

dr hab. Tomasz Adamowicz, prof. IMPAN
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
email: T.Adamowicz@impan.pl

Warszawa, 25 czerwca 2024r.

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR ZOFII GROCHULSKIEJ
"Differential and geometric properties of certain classes of homeomorphisms"

Rozprawa doktorska Pani Grochulskiej została napisana pod opieką Pana dra hab. Pawła Goldsteina (MIM UW). Tematyka rozprawy wyrasta z geometrycznej teorii przekształceń i geometrycznej teorii miary.

Materiał rozprawy jest oparty na następujących artykułach:

- (1) Paweł Goldstein, Zofia Grochulska, Piotr Hajłasz, *Constructing diffeomorphisms and homeomorphisms with prescribed derivative*, arXiv:2312.13078
- (2) Paweł Goldstein, Zofia Grochulska, Piotr Hajłasz, *Gluing diffeomorphisms, bi-Lipschitz mappings and homeomorphisms*, arXiv:2404.13508

Oświadczenie współautorskie (str. 19-20 doktoratu) opisuje wkład Doktorantki do powyższych publikacji. Pani Grochulska sformułowała jedno z głównych pytań rozprawy (1.2), które zainicjowało badania w rozdziale 3, wykonała główną pracę w dowodach twierdzeń 1.2 i 1.3 oraz sformułowała i udowodniła ważny wynik rozprawy, tj. twierdzenie 1.4. Jest również autorką obserwacji prowadzących do najbardziej złożonego wyniku rozprawy, tj. twierdzenia 1.5, w tym części iteracyjnej dowodu. Ponadto, rozprawa zawiera ciekawe i bardzo dobrze napisane wprowadzenie (rozdziały 1 i 2) oraz suplement, które wymagały pracy i głębokiego zrozumienia opisywanych i wykorzystanych narzędzi matematycznych. W mojej ocenie, wkład ten jest w pełni wystarczający do uznania istotności wkładu oraz samodzielności Autorki rozprawy. Proporcje wkładu pracy Autorki, Pawła Goldsteina (promotora) oraz Piotra Hajłaza świadczą, dodatkowo, o ich harmonijnej współpracy i dają nadzieję na jej kontynuację i rozwinięcie.

Na marginesie recenzji warto dodać również, że Pani Grochulska jest współautorką jeszcze jednego preprintu: *Characterizations of generalized John domains in $\mathbb{R}^n$ via metric duality* wspólnie z Pawłem Goldsteinem, Chang-Yu Guo, Pekka Koskela oraz Debanjan Nandi, arXiv:1710.02050 oraz publikacji: *Local estimates for vectorial Rudin-Osher-Fatemi type problems in one dimension* wspólnie z Michałem Łasicą, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 30(8), 2024.

Opis i ocena pracy

Rozprawa napisana w języku angielskim ma 121 stron, zaś jej bibliografia liczy 100 pozycji. Praca podzielona jest na pięć rozdziałów plus suplement, każdy składający się z podrozdziałów adekwatnych do podziału materiału.

Zanim przejdę do bardziej szczegółowego opisu rozdziałów, chciałbym podkreślić że praca doktorska Pani Grochulskiej jest napisana z myślą o czytelniku i posiada wysokie walory edukacyjne: twierdzenia i wyniki pomocnicze są anonsowane krótkimi wprowadzeniami, nakierowującymi czytelnika na właściwe postrzeganie wyniku; w razie potrzeby i dla wygody czytelnika wynik jest przytaczany ponownie; przedstawiona jest wyczerpująca dyskusja literatury bazowej jak również dodatkowej (łącznie z niuansami historycznymi, jak w przypadku twierdzenia 1.3

na str. 15 i twierdzenia 1.5 na str. 18), która pokazuje jak dogłębne studia na materiał rozprawy przeprowadziła Doktorantka. Poza tym, zarówno rozdziały wprowadzające (tj. pierwszy i drugi) oraz suplement rozprawy zawierają szczegółową dyskusję niezbędnych definicji i wyników, czyniąc z rozprawy pracę spójną i kompletną. Rozprawa doktorska prezentuje zatem rozległą ogólną wiedzę teoretyczną Pani Grochulskiej z matematyki. Podsumowując: w dobre napisanie rozprawy włożono duży wysiłek, który przyniósł dobre owoce.

