Warszawa 29.09.2022

prof. dr hab. Janina Kotus
Wydział Matematyki
i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Krzysztofa Lecha pt."Julia sets in random holomorphic dynamics"

Promotorem recenzowanej rozprawy doktorskiej jest prof dr hab. Anna Zdunik z Uniwersytetu Warszawskiego. Tematyka rozprawy dotyczy dynamiki holomorficznej, a dokładniej losowych iteracji funkcji holomorficznych. Dynamika holomorficzna należy do bardzo intensywnie rozwijającego się działu układów dynamicznych. Najbardziej klasycznym nurtem badań w dynamice holomorficznej jest iterowanie funkcji meromorficznych (zarówno wymiernych, jak i przestępnych, w tym głównie funcji całkowitych). Jednak coraz częściej badane są także losowe iteracje tych funkcji. Dwa spośród trzech głównych wyników rozprawy zostały już opublikowane w pracach:

1 K. Lech, Julia sets of random exponential maps, *Fundamenta Mathematicae*, 255 (2001), pp.159-180.

2 K. Lech, A. Zdunik, Total disconnectecdness of Julia sets of random quadratic polynomials, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 42 (2022), p. 1764-1780.

Rozprawa składa się z trzech rozdziałów, które poniżej omówię.

Rozdział pierwszy stanowi wstęp zawierający podstawowe definicje wykorzystywane w pracy oraz pytania, na które starano się odpowiedzieć w rozprawie. Bardziej obszerne i wyczerpujące opisy badanych zagadnień umieszczono odpowiednio na początku głównych rozdziałów. Rozdział pierwszy zawiera także sformułowania najważniejszych wyników rozprawy.

Rozdział drugi dotyczy losowych iteracji wielomianów kwadratowych. Badanie dynamiki wielomianów sięga początków lat 80. ubiegłego wieku. Przez lata była to intesywnie badana tematyka, którą zajmowało się szerokie grono matematyków, w tym także laureaci Medalu Fieldsa. Należy podkreślić, że Warszawska szkoła układów dynamicznych ma również swój istotny wkład, w tym między innymi promotorka rozprawy prof. Zdunik. W tym rozdziale badane są losowe iteracje wielomianów kwadratowych $f_c(z) = z^2 + c$ gdzie $z \in \overline{\mathbb{C}}$ i $c \in \mathbb{C}$. Dla ograniczonego zbioru borelowskiego V zawartego w przestrzeni parametrów $\mathbb{C}$ (np. dysku $\mathbb{D}(0, R)$) definiuje się przestrzń ciągów $\Omega := V^{\mathbb{N}}$, na której działa standardowe przesunięcie w lewo $\sigma : \Omega \to \Omega$, które $\omega = (c_0, c_1, c_2, \ldots) \in \Omega$ przypisuje $\sigma(\omega) = (c_1, c_2, \ldots)$. Każdemu ciągowi ω odpowiada przekształcenie $f_\omega := f_{c_0}$. Wtedy iteracje definiuje się następująco $f_\omega^n := f_{c_{n-1}} \circ f_{c_{n-2}} \circ \ldots \circ f_{c_0}$. Globalna dynamika jest opisana za pomocą skośnego produktu $F : \Omega \times \mathbb{C} \to \Omega \times \mathbb{C}$, $f(\omega, z) = (\sigma(\omega), f_\omega(z))$. Na przestrzeni Ω rozpatrywana jest miara produktowa $\mathbb{P}$ generowana przez borelowską miarę probabilistyczną μ. Wtedy para $(\Omega, \mathbb{P})$ jest przestrzenią z miarą a odwzorowanie $\sigma : \Omega \to \Omega$ jest ergodycznym zachowującym miarę endomorfizmem. Analogiczne, jak w klasycznej teorii iteracji funkcji holomorficznych, definiuje się zbiór Julii J_ω i zbiór Fatotu F_ω przekształcenia f_ω. Niektóre podstwowe własności takie jak np. niezmienniczość obu zbiorów J_ω i F_ω zachodzą także dla badanych losowych iteracji. Ponadto brzeg basenu w nieskończoności pokrywa się ze zbiorem Julii dla dowolnego f_ω, co z kolei pozwala zdefiniować tzw. wypełniony zbiór Julii $\mathcal{K}_\omega$. Badanie losowych iteracji funkcji wymiernych zainicjowali J. E. Fornæss i N. Sibony. Wśród prac poświęconych losowym wielomianom kwadratowym istotne wyniki uzyskali R. Brück, M. Büger, S. Reitz, M. Comerford, V. Mayer, B. Skorulski i M. Urbański.

