dr hab. Aneta Wróblewska-Kamińska
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa, Polska
awrob@impan.pl

Warszawa, maj 2024

Recenzja pracy doktorskiej „Applications of various compactness methods in the context of compressible fluids mechanics” autorstwa pani magister Maji Szlenk

Wstęp

Pani magister Maja Szlenk w przedstawionej pracy doktorskiej skupia się na analizie kilku układów równań różniczkowych cząstkowych. W szczególności przedstawia ona różne metody zwartościowe i ich zastosowanie do konstrukcji dowodów istnienia słabych rozwiązań opisujących lepkie płyny ściśliwe. Zasadnicza część rozprawy dotyczy trzech zagadnień: istnienia i jednoznaczności słabych rozwiązań dla ściśliwego równania Stokesa, istnienia rozwiązań dla szczególnego przypadku ściśliwego przepływu płynu nienewtonowskiego, istnienia rozwiązań dla ściśliwego, bezciśnieniowego równania Naviera–Stokesa z nielokalnym członem interakcji i lepkością zależną od gęstości.

Praca oparta jest na dwóch opublikowanych pracach oraz na nieopublikowanym rezultacie. Pierwsza część rozprawy (Rozdział 2) bazuje na samodzielnej pracy Maji Szlenk: Weak solutions for the Stokes system for compressible fluids with general pressure, *Journal of Differential Equations* 312 (2022), pp. 317–346. Druga część pracy (Rozdział 3) na jej wspólnej publikacji z Milanem Pokorným: Weak solutions for the Stokes system for compressible non-Newtonian fluids with unbounded divergence. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 46.8 (2023), pp. 9736–9750. Trzecia część, najdłuższa, nie jest opublikowana w czasopiśmie matematycznym, ale można ją obecnie odnaleźć jako publikację w serwisie arxiv.org jako wspólną pracę z promotorami P. Muchą i E. Zatorską: Construction of weak solutions to a pressureless viscous model driven by nonlocal attraction-repulsion (luty 2024).

Rozprawa zajmuje 116 stron, składa się z czterech rozdziałów: wprowadzenia, trzech rozdziałów zasadniczych zawierających poszczególne rezultaty i ich dowody; dodatku uzupełniającego materiał oraz bibliografii.

Omówienie pracy

Pierwszy rozdział to wprowadzenie. Opisuje on motywacje oraz zawartość rozprawy. Zawiera sformułowanie problemów, dość szczegółowo, acz zwięźle przedstawia problemy i metodologię postępowania w ich rozwiązaniu. Autorka rozprawy odnosi się do literatury, podaje dość szeroki przegląd wiedzy w dziedzinie, co pozwala porównać przedstawione rezultaty do dostępnych w literaturze. W tej części doceniam to, że w jasny sposób przedstawione są zasadnicze elementy metodologii dostępne w literaturze oraz naświetlona została subtelność różnic, która jest kluczowa dla analizy matematycznej. Uwypukla to nowatorskie elementy pracy, której esencją jest przedstawienie różnorodnych metod dla wykazania istnienia słabych rozwiązań dla równań wywodzących się z modelowania płynów ściśliwych. W zwięzły sposób przedstawione są rezultaty i główne kroki dowodowe. Ta część rozprawy przedstawia najbardziej istotne elementy wykorzystanej metodologii i w gładki sposób wprowadza czytelnika do dalszych części pracy.

Drugi rozdział dotyczy ściśliwego układu Stokesa w formie:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) &= 0, \\ -\mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u + \nabla p(\varrho) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie ϱ i u to odpowiednio gęstość i wektor prędkości. Układ jest uproszczony: w równaniu momentu opuszczono człon odnoszący się do pochodnej materiałowej, co odpowiada modelom w reżimie małej liczby Reynoldsa. Układ jest rozpatrywany na torusie. Funkcja ciśnienia $p(\varrho)$ jest zadana dość ogólnie i pokrywa szeroką klasę relacji, niewymagana jest monotoniczność, a funkcja może opadać do zera dla dowolnie dużych argumentów.

Metodyka wykorzystana przez autorkę pozwala na wykazanie istnienia rozwiązania, ale przede wszystkim (co jest nowe) udowodnione zostają oszacowania L^∞ na gęstość oraz jednoznaczność rozwiązań.

