

Katowice, 11.02.2025

dr hab. **Hanna Wojewódka-Ściążko**
Instytut Matematyki,
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Stanisława Cichomskiego

pt. *Combinatorial methods in the analysis of coherent distributions and related inequalities*

Promotor: prof. dr hab. **Adam Osękowski** (Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski)

Omówienie zawartości rozprawy i uwagi do uzyskanych w niej wyników

Rozprawa doktorska magistra Stanisława Cichomskiego dotyczy rozkładów zgodnych, ich własności geometrycznych oraz związanych z nimi nierówności maksymalnych. Jak podkreśla sam Autor, motywacją do podjęcia badań w tej tematyce są liczne zastosowania rozkładów zgodnych, m.in. w teorii prawdopodobieństwa, mikroekonomii czy statystyce. Wektory zgodne znajdują szczególne zastosowanie w modelowaniu doświadczeń losowych obserwowanych i ocenianych równoległe z różnych perspektyw (na podstawie różnych źródeł informacji), czyli w sytuacjach, gdy prawdopodobieństwa zajścia poszczególnych zdarzeń losowych są określane równocześnie przez różne strony na podstawie dostępnych im danych.

Rozprawa składa się z siedmiu rozdziałów. Dodatkowo Autor wyraźnie podzielił prezentowane treści na dwie części, z których pierwsza (rozdziały 2-4) dotyczy rozkładów dwuwymiarowych, a druga (rozdziały 5-7) obejmuje rezultaty uzyskane w ogólniejszej klasie rozkładów wielowymiarowych.

Rozdział 1

W rozdziale wprowadzającym zdefiniowano kluczowe pojęcia oraz przedstawiono tło historyczne badań podjętych w rozprawie. Na początek wprowadzono pojęcie rozkładu oraz wektora zgodnego:

Definicja (por. definicja 1.1). Miarę probabilistyczną μ określoną na $[0, 1]^n$ nazywamy *zgodną*, jeśli istnieją przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, zbiór $A \in \mathcal{F}$ oraz ciąg σ -ciał

$\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$, takie że dla pewnego n -wymiarowego wektora losowego $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ o rozkładzie μ prawie na pewno zachodzą równości

$$X_i = \mathbb{P}(A|\mathcal{G}_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Wówczas wektor losowy $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nazywany jest *zgodnym*.

Zdefiniowano również funkcje $\mathbf{P}(n, \delta)$ i $\mathbf{E}(n, \alpha)$, gdzie $n \in \{2, 3, \dots\}$, $\delta \in (1/2, 1]$ oraz $\alpha > 0$, wykorzystywane do określania maksymalnego rozrzutu wielowymiarowych rozkładów zgodnych (zob. definicja 1.2).

Autor pracy przytoczył także najistotniejsze twierdzenia i fakty dotyczące rozkładów zgodnych, w tym twierdzenie o równoważnej definicji rozkładu zgodnego (zob. stwierdzenie 1.1), twierdzenie Dubinsa-Pitmana z 1980 roku, twierdzenie Burdzego-Pitmana z 2020 roku oraz twierdzenie Forda-Fulkersona z 1962 roku, znane z literatury naukowej. Ponadto **Autor włożył duży wysiłek w opisanie przykładowych zastosowań, co pozwala czytelnikowi lepiej zrozumieć intuicje stojące za rozkładami zgodnymi oraz docenić ich szerokie zastosowania w praktyce.**

Rozdział wprowadzający dowodzi, że Autor doskonale orientuje się w literaturze zarówno bezpośrednio, jak i pośrednio związanej z tematem rozprawy. Ponadto zasługuje na uznanie fakt, że Autor w sposób klarowny prezentuje związki między podjętą tematyką badań a innymi obszarami nauki, spośród których szczególnie interesujące wydają się powiązania z teorią martyngałów.