Jednak wiele własności, znanych w klasycznym przypadku, nie przenosi się na przypadek losowyh iteracji. Jedną z nich jest charakterystyka niespójności zbioru Julii wyrażona w terminach własności dynamicznych badanego przekształcenia. W klasycznym przypadku zbiór Julii J_c jest całkowicie niespójny wtedy i tylko wtedy, gdy trajetoria zera (punktu krytycznego dla każdego f_c) dąży do nieskończoności. W przypadku iteracji losowych nie jest to ani warunek konieczny, ani dostateczny. Dla wielomianów kwadratowych spójność zbioru Julii jest ścisle związana z definicją zbioru Mandelbrota $\mathcal{M}$ tzn. zbiór Julii f_c jest spójny gdy $c \in \mathcal{M}$ i całkowicie niespójny, gdy $c \notin \mathcal{M}$. Dla losowych układów, jeśli promień $R < 1/4$ i $\omega \in \mathbb{D}(0, R)^{\mathbb{N}}$ wiadomo, że zbiór Julii J_ω jest spójny.

Natomiast dla $R > 1/4$ sytuacja jest bardziej złożona. Tak zrodziły się pytania o spójność zbioru J_ω dla typowego przekształcenia, przy czym typowość rozumiana jest dwojako: w sensie miarowym, jak i topologicznym. Dodajmy, że na $\Omega = \mathbb{D}(0, R)^{\mathbb{N}}$ rozpatrywana jest topologia produktowa indukowana przez zwykłą topologię na $\mathbb{D}(0, R)$. Z kolei miara zdefiniowana na $\Omega = \mathbb{D}(0, R)^{\mathbb{N}}$ jest miarą produktową $\mathbb{P} := \bigotimes_{n=0}^{\infty} \lambda_R$, gdzie λ_R jest unormowaną miarą Lebesgue'a na $\mathbb{D}(0, R)$. Niech $\mathcal{D}_\infty$ i $\mathcal{T}$ oznaczają odpowiednio zbiór przekształceń f_ω których zbiór Julii J_ω zawiera nieskończenie wiele składowych i zbiór przekształceń f_ω których zbiór Julii J_ω jest całkowicie niespójny. Brück, Büger i Reitz udowodnili, że dla $R > 1/4$ zbiór $\mathcal{D}_\infty$ jest zbiorem pełnej miary $\mathbb{P}$ w Ω. Jednocześnie postawili pytanie czy zbiór $\mathcal{T}$ jest zbiorem pełnej miary w Ω. Gong, Qiu i Li udowodnili, że zbiór $\mathcal{T}$ jest podzbiorem drugiej kategorii Baire'a przestrzeni Ω.

