PODPIS ZAUFANY
JAROSŁAW
GRYTCZUK
18.10.2026 22:18:42 GMT+0200
Dokument podpisany elektronicznie
podpisem zaufanym

Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: jaroslaw.grytczuk@pw.edu.pl

Warszawa, 10.10.2026

Recenzja rozprawy doktorskiej Stanisława Kaźmierowskiego

Solving succint games

1. Tematyka rozprawy

Tematem rozprawy jest problem obliczania *równowagi Nasha* w grach o *zwięzłej reprezentacji*. Klasycznym przykładem takiej gry jest słynna gra *Pułkownik Blotto* zaproponowana w roku 1921 przez Emila Borela. Dwaj gracze, A i B, wybierają jednocześnie i niezależnie od siebie, dwa wektory o tej samej liczbie współrzędnych nieujemnych sumujących się do tej samej ustalonej wartości. O zwycięstwie decyduje liczba współrzędnych, na których jeden z wektorów jest ostro większy od drugiego. Na przykład, jeżeli A wybierze wektor $(1, 2, 3)$, a B wybierze wektor $(2, 3, 1)$, to wygrywa gracz B, natomiast przy wyborze pary $(1, 2, 3)$ i $(2, 2, 2)$ mamy remis.

Nazwa gry nawiązuje do militarnej interpretacji, w której współrzędne wektorów to pola walki, a ich wartości to liczbowa reprezentacja siły wojsk rzuconych do walki na te pola. Bez trudu wyobrazimy sobie inne interpretacje tej gry w naukach politycznych, ekonomicznych, badaniach operacyjnych, czy informatyce teoretycznej.

Zwięzłość gry polega tu na tym, że liczba możliwych strategii (czystych) jest wykładniczo duża (a nawet nieskończona) przy stosunkowo zwartym opisie gry. Formalną definicję takich gier w terminach teorii obliczeń zaproponowali w 2008 Papadimitriou i Roughgarden. Gry badane w rozprawie wykraczają nieco poza tę ścisłą definicję zachowując wszakże podobny charakter. Właściwie każda z nich stanowi jakąś odmianę modelowego Pułkownika Blotto.

2. Wyniki rozprawy

Rozprawa składa się z sześciu rozdziałów. Pierwszy i ostatni to, odpowiednio, krótki zarys tematyki oraz podsumowanie. Cztery pozostałe odpowiadają czterem opublikowanym artykułom Kandydata (numeracja (1–4) na stronie 8 rozprawy). Poniżej omówię zwięźle najważniejsze rezultaty tych prac.

2.1. **Aukcje pałeczkowe i większościowe (rozdział 2, praca (2)).** Rozdział traktuje o dwóch wariantach Pułkownika Blotto, w których wypłata gracza przyjmuje jedynie wartości ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$ i zależy jedynie od liczby pól wygranych i przegranych przez niego, oznaczanych odpowiednio przez k_W i k_L. Pierwszy z wariantów to tzw. *aukcja pałeczkowa* (wektory wybierane przez graczy interpretuje się jako oferty na aukcji), w której wypłata gracza to po prostu znak różnicy $k_W - k_L$. W drugim badanym wariancie, zwanym *aukcją*

większościową, wypłata wynosi 1, gdy $k_W > n/2$, -1, gdy $k_L > n/2$ i 0 w pozostałych przypadkach.

Stwierdzenie 2.5 mówi, że znalezienie najlepszej odpowiedzi czystej na jawnie podaną strategię mieszaną jest w obu przypadkach NP-trudne (redukcja z problemu maksymalnego pokrycia). Kontrastuje to wyraźnie z oryginalnym wariantem gry. Następnie, Kandydat dowodzi, że przy obliczaniu równowagi Nasha wystarczy ograniczyć się do strategii symetryzowanych, indeksowanych podziałami liczby zasobów na n części (Stwierdzenie 2.7). Centralnym pomysłem rozdziału jest *macierz starć* $M_{ij} = \operatorname{sign}(s_i^A - s_j^B)$ dla posortowanych wektorów. Wypłata z pary strategii symetryzowanych to średnia po $n!$ permutacjach, czyli po rozstawieniach n nieatakujących się wież na szachownicy $n \times n$ podzielonej na obszary W, T, L. Obszary W i L są „schodkowe", a T jest sumą prostokątów. Rekurencja (2.24) odcina kolejne prostokąty i zlicza rozstawienia o zadanych k_W i k_L w czasie wielomianowym (Lemat 2.13). Całość dopełnia algorytm podwójnej wyroczni (*double oracle*) z prostą heurystyką monotoniczności (Stwierdzenie 2.15). W eksperymentach daje to przyspieszenie o jeden do dwóch rzędów wielkości względem liczenia pełnej macierzy wypłat.