Rozdział 2

Rozdział drugi poświęcony jest charakterystyce punktów ekstremalnych rodziny $\mathcal{C}$ dwuwymiarowych rozkładów zgodnych. Najważniejszy wynik w tej części pracy to twierdzenie 2.1, które mówi, że

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \mathbf{E}(2, \alpha) = \frac{2}{e}.$$

Aby je wykazać, Autor zaproponował zupełnie nowe, twórcze podejście, oparte w dużej mierze na geometrii badanych obiektów matematycznych. **Doceniam dbałość Autora rozprawy o klarowność prezentowanych treści oraz staranne ich zaprezentowanie czytelnikowi. Dzięki precyzyjnym opisom, dokładnym obliczeniom, rysunkom pomocniczym, a także odpowiednio dobranym przykładom, możliwe jest śledzenie toku rozumowania i weryfikowanie dowodów twierdzeń, które często wymagają technicznej biegłości** (zob. np. dowód twierdzenia 2.3 oraz dowody stwierdzeń 2.4-2.8, w których zastosowano technikę kolejnych przekształceń i redukcji). Dowodząc twierdzenia 2.1, Autor wykazał szereg wyników pomocniczych, które same w sobie stanowią interesujące rezultaty (zob. np. twierdzenie 2.2 o jedynej reprezentacji $(\mu, \nu) \in \mathcal{R}$ dwuwymiarowego rozkładu zgodnego $m = \mu + \nu$, bądź twierdzenie 2.3, charakteryzujące

nośnik ekstremalnego rozkładu zgodnego).

Pod koniec rozdziału Autor zaprezentował kilka uwag dotyczących ewentualnego uogólnienia otrzymanych wyników. **Stanowią one głęboką refleksję nad użytecznością wprowadzonej metody oraz jej potencjalnymi zastosowaniami w szerszym kontekście, a tym samym świadczą o dojrzałości matematycznej Autora rozprawy.**

Rozdział 3

Kolejny rozdział stanowi naturalną kontynuację i rozwinięcie poprzedniego, ponieważ w twórczy sposób odwołuje się do twierdzenia 2.1 oraz uzyskanej charakterystyki zbioru $\text{ext}(\mathcal{C})$ punktów ekstremalnych rodziny dwuwymiarowych rozkładów zgodnych. Autor konstruuje rozkład ekstremalny o nieprzeliczalnym nośniku i bez atomów (zob. twierdzenie 3.1). **Co ciekawe, w tym celu odwołuje się do pewnych technik i idei zaczerpniętych z teorii układów dynamicznych. Dowody zaprezentowane w tej części pracy uważam za pomysłowe i oryginalne.**

Rozdział 4

W rozdziale czwartym Autor wykazał hipotezę Burdzego-Pitmana o maksymalnym rozrzucie rozkładów zgodnych i niezależnych (zob. twierdzenie 4.1). **Kluczowy pomysł dowodu polegał na dostrzeżeniu podobieństw między analizą dwuwymiarowych rozkładów zgodnych a teorią ciągów stopni grafów dwudzielnych.** Najpierw wykazane zostało twierdzenie 4.2 (a właściwie jego uproszczona wersja – twierdzenie 4.3), stanowiące pewien odpowiednik docelowego twierdzenia, zapisany w języku teorii grafów. W dowodzie Autor wykorzystał znany wynik Erdösa i współautorów, tzw. *twierdzenie o rozproszeniu* (ang. *spread bounding theorem*). Następnie zaprezentowany został **zaawansowany technicznie dowód twierdzenia 4.1. Wszystkie dowody przedstawione w tym rozdziale mają kombinatoryczny charakter.**

Rozdział 5

W rozdziale piątym Autor rozprawy przechodzi do rozwiązywania problemów związanych z maksymalnym rozrzutem wielowymiarowych rozkładów zgodnych. Główne twierdzenie w tej części pracy, tj. twierdzenie 5.1, mówi, że

$$E(n, 1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } n = 2, \\ 2 - \sqrt{2} & \text{dla } n = 3, \\ \frac{7}{2} - 2\sqrt{2} & \text{dla } n = 4, \\ \frac{n-2}{n-1}, & \text{dla } n \geq 5. \end{cases}$$

Wykazanie powyższego wymagało od Autora wprowadzenia oryginalnej procedury symetryzacji oraz zauważenia jej istotnych własności (rozdział 5.1). W rozdziale 5.2 opisano kolejne przekształcenia i redukcje (stwierdzenia 5.1–5.5), mające na celu uproszczenie rozumowania w dowodzie twierdzenia 5.1. Niektóre z nich są wyjątkowo pomysłowe, jak np. stwierdzenie 5.4.