Odpowiedź na to pytanie jest pierwszym głównym wynikiem recenzowanej rozprawy. Ważnym narzędziem do dowodu tego twierdzenia jest funkcja Greena g_ω zdefiniowana dla basenu przyciągania $\mathcal{A}_\omega$ punktu w nieskończoności. W pracy udowodniono, że funkcja g_ω ma własności analogiczne jak klasyczna funkcja Greena dla wielomianów kwadratowych oraz oszacowano jej wartości w terminach pierwszego momentu kiedy trajektoria punktu z basenu $\mathcal{A}_\omega$ opuszcza ustalony dysk $\mathbb{D}(0,R)$ (Proposition 2.16). Pozwoliło to określić kiedy punkt krytyczny 0 szybko ucieka do nieskończoności typowo w sensie miary $\mathbb{P}$ (warunek (2.12)). Następnie udowodniono warunek dostateczny całkowitej niespójności zbioru Julii przekształcenia f_ω, który jest spełniony, o ile punkt krytczny 0 typowo w sensie miary $\mathbb{P}$ szybko ucieka do nieskończoności, a także pokazano, że dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ w sensie miary $\mathbb{P}$ zbiór Julii J_ω jest całkowicie niespójny (Twierdzenie 2.20). Twierdzenie 2.20 zawiera pozytywną odpowiedź na pytanie Brücka, Bügera i Reitza nie tylko dla przypadku, gdy $\Omega = \mathbb{D}(0,R)^{\mathbb{N}}$ i $R > 1/4$, lecz także dla $\Omega = V^{\mathbb{N}}$, gdzie V jest ograniczonym zbiorem borelowskim takim, że $D(0,1/4) \subset V \subset \mathbb{D}(0,R)$ i $V \neq \mathbb{D}(0,1/4)$. Z tego twierdzenia wynika bardzo ciekawy wniosek, że jeśli za V przyjąć główną kardioidę ze zbioru Mandelbrota, to dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ zbiór Julii J_ω jest całkowicie niespójny. Tymczasem dla wielomianów kwadratowych f_c, jeśli parametr c należy do głównej kardioidy, zbiór Julii jest spójny, a nawet lokalnie spójny. Wymienione rezultaty zawiera praca [2] wspólna z prof. Zdunik.

Drugi główny wynik rozprawy, udowodniony w tym rozdziale, dotyczy wymiaru Hausdorffa miary maksymalnej dla pewnej klasy losowych wielomianów kwadratowych. Dla losowych wielomianów miarą harmoniczną μ_ω na basenie $\mathcal{A}_\omega$, $\omega \in \Omega$, o nośniku będącym zbiorem Julii J_ω jest tzw. stan równowagi tzn. borelowska miara probabilistyczna minimalizująca energię. Miara μ_ω jest równa lapsjanowi funkcji Greena g_ω pomnożonemu przez $\frac{1}{2\pi}$. Miarę harmoniczną μ_ω nazywa się także miarą maksymalną, ponieważ jest punktem stałym operatora $\mathcal{L}_\omega^*$ sprzężonego do operatora $\mathcal{L}_\omega$ działającego na przestrzeni funckcji ciągłych zdefiniowanych na $\mathbb{D}(0,R)$. Miara harmoniczna μ_ω jest niezmiennicza tzn. $\mu_{\sigma\omega} = \mu_\omega \circ f^{-1}$. W Proposition 2.38 pokazano, że miara μ_ω jest granicą ciągu z miar $\mu_\omega^k = \frac{1}{2^k}\sum_{y\in(f_\omega^k)^{-1}(z)} \delta_y$ (przeniesionych przez f_ω^k) zbieżnego w słabej topologii. Jest to wynik analogiczny do rezultatu Brolina o istnieniu miary niezmienniczej na zbiorze Julii dla wielomianów kwadratowych. Z Proposition 2.49 i Proposition 2.52 wynika, że ciąg miar $\{\mu_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ definiuje probabilistyczną miarę losową μ na produkcie $\Omega \times \mathbb{C}$, która jest niezniemmicza dla skośnego produktu $F : \Omega \times \mathbb{C} \to \Omega \times \mathbb{C}$ postaci $F(\omega, z) = (\sigma\omega, f_\omega(z))$. Proposition 2.54 podaje związek między globalnym wykładnikiem Lyapunowa a globalną funkcją Greena. Z kolei Proposition 2.57 mówi, że jeśli punkt krytyczny 0 typowo szybko ucieka do nieskończoności dla układu niezależnych losowych wielomianów kwadratowych, to skośny produkt F jest ergodyczny względem miary μ. Dla takich układów, dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ w sensie miary $\mathcal{P}$, wymiar Hausdorffa miary $\dim_H(\mu_\omega) = \frac{\log 2}{\chi} < 1$, gdzie χ jest globalnym wykładnikiem Lyapunowa. Jest to drugi główny wynik rozprawy (Theorem 2.59). Zbadano także zależność wymiaru $\dim_H(\mu_\omega)$ od parametru. Dla wielomianów kwadratowych, jeśli parametr c nie należy do zbioru Mandelbrota $\mathcal{M}$, to funkcja $c \to \dim_H(J_c)$ jest rzeczywista analityczna, a funkcja $c \to \dim_H(\mu_c)$ jest stała na poziomicach funkcji Greena. Dla losowych wielomianów kwadratowych, jeśli parametr $c_0 \notin \mathcal{M}$, $\delta_0 > \mathrm{dist}(c_0, \mathcal{M}) > 0$ i $\omega = (v_0, v_1, \ldots) \in \Omega$ badano wielomiany postaci $f_{\delta,\omega} := f_{c_0+\delta v_0}$, gdzie $\delta \in \mathbb{D}(0,\delta_0)$. Udowodniono, że wtedy odwzorowanie $\delta \to \dim_h(\mu_{\delta,\omega})$ jest stałe na $[0,\delta_0)$ dla prawie wszystkich

