UNIWERSYTET IM. A. MICKIEWICZA
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4
61-614 Poznań
http://www.wmi.amu.edu.pl/

ZAKŁAD MATEMATYKI DYSKRETNEJ
dr. hab. Katarzyna Rybarczyk-Krzywdzińska,
prof. UAM
Telefon: (61) 829 5398
kryba@amu.edu.pl

Poznań, 31 stycznia 2025

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ PANA MGR. STANISŁAWA CICHOMSKIEGO

PT. COMBINATORIAL METHODS IN THE ANALYSIS OF COHERENT DISTRIBUTIONS AND RELATED INEQUALITIES

Omówienie zawartości pracy wraz z jej oceną

Omawiana rozprawa skupia się na problematyce badania tak zwanych rozkładów zgodnych (ang. *coherent distributions*). W pewnym sensie rozkłady zgodne mogą obrazować podstawy decyzji dotyczących określonego zagadnienia przez ekspertów, w sytuacji gdy eksperci bazują na zróżnicowanej wiedzy na temat rozpatrywanego problemu. W związku z tym rozkłady zgodne potencjalnie znajdują zastosowania nie tylko w czystej teorii prawdopodobieństwa, ale także w statystyce czy mikroekonomii. W pracy autor skupia się na zagadnieniach związanych z własnościami geometrycznymi rozkładów zgodnych oraz na pewnych nierównościach ich dotyczących.

Recenzowana rozprawa doktorska, licząca 109 stron, składa się ze streszczenia, jednego rozdziału wstępnego, sześciu rozdziałów przedstawiających wyniki rozprawy oraz bibliografii, która obejmuje 75 pozycji.

W pierwszym, wstępnym rozdziale zostały przedstawione podstawowe definicje i omówiona została historia i zakres rozpatrywanych zagadnień związanych z rozkładami zgodnymi. Zaprezentowane zostały przykłady dobrze motywujące badania oraz podstawowe, znane własności badanych rozkładów. Omówiono też dokładnie związki z innymi zagadnieniami rozpatrywanymi w teorii prawdopodobieństwa, statystyce i mikroekonomii. Podsumowując, rozdział ten jest bardzo dobrym wprowadzeniem do tematyki. Świetnie przedstawia naturalne motywacje do rozpatrywania podjętych w rozprawie problemów oraz podaje podstawową wiedzę niezbędną do zrozumienia rozumowań w dalszej części rozprawy.

Kolejne rozdziały zostały podzielone na dwie części po trzy rozdziały. W pierwszej części autor skupia się na rozkładach dwuwymiarowych.

W szczególności, w drugim rozdziale rozpatrywana jest asymptotyczna, przy $\alpha \to \infty$, wartość wyrażenia $\mathbf{E}(2, \alpha) = \sup_{(X,Y)\in C} \mathbb{E}|X - Y|^\alpha$, gdzie C oznacza klasę wszystkich rozkładów zgodnych na kwadracie. W celu określenia tej wartości, uzyskane zostały pewne ciekawe wyniki dotyczące struktury wypukłej rozkładów zgodnych i charakteryzacji odpowiadających jej punktów ekstremalnych. Badane są reprezentacje rozkładów zgodnych jako sum pewnych miar borelowskich. Dzięki tym reprezentacjom autorowi udało się w elegancki sposób scharakteryzować rozkłady ekstremalne i zbadać dokładnie rozkłady ekstremalne o skończonym nośniku. Między innymi udało się odpowiedzieć na pytanie zadane w rozprawie doktorskiej T. Zhu (*Some problems on the convex geometry of probability measures*, University of California, Berkeley, 2022) dotyczące tzw. cykli w nośniku tych rozkładów. Wynik ten jest dość istotnym składnikiem dowodu ostatecznego rezultatu.

Rozdział trzeci skupia się na badaniu nośników miar ekstremalnych samych w sobie. A mianowicie skonstruowany jest przykład rozkładu ekstremalnego o nieprzeliczalnym nośniku i bez atomów, co znowu odpowiada na pytania zadawane w literaturze już wcześniej. W rozdziale tym wykorzystane zostają wyniki dotyczące rozkładów ekstremalnych uzyskane już w rozdziale 2. W ostatecznej konstrukcji rozkładu ekstremalnego zastosowane są zupełnie nowe, oryginalne pomysły bazujące na wiedzy z teorii układów dynamicznych.

W rozdziale czwartym udowodniona zostaje hipoteza postawiona przez Burdzego i Pitmana o maksymalnym rozrzucie rozkładów zgodnych i niezależnych (K. Burdzy and J. Pitman, *Bounds on the probability of radically different opinions*, Electronic Communications in Probability, 25 (2020), pp. 1–12). Dotyczy ona opinii ekspertów bazujących na niezależnych źródłach informacji. W dowodzie wykorzystano związek między dwuwymiarowymi rozkładami zgodnymi z niezależnymi σ-ciałami, a w zasadzie ich dyskretnymi aproksymacjami, a strukturą losowego grafu dwudzielnego. Istotną częścią dowodu było uogólnienie znanych wyników dotyczących ciągu stopni w grafach oraz probabilistyczna analiza losowego grafu dwudzielnego związanego z rozpatrywanymi rozkładami zgodnymi.

Druga część obejmuje rozdziały od piątego do siódmego. W tej części autor skupia się na maksymalnym rozrzucie wielowymiarowych rozkładów zgodnych.

