rozkładają się na iloczyn prosty p-grup i $\{p,q\}$-grup dualnie silnie zrównoważonych, których rzędy są parami względnie pierwsze. Tutaj również klasyfikacja minimalnych grup prostych okazała się użyteczna. Jednakże opis czynników prostych jest już zupełnie inny. Po pierwsze p-grupy dualnie silnie zrównoważone stanowią klasę szerszą niż p-grupy modularne.

Twierdzenie 4. *Niech G będzie p-grupą i $p > 2$. G jest dualnie silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna podgrupa grupy G jest albo potęgowa, albo jest generowana przez dwa elementy.*

Twierdzenie 5. *Niech G będzie dualnie silnie zrównoważoną 2-grupą. Wówczas dla dowolnych podgrup $H \lhd K$, $\Omega_1(K/H)$ jest abelowa lub $rank(K/H) = 2$.*

Dla $p > 2$, podobnie jak w przypadku modularnym, p-grupa G jest dualnie silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera sekcji, która jest iloczynem prostym grupy rzędu p^3 i wykładniku p oraz grupy cyklicznej rzędu p. Dla $p = 2$ taki przejrzysty opis dotyka wyjątkowo trudnych zagadnień związanych z klasyfikacją 2-grup rangi 2, która od lat stanowi jedno z ważnych nierozwiązanych zagadnień teorii skończonych p-grup. Po drugie, opis $\{p,q\}$-grup dualnie silnie zrównoważonych jest również zupełnie inny niż ich odpowiedników silnie zrównoważonych.

Twierdzenie 6. *Niech G będzie nienilpotentną $\{p,q\}$-grupą. Jeśli G jest dualnie silnie zrównoważona, to G jest iloczynem półprostym normalnej p-podgrupy Sylowa P i q-podgrupy Sylowa Q dla pewnych liczb pierwszych p i q. Ponadto*

(a) *P jest potęgowa lub jest generowana przez dwa elementy;*
(b) *$Q = \langle y \rangle$ jest cykliczna i $y^q \in C_P(G)$;*
(c) *Q działa na $P/\Phi(P)$ potęgowo lub nieprzywiedlnie.*

Ważną konsekwencją otrzymanych charakteryzacji grup silnie zrównoważonych i dualnie silnie zrównoważonych jest

Wniosek 7. *Skończona grupa jest silnie zrównoważona i dualnie silnie zrównoważona wtedy i tylko wtedy, gdy jest modularna.*

Jest to o tyle interesujące, że krata zwana pieciokątem, jest zarówno silnie zrównoważona, jak i dualnie silnie zrównoważona, ale nie jest modularna. Wyniki rozdziału 3 są oparte na pracy [3].

W rozdziale 4 na bazie rezultatów z rozdziałów 2 i 3 przedstawiamy sposób wyznaczania wymiarów jednolitych i kowymiarów jednolitych krat podgrup grup silnie zrównoważonych i odpowiednio dualnie silnie zrównoważonych. Pokazujemy m.in. że, zarówno jednolity, jak i silnie jednolity wymiar grup silnie zrównoważonych jest monotoniczny tzn. jego wartość dla sekcji nie jest większa, niż dla grupy i w pewnym sensie jest addytywny tzn. wymiar iloczynu półprostego jest sumą wymiarów czynników. Każda grupa silnie zrównoważona podobnie, jak skończone p-grupy, charakteryzuje się tym, że wszystkie jej minimalne zbiory generatów są równoliczne. Dowodzimy, że w grupach silnie zrównoważonych (z wyjątkiem tych, które zawierają grupę kwaternionów, jako czynnik prosty) właśnie moce tych zbiorów są równe obu wymiarom, jednolitemu i silnie jednolitemu. W szczególności więc, w klasie tych grup, poza wskazanym wyjątkiem, oba wymiary się pokrywają.

