prof. dr hab. Piotr Krasoń
IM Usz Szczecin

Szczecin 12.12. 2025

**Recenzja pracy doktorskiej**
***Algebraic and homological properties of strict polynomial functors***
**napisanej przez mgra Patryka Jaśniewskiego**

**Uwagi ogólne** Rozprawa "Algebraic and homological properties of strict polynomial functors" napisana przez mgra Patryka Jaśniewskiego dotyczy homologicznych własności kategorii funktorów ściśle wielomianowych $\mathcal{P}_d$, gdzie $d \leq 2p$ oraz $p$ jest charakterystyką ciała bazowego. Kategoria ta została wprowadzona w pracy: E. M. Friedlander, A. Suslin, *Cohomology of finite group schemes over a field,* Inventiones Mathematicae 127 (1997), 209-270, a następnie systematycznie badana w pracy: V. Franjou, E. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, *General Linear and Functor Cohomology over Finite Fields,* Ann. of Math. 150 (2) (1999), 663-728. Kategoria ta jest równoważna z kategorią skończenie wymiarowych, lewych modułów nad algebrą Schura $S(n, d)$ gdzie $n \geq d$. Prowadzi do ścisłego związku tej kategorii z kategorią wielomianowych reprezentacji liniowej grupy algebraicznej $\mathrm{GL}_n$. Znaczenie kategorii funktorów ściśle wielomianowych polega między innymi na tym, że obliczenia homologiczne są tam łatwiejesze do przeprowadzenia niż w kategorii $\mathrm{GL}_n$-modułów.

Praca została napisana w Uniwersytecie Warszawskim, pod opieką promotora dr. hab. prof. UW Marcina Chałupnika. Zawiera 63 strony i podzielona została na 4 rozdziały. Tematyka rozprawy jest naturalną kontynuacją zainteresowań naukowych promotora, który jest wybitnym specjalistą w zakresie algebry homologicznej grup liniowych oraz, co się z tym wiąże algebry homologicznej funktorów. Ta trudna dziedzina reprezentowana jest również w Warszawie przez prof. Stanisława Betleya, którego prace są bardzo wysoko cenione przez wielu matematyków. Temat rozprawy i uzyskane wyniki są bardzo interesujące. Praca napisana została w języku angielskim co jest dobrym wyborem ze względu na potencjalny krąg czytelników.

Pan mgr Patryk Jaśniewski opublikował następujące prace matematyczne:

(1) M. Chałupnik, P. Jaśniewski, *On strict polynomial functors with bounded domain,* Homol. Homotopy Appl. (1) 26 (2024), 87-104,

(2) P. Jaśniewski, *On homological properties of strict polynomial functors of degree p,* J. Algebra 618 (2023), 141-164.

## Uwagi szczegółowe

*Rozdział 1.* stanowi wprowadzenie w tematykę rozprawy. Podane są podstawowe definicje i wyniki pozwalające czytelnikowi zorientować się w kontekście wyników uzyskanych przez doktoranta. W szczególności wprowadzona została definicja kategorii $\mathcal{P}_d$ i omówione zostały podstawowe własności tej kategorii np. wspomniany już wcześniej jej związek z algebrą Schura czy dualność Kuhna . Następnie autor podaje definicję *highest weight category* z fundamentalnej pracy :E. Cline'a, B. Parshalla, L. Scotta, *Finite dimensional algebras and highest weight categories,* J. Reine Angew. Math. 391 (1988). Opisuje główne wyniki tej pracy dotyczące prostych obiektów, powłok iniektywnych czy własności funktora $\mathrm{Ext}^n(\mathrm{A},\mathrm{B})$, $n \geq 0$ gdzie $A$ i $B$ są bądź obiektami ko-standartowymi $\nabla_\mu$, bądź obiektami prostymi $F_\lambda$ odpowiadającymi $\lambda, \mu \in P$, gdzie $P$ jest częściowo uprządkowanym zbiorem występującym w definicji tego typu kategorii. Następnie autor omawia kombinatorykę dotyczącą diagramów Younga, oraz kompleksy Koszula i de Rhama, prawo Littlewooda-Richardsona oraz formuły rozkładu i eksponencjalne. W ostatnim punkcie rozdziału 1 omówiona została struktura blokowa kategorii $\mathcal{P}_d$. Rozdzial 1 zawiera tylko te pojęcia, które są używane w dalszym ciągu pracy. Napisany jest jasno, a cytowania dokładne.

