

# Recenzja pracy doktorskiej mgr. Krzysztofa Zakrzewskiego

Rozprawa doktorska mgr. Krzysztofa Zakrzewskiego dotyczy głównie małych przestrzeni zwartych i przestrzeni  $C_p(X)$ .

Uzyskane wyniki zawarto w dwóch artykułach - jednym wspólnym z promotorem i Grzegorzem Plebankiem przyjętym do druku w *Israel Journal of Mathematics* i jednym samodzielnym opublikowanym w *Results in Mathematics*. W ostatniej części rozprawy przedstawione są wyniki, które póki co nie zostały opublikowane.

## 1 Rozdział 2

Ten rozdział jest dość ściśle oparty na części artykułu Marciszewskiego, Plebanka i Zakrzewskiego z *Israel Journal of Mathematics*. Niektóre fakty, które w artykule były podane bez dowodu, w rozprawie są dowodzone (np. uwaga 2.1.1). Rozdział zawiera rozważania na temat klas przestrzeni definiowanych podobnie do klasycznych kompaktów Corsona: głównie kompaktów  $\omega$ -Corsona i tak zwanych przestrzeni Nachmansona-Jakowlewa (przestrzeni NY; nazwa ta została ukuta we wspomnianym powyżej artykule, ale samo pojęcie jest bardzo naturalne).

Głównymi wynikami tego rozdziału są twierdzenia charakteryzujące przestrzeń NY (twierdzenie 2.3.1) i kompakty  $\omega$ -Corsona (twierdzenie 2.3.6). Warunek charakteryzujący przestrzeń NY, który się tu pojawia (a który nie występował w pracy Nachmansona i Jakowlewa) to koniunkcja dziedzicznej metazwartości i warunku: każda podprzestrzeń zawiera relatywnie otwartą podprzestrzeń o przeliczalnym ciężarze. W przypadku kompaktów  $\omega$ -Corsona jest to natomiast koniunkcja dziedzicznej metazwartości i warunku: każda podprzestrzeń zawiera relatywnie otwartą podprzestrzeń *skończenie wymiarową* o przeliczalnym ciężarze. Wydaje mi się, że to bardzo ciekawe twierdzenia, w których pobrzmiwają dalekie echa twierdzenia Szapirowskiego charakteryzującego brak odwzorowania ciągłego na kostkę  $[0, 1]^{\omega_1}$ . Wskazują one, jak delikatna i jakiej natury jest różnica między kompaktami  $\omega$ -Corsona a przestrzeniami NY. Autor prezentuje też interesujący przykład (Example 2.4.5) dowodzący, że założenie samej dziedzicznej metazwartości nie wystarczy, żeby przestrzeń była NY.

Co więcej, dowody obydwu twierdzeń są głęboko nietrywialne i wymagały subtelnych metod (jeśli dobrze rozumiem, częściowo zaczerpniętych z pracy Nachmansona i Jakowlewa). Podobało mi się na przykład ciekawe użycie modyfikacji pochodnej Cantora-Bendixsona w dowodzie twierdzenia 2.3.5.

Podobały mi się także dwa być może nieco poboczne fakty wiążące kompakty  $\omega$ -Corsona z teorią wymiaru (każda przestrzeń zwarta metryzowalna jest  $\omega$ -Corsona wtedy i tylko wtedy, gdy jest silnie przeliczalnie wymiarowa; podobnie każda przestrzeń NY jest  $\omega$ -Corsona wtedy i tylko wtedy, gdy jest silnie przeliczalnie wymiarowa).

Warto też nadmienić, że fakt 2.2.9 stanowi odpowiedź na pytanie Ondřeja Kalendy (pytanie co prawda nie jest w rozprawie wysłowione, rozumiem więc, że chodziło o to, czy sformułowanie będące faktem 2.2.9 jest prawdziwe).

## 2 Rozdział 3

Ten rozdział oparty jest w większości na materiale z samodzielnego artykułu autora, choć część rezultatów pochodzi również ze wspólnej pracy. Autor używa również wyników z rozdziału 2.