Inaczej wygląda sytuacja z kowymiarami, jednolitym i silnie jednolitym. Nawet w klasie grup dualnie silnie zrównoważonych te kowymiary nie pokrywają się. Pokazujemy m.in. że, kowymiar jednolity dualnie zrównoważonej grupy G jest równy mocy największego zbioru wśród minimalnych zbiorów generujących grupę G. Silny kowymiar jednolity natomiast jest równy mocy największego zbioru wśród minimalnych zbiorów generujących dowolną podgrupę grupy G. Te wyniki mają bezpośredni związek z badaniami J. Whistona z jego rozprawy doktorskiej [21] i prac [20], [22].

Warto odnotować, że próby liczenia wymiarów jednolitych były podejmowane przez innych autorów również w innych klasach grup, niż silnie zrównoważone. Pewne wyniki na ten temat można znaleźć np. w pracach [1, 9].

Część przedstawionych w tym rozdziale wyników pochodzi z publikacji [7].

Literatura

[1] C. Bagiński, J. Krempa, *On a characterization of infinite cyclic groups,* Publ. Math. Debrecen 63(2003), no.1-2, 249-254.

[2] C. Bagiński, A. Sakowicz, *Finite groups with globally permutable lattices of subgroups,* Colloq. Math. 82(1999), no.1, 65-77.

[3] C. Bagiński, A. Stocka, *Finite groups with L-free lattices of subgroups,* praca przyjęta do druku w Illinois J. Math.

[4] P. Grzeszczuk, E. R. Puczyłowski, *On Goldie and dual Goldie dimension,* J. Pure Appl. Algebra 31(1984), 47-54.

[5] K. Iwasawa *Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen,* J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo. Sect. I. 4(1941), 171-199.

[6] K. Iwasawa, *On the structure of infinite M-groups,* Jap. J. Math. 18(1943), 709-728.

[7] J. Krempa, A. Sakowicz, *On uniform dimension of finite groups,* Colloq. Math. 89(2001), no.2, 223-231.

[8] J. Krempa, B. Terlikowska-Osłowska, *On uniform dimension of lattices,* in: Contributions to General Algebra 9, Holder-Pichler-Tempsky, Wien, 1995, 219-230.

[9] I. Malinowska, *On finite nearly uniform groups,* Publ. Math. Debrecen 69(2006), no.1-2, 155-169.

[10] O. Ore, *Structures and group theory. II,* Duke Math. J. 4(1938), no.2, 247–269.

[11] P. Pudlak, J. Tuma, *Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice,* Algebra Universalis 10(1980), 74-95.

[12] A. Sakowicz, *On strong uniform dimension of locally finite groups,* Colloq. Math. 95(2003), no.2, 207-216.

[13] R. Schmidt, *Gruppen mit modularem Untergruppen verband*, Archiv Math. 46(1986), 118-124

[14] R. Schmidt, *„Subgroup Lattices of Groups",* Walter de Gruyter, Berlin 1994.

[15] R. Schmidt, *L-free groups*, Illinois J. Math. 47(2003), no.1-2, 515-528.

[16] R. Schmidt, *Planar subgroup lattices*, Algebra Universalis 55(2006), 3-12.

[17] R. Schmidt, *On the occurrence of the complete graph K_5 in the Hasse graph of a finite group*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 115(2006), 99-124.

[18] R. Schmidt, *L_{10}-free groups*, J. Group Theory 10(2007), 613-631.

[19] M. Suzuki, *„Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups",* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1956.

[20] J. Whiston, *Maximal independent generating sets of the symmetric groups,* J. Algebra 232(2000), 255-268.

[21] J. Whiston, *The minimal generating sets of maximal size of selected groups,* PhD thesis (2001)

[22] J. Whiston, J. Saxl, *On the maximal size of independent generating sets of $PSL_2(q)$,* J. Algebra 258(2002), 651-657.

[23] P. M. Whitman, *Lattices, equivalence, relations, and subgroups,* Bull. Amer. Math. Soc. 52(1946), 507-522.

[24] A. P. Zolotarev, *Balanced lattices and Goldie numbers in balanced lattices,* Sibirsk. Mat. Zh. 35(1994), 602-611.