dr hab. Piotr Kalita, prof. UJ,
Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Jagielloński,
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków,
piotr.kalita@ii.uj.edu.pl

Kraków, 21 lipca 2024

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Łukasza Chomieni pt. "Partial Differential Equations on Low-Dimensional Structures"

Praca doktorska magistra Łukasza Chomieni została przygotowana pod kierunkiem dr hab. Anny Zatorskiej-Goldstein, prof. UW. Jej najważniejsze wyniki dotyczą istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań zagadnień opisanych eliptycznymi i parabolicznymi równaniami cząstkowymi na *niżej wymiarowych strukturach*. Struktury te, w rozumieniu Autora rozprawy, zadane są jako zbiory $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ gdzie S_i są niżej (czyli jedno- lub dwu-) wymiarowymi gładkimi podrozmaitościami z brzegiem w $\mathbb{R}^3$. Istotne jest to, że zbiory te mogą się ze sobą przecinać, oraz być różnego wymiaru, co prowadzi do niegładkości (w miejscu przecięć) oraz niejednolitego wymiaru niżej wymiarowej dziedziny rozważanych zagadnień, co jest głównym źródłem trudności w rozprawie.

Praca przedstawia wyniki zawarte w dwóch artykułach: indywidualnej pracy doktoranta poświęconej problemom parabolicznym

[1] *Łukasz Chomienia, Parabolic PDEs on low-dimensional structures, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 534, 2024, 128082,*

oraz pracy wspólnej z M. Fabisiakiem, dostępnej jako preprint na arxiv i zawierającej wyniki dotyczące zagadnień eliptycznych

[2] *Łukasz Chomienia, Michał Fabisiak, Higher regularity of solutions to elliptic equations on low-dimensional structures, arXiv:2311.16280*

Pierwszym krokiem, jaki wykonuje doktorant jest konstrukcja przestrzeni Sobolewa w jakich będą poszukiwane rozwiązania. Punktem wyjścia jest miara singularna μ skoncentrowana na dziedzinie S zagadnienia. Zgodnie z konstrukcją znajdującą się na przykład w pracy Bouchitté, Buttazzo, Seppecher (1997), doktorant wykorzystuje przestrzeń Sobolewa H^1_μ opierającą się jedynie o styczną część gradientu, taka przestrzeń może być zdefiniowana, gdyż za pomocą miary μ można skonstruować lokalnie przestrzeń styczną do rozmaitości w danym punkcie. Doktorant potrzebuje także wykorzystać przestrzenie drugiego stopnia, co robi w oparciu o podejście z pracy Bouchitté, Fragalá (2002) - tu kluczowe jest zdefiniowanie dodatkowego pola Cosseratów b które pełni rolę gradientu w kierunkach normalnych do rozmaitości. Warto podkreślić, że Autorzy dwóch cytowanych prac zajmowali się przede wszystkim minimalizacją funkcjonałów całkowych podczas gdy doktorant wykorzystuje tą strukturę przestrzeni typu Sobolewa w kontekście równań cząstkowych.

Kluczowe wyniki rozprawy znajdują się w rozdziałach 4-6: rozdziały 4 i 5 poświęcone są zagadnieniom parabolicznym (odpowiednio silnym i słabym postaciom) i zawierają wyniki z pracy [1], a rozdział 6 - regularności rozwiązań zagadnienia eliptycznego i zawiera wyniki z pracy [2].

Wyniki z rozdziału 4 dotyczą silnych rozwiązań zagadnienia brzegowo-początkowego z warunkiem Neumanna dla równania $u_t - \Delta_\mu u = 0$ z operatorem liniowym $\Delta_\mu : D(\Delta_\mu)_N \to L^2_\mu$ oznaczonym także przez $L_\mu = \Delta_\mu$. Doktorant, wykorzystując teorię półgrup, pokazuje istnienie i jednoznaczność rozwiązania silnego. Aby to zrobić musi pokonać dwie istotne trudności:

- [A] pokazanie domkniętości operatora L_μ - Twierdzenie 4.2,
- [B] pokazanie że operator L_μ definiuje odpowiednią (tu jednakowo ciągłą) półgrupę - Twierdzenie 4.11.

Główną trudnością w kroku [A] jest brak kontroli nad funkcjami b_n (czyli gradientami normalnymi) dla ciągu argumentów $u_n \in D(L_\mu)_N$. Te funkcje b_n powinny zbiegać by dało się zastosować twierdzenie o domkniętości drugiej pochodnej z pracy Bouchitté i Fragala. Aby ją pokonać, doktorant musi w odpowiedni sposób skonstruować funkcje b_n. Osiąga to, wykorzystując przy tym nowe wyniki dotyczące lokalnej charateryzacji 'cienkich' przestrzeni funkcyjnych drugiego rzędu zawarte w rozdziale 3.3. Z kolei w kroku [B] doktorant nie może posużyć się klasycznym twierdzeniem Hille'a-Yosidy ze względu ma brak suriektywności operatora $\lambda - L_\mu : D(L_\mu)_N \to L^2_\mu$ co uniemożliwia zdefiniowanie rezolwenty.

