

dr hab. Tomasz Kania, prof. UJ
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Krzysztofa Zakrzewskiego

Rozprawa doktorska mgr. Krzysztofa Zakrzewskiego zatytułowana *Corson-like compacta and related function spaces* poświęcona jest strukturalnej teorii pewnych klas przestrzeni zwartych, w szczególności klasie przestrzeni NY (od nazwisk Nakhamsona i Jakowlewa, przy czym nazwisko drugiego z nich transliterowane jest na język angielski jako Yakovlev). Klasa ta stanowi naturalne rozszerzenie dobrze znanej klasy przestrzeni Corsona. Praca obejmuje również inne uogólnienia, takie jak przestrzenie κ -Corsona, oraz bada ich relacje z przestrzeniami funkcji ciągłych $C_p(K)$ wyposażonymi w topologię zbieżności punktowej oraz $C(K)$ z topologią zbieżności jednostajnej. Autor umiejętnie łączy metody topologii ogólnej, analizy funkcjonalnej oraz teorii miary, uzyskując wartościowe charakterystyki rozważanych klas przestrzeni zwartych, a także wyniki dotyczące ich stabilności pod ciągłymi obrazami. Rozprawa opiera się na wynikach zawartych w dwóch publikacjach:

- K. Zakrzewski, *Function spaces on Corson-like compacta*, *Results Math.* **80** (2025), no. 3, Paper No. 75, 21 ss.
- W. Marciszewski, G. Plebanek, and K. Zakrzewski, *Digging into the classes of κ -Corson compact spaces*, *Israel J. Math.*, przyjęta do druku¹.

Praca jest w mojej ocenie oryginalna, merytorycznie spójna i dobrze osadzona w aktualnej literaturze przedmiotu. W wielu miejscach porządkuje znane fakty, by następnie przesunąć granicę wiedzy o krok dalej, co świadczy o dojrzałości naukowej Doktoranta. Rozprawa liczy 56 stron i składa się z czterech rozdziałów, poprzedzonych wstępem oraz zakończonych bibliografią. Język angielski, w którym napisana jest praca, jest poprawny i precyzyjny, choć miejscami nieco zwięzły, co jest typowe dla tekstów matematycznych o charakterze technicznym; występują w tekście okazjonalne niezgrabności gramatyczne, które nie mają wpływu na moją ocenę. Należy jednak odnotować, że praca nie wygląda na dokładnie sprawdzoną, by wspomnieć tylko brakujący przymimek w nazwie trzeciego rozdziału, brak słowa *locally* w wypowiedziach Twierdzeń 4.1.7–4.1.8, literówka w nazwisku Eberlein w Lemma 3.2.8 oraz “Its easy” zamiast “It is easy” tamże, brak ustalenia punktu x_0 w dowodzie Lematu 4.2.2 oraz szereg pomniejszych.

Układ i główne wyniki pracy.

Rozprawa jest dobrze zorganizowana, z logicznym przepływem myśli od definicji podstawowych po zaawansowane wyniki. Poniżej omówię pokrótce każdy rozdział, wskazując na kluczowe osiągnięcia.

¹Gwoli formalności, do przekazanych mi materiałów nie dołączono oświadczeń o współautorstwie, dlatego – zgodnie ze standardami w matematyce – zakładam równomierny wkład wszystkich autorów w drugą z wymienionych publikacji. Oświadczenia takowe nie są wymagane przez UW.