Rozprawa jest podzielona na dwie części: pierwsza dotyczy zagadnienia przedłużania i sklejanego dyfeomorfizmów, bi-lipszycowskich homeomorfizmów oraz homeomorfizmów (rozdział 3); druga część opisuje konstrukcje dyfeomorfizmów zadaną pochodną oraz homeomorfizmów zadaną pochodną aproksymatywną (ang. approximate derivative).

Motywacją dla **pierwszej części rozprawy** jest następujące pytanie (1.2) na str. 13:

Rozważmy dwa zachowujące orientację dyfeomorfizmy F i G określone na kuli jednostkowej $B(0, 1)$ w $\mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$ i takie, że

$$F(\bar{B}(0, 1/2)) \subset G(B(0, 1)).$$

Czy można skonstruować dyfeomorfizm $H : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$, równy F na $\bar{B}(0, 1/2)$ oraz równy G blisko brzegu kuli jednostkowej? Pozytywna odpowiedź na to pytanie jest wnioskiem z ogólnego twierdzenia 1.1 dla rodziny zachowujących orientację dyfeomorfizmów klasy C^k określonych na n -wymiarowej, spójnej i orientowalnej rozmaitości klasy C^k . W twierdzeniu dyfeomorfizmy rozszerza się na zbiorach ogólniejszych niż kula, tj. na dyfeomorficznych z kulą domkniętą. Przykład z pracy Milnora ([69] w spisie literatury rozprawy) pokazuje, że takie założenie jest niezbędne.

Twierdzenie 1.1 jest następnie uogólnione dla zachowujących orientację bi-lipszycowskich homeomorfizmów (twierdzenie 1.2) oraz homeomorfizmów (twierdzenie 1.3). W obu przypadkach założenie o dyfeomorficzności obszarów z kulą domkniętą jest zastąpione naturalnym odpowiednikiem. Najważniejszym narzędziem użytym w dowodzie twierdzenia 1.1 (jak również twierdzeń 1.2 i 1.3) jest tzw. „trik Palais” przedstawiony w lemacie 3.6 w rozdziale 3.2 rozprawy. Obserwacja ta pozwala rozszerzyć zachowujący orientację dyfeomorfizm obszaru (dyfeomorficznego z domkniętą kulą) do dyfeomorfizmu określonego na całej rozmaitości, który jest identycznością dostatecznie daleko od brzegu obszaru. Wykorzystując lemat A.18, dowód twierdzenia 1.1 da się sprowadzić do przypadku euklidesowego pokazanego w lemacie 3.11.

Idea dowodów twierdzeń 1.2 i 1.3 jest taka jak dla twierdzenia 1.1, ale wymagają one głębokiego wyniku Sullivana (udowodnionego przez Tukia–Väisälä), tzw. twierdzenia o stabilnych bi-lipszycowskich homeomorfizmach (patrz definicja 3.13, lemat 3.15 oraz wniosek 3.16). W jego konsekwencji (bi-lipszycowskie) homeomorfizmy można przedstawić w postaci złożenia skończonej liczby (bi-lipszycowskich) homeomorfizmów, z których każdy jest identycznością na pewnym zbiorze otwartym. Zastosowanie tej obserwacji pozwala udowodnić odpowiednik „triku Palais” dla (bi-lipszycowskich) homeomorfizmów, patrz lemat 3.22.

Twierdzenia 1.1-1.3 dotyczą trzech fundamentalnych klas przekształceń: dyfeomorfizmów oraz (bi-lipszycowskich) homeomorfizmów a wyniki pokazujące warunki rozszerzania/sklejania przekształceń są podstawowymi narzędziami teorii przekształceń. Spodziewać się zatem należy dużego zainteresowania wynikami rozdziału 3 rozprawy i związanym z nimi artykułem.