Rozdział poświęcony jest bardzo klasycznym zagadnieniom związanym z przestrzeniami  $C_p(K)$ : jakie własności topologiczne przestrzeni  $K$  zachowują się w przestrzeni  $L$ , kiedy istnieje ciągła liniowa surjekcja z  $C_p(K)$  na  $C_p(L)$ . Tak też autor dowodzi, że do własności tych, przy pewnych dodatkowych założeniach na  $K$  i  $L$ , należy silna  $\kappa$  wymiarowość (pojęcie w naturalny sposób uogólniające silną przeliczalną wymiarowość). Jest to przedmiot twierdzenia 3.2.11, którego dowód bazuje na paru lematach i jest dość zawiły.

Używając tej samej maszynarii, Autor bada, jak bardzo w powyższym kontekście może wzrosnąć wymiar przestrzeni  $L$ , jeżeli  $K$  jest przestrzenią skończenie wymiarową, dowodząc twierdzenia 3.2.12, w którym sformułowane jest dość intrygujące oszacowanie.

Twierdzenie 3.3.9 z kolei mówi, że własność NY również zachowuje się przy powyższych założeniach. Warto zwrócić uwagę, że dowód bazuje na charakteryzacji przestrzeni NY wykazanej w poprzednim rozdziale. I nie tylko: jest dowodzony w szeregu nietrywialnych lematów, w których dowodach Autor używa również wyników innych autorów.

Kolejne twierdzenie w tym duchu, to twierdzenie 3.4.9, które mówi, że własność bycia kompaktem  $\kappa$ -Corsona również zachowuje się przy tych założeniach. Bezpośrednim wnioskiem jest ważne twierdzenie udowodnione wcześniej przez Bonnetta, Kubisia i Todorcevicia, mówiące, że klasa kompaktów  $\kappa$ -Corsona jest zamknięta na ciągle surjekcje. Głównym składnikiem dowodu twierdzenia 3.4.9 jest twierdzenie 3.4.8, które samo w sobie jest bardzo interesujące:  $K$  jest kompaktem  $\kappa$ -Corsona wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągłym obrazem domkniętego podzbioru pewnej ustalonej (dla  $\kappa$ ) przestrzeni. Jest to uogólnienie twierdzenia Pola charakteryzującego kompakty Corsona. Znowu, dowód tego faktu jest nietrywialny. Autor podaje być może szlakiem wytyczonym już przez Pola, ale na pewno nie jest to szlak, którym podąża się prosto i bez trudu.

### 3 Rozdział 4

Ten rozdział zawiera wyniki nie opublikowane jeszcze w żadnym artykule. Mają mniejszy ciężar gatunkowy niż te z poprzednich rozdziałów, ale są za to najbardziej samodzielne.

Autor stawia na przykład problem, kiedy ciągle i otwarte odwzorowania przestrzeni liniowo-topologicznych jest automatycznie słabo otwarte (inspirując się twierdzeniem, że każde ciągle odwzorowanie pomiędzy takimi przestrzeniami jest automatycznie słabo ciągle). Dowodzi, że tak w istocie jest (przy pewnych dodatkowych założeniach na przeciwdziedzinę). W tej sekcji podobał mi się też, co prawda dość prosty, lemat, mówiący, że w klasycznej definicji zbiorów bazowych w przestrzeni dualnej można ograniczyć się do rozpatrywania wektorów liniowo niezależnych. Ogólnie, pierwsza część tego rozdziału poświęcona jest wynikom dowodzonym dla przestrzeni liniowo topologicznych, które są doskonale znane dla przestrzeni Banacha.

W drugiej części rozdziału Autor wykazuje, że  $c_0$  produkt przestrzeni  $C_p(X)$  (dla  $X$  pseudozwartych) jest homeomorficzny ze swoim przeliczalnym produktem. Jest to rozwinięcie serii twierdzeń uzyskanych przez Gulko i Chmylewą.