Głównym narzędziem jest przepisanie układu we współrzędnych Lagrange'a, co pozwala przedstawić pierwotny system jako układ równań zwyczajnych na gęstość i dywergencję prędkości. Kluczowym dla wykazania jednoznaczności jest zaobserwowanie, że ∇u jest w przestrzeni BMO oraz wykorzystanie nierówności logarytmicznej danej przez Lamma B.6 (poprawionej w stosunku do tej danej przez Muchę i Rusina w 2008) oraz lematu Osgooda.

Zaprezentowany jest również dowód istnienia rozwiązań, alternatywny do tego pokazanego przez Lionsa, oparty o rezultaty Crippy i De Lellisa o stabilności regularnych przepływów Lagrangea w L^1.

Cały rezultat sformułowany jest w Twierdzeniu 2.1, problem postawiony jest w Rozdziale 2.1. Rozdział 2.2 zawiera wyprowadzenie oszacowań a'priori, oszacowań L^∞ dla gęstości. Rozdział 2.3 to dowód jednoznaczności rozwiązań, natomiast Rozdział 2.4 to dowód istnienia słabych rozwiązań.

W trzecim rozdziale znajduje się drugi główny rezultat pracy, który powstał we współpracy z Milanem Pokorným. Przedmiotem badań ponownie jest istnienie słabych rozwiązań dla przepływu ściśliwego opisanego układem Stokesa, ale tym razem dla płynów nienewtonowskich - lepkość nie jest stała i zależy od gradientu prędkości w nieliniowy sposób. Rozważany układ równań wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) &= 0, \\ -\operatorname{div} \mathbb{S}(\nabla u) + \nabla p(\varrho) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie tensor naprężeń dany jest przez

$$\mathbb{S}(\nabla u) = (\mu_0(|\mathbb{D}u|) + 2\mu_1)\mathbb{D}u + (\lambda(|\operatorname{div} u|\operatorname{div} u)\mathbb{I},$$

a współczynniki lepkości spełniają: $\mu_1 > 0$,

$$0 \leq \mu_0(z), \lambda(z) \leq \frac{C}{z}$$

oraz pewne warunki na monotoniczność. Zauważmy, że parametr μ_1 odpowiada liniowemu komponentowi w tensorze naprężeń, współczynniki μ_0, λ maleją odpowiednio ze wzrostem $|\mathbb{D}u|$ i $|\operatorname{div} u|$. Ciśnienie ma typową formę $p(\varrho) \approx \varrho^\gamma$, $\gamma > 1$.

Główne twierdzenie rozdziału (Twierdzenie 3.2) mówi o istnieniu słabych rozwiązań dla rozważanego układu (2) takich, że $\nabla u \in L^2((0,T) \times \mathbb{T}^d)$, $\varrho \in L^\infty(0,T;L^\gamma)$ oraz że $\operatorname{div} u$ i ϱ mają ograniczoną normę w $L^\infty(0,T;L^p)$ przez stałą zależną od p i T, stała ta wybucha, gdy T lub p dążą do nieskończoności.

By osiągnąć rezultat autorzy isnpirują się rezultatem Feireisla, Liao, Málka, jednak opuszczają założenie ograniczoności $\operatorname{div} u$. Wykorzystują tu specyficzną formę tenora naprężeń i jak wcześniej pracują z przestrzeniami BMO, a teoria Calderóna–Zygmunda pozwala im uzyskać, że

$$\mu_1 \operatorname{div} u - p(\varrho) \in L^\infty(0,T;BMO). \tag{3}$$

Kluczowe jest jednak to, że powyższe oszacowanie nie jest osiągnięte dla składowych powyższego wyrażenia z osobna. Funkcja ϱ i $\mu_1 \operatorname{div} u$ są szacowane jedynie w przestrzeniach L^p z $p < \infty$. Powyższy fakt wystarcza jednak, by zastosować metody jak w pracy Feireisla, Liao, Málka z 2015 roku również przy braku ograniczoności na dywergencję u. Pomysł polega na porównaniu dwóch różnych energii.