Rozdział 5.3 z kolei zawiera liczne kombinatoryczne optymalizacje. Autor wyraźnie wykorzystuje geometrię badanych obiektów. Dowody są pomysłowe, choć momentami dość skomplikowane. Bez załączonych rysunków byłyby trudne do śledzenia, dlatego tym bardziej doceniam dbałość Autora o czytelnika. Brakuje mi jedynie bardziej obszernego komentarza wyjaśniającego, dlaczego bez straty ogólności możemy w dowodzie wybrać przestrzeń probabilistyczną bez atomów oraz dlaczego taki wybór jest istotny z perspektywy dalszej analizy.

Rozdział kończy się ciekawym dowodem twierdzenia 5.1.

Rozdział 6

Rozdział szósty opisuje kolejne zastosowanie wprowadzonej wcześniej techniki symetryzacji. Dzięki niej Autor jest w stanie uogólnić dwuwymiarową nierówność Burdzego-Pala, a tym samym podać jej alternatywne uzasadnienie. Jest to o tyle istotne, że oryginalny dowód był niezwykle skomplikowany – i nie jest to jedynie subiektywna opinia Autora rozprawy, lecz także komentarz jednego ze współautorów tegoż dowodu. Ostatecznie wykazano następującą równość (por. twierdzenie 6.2):

$$P(n, \delta) = \frac{n(1 - \delta)}{2 - \delta} \wedge 1 \quad \text{dla} \quad \delta \in (1/2, 1] \quad \text{oraz} \quad n \geq 2.$$

Kluczową rolę w dowodzie tego wyniku odegrał lemat 6.1, który został wykazany dzięki odwołaniu do ukierunkowanej struktury drzewa (terminologia z teorii grafów) – zob. rozdziały 6.2.1 i 6.2.2 – oraz do pewnych idei pochodzących z programowania dynamicznego – zob. rozdział 6.2.3.

Rozdział 7

W ostatnim rozdziale Autor rozprawy prezentuje nową wersję nierówności maksymalnej Dooba dla pewnych *drzwiastych filtracji*. Rozpoczyna od omówienia związków pomiędzy rozkładami zgodnymi a klasyczną teorią martyngałów, co po raz kolejny świadczy o Jego szerokich horyzontach naukowych i dużej dojrzałości matematycznej.

Dowody głównych twierdzeń w tej sekcji, a więc twierdzeń 7.2 i 7.4, bazują na wykorzystaniu pewnych własności operatora maksymalnego Hardy’ego-Littlewooda. Są one pomysłowe i wysoce nietrywialne.

Ocena merytoryczna pracy

Recenzowana rozprawa dotyczy zagadnień żywo interesujących szeroki krąg matematyków (o czym świadczy bogata bibliografia, a także opublikowanie przez magistra Stanisława Cichomskiego aż sześciu artykułów związanych z tematem rozprawy w renomowanych czasopismach naukowych – dotychczasowa niewielka liczba cytowań tychże artykułów wynika jedynie ze świeżości wyników). **Przynosi wyniki istotnie wzbogacające tematykę rozkładów zgodnych oraz związanych z nimi nierówności maksymalnych.**

Praca doktorska magistra Stanisława Cichomskiego stanowi oryginalne rozwiązanie ważnego problemu naukowego. Autor odpowiednio dobrał metody i narzędzia badawcze. Widać wyraźnie, że potrafi On prowadzić badania naukowe na wysokim poziomie, w szczególności radzi sobie z niełatwymi i nowoczesnymi technikami. Magister Stanisław Cichomski wykazał się szeroką wiedzą teoretyczną w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, a dyscyplinie matematyka (w zakresie rachunku prawdopodobieństwa, w tym teorii rozkładów zgodnych, teorii martynałów, a także w teorii grafów, kombinatorycznej teorii macierzy czy programowania dynamicznego). Jego rozprawa doktorska jest ambitna i została głęboko przemyślana. Przebijają z niej dojrzałość i pasja, połączone z umiejętnością łączenia wiedzy z różnych obszarów matematyki.

