

**RECENZJA PRACY DOKTORSKIEJ "ALGEBRAIC AND  
HOMOLOGICAL PROPERTIES OF STRICT POLYNOMIAL FUNCTORS"  
MGR. PATRYKA JAŚNIEWSKIEGO.**

Rozprawa jest poświęcona funktorom wielomianowym stopnia  $d$  na kategorii przestrzeni wektorowych nad ciałem  $k$  charakterystyki  $p > 0$ . Badanie struktury takich funktorów jest ściśle związane z teorią reprezentacji pełnych grup liniowych  $GL(n, k)$ .

Jest to tematyka bardzo trudna, wiele podstawowych problemów jest nie rozwiązanych. Na przykład wymiary reprezentacji nieprzywiedlnych nie są znane.

W niniejszej rozprawie rozważane są głównie przypadki  $p \leq d \leq 2p$ , czyli najprostsze interesujące przypadki (dla  $d < p$  kategoria funktorów wielomianowych stopnia  $d$  jest półprosta i wszystko jest jasne).

Autor stosuje różne techniki związane z teorią reprezentacji. Używa teorii funktorów Schura i Weyla, teorii najwyższej wagi. Ponadto jest też używana algebra homologiczna i kategorie pochodne.

Przejdę do krótkiego opisu rezultatów pracy. W rozdziale pierwszym są wprowadzone pojęcia podstawowe. W rozdziale drugim omówiona jest teoria dla  $d = p$ . W tym wypadku jest tylko jeden nietrywialny blok o rdzeniu pustym, tj. gdzie występujące partycje to  $p$ -haki. Ta sytuacja jest jeszcze dość prosta. Autor wylicza strukturę tego bloku, powłoki injektywne i nakrycia projektywne funktorów prostych. Wylicza też rezolwenty projektywne i injektywne obiektów prostych dane we wzorach (2.5), (2.6).

Końcowym produktem jest realizacja tego bloku w terminach kołczanu z relacjami danego we wniosku 2.1.3. Cała kombinatoryka jest dość prosta i przejrzysta. Te wyniki pozwalają w zasadzie na kompletną analizę funktorów  $Ext$  i na opis algebr Yonedy interesujących obiektów. Systematyczne podejście autora pozwala na uzyskanie przejrzystych dowodów tych wyników.

Nie jest to może nieoczekiwane, ponieważ wszystkie bloki mają  $p$ -wagę  $\leq 1$ . Według analogii z teorią grup skończonych, gdy  $p$ -podgrupa Sylowa jest cykliczna rzędu  $p$ , takie bloki są oswojone więc dają się opisać.

Podobne podejście działa dla  $p \leq d < 2p$  ponieważ wszystkie bloki mają wtedy wagę  $\leq 1$  więc ich kategorie pochodne są równoważne z kategorią pochodną bloku  $p$ -wagi 1 dla  $d = p$ .

Najciekawszą częścią pracy jest rozdział 3. W nim autor liczy wszystkie funktory  $Ext$  ewaluowane na parach funktorów Schura z bloku wagi  $2p$  o rdzeniu pustym. Dowód jest otrzymany przez subtelną analizę kombinatoryki partycji z tego bloku, filtracji na odpowiednich funktorach Schura pochodzących z prawa Littlewooda-Richardsona i ciągu spektralnego  $Ext$  stowarzyszonego z takimi filtracjami.

Recenzent ma tutaj kilka pytań: czy będzie możliwe otrzymanie opisu kategorii tego bloku w terminach kołczanów z relacjami ?

Nie jest też jasne w jakich przypadkach metody stosowane w pracy pozwolą na liczenie funktorów  $Ext$  dla danego bloku.

Jednakże już wyjście poza bloki  $p$ -wagi 1 jest bardzo interesujące.

W ostatnim rozdziale autor zajmuje się kategorią  $\mathcal{P}_{d,n}$  funktorów stopnia  $d$  na podkategorii przestrzeni wektorowych wymiaru co najwyżej  $n$ . Tego typu funktory są ściśle związane z funktorami rozważanymi w rozdziale drugim. Autor znowu rozważa najmniejszy interesujący przypadek  $d = p$ . Analiza jest jednak istotnie różna ponieważ naturalny funktor obrazu prostego nie przeprowadza obiektów injektywnych w injektywne i projektywne. Autor pokonuje te trudności i uzyskuje w tym wypadku rezultaty analogiczne do rozdziału 2. Używana jest też nowa technika recollements aby porównać obie kategorie.

Praca jest oparta w części na rezultatach wspólnych z promotorem, ale jest podane wyraźne rozgraniczenie które rezultaty są wspólne, a które pochodzą wyłącznie od autora. Nie stwarza więc to, moim zdaniem, żadnych problemów.

Praca jest napisana bardzo jasno, wszystkie dowody są zadowalająco wyjaśnione. Jedyne zastrzeżenie to to, że kombinatoryka dotycząca  $p$ -rdzeni partycji mogłaby być dokładniej wytłumaczona, zwłaszcza dla wypadku  $p$ -wagi 2, z jednym reprezentatywnym przykładem pojawiającym się w kilku miejscach, np. dla  $p = 5$ . Pozwoliłoby to łatwiej śledzić kombinatorykę ciągu spektralnego.

Nie mam też większych uwag dotyczących języka angielskiego.

W podsumowaniu stwierdzam, że rozprawa zawiera interesujące oryginalne rezultaty o funktorach wielomianowych w charakterystyce  $p$  mające też interesujące zastosowania w teorii reprezentacji grup  $GL(n, \mathbf{k})$ . Uważam, że stosowane techniki można rozwinąć aby przeanalizować jeszcze kilka przypadków. Nie ma jednak szans na zbliżenie się do przypadku ogólnego. Wynika to jednak z obiektywnej trudności problemu.

Aby osiągnąć te rezultaty autor musiał opanować wiele nowoczesnych technik teorii reprezentacji, algebry homologicznej i kombinatoryki, a także twórczo je zastosować. Uważam więc, że zademonstrował zdolność do prowadzenia samodzielnych badań.

W związku z tym stwierdzam, że rozprawa spełnia wszystkie warunki art. 187 ust. 1 i 2 Ustawy z dn. 20 lipca 2018 roku "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce".

Jerzy Weyman