W szczególności, w rozdziale piątym uogólniona została dwuwymiarowa nierówność dotycząca wyrażenia $\mathbf{E}(2,1) = \sup_{(X_1,X_2)\in\mathcal{C}_2} \mathbb{E}|X_1 - X_2|$. Jednym z istotnych składników dowodu było zastosowanie nowej, ciekawej metody symetryzacji. Metoda ta pozwala na zredukowanie problemu oszacowania $\mathbf{E}(n,1)$ do o wiele łatwiejszego do zanalizowania wyrażenia. Istotne w uzyskaniu tego prostszego wyrażenia było tutaj też zastosowanie dyskretyzacji.

Wynik przedstawiony w szóstym rozdziale jest uogólnieniem nierówności pokazanej w pracy Burdzego i Pala (K. Burdzy and S. Pal, *Can coherent predictions be contradictory?*, Advances in Applied Probability, 53 (2021), pp. 133–161). Warto zwrócić uwagę na to, że metoda dowodowa znacznie się różni od tej w wyżej wymienionej pracy. A dokładniej zostaje zastosowana dyskretyzacja rozkładów i metoda symetryzacji wprowadzona w poprzednim rozdziale.

W obu tych powyżej wymienionych rozdziałach, na szczególną uwagę zasługuje wprowadzona technika symetryzacji i jej zastosowania, zarówno te pokazane w omawianej rozprawie, jak także te potencjalne.

Ostatni, siódmy rozdział odbiega już od tematyki rozkładów zgodnych. Jest z nią związany, ale wynik w nim przedstawiony dotyczy także innych rozkładów. Tematyka podjęta w tej części jest powiązana z rozkładami zgodnymi, ale także z martyngałami. Główny wynik dotyczy uogólnienia jednego z klasycznych wyników Dooba do szerszej rodziny ciągów σ-ciał.

Wszystkie przedstawione w rozprawie wyniki zostały już opublikowane lub przyjęte do druku w pracach:

S. Cichomski and A. Osękowski , The maximal difference among expert's opinions, *Electronic Journal of Probability*, 26 (2021), pp. 1–17.

S. Cichomski and A. Osękowski , Doob's estimate for coherent random variables and maximal operators on trees, *Probability and Mathematical Statistics*, 43 (2023), pp. 109–119.

S. Cichomski and A. Osękowski , Coherent distributions on the square – extreme points and asymptotics, *Journal of Applied Probability*, Online first (2024), pp. 1–23.

S. Cichomski and A. Osękowski , Contradictory predictions with multiple agents, *ALEA: Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, 21 (2024), pp. 369–383.

S. Cichomski and A. Osękowski , On the existence of extreme coherent distributions with no atoms, arXiv:2311.08140, Preprint (2024), pp. 1–12.

S. Cichomski and F. Petrov, A combinatorial proof of the Burdzy–Pitman conjecture, *Electronic Communications in Probability*, 28 (2023), pp. 1–7.

Prezentowane publikacje świadczą o wadze i aktualności uzyskanych rezultatów.

Rozprawa nie budzi zastrzeżeń od strony edytorskiej.

Reasumując, rozprawa doktorska mgra Stanisława Cichomskiego zawiera oryginalne i nietrywialne wyniki, które stanowią oryginalne rozwiązanie kilku istotnych problemów naukowych. W mojej opinii, nawet gdyby ograniczyć się tylko do części z prezentowanych wyników, byłyby one już podstawą do nadania stopnia doktora. Badania przedstawione w rozprawie dotyczą problemów aktualnie rozpatrywanych przez innych naukowców z dziedziny, wpisują się w aktualne nurty rozwoju badań, mają naturalne motywacje, a rozpatrywane obiekty mają potencjalne zastosowania bardziej praktyczne. Wyniki są współautorskie, głównie z promotorem, co jest naturalne na tym etapie rozwoju naukowego. Na uwagę zasługuje wynik z pracy [21] uzyskany bez udziału promotora, co świadczy pozytywnie o samodzielności autora. Wszystkie zaprezentowane wyniki zostały już opublikowane lub przyjęte do druku w szanowanych czasopismach. Autor wykazał się bardzo dobrą znajomością literatury tematu. Metody dowodowe są nietrywialne, wykorzystują znane techniki, ale także rozwijają je i kreatywnie modyfikują w celu dostosowania do rozpatrywanego problemu. Autor wykazał się nie tylko znajomością bardziej zaawansowanych metod rachunku prawdopodobieństwa, ale też wykorzystuje pewne metody i wiedzę z zakresu teorii grafów czy układów dynamicznych. Przeprowadzone rozumowania dowodzą biegłości autora w wykorzystaniu i tworzeniu różnorodnych, zaawansowanych metod, a także szerokiej wiedzy, wnikliwości, spostrzegawczości i pomysłowości.

Wszystkie te powyżej wspomniane cechy prezentowanej rozprawy świadczą o tym, że rozprawa doktorska mgra Stanisława Cichomskiego spełnia z naddatkiem warunki stawiane rozprawom doktorskim i w mojej opinii zasługuje ona na wyróżnienie.

Podsumowanie

Uważam, że złożona rozprawa doktorska mgra Stanisława Cichomskiego niewątpliwie spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka, i wnioskuję o dopuszczenie rozprawy doktorskiej mgra Stanisława Cichomskiego do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora. Mając na uwadze wysoki poziom rozprawy wnioskuję także o jej wyróżnienie.

K. Rybarczyk-Krzywdzińska

(-) Katarzyna Rybarczyk-Krzywdzińska