Ocena języka pracy i sposobu prezentacji wyników

Recenzowana rozprawa została napisana w języku angielskim, z dużą dbałością o język, styl oraz ogólną klarowność i elegancję wypowiedzi. Jej Autor trafnie dobrał literaturę przedmiotu i odwołał się do niemal wszystkich pozycji umieszczonych w bibliografii. Rozprawa zawiera liczne intuicyjne opisy oraz przykłady związane z przedstawianą teorią, co jest niewątpliwie rzadkie i trudne, a świadczy o dogłębnym zrozumieniu przez magistra Stanisława Cichomskiego prezentowanej teorii. Dodatkowo, umieszczone przez Autora pracy ilustracje czynią rozprawę bardziej czytelną i zrozumiałą.

W ponad stustronicowej pracy z trudnością wypatrzyłam jedynie kilka drobnych niedociągnięć redakcyjnych, które wymieniam poniżej:

- str. 40, linijka 15. od dołu: powinno być “[...] will satisfy requirements from 1. to 4. in the definition of $\mathcal{S}'$ ” zamiast “[...] will satisfy requirements from 1. to i. in the definition of $\mathcal{S}'$ ”;
- str. 69, linijki 7. i 8. od dołu: wyrażenie $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n \{\tilde{X}_i = x_i\} \cap \tilde{A})$ powinno być wyeksponowane jako część tekstu matematycznego, a wielokropki powinny być usunięte;

- str. 70, w dowodzie stwierdzenia 5.1 najprawdopodobniej wykorzystano skrót myślowy (obecne stwierdzenie sugeruje, że z nierówności trójkąta wynika postulowana w stwierdzeniu 5.1 równość, co może być niejasne);
- str. 70, linijka 6. od dołu: zamiast “ever” powinno być “every”;
- str. 76, ilustracja 3: należy wyjaśnić, dlaczego odcinek tuż nad poziomem $1/2$ na schemacie po prawej stronie jest krótszy niż na schemacie po lewej stronie;
- str. 78, linijka 2. od góry: zamiast “[...] Proposition 5.7).” powinno być “[...] in Proposition 5.7).”
- str. 79, linijka 12. od góry: zamiast “[...] we will remove A_2 and thus [...]” powinno być “[...] we will remove A_2 and A_3 , and thus [...]”;
- str. 87, początek dowodu twierdzenia 6.2: jeśli dobrze rozumiem, odwołanie w tym miejscu powinno być do wniosku 6.1, a nie do lematu 5.3;
- str. 89, linijka 12. od dołu: zamiast podwójnej sumy $\bigcup_{n=1}^{i-1} \bigcup \mathcal{V}_n$ powinna wystąpić pojedyncza suma $\bigcup_{n=1}^{i-1} \mathcal{V}_n$;
- str. 91, stwierdzenie 6.4, oraz str. 92, linijki 9. i 10. od dołu: należy wyjaśnić, co oznacza zapis $\bigcup \mathcal{V}_{(H,L)}$ (po czym dokładnie jest sumowanie?).

Podsumowanie i wniosek końcowy

Nie ma wątpliwości, że rozprawa doktorska magistra Stanisława Cichomskiego pt. *Combinatorial methods in the analysis of coherent distributions and related inequalities* **spełnia, z naddatkiem, wszystkie wymagania formalne i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka. W szczególności odpowiada warunkom określonym w ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2024 r. poz. 1571 z późn. zm.).** Wnioskuje o dopuszczenie magistra Stanisława Cichomskiego do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka, a także sugeruję wyróżnienie omawianej rozprawy doktorskiej.

Hanna Wojewódka-Ściążko

Hanna Wojewódka-Ściążko