Tą trudność Autor rozwiązuje poprzez zastosowanie wersji twierdzenia Hille'a-Yosidy z pracy Magyar (1989) opierającej się o konstrukcję półgrupy za pomocą operatorów iterowanych $\frac{1}{k!}L_\mu^k$.

Aby uzyskać twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności silnego rozwiązania doktorant musiał pokonać nowe, istotne trudności wynikające z 'cienkości' dziedziny zagadnienia. Wyniki tu przedstawione są nowe, ciekawe, i istotne. Zwracam uwagę na to wymagane jest restrykcyjne założenie, że miara należy do klasy $\mathcal{S}$ czyli takiej, w której dla wszystkich i mamy $\dim S_i = 1$ lub $\dim S_i = 2$ (przy czym w ostatniej linijce tekstu na stronie 46 jest wzmianka o dowodzie domkniętości także dla przypadku $\dim E_i = 1$ i $\dim E_j = 2$). Warto także dodać (co doktorant explicite zaznacza) podejście z pracy Magyar wymaga dużej regularności danych początkowych.

Powyższych ograniczeń nie ma podejście oparte o słabe rozwiązania, które doktorant przedstawia w rozdziale 5. W oparciu o wersję lematu Laxa-Milgrama, którą stosuje w przestrzeni funkcji czasowo-przestrzennych, pokazuje istnienie i jednoznaczność słabego rozwiązania, a następnie jego regularność. Udaje mu się także, w rozdziale 5.3, pokazać że rozwiązanie zagadnienia parabolicznego zbiega w czasie do rozwiązania zagadnienia eliptycznego. Wartość tego wyniku, zawartego w twierdzeniu 5.16 bierze się z tego że pokazuje związek między częścią pracy poświęconą zagadnieniom ewolucyjnym a zagadnieniom stacjonarnym. Podsumowując wyniki rozdziału 5, można zauważyć, że teoria słabych rozwiązań może być zaadaptowana do zagadnień zdefiniowanych na strukturach cienkich dużo bardziej bezpośrednio niż podejście oparte o półgrupy. Ciekawa byłaby odpowiedź na pytanie czy da się wzmocnić regularność rozwiązania słabego tak, by było ono silne w sensie rozdziału 4. Pytanie wydaje się trudne ze względu na wymóg wysokiej regularności rozwiązań silnych.

Trudnym i ciekawym wynikiem, wymagającym konstrukcji odpowiedniego rozszerzenia funkcji z niżej wymiarowej poddziedziny do całej przestrzeni jest twierdzenie o tym, że słabe rozwiązanie zagadnienia eliptycznego jest klasy H^2_{loc} na każdym z komponentów S_i obszaru. To jest główny wynik rozdziału 6. Wynik ten jest uzyskany metodą ilorazów różnicowych dla których wyprowadzone są oszacowania jednostajne ze względu na krok h. Wspomniane rozszerzenie jest konieczne po to, aby ilorazy różnicowe miały sens, i jest ono skonstruowane tak, aby te ilorazy zbiegały do odpowiedniej drugiej pochodnej cząstkowej. Wynik jest istotnie nowy i bez wątpienia wymagał twórczego i ciekawego pomysłu. Jako konsekwencję tego wyniku doktorant pokazuje ciągłość rozwiązania słabego (przy założeniu stałości wymiarów poszczególnych komponentów dziedziny). Inną ważną konsekwencją wymagającą dodatkowo rozumowania w którym doktorant konstruuje pole b jest wynik zawarty w twierdzeniu 6.10 mówiący o tym że rozwiązanie zagadnienia eliptycznego należy do dziedziny operatora drugiej pochodnej na cienkim obszarze.

Badanie zagadnień opisanych równaniami cząstkowymi dla niżej wymiarowych obszarów uważam za ważny i ciekawy temat badawczy. Doktorant znalazł nowe, twórcze i skuteczne rozwiązania dla istotnych trudności jakie napotkał w swojej pracy. Dodam jeszcze, że rozprawa jest zilustrowana kilkoma przykładami pozwalającymi lepiej zrozumieć trudności związane z rozwiązywaniem zagadnień na strukturach cienkich: a w szczególności to, że nie da się ich sprowadzić do sumy rozwiązań na poszczególnych komponentach obszaru.

Bez najmniejszych wątpliwości oceniam pozytywnie recenzowaną rozprawę, Stanowi ona oryginalne rozwiązanie interesującego problemu badawczego. Wnoszę o jej dopuszczenie do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia naukowego doktora.

Podpisany elektronicznie przez
Piotr Kalita
22.07.2024
14:38:25 +02'00'