1. **Wprowadzenie (Rozdział 1).** Rozdział ten syntetycznie przypomina podstawowe pojęcia, takie jak Σ_κ -produkty i σ -produkty, a także elementy teorii przestrzeni liniowo-topologicznych, ze szczególnym naciskiem na przestrzenie lokalnie wypukłe. Omówione zostały również podstawowe fakty dotyczące przestrzeni funkcyjnych $C_p(X)$ i $C(K)$, co stanowi solidny punkt odniesienia dla dalszych rozważań. Autor umiejętnie wprowadza czytelnika w tematykę, wskazując na kluczowe problemy i ich kontekst w literaturze.
2. **Klasy przestrzeni zwartych pokrewnych przestrzeniom Corsona (Rozdział 2).** Sednem tego rozdziału są uogólnienia klasycznych wyników dotyczących przestrzeni Corsona w szerszym kontekście przestrzeni κ -Corsona oraz klasy NY. Doktorant prezentuje wewnętrzne charakteryzacje dla klas przestrzeni ω -Corsona i NY (Twierdzenia 2.3.1 oraz 2.3.6), wraz z analizą ich własności pokryciowych i stabilności (na przykład, przy przechodzeniu do przeliczalnych produktów, ciągłych obrazów czy stosowania funktora P miar probabilistycznych). Szczególnie interesująca jest część 2.5, gdzie pytania o stabilność klasy κ -Corsona ze względu na funktor P łączone są z teorio-mnogościowo-miarowymi aspektami, takimi jak kaliber miar. Wyniki te, choć techniczne, pokazują głębokie zrozumienie przez Autora powiązań między topologią a teorią miary.
3. **Przestrzenie funkcyjne przestrzeni pokrewnych przestrzeniom Corsona (Rozdział 3).** Z mojej perspektywy jest to najciekawszy rozdział, ukazujący rezultaty związane z zachowywaniem własności topologicznych poprzez liniowe izomorfizmy przestrzeni funkcji ciągłych ze zbieżnością punktową. Na szczególną uwagę zasługuje Lemat 3.3.10 o transferze własności bycia przestrzenią Eberleina, a także twierdzenia o transferze własności NY poprzez izomorfizmy przestrzeni C_p (np. Twierdzenia 3.3.9, 3.3.11 i 3.3.12). Autor dowodzi tu, jak pewne własności wymiarowe i strukturalne są transferowane przez liniowe iniekcje o gęstym obrazie, co ma istotne implikacje dla klasyfikacji przestrzeni funkcyjnych tychże. Dowody są eleganckie i wymagają biegłości w operowaniu operatorami sprzężonymi oraz słabymi topologiami. Drobnym mankamentem jest okazjonalne pomijanie informacji tego w jakiej topologii obraz rozważanego operatora liniowego jest domknięty.
4. **Różnorakie rezultaty (Rozdział 4).** Rozdział ten zbiera wyniki o charakterze uzupełniającym, podzielone na dwie części. W §4.1 omówione są operatory liniowe oraz uogólnienie klasycznego twierdzenia Banacha o przekształceniu domkniętym na ogólne lokalnie wypukłe przestrzenie liniowo-topologiczne (Twierdzenia 4.1.7 i 4.1.8). Natomiast w §4.2 Autor bada homeomorfizmy i liniowe homeomorfizmy przestrzeni funkcyjnych; na przykład Lemat 4.2.2 i Twierdzenie 4.2.3, pokazują, że c_0 -sumy proste przestrzeni $C_p(X)$ dla przestrzeni pseudozwartych są homeomorficzne ze swą przeliczalną potęgą, co uogólnia klasyczny wynik Gul'ki i Rudina. Część ta ma nieco bardziej szkicowy charakter, jak sam Autor zaznacza, że to produkt uboczny badań i niektóre fakty mogą być znane specjalistom, ale nie umniejsza to ich wartości (na przykład Corollary 4.1.5. można zasadniczo znaleźć w rozważaniach Sekcji 7.4 klasycznej pozycji H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Graduate Texts in Mathematics **3**, Springer-Verlag, New York, 1971, którą to autor i tak cytuję. Wydaje się naturalniejsze by rezultaty zawarte w Sekcji 4.1 były przeniesione do wstępu.

Ocena merytoryczna pracy.

Uważam, że praca wnosi istotny wkład do teorii przestrzeni zwartych oraz przestrzeni funkcyjnych. Do najważniejszych osiągnięć zaliczam:

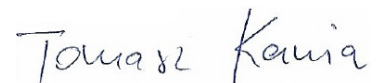
- Charakteryzacje klas przestrzeni ω -Corsona i NY oraz analizę ich stabilności, w tym związek z funktorem miar P i kalibrem miar.
- Wyniki związane z wymiarowością dla przekształceń $C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ o gęstym obrazie w kontekście κ -zwartości (np. Twierdzenie 3.2.11).
- Niezmienniczość własności NY przy ciągłych liniowych iniekcjach między przestrzeniami $C_p(\cdot)$ (Twierdzenia 3.3.9, 3.3.11, 3.3.12).

Rezultaty te są nowe, wartościowe i dobrze udokumentowane. Narracja, mimo techniczności, pozostaje klarowna, a dowody świadczą o samodzielności Doktoranta – zwłaszcza w częściach dotyczących transferu własności NY. Praca pokazuje, że Autor opanował zaawansowane techniki i jest gotów do samodzielnych badań.

Podsumowanie i wnioski. Rozprawa doktorska mgr. Krzysztofa Zakrzewskiego stanowi wartościowy i oryginalny wkład w teorię przestrzeni zwartych pokrewnych do przestrzeni Corsona oraz powiązanych przestrzeni funkcyjnych. Autor łączy eleganckie konstrukcje (dziedziczenie własności NY, twierdzenia wymiarowe) z zastosowaniami do c_0 -sum prostych przestrzeni $C_p(X)$. Wyniki wzbogacają stan na styku topologii mnogościowej i analizy funkcjonalnej i stanowią wartościowy wkład w tę część matematyki.

Konkluzja Moja opinia o pracy jest całkowicie **pozytywna**. Stwierdzam, że recenzowana praca **spełnia wymogi** stawiane rozprawom doktorskim przez Ustawę z dnia 20 lipca 2018 r. o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U. 2018 poz. 1668 z późn. zm.). Wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie mgr. Krzysztofa Zakrzewskiego do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.

Z poważaniem,



dr hab. Tomasz Kania, prof. UJ