

dr hab. Katarzyna Pichór, prof. UŚ
Uniwersytet Śląski,
Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych,
Instytut Matematyki,
Katowice, ul. Bankowa 14, pokój 557
email: katarzyna.pichor@us.edu.pl

Katowice, 06.03.2026

**Recenzja rozprawy doktorskiej
magistra Javada Mohamadichamgavi**

zatytułowanej

Time Delays and Structured Populations in Evolutionary Game Theory
(pol. *Opóźnienia czasowe i struktury populacyjne w teorii gier ewolucyjnych*)

1. Omówienie wyników

Praca doktorska magistra Javada Mohamadichamgavi dotyczy problemów z teorii gier ewolucyjnych. Składa się na nią sześć prac [A-F], których dane zamieszczam na końcu recenzji. Omówię teraz pokrótce najważniejsze zagadnienia poruszane w poszczególnych pracach.

W pracy [A] analizuje się wpływ opóźnień zysków τ_A (opóźnienie kooperantów) i τ_B (opóźnienie zdrajców) na stabilność dynamiki replikatorowej przy logistycznym wzroście populacji w grze „Zamieć śnieżna” (z ang. *Snowdrift*). Rozważa się następujący model dynamiki replikatorowej

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1 - x(t)) \left(1 - \frac{p(t)}{K} \right) (U_A(t - \tau_A) - U_B(t - \tau_B)), \quad (1)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = p(t) \left(1 - \frac{p(t)}{K} \right) (x(t)U_A(t - \tau_A) + (1 - x(t))U_B(t - \tau_B)) - p(t), \quad (2)$$

gdzie K jest pojemnością środowiskową, $p(t) = p_A(t) + p_B(t)$ jest liczbą wszystkich graczy w czasie t , $p_A(t)$ i $p_B(t)$ reprezentuje liczbę osobników grających odpowiednio strategią kooperantów A i zdrajców B w czasie t , a $x(t) = \frac{p_A(t)}{p(t)}$ reprezentuje frakcję populacji grającą strategią A w czasie t , natomiast U_A i U_B jest średnią wypłatą uzyskaną dzięki strategiom A i B , odpowiednio. Analiza modelu (1–2) pokazuje, że uwzględnienie logistycznego wzrostu populacji i opóźnień zależnych od strategii znacząco zmienia dynamikę ewolucyjną w porównaniu z klasycznymi modelami replikatorowymi. Obecność opóźnień może zarówno stabilizować, jak i destabilizować równowagę. Wykazano między innymi, że jeśli obie strategie mają takie samo opóźnienie, to równowaga pozostaje stabilna do pewnego momentu, a potem następuje bifurkacja Hopfa i pojawiają się stabilne oscylacje. Gdy opóźnienie jest tylko po stronie grających strategią B , to równowaga może stracić stabilność, co prowadzi do dynamiki oscylacyjnej.

Praca [B] również poświęcona jest grze „Zamieć śnieżna”, ale tym razem rozważa się strukturalne modele dynamiki replikatorowej. Bada się, jakie znaczenie ma połączenie efektów stochastycznych i opóźnień podczas modelowania dynamiki ewolucyjnej w populacjach strukturalnych. W modelach tych potomstwo umieszczane jest w przedziałach młodzieżowych, a po jakimś czasie dołącza do grupy (przeziału) dorosłych z szybkością zależną od strategii, zgodnie z odpowiadającym jej skokowym procesem Markowa urodzin i śmierci. Odwrotności współczynników wyjścia ze stanów młodzieżowych można interpretować jako średnie losowych opóźnień czasowych o rozkładzie wykładniczym. Aby ograniczyć wielkość populacji, uwzględnia się również współczynnik śmiertelności. Badano wpływ obecności wewnętrznych fluktuacji stochastycznych na dynamikę modelu. Pokazano, że opóźnienia czasowe sprzyjają kooperacji, tzn. przy niewielkiej różnicy średnich opóźnień czasowych obu strategii częstotliwość



współpracy w stanie quasi-stacjonarnym dynamiki stochastycznej jest większa niż w analogicznym stanie stacjonarnym dynamiki replikatorów w modelu deterministycznym.