## 4 Uwagi ogólne

### 4.1 Strona formalna pracy

Nie mam większych zarzutów do formalnej strony rozprawy.

Poniżej wymienię szereg usterek, które znalazłem czytając pracę. Są one drobne, nie wpływają negatywnie na lekturę i dlatego wszystkim poza Autorowi odradzam czytanie tej listy. Część z tych usterek z łatwością dałoby się wyeliminować za pomocą programu do sprawdzania pisowni i właściwie nie wiadomo, czy Doktoranta należy ganić, że tego nie zrobił, czy docenić, że dzielnie opiera się pokusie używania sztucznej inteligencji.

- Na stronie 11 w definicji  $c_0(\Gamma)$  jedna z nierówności jest odwrócona.
- Autor nieprawidłowo używa środowisk “Remark” i “Example”. Po pierwsze, nie powinny być one pisane italią, a po drugie nie powinny być dowodzone. Zasadniej byłoby użyć w tych miejscach np. środowiska “Proposition”.
- W różnych miejscach: “Tietze-Uryshohm”, “Cosider”, “an intersection”, itp.
- W tytule rozdziału 3 brakuje chyba słowa “on”.
- Parę razy Autor w klasycznie nieprawidłowy sposób użył słowa “thesis” (jako teza twierdzenia).
- W ostatnim rozdziale, który nie opiera się na żadnej przyjętej do druku pracy, gęstość błędów i literówek jest nieco większa. Autor używa np. skrótowych form “it’s”, “couldn’t”, pisze “Lemma” (bez numeru) wielką literą, nieprawidłowo używa słowa “enclose” (w znaczeniu “zamykać”), dowodzi implikacji z (a) do (b), choć takie warunki nie występują w sformułowaniu twierdzenia (twierdzenie 4.1.7). Dowód lematu 4.2.2 jest zapisany poza środowiskiem i występujące w nim  $x_0$  nie jest wprowadzone.
- Czasami rzuca się w oczy, że rozprawa jest kompilacją różnych tekstów: w rozdziale 3 pojawia się np. definicja przestrzeni silnie przeliczalnie wymiarowej, choć to pojęcie było już używane w rozdziale 2.

## 4.2 Wyniki autora w kontekście wyników innych autorów

Rozprawa rozpoczyna się do ambitnej próby zmierzenia się z zagadnieniami świeżo badanymi przez Bonnetta, Kubisia i Todorcevicza. Kompakty Corsona są jednymi z najważniejszych obiektów w topologii związanej z teorią mnogości i analizą funkcjonalną. Co prawda w rozprawie same kompakty Corsona pojawiają się jedynie mimochodem, to Autor rozważa ich bardzo naturalne wariacje.

Wspólnym mianownikiem dużej części rozprawy jest uogólnianie znanych własności z przypadku przeliczalnego lub  $\omega_1$  na ogólny przypadek  $\kappa$  - tak też pojawiają kompakty  $\kappa$ -Corsona (rozważane głównie dla przypadku małego  $\kappa$ ),  $\kappa$ -silna wymiarowość,  $\kappa$ -zwartość.

Niemal wszystkie główne wyniki są oryginalne (pojedyncze były już udowodnione przez Bonnetta, Kubisia i Todorcevicza, ale Doktorant przedstawia je jako wnioski z bardziej ogólnych twierdzeń). Z pewnością są ciekawe dla osób zajmujących się topologią teoriomnogościową i przestrzeniami  $C_p(K)$ .

Wydaje się, że rozprawa dobrze odzwierciedla rozwój naukowy Doktoranta: pierwszy rozdział zawiera wyniki uzyskane wspólnie z promotorem i Grzegorzem Plebankiem, w drugim znajdujemy już wyniki samodzielne, choć bazujące na tych z pierwszej części (i jak, być może błędnie, zgaduję, dowodzone wciąż pod czujnym okiem promotora). Ostatni rozdział natomiast wygląda na całkowicie samodzielną pracę, w której Doktorant nie tylko rozwiązuje problemy, ale najpierw je stawia. Dlatego, mimo mniejszego ciężaru gatunkowego, wysoko oceniam ostatni rozdział.

