dr hab. Piotr Kalita, prof. UJ,
Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Jagielloński,
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków,
piotr.kalita@ii.uj.edu.pl

Kraków, 9 marca 2025

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Sadokat Malikovej pt. "Mathematical analysis of obstacle approximation strategies for incompressible flow"

Praca doktorska magister Sadokat Malikovej została przygotowana pod kierunkiem dr hab. Tomasza Piaseckiego a promotorem pomocniczym był dr Piotr Krzyżanowski.

Jej wyniki dotyczą równań opisujących przepływ cieczy nieściśliwej wokół zanurzonej w tej cieczy przeszkody. Główny pomysł to aproksymacja przeszkody jako obszaru w którym znajduje się ciecz o bardzo dużej lepkości. Jeśli zmierzamy z tą lepkością do nieskończoności, to rozwiązania takiego układu będą zbiegać do rozwiązania wyjściowego zagadnienia w którym przeszkoda jest ciałem stałym, a ciecz przepływa wokół niej. Takie podejście, zwane podejściem poprzez utwardzenie (solidification) zostało już wcześniej zaproponowane przez Starovoitova, jednak doktorantka znacznie je pogłębia uzyskując tym samym istotnie nowe, wartościowe i nieznane wcześniej wyniki.

Główne wyniki pracy znajdują się w trzech rozdziałach: drugim, trzecim i czwartym.

Rozdział drugi dotyczy stacjonarngo zagadnienia Naviera–Stokesa, a jego wyniki opierają się o indywidualny artykuł doktorantki, cytowany w rozprawie jako [23]
S. Malikova, Approximation of rigid obstacle by highly viscous fluid, Journal of Elliptic and Parabolic Equations, 9, 191–230 (2023)

Rozdział trzeci również dotyczy zagadnienia stacjonarnego, a wyniki oparte są o następujący artykuł napisany wspólnie z P. Krzyżanowskim, P.B. Muchą i T. Piaseckim.
P. Krzyżanowski, S. Malikova, P.B. Mucha, T. Piasecki, Comparative Analysis of Obstacle Approximation Strategies for the Steady Incompressible Navier–Stokes Equations, Applied Mathematics and Optimization, 89, article number 38 (2024)
Artykuł jest zacytowany w pracy jako pozycja [17] w bibliografii, a do rozprawy załączone jest oświadczenie współautorów o ich udziałach.

Rozdział czwarty dotyczy zagadnienia ewolucyjnego, a jego wyniki nie zostały jeszcze opublikowane poza rozprawą doktorską.

Przejdę do szczegółowego omówienia wyników poszczególnych rozdziałów.

Wyniki rozdziału 2. Doktorantka zajmuje się stacjonarnym zagadnieniem dwuwymiarowym opisanym układem równań

$$\begin{aligned}&(u_m \cdot \nabla)u_m - \operatorname{div}[\nu_m(x)\mathbb{D}u_m] + \nabla p_m = f \ \text{ w } \ \Omega,\\ &\operatorname{div} u_m = 0 \ \text{ w } \ \Omega,\\ &u_m = 0 \ \text{ na } \ \partial\Omega,\end{aligned}$$

gdzie

$$\nu_m(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ w } \ \Omega \setminus \Omega_s, \\ m \ \text{ w } \ \Omega_s. \end{cases}$$