W Rozdziale 3.1 znajdziemy wprowadzenie do problemu i jego sformułowanie. W Rozdziale 3.2 znajdziemy wyprowadzenie oszacowania (3). Rozdział 3.3 to konstrukcja rozwiązań aproksymacyjnych: do równania ciągłości dodane jest dodatkowe tłumienia (podnosi całkowalność gęstości) i człon lepkościowy (podnosi regularność gęstości), a do równania momentu człon podnoszący regularność pola prędkości. Istnienie rozwiązania dla układu aproksymacyjnego wykazane jest z pomocą twierdzenia Schaudera o punkcie stałym. Rozdział 3.4 to dowód zbieżności ciągów aproksymacyjnych do słabego rozwiązania problemu (2), czyli serce dowodu, gdzie wykorzystane jest oszacowanie (3), nierówność logarytmiczna oraz że słaba granica ciągu ϱ_δ^γ jest niemniejsza niż ϱ^γ oraz otrzymana silna zbieżność w L^2 gradientów prędkości.

Rozdział czwarty jest najdłuższy i najbardziej techniczny. Rozważany układ równań to wersja Naviera–Stokesa. Tym razem obecny jest człon konwekcyjny oraz uwzględniono człon nielokalnej interakcji, atrakcji-repulsji, który zastępuje standardową funkcję ciśnienia. Rozważany w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ system to

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) &= 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) - \operatorname{div}(\varrho \mathbb{D}u) + \varrho \nabla (K * \varrho) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie dla jądra K założono, że

$$K(x) = \frac{c_1}{|x|^\alpha} + \frac{c_2}{2}|x|^2, \quad \alpha \in (0,2).$$

Układ ten jest motywowany modelami ruchu kolektywnego. Człon osobliwy odpowiada za przeciwdziałanie kolizji obiektów lub cząsteczek, człon kwadratowy – kontroluje ich rozpraszanie w przestrzeni. Podobny układ (na torusie) z punktowym ciśnieniem ϱ^γ oraz kwestia istnienia rozwiązań rozważana była przez Vasseura i You. Tu mamy do czynienia z układem w całej przestrzeni oraz z nielokalną formą „ciśnienia". Zatem w tym rezultacie metodologia musiała zostać odpowiednio zmodyfikowana dla układu z nielokalnym członem. Istotne jest również, że układ jest zdegenerowany – lepkość znika, gdy $\varrho = 0$, tym samym tracimy informację o gradiencie pola prędkości. Ta informacja jest skompensowana oszacowaniami typu Brescha i Desjardinsa. Zdefiniowano odpowiednie obcięcie dla obszaru periodycznego co pozwoliło skonstruować aproksymację rozwiązania. Nowym elementem jest też odnalezienie sposobu odzyskania oszacowania typu Melleta–Vasseura. Zauważono między innymi, że pomocne jest zastosowanie nierówności Younga.

W Rozdziale 4.1 znajdziemy omówienie problemu, metodologi, kontekstu w dostępnej literaturze oraz sformułowanie głównego rezultatu tej części pracy - Twierdzenia 4.3, mówiącego o istnieniu słabego, globalnego w czasie rozwiązania układu (4) spełniającego oszacowania energetyczne, oszacowanie Brescha-Desjardins'a oraz oszacownie Melleta-Vasseura. Zanajdziemy tu też sformułowanie problemu aproksymacyjnego i wyjaśnienie kolejnych wielu etapów aproksymacji. Już tu widoczny jest poziom technicznego zaawansowania. Elementów aproksymujących jest wiele, jednak każdy ma tu swoje uzasadnienie i rolę, są one w tym rozdziale metodycznie wyjaśnione: dodanie lepkości w równaniu ciągłości zwiększa regularność ϱ, dodanie odpowiednich członów do równania momentu zapewniających dodatniość gęstości oraz regularność gradientu logarytmu gęstości (potrzebnych do oszacowań BD), dodano również człony poprawiających całkowalność u. Przeformułowano problem na (rosnący) torus, wprowadzenie funkcji obcinającej gęstość blisko zera i nieskończoności.

W Rozdziale 4.2 przedstawione są lematy pomocnicze wykorzystywanie kilkukrotnie w późniejszych podrozdziałach.