$\omega \in \Omega$ i równa się $\frac{\log 2}{\chi_{c_0}}$ (Proposition 2.79).

Trzeci rozdział rozprawy dotyczy losowych iteracji funkcji wykładniczych $f_\lambda = \lambda e^z$, gdzie $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ i $\lambda \geq 1/e$. Dla tych parametrów i dla przekształceń należących do rodziny wykładniczej zbiór Julii $J_\lambda = \mathbb{C}$. Dla $\lambda = 1$ udowodnił to M. Misiurewicz, odpowiadając na pytanie Fatou z lat 30. ubiegłego wieku. Z dowodu wynika, że także dla $\lambda > 1/e$ zbiór Julii $J_\lambda = \mathbb{C}$. Obecnie wynik ten jest prostym wnioskiem z uogólnienia twierdzenia Sullivana dla funkcji całkowitych należących do klasy Speicera. Punktem wyjścia do rezultatów udowodnionych w tym rozdziale jest wynik M. Urbańskiego i A. Zdunik mówiący, że dla dodatnich $M, \overline{\lambda}$, $M > \overline{\lambda} > 1/e$ i dla $\omega = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ spełniających zależność $M > \lambda_n > \overline{\lambda}$ dla wszystkich n, zbiór Julii $J_\omega = \mathbb{C}$. Główne wyniki tego rozdziału dotyczą postaci zbioru Julii, jeśli pominie się niektóre założenia twierdzenia Urbańskiego i Zdunik. Jest to kontynuacja badań rozpoczętych przez doktoranta w jego pracy magisterskiej, w której udowodnił, że jeśli $\lambda_n \in (\overline{\lambda}, M) \cup \{1/e\}$, to zbiór Julii $J_\omega = \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_n > \overline{\lambda}$ dla nieskończenie wielu n. Na przykład, gdy $1/e < \lambda_n \leq 1/e + \frac{C}{n^2}$, to zbiór Julii $J_\omega \neq \mathbb{C}$. Pokazał także, że jeśli $0 < \delta < 1/e$, μ jest borelowską miarą probabilistyczną zdefiniowaną na $(1/e - \delta, (1/e + \delta)$ taką, że $\mu((1/e - \delta, (1/e + \delta)) > 0$, to prawie wszystkich $\omega \in (1/e - \delta, (1/e + \delta)^{\mathbb{N}}$ (względem miary produktowej generowanej przez μ) zbiór Julii $J_\omega = \mathbb{C}$. Główny wynik tego rozdziału pokazuje, że nie ma analogii między klasycznym przypadkiem a losowymi iteracjam funkcji wykładczniczej. W klasycznym przypadku, jeśli iteracje 0 (wartości asymptotycznej) dążą do nieskończoności, to zbiór Julii jest cała płaszczyzną $\mathbb{C}$. Twierdzenie 3.13 pokazuje, że tak być nie musi dla losowych iteracji. Z kolei drugi główny wynik tego rozdziału-Twierdzenie 3.15 uogólnia wynik z pracy magisterskiej mówiący dla jakich parametrów dążących do $1/e$ z prawej strony zbiór Julli będzie całą płaszczyzną, dokładniej jeśli $\limsup_{n\to\infty}(\lambda_n - e^{-1})n^{1/2} < \infty$. Warunek ten jest spełniony dla $\lambda_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{n^p}$ i $p < \frac{1}{2}$. Wyniki te zawiera praca [1]. Jest to samodzielna praca.