2.2. **Gry ataku i przechwytywania w sieciach (rozdział 3, praca (1)).** Niech G będzie grafem o $n+1$ wierzchołkach z wyróżnionym wierzchołkiem 0. Początkowo w wierzchołku 0 znajduje się gracz A (*atakujący*), zaś w pozostałych wierzchołkach ulokowani są *obrońcy*. Każdy wierzchołek $i \in [n]$ ma przypisaną parę wartości (b_i, d_i) oraz funkcję *kosztu* $c_i : [0,1] \to \mathbb{R}$. Gracz A wybiera dowolną ścieżkę prostą w grafie G o początku w wierzchołku 0 i końcu w dowolnie wybranym wierzchołku *atakowanym* t. Jeżeli uda mu się dotrzeć do tego wierzchołka otrzymuje on wypłatę b_t. Każdy obrońca i wybiera prawdopodobieństwo $x_i \in [0,1]$ określające szansę *przechwycenia* atakującego gracza A w wierzchołku i. Jeżeli obrońca i przechwyci gracza A, dostaje wypłatę wysokości d_i pomniejszoną o koszt $c_i(x_i)$. Oczywiście wybory strategii graczy (ścieżka atakującego i prawdopodobieństwa obrońców x_i) dokonywane są jednocześnie i niezależnie od siebie.

Ta wieloosobowa gra została wprowadzona przez Blocha, Chatterjee i Duttę w roku 2023. Udowodnili oni istnienie i jednoznaczność równowagi Nasha (dla strategii mieszanych) przy silnych założeniach dodatkowych (m.in. $b_i = d_i$ oraz $c_i(x) = x^2/2$, dla wszystkich $i \in [n]$). Ponadto, wyznaczyli dokładnie zbiór atakowanych wierzchołków (czyli takich, dla których prawdopodobieństwa ataku w równowadze są dodatnie) w przypadku, gdy G jest ścieżką. Problem wyznaczenia zbioru atakowanych wierzchołków w dowolnym grafie G pozostawili jednak otwarty.

Dokonania Kandydata stanowią znaczące rozszerzenie tych wyników. W szczególności, (i) podaje on przykład (Przykład 3.2) obalający nieformalną tezę Blocha i in. o uogólnieniu ich twierdzenia o jednoznaczności, uzasadniający przyjęte restrykcje na funkcje kosztów c_i; (ii) przy założeniach, że wartości b_i są parami różne, a koszty c_i ściśle wypukłe (z $c_j'(0) = 0$ i $c_j'(1) > d_j$), rozwija teorię *łączników* (wierzchołków nigdy nieatakowanych), *redukcji* sieci (usunięcia wierzchołka z dodaniem krawędzi między jego sąsiadami) i sieci *rosnących*; (iii) dowodzi, że w sieci rosnącej atakowany jest zawsze górny odcinek $\{k, \ldots, n\}$ (Stwierdzenie 3.11). W równowadze z *pełnym atakiem* (każdy wierzchołek grafu G jest atakowany)

ścieżka ataku do każdego wierzchołka jest jednoznaczna i przechodzi przez jego sąsiada o najmniejszym indeksie (Lemat 3.12), co oznacza, że owe ścieżki tworzą *drzewo*; (iv) wyprowadza kryterium istnienia równowagi z pełnym atakiem i dowodzi jej jednoznaczności (Stwierdzenia 3.14–3.16); (v) składa to w Algorytm 3, działający w czasie $O(n^3 + \Phi)$, gdzie Φ to koszt rozwiązania równania determinującego wypłatę atakującego. Dla kosztów kwadratowych daje to złożoność rzędu $O(n^3)$.

Ten rozdział uważam za najmocniejszą część rozprawy. Rozwiązuje on konkretny problem otwarty z niedawnej pracy w czołowym czasopiśmie ekonomicznym (*Theoretical Economics*), i to eleganckimi środkami kombinatorycznymi.