W Rozdziale 4.3 przedstawiony jest podstawowy poziom aproksymacji i szkic dowodu istnienia rozwiązania aproksymacyjnego metodą Galerkina, oszacowania energetyczne, oszacowanie Brescha-Desjardins'a na, przejście do granicy z parametrami w członach regularyzujących gęstość.

W Rozdziale 4.4 uzyskane są oszacowanie Melleta–Vasseura dla pośredniej aproksymacji, przedstawiona odpowiednia aproksymacja danych początkowych i dobór funkcji testującej, które zapewniają odpowiednie obcięcia dla funkcji gęstości. Następnie przejście z parametrami w równaniu i obcięciach do granicy.

W Rozdziale 4.5 jest przejście do granicy z parametrami, które korespondują z członami, których zadaniem było podwyższenie całkowalności u.

W Rozdziale 4.6 znajdujemy przejście z torusa do przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Następna część pracy to Appendix A, B, C. Część ta to uzupełnienie odpowiednio poprzednich trzech rozdziałów.

Praca kończy się bibliografią zawierającą 110 pozycji, które są wybrane w sposób adekwatny i rozsądny.

Opinia

W mojej opinii cała rozprawa napisana jest na bardzo dobrym poziomie. Rozważane zagadnienia przedstawione są w sposób przejrzysty i bardzo szeroki. Widoczne jest, że praca wymagała głębokiego zrozumienia zaawansowanych technik i metod z teorii równań różniczkowych cząstkowych i analizy matematycznej. Autorka wykazuje też bardzo dobrą ogólną wiedzę teoretyczną w swojej dyscyplinie i żywa szerokiego wachlarza narzędzi matematycznych, które wymagają głębokiej wiedzy i wielu technik. Podejmowane tematyki są nietrywialne i interesujące dla szerszego grona matematyków i wierzę, że wyniki oraz metodologia znajdą swoje zastosowanie i zostaną wykorzystane przez innych matematyków. Teoria pogłębiana i rozwijana w pracy jest przedmiotem badań od wielu lat. Zrozumienie jej na tyle głęboko by wypracować nowe wyniki jest już istotnym osiągnięciem. Pani Maja Szlenk wykazała się w pracy dużą samodzielnością i niezależnością naukową. Również w osobistym kontakcie, podczas referatów i rozmów naukowych umiejętnie argumentuje swoje tezy.

Dla mnie osobiście, ze względu na zainteresowania naukowe, część rozprawy dotycząca istnienia rozwiązań dla płynów nienewtonowskich jest najbardziej interesująca. Bardzo rozwinięta jest teoria dla płynów nieściśliwych, rezultaty na temat przepływów ściśliwych dotyczą zazwyczaj bardzo szczególnych przypadków przy mocnych założeniach lub rezultaty dotyczą istnienia bardzo słabych rozwiązań. Wynik zawarty w pracy w mojej opinii jest interesujący również dla szerszego grona naukowego.

Redakcja rozprawy jest bardzo czytelna. Układ pracy, podział na podrozdziały oraz ich zawartość ułatwia zapoznanie się z treścią i jej zrozumienie. Kilka znalezionych przeze mnie nieścisłości nie umniejsza wartości całej rozprawy. Poniżej przedstawię kilka drobnych uwag.

- W pracy brakuje mi pełniejszego spisu oznaczeń. Większość jest standardowa w rozważanej teorii, jednak w pracy w formie monografii oczekiwałabym większej dokładności, w szczególności uwaga dotyczy oznaczeń wykorzystywanych przestrzeni funkcyjnych (np. H, $\mathcal{H}$), czy dotyczących zapisu norm w przestrzeniach oraz notacji typu: ln^+, czym jest m na str. 68.

- W Rozdziale 2.1.1 warto byłoby dodać na czym oparte są metody z prac [48,46, 47, 99]. W Rozdziale 2.1.2 dobrze byłoby umieścić referencje, gdzie ciśnienie w przestawionych formach jest wykorzystane w modelach biologicznych. Powołując się na rezultat o istnieniu jednoznacznego $x(t, y)$ w Rozdziale 2.3 dobrze byłoby podać konkretne odniesienie w [40]. Podobnie w przypadku odniesienia do rezultatów z [18] w Rozdziale 3.2.