*Rozdział 2.* poświęcony jest badaniu bloku $\mathcal{P}_p^\emptyset$ z punktu widzenia algebry homologicznej. Okazuje się, że dla $d < p$ kategoria $\mathcal{P}_d$ jest równoważna kategorii lewych modułów nad algebrą grupową grupy symetrycznej . Ta ostatnia kategoria jest półprosta zatem $\mathrm{Ext}^n(F,G) = 0$ dla $n > 0$. Zatem pierwszym nietrywialnym przypadkiem jest $d = p$. Autor wylicza powłoki iniektywne oraz pokrycia projektywne dla funktorów prostych w tej kategorii $\mathcal{P}_p^\emptyset$, (Proposition 2.1.1).Pozwala to na wyznaczenie macierzy rozkładu $D \in M_{p\times p}(\mathbb{Z})$ dla kategorii $\mathcal{P}_p^\emptyset$, ( Corollary 2.1.2). Następnym rezultatem otrzymanym jako wniosek z Proposition 2.1.2 jest alternatywny dowód następującego eleganckiego rezultatu C. Xi:

**Wniosek 1.** *Niech $Q$ będzie kołczanem*

$$1 \underset{w_0}{\overset{v_0}{\rightleftarrows}} 2 \underset{w_1}{\overset{v_1}{\rightleftarrows}} 3 \qquad \cdots \underset{w_{p-2}}{\overset{v_{p-2}}{\rightleftarrows}} p-1 \underset{w_{p-1}}{\overset{v_{p-1}}{\rightleftarrows}} p$$

*i niech $I \subset kQ$ będzie ideałem algebry dróg kołczanu $Q$ generowanym przez*

$$v_iv_{i+1}, \quad w_{i+1}w_i, \quad v_{i+1}w_{i+1} - w_iv_i, \quad v_0w_0, \qquad 0 \leq i \leq p-3.$$

*Wtedy istnieje równoważność kategorii*

$$\mathcal{P}_p^\emptyset \simeq (kQ/I)\text{-mod}.$$

Autor wprowadza również rezolwenty minimalne funktorów Schura, Są one istotne gdyż służą one do wyznaczania grup Ext pomiędzy funktorami występującymi w teorii reprezentacji. W sekcji 2.2 obliczane są grupy $\mathrm{Ext}^*(G_1, G_2)$, gdzie $G_i$ dla $i \in \{1,2\}$ jest funktorem prostym, Schura lub Weyla. Głównymi wynikami są Proposition 2.2.1, Corollary 2.2.4 oraz Proposition 2.2.6. Przykładowo dla funktorów Schura (Proposition 2.2.6) autor otrzymuje następujący wynik:

**Proposition 1.** *Jeżeli $0 \leq m, n \leq p-1$, to*

$$\mathrm{Ext}^q(S_m, S_n) = \begin{cases} k, & \textit{jeżeli zachodzi jeden z warunków:} \\ & \quad m = n \ \textit{oraz}\ q = 0, \\ & \quad m < n \ \textit{oraz}\ q \in \{n-m-1,\ n-m\}, \\ 0, & \textit{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wnioskiem z Proposition 2.2.1 jest następujący wniosek (Corollary 2.2.3,)

**Wniosek 2.** *Kategoria $\mathcal{P}_p$ posiada teorię Kazhdana-Lusztiga względem funkcji $l$ zadanej wzorami:*

$$l\big((i+1, 1^{p-i-1})\big) = i$$

*and*

$$l(\lambda) = 0$$

*dla diagramu Younga $\lambda$ który nie jest hakiem.*

Teoria Kazhdana-Lusztiga w kategorii o najwyższych wagach ("highest weight") może być uważana za uogólnienie jednej z hipotez Lusztiga. Biorąc pod uwagę równoważność: $\mathcal{P}_d \simeq \mathrm{GL}^{Pol_{n,d}}\text{-mod}$ dla $n \geq d$, z tego wniosku wynika, że wariant hipotezy Lusztiga zachodzi dla wielomianowych reprezentacji grupy $\mathrm{GL}_n$ stopnia $p$, dla $n \geq p$.

Następnie autor bada algebry Yonedy $\mathrm{Ext}^*(S,S)$ oraz $\mathrm{Ext}^*(F,F)$, gdzie $S$ (odpowiednio $F$) jest sumą prostą funktorów Schura (odpowiednio prostych) należących do bloku $P_p^{\varnothing}$. Otrzymuje interesujące twierdzenia opisujące jawnie strukturę tych algebr, W przypadku algebry Yonedy funktorów Schura , autor dowodzi, że jest ona izomorficzna z rozszerzeniem o zerowym kwadracie, algebry górnotrójkątnych macierzy typu $p \times p$ nad $k$ przez jej bimoduł ściśle górnotrójkątnych macierzy typu $p \times p$ nad $k$.

Autor pokazuje, że algebry endomorfizmów stosowane przy obliczaniu tych algebry Yonedy są formalne. Wnioskiem z tego są równoważności kategorii triangulowanych

$$\mathrm{D}^b\mathcal{P}_p^{\varnothing} \simeq \mathrm{D}^b(\mathrm{Ext}^*(S,S)) \simeq \mathrm{D}^b(\mathrm{Ext}^*(F,F)),$$

Twierdzenie 2.4.1, pokazuje równoważność kategorii abelowych pomiędzy $P_p^{\varnothing}$ a blokiem kategorii $P_d$ o $p$-wadze 1, tzn. odpowiadającym diagramowi Younga, którego $p$-rdzeń otrzymuje się w jednym kroku. Twierdzenie 2.4.1 umożliwia uogólnienie wyników Rozdziału 2 na przypadek $p < d < 2p$, ponieważ dla takich $d$ wszystkie bloki kategorii $\mathcal{P}_d$ mają $p$-wagę co najwyżej 1.