W pracy [C] bada się prawdopodobieństwo utrwalenia oraz czas utrwalenia i wyginięcia mutantów w procesach Morana na grafach. Porównuje się wpływ stopnia wierzchołka grafu Erdősa-Rényiego i Barabásiego-Alberta, w którym umieszczony jest pierwszy mutant na prawdopodobieństwo utrwalenia, wyginięcie i czas utrwalenia mutacji.

W pracy [D] bada się wpływ opóźnień czasowych na utrwalenie mutacji w procesie urodzin i śmierci Morana. Osobniki w tym modelu rozmnażają się proporcjonalnie do przystosowania. Oblicza się prawdopodobieństwa utrwalenia mutacji w grach: „Polowanie na jelenia” (z ang. *Stag-Hunt*), „Zamieć śnieżna” i „Dylemat więźnia” (z ang. *Prisoner's Dilemma*).

Praca [E] dotyczy wpływu kosztów utrzymania więzi społecznych na zachowania kooperacyjne w grze „Dylemat więźnia”.

Gry „Dylemat więźnia” zajmuje się również Doktorant w swojej samodzielnej pracy [F]. Rozważa w niej populację wielkości $N = L^2$ o określonej strukturze. Każdy osobnik umiejscowiony jest na kwadratowej siatce rozmiaru $L \times L$ i przyjmuje jedną z dwóch strategii: współpracę lub zdradę i gra w „Dylemat więźnia” ze swoimi bezpośrednimi sąsiadami i z samą sobą. Całkowita wypłata jest sumą wypłat z tych pięciu interakcji. Macierz wypłat odpowiada „słabemu dylematowi więźnia”. W momencie startu gry każdy osobnik jest losowo przypisywany do grupy współpracowników lub zdrajców z równym prawdopodobieństwem. Dodatkowo w modelu tym uwzględnienia się opóźnienia czasowe zależne od strategii.

Poszczególne artykuły dotyczą różnych aspektów ewolucyjnej teorii gier. Szczególnie dużo uwagi poświęca się w nich opóźnieniom czasowym, co dobrze ilustruje realistyczne sytuacje, w których konsekwencje współpracy lub zdrady są odczuwalne po pewnym czasie. Artykuły te zestawione razem stanowią spójną całość i dają możliwie pełny obraz znaczenia opóźnień, struktury i stochastyczności w badaniu dynamiki ewolucyjnej.

2. Ocena merytoryczna

Najważniejsze wyniki zawarte w pracy doktorskiej, to:

- 1) Analiza stabilności dynamiki replikatorowej w grze „Zamieć śnieżna” obejmującej wzrost logistyczny w obecności zależnego od strategii opóźnienia czasowego, w tym opóźnienia symetrycznego ($\tau_A = \tau_B$), tylko po stronie zdrajców ($\tau_A = 0, \tau_B > 0$), tylko po stronie kooperantów ($\tau_A > 0, \tau_B = 0$) i ogólnej sytuacji ($\tau_A > 0, \tau_B > 0$) – [A].
- 2) Analiza strukturalnej dynamiki replikatorowej w grze „Zamieć śnieżna”, uwzględniającej opóźnienia czasowe w obecności wewnętrznych fluktuacji stochastycznych. Zaobserwowanie w symulacjach stochastycznych pojawienia się w takich modelach nowych zachowań, wskazujących na to, że opóźnienia niezależne od strategii mogą sprzyjać współpracy, podczas gdy w deterministycznej dynamice replikatorowej, opóźnienia zmniejszają atrakcyjność opóźnionych strategii. – [B].
- 3) Wykazanie, że w procesach Morana w populacjach strukturalnych, prawdopodobieństwo utrwalenia mutacji zależy od stopnia wierzchołka, w którym wprowadza się mutantą i porównanie wpływu stopnia wierzchołka w grafach Erdősa-Rényiego i Barabásiego-Alberta na prawdopodobieństwo utrwalenia, wyginięcie i czas utrwalenia mutacji – [C].
- 4) Pokazanie, że opóźnienia czasowe zmniejszają prawdopodobieństwo utrwalenia w grach „Polowanie na jelenia” i „Dylemat więźnia” ale zwiększają je w grze „Zamieć śnieżna” – [D].
- 5) Wykazanie za pomocą symulacji istnienia krytycznego obszaru kosztów utrzymania więzi społecznych w grze „Dylemat więźnia”, w którym następuje gwałtowny spadek poziomu współpracy w stanie stacjonarnym – [E].