Jeśli powyższe domysły są trafne, to rozwój naukowy Doktoranta przebiega we właściwy sposób i dobrze rokuje na przyszłość.

## 4.3 Rozumowania

Jak podkreślałem przy omawianiu wyników rozprawy, rozumowania często są nietrywialne. W rozprawach doktorskich często przedstawia się nawet dość oczywiste dowody. W rozprawie Krzysztofa Zakrzewskiego takie dowody prawie nie występują (może dlatego też rozprawa nie należy do szczególnie długich).

Mało jest w tej rozprawie rozumowań kombinatorycznych, sporo natomiast używania (w kreatywny sposób) już istniejących metod i technik.

#### 4.4 Ekspozycja rezultatów i rozumowań

Autor wydaje się zakładać bardzo dobre obycie czytelnika z tematyką. Moje obycie znalazło się chyba nieco pod poprzeczką postawioną przez autora i zrozumienie wielu przejść zajęło mi trochę czasu, a na sprawdzenie wielu innych czasu mi natomiast zabrakło. Niemal każde “it is easy to see . . .” czy “we may assume” było dla mnie zapowiedzią problemów. Wynika to po części z tego, że rozumowania autora są skomplikowane, po części z tego, że nie jestem specjalistą w tematyce rozprawy. Ale zdanie wyjaśnienia więcej tu i tam znacząco ułatwiłoby mi lekturę.

Podam przykład takiego skrótu i to akurat dotyczącego pojęć, której znam lepiej (dzięki temu wiem, że to rzeczywiście skrót, a nie moja ignorancja): wniosek 2.5.6 nie jest dowodzony. Co prawda jest to rzeczywiście prosty wniosek z twierdzenia 2.5.5 pod warunkiem, że wiemy, że  $\mathfrak{c}^+$  jest kalibrem miar Radona. Zdecydowanie nie jest to wiedza powszechna. Oczywiście nie chodzi o to, żeby autor zamieszczał dowód takiego faktu, ale po prostu taki fakt wysłowił dodając referencję lub chociaż komentarz, że jest to znany choć nietrywialny fakt.

Myślę, że w rozprawie doktorskiej wyjaśnienia powinny być bardziej szczegółowe.

Czasami brakowało też w tekście *didaskaliów*: informacji, być może mniej formalnych, co teraz dowodzimy, do czego zmierzamy i dlaczego to jest ważne.

### 5 Podsumowanie

Rozprawa mgr. Krzysztofa Zakrzewskiego dotyczy ważnych problemów topologii teoriomnościowej i zawiera cały szereg głębokich rozumowań. Jej rezultaty rzucają nowe światło na tematykę małych przestrzeni zwartych i przestrzeni określonych na nich funkcji ciągłych z topologią zbieżności punktowej. Autor swobodnie używa wielu nietrywialnych metod, prowadzi ściśle rozumowania i wykazuje się dociekliwością. Uważam pracę doktorską mgr. Krzysztofa Zakrzewskiego za **bardzo dobrą**, bez cienia wątpliwości spełniającą wszystkie wymagania dotyczące rozpraw doktorskich w obowiązujących przepisach (w szczególności punkty z paragrafu 5 *Uchwały Senatu Uniwersytetu Warszawskiego w sprawie określenia sposobu postępowania w sprawie nadania stopnia doktora oraz stopnia doktora habilitowanego na Uniwersytecie Warszawskim*) i wnoszę o dopuszczenie do jej publicznej obrony.

Piotr Borodulin-Nadzieja



Signed by /  
Podpisano przez:

Piotr Tadeusz  
Borodulin-  
Nadzieja

Date / Data:  
2025-09-02 11:25