2.3. **Pułkownik Blotto z elastycznym rozstrzyganiem remisów (rozdział 4, praca (3)).** Model rozważany w tym rozdziale pokrywa się z klasycznym Pułkownikiem Blotto z dodatkowym warunkiem dotyczącym remisów. Mianowicie, wypłata każdego gracza to liczba pól, na których wygrywa plus liczba remisów pomnożona przez $\alpha/2$, gdzie $\alpha \in [0, 2]$ jest ustalonym parametrem. Przypadek $\alpha = 0$, $D = 120$, $n = 6$ to znana z ekonomii eksperymentalnej gra Arada i Rubinsteina. Niech n będzie parzyste, a $m = D/n$ całkowite. Wtedy każda strategia o jednostajnych rozkładach brzegowych na $\{0, \dots, 2m\}$ jest strategią równowagi dla każdego $\alpha \geqslant 0$ (Lemat 4.5). W szczególności gra Arada–Rubinsteina ma jawną równowagę o wypłacie 120/41. Zbiór równowag jest bardzo duży: każda strategia czysta z $s_i \leqslant 2m$ występuje w nośniku pewnej równowagi (Stwierdzenie 4.6). Strategie obsadzające mniej niż n^* pól (gdzie n^* jest jawną wielkością zależną od n, D, α) nie występują natomiast w żadnej równowadze (Stwierdzenie 4.7). Dla $\alpha < 2/n$ żadna strategia czysta nie jest słabo zdominowana przez inną strategię czystą (Stwierdzenie 4.9). Rozdział zawiera też równowagi o różnych wypłatach, zbudowane z rozkładów na liczbach parzystych i nieparzystych (Stwierdzenia 4.12, 4.13). Wybór równowag o jednostajnych brzegach uzasadnia kryterium odporności na zmianę α (Stwierdzenie 4.14). Argumenty są krótkie i zgrabne, a wyniki pomagają interpretować dane eksperymentalne.

2.4. **Pułkownik Blotto z kosztami (rozdział 5, praca (4)).** W rozważanym wariancie gracze nie muszą wykorzystać całego budżetu i płacą koszty pozyskania zasobów (g^P) oraz ich rozmieszczenia na polach (c_i^P). Rozdział opiera się na dwóch obserwacjach. Po pierwsze, po dodaniu każdemu graczowi kosztów przeciwnika otrzymujemy grę o sumie zerowej, strategicznie równoważną wyjściowej (mającą ten sam zbiór równowag Nasha) (Stwierdzenie 5.2). Stąd wynikają wymienność i wypukłość zbiorów równowag. Po drugie, niewykorzystane zasoby można przenieść na dodatkowe pole $n + 1$ z wypłatą $-g^A(D_A - s^A_{n+1}) + g^B(D_B - s^B_{n+1})$ (Stwierdzenie 5.7). Gra z kosztami staje się więc zwykłą grą Pułkownik Blotto z $n + 1$ polami. Program liniowy Behnezhada i in. daje wtedy algorytm wielomianowy względem n i D (Twierdzenie 5.10). Rozdział kończą eksperymenty, porównanie z modelem ciągłym Robersona i Kvasova oraz wynikająca z eksperymentów Hipoteza 1 o liczbie zasobów pozyskiwanych w równowadze przy kosztach liniowych.

3. Konkluzja

Rozprawa realizuje spójny program badawczy obejmujący rozmaite modyfikacje gry Pułkownik Blotto. Motywem wiodącym jest wpływ owych modyfikacji na obliczalność równowag Nasha. Wyniki opublikowano w dobrych miejscach: na czołowych konferencjach sztucznej inteligencji i systemów wieloagentowych (AAAI, AAMAS), na sympozjum SAGT oraz w *Journal of Economic Behavior & Organization*. Za najcenniejsze uważam trzy wyniki. Pierwszy to charakteryzacja równowag Nasha i wielomianowy algorytm dla gier ataku i przechwytywania, które rozwiązują problem pozostawiony przez Blocha, Chatterjee i Duttę, wraz z kontrprzykładem do ich nieformalnej tezy. Drugi to metoda macierzy starć w połączeniu z NP-trudnością najlepszej odpowiedzi. Trzeci to sprowadzenie gry Pułkownik Blotto z kosztami do wariantu klasycznego. Kandydat swobodnie łączy narzędzia teorii gier, kombinatoryki, złożoności obliczeniowej i programowania liniowego, a wyniki teoretyczne uzupełnia starannymi eksperymentami.

Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wszelkie wymogi i wnoszę o dopuszczenie Satnisława Kaźmierowskiego do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie informatyka.

Jarosław Grytczuk