Istnienie rozwiązania dla powyższego zagadnienia jest dość standardowe, opiera się o metodę Galerkina i metodę zwartościową, a dowód przeniesiony jest do dodatku. W sposób standardowy pokazane jest również, że gdy m zmierza do nieskończoności rozwiązania zbiegają do rozwiązania zagadnienia dla którego tensor prędkości odkształcenia jest równy 0 w Ω_s, czyli mamy tam ruch sztywny. Jeśli ten obszar dotyka brzegu dziedziny $\partial\Omega$ to w Ω_s nie mamy ruchu czyli w granicy otrzymujemy przepływ wokół przeszkody. To, co jest w tym rozdziale szczególnie ciekawe to wynik dotyczący regularności rozwiązania u_m. Skoro funkcja μ_m jest nieciągła, to spodziewamy się że również i rozwiązanie u_m będzie niegładkie. Doktorantce udaje się pokazać, że $\nabla u_m \in L^\infty(\Omega)^2$. Tu podejście jest inspirowane metodą pochodzącą od Bony'ego i Chemina a opartą o pokazanie regularności stycznej - czyli że prędkość jest odpowiednio gładka w kierunku pola wektorowego stycznego do obszaru przeszkody. Metoda polega na konstrukcji pola wektorowego X stycznego do brzegu Ω_s i badaniu zagadnienia na pochodną prędkości w kierunku tego pola $\partial_X u_m$. Doktorantka bada najpierw zagadnienie Stokesa, a następnie Naviera–Stokesa, i dla obu tych zagadnień pokazuje regularność styczną, czyli, że $\nabla \partial_X u_n$ i $\nabla \partial_X^2 u_n$ należą do L^2. Należy tu zwrócić uwagę że dowód wymaga zastosowania oszacowań tyku Bogovskiego, co wynika z tego że dywergencja pochodnych stycznych nie jest już zerowa. Następnie rozważana jest regularność w kierunku normalnym. W tym celu doktorantka wykorzystuje uzyskaną wcześniej regularność styczną oraz prostuje brzeg by uzyskać regularność L^∞ gradientów w kierunku normalnym. Połączenie tych wyników prowadzi do oszacowania L^∞ na gradient całego rozwiązania u_n. Dodatkowo udaje się pokazać oszacowanie L^∞ na gradient rozwiązania granicznego u po odizolowaniu od brzegu $\partial\Omega_s$. Podsumowując, należy stwierdzić że pomysł badania zagadnienia z rosnącą lepkością jest interesujący, a wyniki o regularności są w tym kontekście nowe i wymagają użycia trudnych i pomysłowych technik, w czym doktorantka pokazuje biegłość. Wartościowe jest to, że wyniki teoretyczne są zilustrowane obliczeniami numerycznymi które również wskazują na to, że rozwiązanie dla dużych m jest bliskie rozwiązaniu w którym przeszkoda jest wyłączona z dziedziny przepływu.

Wyniki rozdziału 3. W rozdziale trzecim doktorantka bada zagadnienie dwu- i trój- wymiarowe i porównuje dwie metody aproksymacji: aproksymację objętościową, w której do równania jest dodany penalizujący człon liniowy reprezentujący tarcie w obszarze przeszkody Ω_S i zerowy poza nią, w obszarze przepływu Ω_F, i aproksymację za pomocą lepkości, także zmierzającej do nieskończoności w obszarze przeszkody podobnie jak w zagadnieniu badanym w rozdziale drugim. Zatem badane są dwa zagadnienia, zagadnienie z członem kary typu tarcia (które było już wcześniej badane przez Angota i współautorów)

$$\begin{aligned}
&-\nu\Delta u_n + (u_n\cdot\nabla)u_n + \nabla p_n + \eta_n u_n = 0 \quad \text{w} \quad \Omega,\\
&\operatorname{div} u_n = f \quad \text{w} \quad \Omega,\\
&u_n = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x\in\Omega_F,\\ n & \text{dla} \quad x\in\Omega_S.\end{cases}$$

oraz zagadnienie z karą lepkościową

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{div}(\mu_m\nabla u_m) + (u_m\cdot\nabla)u_m + \nabla p_m = 0 \quad \text{w} \quad \Omega,\\
&\operatorname{div} u_m = f \quad \text{w} \quad \Omega,\\
&u_m = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\mu_m(x) = \begin{cases} \nu & \text{dla} \quad x\in\Omega_F,\\ \nu m & \text{dla} \quad x\in\Omega_S.\end{cases}$$

Ponadto badane jest zagadnienie w którym oba rodzaje kary sa ze sobą połączone. Należy tu zwrócić uwagę że nie mamy jednoznaczności rozwiązania co wymaga wykorzystania podciągów. Intuicyjnie, jak słusznie zauważa doktorantka, zagadnienie z penalizacją lepkościową wydaje się lepiej aproksymować przepływ wokół przeszkody bo człon kary jest zależny od gradientu a nie tylko samej funkcji. Ten efekt udaje się także udowodnić ściśle matematycznie. Dla kary objętościowej pokazane jest oszacowanie $\|u_n\|_{L^2(\Omega_S)} \le Cn^{-1/2}$ a dla kary lepkościowej mamy $\|u_m\|_{H^1(\Omega_S)} \le Cm^{-1/2}\nu^{-1}$ i w obu przypadkach dla podciągów zbieżnych rozwiązania zbiegają w H^1 do rozwiązania zagadnienia z przeszkodą. Gdy siła wymuszająca jest mała (co implikuje jednoznaczność) doktorantka dostaje lepsze oszacowania $\|u_n\|_{L^2(\Omega_S)} \le Cn^{-3/4}$ oraz $\|u_m\|_{H^1(\Omega_S)} \le Cm^{-1}\nu^{-1}$. Ponadto w tym przypadku uzyskuje także szybkości zbieżności na obszarze przepływu $\|u_n - u\|_{H^1(\Omega_F)} \le Cn^{-1/4}$ oraz $\|u_m - u\|_{H^1(\Omega_F)} \le C\nu^{-1}m^{-1/2}$. Wyniki są zilustrowane kilkoma przykładami numerycznymi, które pokazują że aproksymacja lepkościowa (choć wymaga żeby przeszkoda stykała się brzegiem) prowadzi do szybszej zbieżności. Ponadto przykłady wydają się świadczyć o tym, że uzyskane szybkości zbieżności są suboptymalne. Pomysł porównania kilku metod penalizacji jest bardzo ciekawy, szczególnie że penalizacja lepkościowa nie była wcześniej w tym kontekście badana a daje lepszą aproksymację od szerzej zbadanej aproksymacji objętościowej. Za wartościowe w tej pracy uważam także to, że w elegancki sposób uzyskane są interesujące i nowe wyniki bez konieczności korzystania z bardzo zaawansowanych technik.