*Rozdział 3.* Zdaniem recenzenta jest to najciekawszy, a jednocześnie najbardziej technicznie zaawansowany rozdział rozprawy. Poświęcony jest obliczeniu grup Ext pomiędzy funktorami Schura w kategorii $\mathcal{P}_{2p}$. Wyraźnie staje się widoczne (Twierdzenia 3.2.4, 3.3.4 oraz 3.4.2 ), że algebra homologiczna kategorii $\mathcal{P}_{2p}$ jest i bardziej skomplikowana niż algebra homologiczna kategorii $\mathcal{P}_d$ dla $d < 2p$. Autor opisuje nowe zjawisko znikania grup Ext pomiędzy funktorami Schura odpowiadającymi pewnym hakowym diagramom Younga, (Twierdzenie 3.2.4). Występują przypadki, w których grupy Ext pomiędzy funktorami Schura są czterowymiarowe, co nie występuje w kategorii $\mathcal{P}_p$, której struktura jest prostsza. Otrzymanie tych grup wymaga zastosowania metod zasadniczo odmiennych od tych, które są wykorzystywane w przypadku $d = p$. W obliczeniach wykorzystano wyniki z rozdział u 2 oraz formułę rozkładu bifunktora $S_\lambda(- \oplus -)$

*Rozdział 4.* W ostatnim rozdziale wprowadzono kategorię $\mathcal{P}_{d,n}$ ścisłych funktorów wielomianowych stopnia $d$ o ograniczonej dziedzinie, otrzymaną przez ograniczenie dziedziny ścisłych funktorów wielomianowych stopnia $d$ do przestrzeni wektorowych o wymiarze co najwyżej $n$. Następnie omówiono podstawowe własności tej kategorii oraz jej związki z algebrą Schura $S(n,d)$ ( Proposition 4.1.1 oraz Twierdzenie 4.1.2). W szczególności kategoria $\mathcal{P}_{d,n}$ może być wykorzystywana do badania wielomianowych reprezentacji grupy $\mathrm{GL}_n$ stopnia $d$ w przypadku $n < d$.

Ustanowiono również diagram *recollement* łączący kategorie $\mathcal{P}_{d,n}$ oraz $\mathcal{P}_d$, umożliwiający analizę kategorii $\mathcal{P}_{d,n}$ przy użyciu narzędzi wypracowanych dla kategorii $\mathcal{P}_d$ (por. Twierdzenie 4.1.4). W Sekcji 4.2 zbadano algebrę homologiczną kategorii $\mathcal{P}_{p,n}$ dla $n < p$, korzystając z formalizmu recollement oraz wyników pierwszej części rozprawy i adaptując konstrukcje znane z kategorii $\mathcal{P}_p$ do nowego kontekstu.

Wykazano zarówno istnienie istotnych podobieństw do przypadku kategorii $\mathcal{P}_p$, takich jak obecność teorii Kazhdana–Lusztiga ( Twierdzenia 4.2.1 i 4.2.2), jak i istotne różnice. W szczególności pojawiają się obliczenia, które nie stanowią jedynie przeniesienia wyników znanych z kategorii $\mathcal{P}_p$ ( Twierdzenie 4.2.3).

Rozdział zamyka analiza funktora pochodnego klasycznego funktora Schura

$$\mathrm{Hom}(I^{\otimes p}, -) \colon \mathcal{P}_p \to k[\Sigma_p],$$

gdzie $k[\Sigma_p]$ oznacza algebrę grupową grupy symetrycznej $\Sigma_p$ (por. Twierdzenie 4.2.5 oraz Wniosek 4.2.6). We Wniosku 4.2.7 uzyskano zaskakujący, ścisły związek pomiędzy kategorią $\mathcal{P}_{p,p-1}$ a kategorią modułów nad algebrą $k[\Sigma_p]$ na poziomie $K$-teorii.

**Podsumowanie.** Kandydat wykazał się dużą znajomością zaawansowanych pojęć z wielu nowoczesnych teorii matematycznych takich jak teoria kategorii, algebra homologiczna czy teoria reprezentacji. Wykazuje dużą biegłość w operowaniu tymi pojęciami. Rozprawa napisana jest w sposób jasny a cytowania są dokładne. Uzyskane wyniki są nowe i z pewnością interesujące nie tylko dla matematyków zajmujących się algebrą homologiczną.

**Wniosek.** Przedstawiona rozprawa spełnia wymogi stawiane pracom doktorskim przez art. 187 ust. 1-3 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" (Dz. U. z 2023 r. poz. 742 ze zm.). Wnoszę zatem o dopuszczenie mgra Patryka Jaśniewskiego do dalszych procedur związanych z uzyskaniem stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.

Piotr Krasoń Piotr Kras