- W niektórych punktach brakuje mi dokładniejszego wyjaśnienia, a wnioski wyciąganie są zbyt szybko. Dotyczy to np.: oszacowania na $\varrho_\delta^\gamma T_k(\varrho_\delta)^p$ na str. 41; silnej zbieżności $\sqrt{\varrho_n}$ przy wykorzystaniu lematu Aubin-Lions; oszacowania na $\partial_t \varrho_N$ oraz weryfikacji czy spełnione są założenia Lemma 4.4 na str. 59; weryfikacji (przywołania odpowiednich referencji) czy spełnione są założenia Lemma 4.4 w dowodzie Lemma 4.23.

- Brakuje mi sformułowania definicji rozwiązań dla układu (3.12) z pracy oraz informacji w jakim sensie rozumiemy rozwiązanie (3.13). W konsekwencji trudno zweryfikować czy u_δ (str. 40) jest dopuszczalną funkcją testującą. Podobna uwaga dotyczy układu (3.22) i testowania równania ciągłości przez $P_k'(\varrho)$. Brakuje też definicji rozwiązania zrenormalizowanego dla równania ciągłości (3.6) na spełnienie, którego jest powołanie się na str. 42.

- W Proposition 4.5 brakuje dokładniejszej informacji w założeniach, gdzie powinno należeć ϱ, przez co utrudnione jest zweryfikowanie oszacowania (4.33).

  Na końcu Rozdziału 4.3.3 warto byłoby zebrać oszacowania niezależne (i zależne) od ν i ε.

- Dowód Proposition 4.16 skupia się na uzyskaniu ciągłości w czasie dla $\nabla\sqrt{\varrho}$ do danych początkowych. Warto skomentować dlaczego ciągłość jest na całym odcinku czasowym i co dzieje się w T.

- Na poziomie redakcyjnym znalazłam kilka błędów interpunkcyjnych - głównie brak przecinków lub kropek na końcu zdania kończącego się równaniem oraz literówek. Wśród nich: nieparujące się nawiasy w równaniach str. 21; $i = 01, 2$ zamiast $i = 1, 2$ na str. 21; Meller zamiast Mellet str. 49; ∇u_ε zamiast ∇u_δ na str. 44; brak współczynnika 2 przy rozpisywaniu R_6 str. 61; $\partial_t(\varrho_\kappa, u_\kappa)$ zamiast $\partial_t(\varrho_\kappa u_\kappa)$ str.81; $\partial_t\tilde{\varrho}_L$, $(\tilde{\varrho}_L\tilde{u})$, $W^{-2,4/3}$ str. 90. Funkcja ξ na str. 71, prawdopodobnie powinna gładka o zwartym nośniku, a nie jedynie znikająca w 0 i $+\infty$. Sformułowanie typu „in this paper" zamiast np. in this chapter. Brak też konsekwencji w zapisie sformułowań typu: Dominated Convergence Theorem. Raz zapis jest wielkimi literami, raz małymi.

  Oczywiście nie umniejsza to poziomowi merytorycznemu rozprawy.

Konkluzja

Wyniki uzyskane w przedstawionej przez magister Maję Szlenk pracy doktorskiej oceniam bardzo pozytywnie. Podjęte przez nią problemy naukowe zostały oryginalnie rozwiązane. W swojej rozprawie wykazuje się znajomością metodologii oraz dorobku nauki w dyscyplinie matematyka. Potrafi odnieść się i ocenić dotychczasowy dorobek naukowy w dziedzinie oraz krytycznie porównać swoje wyniki z dostępnymi rezultatami. Pani Maja Szlenk jest matematykiem, który potrafi samodzielnie powadzić pracę naukową, osobą która konsekwentnie i skutecznie rozwija swoje matematyczne zainteresowania przyczyniając się tym samym do rozwoju dziedziny.

Uważam, że przedstawiona rozprawa „„Applications of various compactness methods in the context of compressible fluids mechanics" magister Maji Szlenk spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie pani magister Maji Szlenk do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

dr hab. Aneta Wróblewska-Kamińska