



Wrocław, dnia 14 lutego 2025 r.

Opinia dotycząca rozprawy doktorskiej Sadokat Malikovej zatytułowanej *Mathematical analysis of obstacle approximation strategies for incompressible flow*

Rozprawa doktorska Sadokat Malikovej poświęcona jest aproksymacjom przepływu płynu nieściśliwego, opisywanego równaniami Naviera-Stokesa, wokół zanurzonego ciała stałego (przeszkody), w przypadku zarówno stacjonarnym i ewolucyjnym, w dwóch lub trzech wymiarach przestrzennych. Głównym pomysłem zawartym w rozprawie jest modelowanie nieodkształcalnej przeszkody jako płynu o bardzo wysokiej lepkości, a zastosowane metody matematyczne oparte są na tak zwanej penalizacji (np. współczynnika lepkości). Najważniejsze wyniki matematyczne z rozprawy dotyczą regularności rozwiązań przybliżonych, a w szczególności, punktowe oszacowania gradientu pola prędkości, które są kluczowe dla zapewnienia poprawności zagadnienia oraz lepszych właściwości zbieżności rozwiązań uzyskanych metodą penalizacji. Wyniki uzyskane w rozprawie mają też istotne znaczenie w badaniu zbieżności schematów numerycznych dla rozważanych problemów, w szczególności w przypadku ruchomych przeszkód.

Pierwsza część Rozprawy, oparta na publikacji

- Sadokat Malikova. “Approximation of rigid obstacle by highly viscous fluid”. *J. Elliptic Parabol. Equ.* 9.1 (2023), pp. 191–230.

poświęcona jest aproksymacji sztywnej przeszkody w przepływach opisywanych przez stacjonarny układ Naviera-Stokesa, w którym lepkość jest nieciągłą funkcją zależną od przeszkody. Słabe rozwiązania rozważanego problemu skonstruowano za pomocą podejścia energetycznego opartego na metodzie Galerkina i argumentach zwartości. W rozważaniach tych w ciekawy sposób oszacowano gradient prędkości w normie L^∞ , co jest o tyle zaskakujące, że współczynnik dyfuzji w rozważanym modelu jest funkcją ze skokiem. Ten rozdział pracy zawiera również symulacje numeryczne, które pokazują, że zaproponowane metody konstrukcji rozwiązań mogą być podstawą wiarygodnej aproksymacji numerycznej przepływu wokół przeszkody.

W kolejnym rozdziale rozprawy, opartym na publikacji

- P. Krzyżanowski, S. Malikova, P.B. Mucha, and T. Piasecki. “Comparative Analysis of Obstacle Approximation Strategies for the Steady Incompressible Navier–Stokes Equations”. *Appl Math Optim* 89.38 (2024), pp. 1–20.

badane są inne metody penalizacji, które mają zastosowanie do aproksymacji przeszkód zanurzonych w płynie opisanym stacjonarnym, nieściśliwym układem Naviera-Stokesa. Oprócz penalizacji lepkościowej (tj. gdy współczynnik lepkościowy zależy od przeszkody) badana jest tutaj metoda penalizacji objętościowej oraz kombinacja obu podejść. We wszystkich rozważanych przypadkach oszacowano szybkość zbieżności zastosowanych aproksymacji i analizę tę poparto eksperymentami numerycznymi, które wykazały optymalność otrzymanych oszacowań teoretycznych oraz pokazały wpływ parametrów penalizacji na błąd aproksymacji.

Ostatni rozdział Rozprawy poświęcony jest aproksymacji opływu ruchomej, sztywnej przeszkody przez płyn, którego dynamika opisana jest tym razem układem Naviera-Stokesa zależnym od czasu. W rozważanym modelu zakłada się, że przeszkoda porusza się z dostatecznie regularną prędkością. Najważniejszy wynik z tego rozdziału to dowód istnienia słabych rozwiązań dla problemu przybliżonego oraz ich zbieżność do słabego rozwiązania oryginalnego problemu. Rozważania te znów opierają się na ciekawych punktowych oszacowaniach gradientu prędkości. Skuteczność zaproponowanych aproksymacji rozważanego modelu Doktorantka zilustrowała eksperymentami numerycznymi, pokazującymi przepływ płynu wokół przeszkody. Animacje tego przepływu dostępne są na kanale YouTube Doktorantki

<https://youtube.com/@smalikovaphd>

Wyniki wchodzące w skład Rozprawy Sadokat Malikovej zawierają trudne rozważania zarówno analityczne, jak i numeryczne oraz stanowią ważny wkład w zrozumienie nieściśliwego przepływu płynu wokół przeszkody.

Rozprawa doktorska Sadokat Malikovej bardzo dobrze napisana pod względem językowym i prezentuje jej ogólną wiedzę teoretyczną w zakresie matematyki. Jedną z publikacji Sadokat Malikovej powstała przy współpracy z Promotorami oraz innym wybitnym uczonym. Załączone do rozprawy oświadczenie w sposób jednoznaczny wskazuje na istotny wkład naukowy Doktorantki do opublikowanych wyników z tej pracy. Nie mam żadnych wątpliwości, że rozprawa doktorska Sadokat Malikovej wykazuje jej umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

Uzyskane przez Sadokat Malikovą wyniki są ciekawe i stanowią oryginalne rozwiązanie problemu naukowego w zakresie Matematyki. Z pełnym przekonaniem stwierdzam, że rozprawa doktorska Sadokat Malikovej spełnia wymogi Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce i wnoszę o dopuszczenie Sadokat Malikovej do dalszych etapów postępowania doktorskiego.



prof. dr hab. Grzegorz Karch