Praca zredagowana jest dość starannie, niemniej zdarzają się drobne pomyłki. Podam kilka przykładów. Na stronie 14 linia 9 nie wpisano modułu przy zmiennej z. W efekcie funkcja rzeczywista została oszacowana z dołu i z góry przez funkcję zespoloną wielowartościową. Na stronie 30 linie 4 i 5 w symbolu $\mathcal{M}_p(.)$ oznaczającym zbiór wszystkich miar probalistycznych na przestrzeni $\mathcal{X}$ wpisano X, a powinno być $\mathcal{X}$. Podobnie w definicji rzutu π_1. Na tej samej stronie w 5 linii od dołu zabrakło indeksu ω przy oznaczeniu zbioru C. W definicji warunku (2.12) $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : g_\omega(0) < \frac{G}{2^k}\}) < e^{-\gamma k}$ nie napisno nic na temat stałej k. Nietrudno domyśleć się, że k jest liczbą całkowitą nieujemną. Natomiast niepokoi brak kwantyfikatora przy tej stałej. Tym bardziej, że warunek (2.12) występuje także w sformułowaniu kluczowego Twierdzenia 2.20. Dopiero Uwaga 2.21 wyjaśnia tę kwestię. W dowodzie Remark 2.55 występuje stała R_0, o której napisano, że została zdefiniowana w Proposition 1.4. Niestety, ani w sformułowaniu, ani w dowodzie Proposition 1.4 taka stała nie występuje. Tytuły czasopism piszemy wielką literą np. *Inventiones Mathematicae* a nie *Inventiones mathematicae*. Są to wszystko usterki redakcyjne, a nie błędy.

W mojej ocenie rozprawa doktorska mgr. Krzysztofa Lecha spełnia kluczowe wymagania, które stawia się rozprawom doktorskim. Przede wszystkim rozprawa prezentuje bardzo dobrą znajomość nie tylko dynamiki holomorficznej, lecz także teorii potencjału i geometrycznej teorii funkcji. Świadczą o tym zarówno cytowane wyniki jak i techniki wykorzystywane w dowodach głównych wyników pracy, a także odpowiednio dobrana literatura. Wysoko oceniam wyniki uzyskane w recenzowanej rozprawie. Bez wątpnienia są one rozwiązaniami oryginalnych problemów. Z przedstawionej recenzji można odnieść wrażenie, że celem doktoratu jest uogólnienie wyników znanych z klasycznej dynamiki holomorficznej na przypadek losowej dynamiki holomorficznej. Chcę jednak zdecydowanie podkreślić, że intuicje pochodzące z klasycznej teorii zazwyczaj nie przenoszą się na ten przypadek. Dlatego samo sformułowanie tezy, którą zamierza się dowieść jest sporym wyzwaniem. Dowody głównych wyników zawierają wiele subtelnych oszacowań. Należy podkreślić, że większość z nich została już opublikowana w bardzo dobrym czasopiśmie *Fundamenta Mathematicae* lub w prestiżowym *Ergodic Theory and Dynamical System*. Rozprawa jest napisana w sposób staranny i przemyślany, a zauważone usterki redakcyjne łatwo skorygować.

Rozprawa mgr. Krzysztofa Lecha spełnia zwyczajowe wymagania stawiane w środowisku matematycznym rozprawom doktorskim. Spełnia także wymagania art. 187 Ustęp 1 i 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. Dlatego wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Krzysztofa Lecha do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Jednocześnie wnoszę o wyróżnienie rozprawy.

Kotus