Część druga rozprawy dotyczy zagadnień konstrukcji dyfeomorfizmu o pochodnej zadanej przekształceniem mierzalnym na dowolnie dużym podzbiorze dziedziny (twierdzenie 1.4) oraz, zagadnienia bardziej ogólnego, konstrukcji homeomorfizmu o zadanej, prawie wszędzie w dziedzinie, pochodnej aproksymatywnej (twierdzenie 1.5). Inspiracją dla obu twierdzeń jest wynik Albertiego, tzw. twierdzenie Luzina dla gradientów. Dyskusja obu konstrukcji przedstawiona jest w rozdziałach 4 i 5 rozprawy i opiera się na wynikach preprintu (1) Doktorantki i Współau-

torów. Warto jednak zauważyć, że rozdział 4.4 rozprawy zawiera również wyniki nie włączone do preprintu (1).

Twierdzenie 1.4 zachodzi przy naturalnych i ogólnych założeniach, tj. ograniczoności dziedziny, dodatniego jakobianu zadanej pochodnej oraz ograniczoności całki z tego jakobianu, a konieczność tych założeń jest szczegółowo dyskutowana w rozprawie (w rozdziale 1). Twierdzenie Albertiego pozwala skonstruować funkcje współrzędne przeksztalcenia klasy C^1 o zwartym nośniku, które jednak jest tylko *lokalnym* dyfeomorfizmem. Przejście od takiego przeksztalcenia do globalnego dyfeomorfizmu jest najtrudniejszym krokiem dowodu twierdzenia 1.4 i wymaga zastosowania szeregu pomocniczych obserwacji z rozdziałów 2.7 i 4.2 rozprawy oraz twierdzenia Dacorogna–Moser dającego konstrukcję dyfeomorfizmu o zadanym jakobianie (wynik ten wykorzystuje pojęcie potoku dyfeomorfizmów, patrz rozdział A.2 rozprawy). Wykorzystując ten wynik, Pani Grochulska pokazuje lemat 4.9 oraz wniosek 4.10, o istnieniu gładkiego dyfeomorfizmu, którego jakobian jest bliski zadanej funkcji klasy L^1 na dowolnie dużym zbiorze zwartym zawartym w danym obszarze, patrz (4.20) na str. 60 doktoratu. Innym kluczowym wynikiem pomocniczym jest propozycja 4.6, która orzeka, że mając zadane dwie macierze A_1 i A_2 o dodatnich wyznacznikach porównywalnych ze sobą (patrz (4.5)), można skonstruować dyfeomorfizm kuli B na obraz $A_2(B)$, który na U - dużym podzbiorze kuli - jest kawałkami afinicznym przeksztalceniem o części liniowej (pochodnej) równej A_1 . Główna subtelność dowodu polega na konstrukcji zbioru U , poprzez odpowiedni wybór kostek (ang. cubes) i kul, patrz str. 56-58 rozprawy.