Wyniki rozdziału 4. Rozdział czwarty jest poświęcony zagadnieniu ewolucyjnemu w którym przeszkoda porusza się w czasie z prędkością v i w danym momencie czasu zajmuje obszar $\Omega_S(t)$ z brzegiem $\Gamma(t)$, a ciecz opływa ją w obszarze $\Omega_F(t)$. Układ równań jest następujący

$$\begin{aligned}
&\partial_t u - \nu\,\mathrm{div}\mathbb{D}u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f \quad \text{dla} \quad t\in(0,T), x\in\Omega_F(t),\\
&\mathrm{div}\,u = 0 \quad \text{dla} \quad t\in(0,T), x\in\Omega_F(t),\\
&u = v \quad \text{dla } t\in(0,T), x\in\Gamma(t),\\
&u = 0 \quad \text{dla} \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\
&u(0) = u_0 \quad \text{dla} \quad x\in\Omega_F(0),
\end{aligned}$$

gdzie v jest gładkim polem prędkości spełniającym warunek bezdywergencyjności i odizolowanym od brzegu. Z kolei zagadnienie spenalizowane, w którym tym razem zastosowane są obie techniki penalizacji, lepkościowa i objętościowa (co pozwala ruchomej przeszkodzie nie dotykać brzegu), ma postać

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_m - \nu\,\mathrm{div}(\mathbb{D}u_m + m\chi\mathbb{D}(u_m - v)) + (u_m\cdot\nabla)u_m + \nabla p_m + m\chi(u_m - v) = f \quad \text{dla} \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\
&\mathrm{div}\,u_m = 0 \quad \text{dla} \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\
&u_m = 0 \quad \text{dla} \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\
&u(0) = u_0 \quad \text{dla} \quad x\in\Omega,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\chi(x,t) = \begin{cases} 1 & x\in\Omega_F(t),\\ 0 & x\in\Omega_S(t).\end{cases}$$

Doktorantka pokazuje metodą Galerkina istnienie rozwiązania dla problemu spenalizowanego (w dwóch i trzech wymiarach), a następnie dokonuje przejścia granicznego dostając rozwiązanie zagadnienia wyjściowego, w którym dziedzina przestrzenna zmienia się w czasie. Tutaj musi zastosować niestandardową wersję lematu Aubina–Lionsa pochodzącą od Hoffmanna i Starovoitova. W następnym kroku bada regularność funkcji, która na brzegu obszaru przeszkody jest pochodną styczną prędkości. W tym celu konstruuje najpierw zmienne w czasie pole wektorowe styczne do ruchomej przeszkody, pokazuje jego gładkość, a następnie wyprowadza oszacowania a priori na pochodną rozwiązania zagadnienia spenalizowanego w kierunku tego pola wektorowego w dwóch wymiarach. Ten krok jest uogólnieniem do przypadku ewolucyjnego rozumowania z rozdziału drugiego, i również wymaga trudnych technicznie rachunków z wykorzystaniem oszacowań typu Bogovskiego ze względu na brak znikania dywergencji dla pochodnej wzdłuż pola wektorowego.

Konkluzja. Bez wątpienia rozprawa pokazuje szerokie umiejętności doktorantki w zakresie mechaniki płynów. Z jednej strony widać umiejętność Autorki biegłego posługiwania się trudnymi technicznie metodami (operator Bogovskiego, prostowanie brzegu), a z drugiej strony rozprawa realizuje nowe ciekawe pomysły takie jak połączenie różnych technik penalizacji czy dowód regularności stycznej w sposób różniący się od wcześniejszych rozumowań Chemina i Danchina.

Oceniam pozytywnie recenzowaną rozprawę. Nie mam najmniejszych wątpliwości, że stanowi ona oryginalne rozwiązanie interesującego problemu badawczego. Wnoszę o jej dopuszczenie do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia naukowego doktora.

Podpisuję z Cencert

Podpisany elektronicznie przez
Piotr Kalita
10.03.2025
15:37:54 +01'00'