Jednym z głównych pojęć wykorzystanych w twierdzeniu 1.5 jest pojęcie pochodnej aproksymatywnej (opisane m.in. w rozdziale 2.9 rozprawy). We współczesnej analizie i geometrycznej teorii przeksztalczeń/miary pochodna aproksymatywna występuje np. w twierdzeniach o zamianie zmiennych oraz w twierdzeniach typu Lusina. Pole do zastosowań aproksymatywnej pochodnej daje również fakt, że przeksztalczenia Sobolewa i w klasie BV są aproksymatywnie różniczkowalne. Ponadto, ostatnie lata przynoszą duże zainteresowanie tym pojęciem zarówno w przypadku euklidesowym, jak również subriemannowskim (prace Pinamonti, Speight). Wynik pani Grochulskiej i Współpracowników jest bardzo ogólny, albowiem do konstrukcji homeomorfizmu p.w. aproksymatywnie różniczkowalnego o zadanej pochodnej T wystarcza mierzalność T oraz naturalny warunek zachowywania objętości (1.4 w twierdzeniu 1.5). W porównaniu do założeń twierdzenia 1.4 nie trzeba nawet zakładać dodatniości jakobianu T . Skonstruowany homeomorfizm posiada własność Lusina (N), jego odwrotność jest również p.w. aproksymatywnie różniczkowalna, a ponadto jest jednostajną granicą ciągu gładkich dyfeomorfizmów. Wnioski z twierdzenia 1.5 obejmują twierdzenie 5.2 (uogólniające wynik z pracy Goldstein–Hajłasz, ARMA 2017), wniosek 5.3 oraz twierdzenie 5.5. Ten ostatni wynik jest szczególnie ciekawy, bowiem twierdzenie 5.5 orzeka, że homeomorfizm p.w. aproksymatywnie różniczkowalny o pochodnej aproksymatywnej zadanej przeksztalceniem mierzalnym może być skonstruowany jako granica jednostajna (oraz w metryce Lusina) ciągu C^1 -dyfeomorfizmów. Zatem granice takich ciągów mogą prowadzić do bardzo nietrywialnych przeksztalczeń. Wyniki tego rodzaju pokazują jak bogata jest teoria nieliniowej elastyczności, w której często rozważa się granice ciągu dyfeomorfizmów oraz jakie niespodzianki czekają jeszcze na badaczy teorii przeksztalczeń!

Dowód twierdzenia 1.5 wymaga wyników pomocniczych przedstawionych w rozdziałach 5.2 i 5.3, z których na szczególną uwagę zasługują lemat 5.10 oraz propozycja 5.16. Pierwszym krokiem dowodu głównego wyniku jest redukcja do przypadku dodatniego jakobianu zadanego przeksztalcenia mierzalnego T , po to aby w dalszej części dowodu wykorzystać twierdzenie 1.4. Następnie, szukany homeomorfizm jest skonstruowany metodą indukcji matematycznej jako granica ciągu homeomorfizmów (Φ_k) spełniających warunki (i)–(v) na str. 90. Jednocześnie, również metodą indukcji, konstruowany jest ciąg zbiorów (C_k) spełniający powyższe warunki

(i)-(v). W rozdziale 5.4.3, Pani Grochulska bardzo szczegółowo opisuje konstrukcje homeomorfizmów Φ_1 i Φ_2 i słusznie, bo zrozumiawszy ten krok dowodu, czytelnik może łatwiej przyswoić ogólną konstrukcję opisaną w rozdziale 5.4.4.

Drobna uwaga dotycząca prezentacji w rozdziale 5.4.2: łatwiej byłoby zrozumieć warunki (ii) oraz (iii), gdyby warunek (iv) został zaprezentowany jako pierwszy warunek.

Uwagi redakcyjne i językowe

Praca jest bardzo dobrze zredagowana. Nie znalazłem ani błędów edytorskich, ani błędów typograficznych.

Podsumowanie

Całość rozprawy oceniam bardzo pozytywnie. Tak jak napisałem powyżej, rozprawa doktorska Pani Grochulskiej prezentuje szeroką ogólną wiedzę teoretyczną w dyscyplinie matematyka, szczególnie w obszarze analizy i geometrycznej teorii przekształceń, w tym geometrii dyfeomorfizmów, homeomorfizmów oraz przekształceń Sobolewa. Badane zagadnienia są zarówno nowe, a wyniki potencjalnie ważne dla rozwoju teorii przekształceń. Dowody twierdzeń (szczególnie twierdzenia 1.4 i 1.5) są bardzo złożone i wymagają wielu nietrywialnych wyników pomocniczych.

Uważam, że rozprawa Pani mgr Zofii Grochulskiej spełnia ustawowe, a także zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie jej Autorki do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.

Tomasz Adamowicz

Tomasz Adamowicz