- 6) Pokazanie, że opóźnienia zależne od strategii w grze odpowiadającej „słabemu dylematowi więźnia” znacząco zmieniają dynamikę przestrzenną współpracy i modulują proces klastrowania –[F].

Powyższe wyniki są nowe i ciekawe. Najbardziej zaawansowane rachunkowo było udowodnienie, że przy odpowiednich założeniach, układ (1–2) dla równych opóźnień $\tau_A = \tau_B = \tau$ wykazuje nadkrytyczną bifurkację Hopfa w pobliżu punktu równowagi [A, *Theorem 7*]. Doktorant wykazał się umiejętnością wykorzystania różnorodnych narzędzi matematycznych i informatycznych. Tematyka poruszana w rozprawie jest nowoczesna i ma duży potencjał, jeśli chodzi o kontynuowanie badań i zastosowania w innych dyscyplinach naukowych. W każdym z wymienionych artykułów zaproponowano nowy, ciekawy model matematyczny coraz lepiej odzwierciedlający rzeczywiste procesy opisywane językiem teorii gier ewolucyjnych. W każdym, poprzez dobrze dobrane symulacje komputerowe, zaobserwowano pojawienie się nowych zachowań, wskazujących na to, że opóźnienia mogą zmieniać atrakcyjność opóźnionych strategii.

Wszystkie prace wchodzące w skład rozprawy doktorskiej ukazały się w prestiżowych czasopismach. Należy też podkreślić fakt, że Javad Mohamadichamgavi jest współautorem kolejnych sześciu prac nie-wchodzących w skład rozprawy, z czego cztery są opublikowane, a dwie są zamieszczone w arXiv. Ta duża liczba prac przygotowanych przed doktoratem świadczy niewątpliwie o dużej aktywności doktoranta. Nie ulega też wątpliwości, że magister Javad Mohamadichamgavi wykazał się umiejętnością samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

3. Ocena jakości redakcji rozprawy

Praca doktorska jest zbiorem sześciu artykułów. Każdy z nich napisany jest zgodnie ze stylem czasopisma, w którym został opublikowany. Należy też podkreślić fakt, że prace te są napisane w sposób czytelny i interesujący, a duża liczba symulacji komputerowych dobrze obrazuje uzyskane wyniki. Autoreferat jest dobrze i poprawnie zredagowany. Redakcyjna strona rozprawy nie budzi zastrzeżeń.

4. Konkluzja

Rozprawa doktorska magistra Javada Mohamadichamgavi pt. „Time Delays and Structured Populations in Evolutionary Game Theory”, (pol. „Opóźnienia czasowe i struktury populacyjne w teorii gier ewolucyjnych”), spełnia wszystkie wymagania formalne i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka. W szczególności odpowiada warunkom zawartym w artykule 187 ustawy 1 i 2 z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. Rozprawa doktorska magistra Javada Mohamadichamgavi prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie matematyka oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Przedmiotem rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Wnoszę o dopuszczenie magistra Javada Mohamadichamgavi do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.

Katarzyna Pichler

5. Publikacje wchodzące w skład rozprawy

- [A] Javad Mohamadichamgavi and Marek Bodnar. Bifurcation analysis of replicator dynamics with logistic growth and strategy-dependent time delays in Snowdrift game. *Dynamic Games and Applications*: 1–29 (2025).
- [B] Jacek Mięksisz and Javad Mohamadichamgavi. Intrinsic noise in structured replicator dynamics modelling time delays. *Dynamic Games and Applications* **15**: 1364–1377 (2025).
- [C] Javad Mohamadichamgavi and Jacek Mięksisz. Effect of the degree of an initial mutant in Moran processes in structured populations. *Physical Review E* **109**(4): 044406 (2024).
- [D] Javad Mohamadichamgavi and Mark Broom. The impact of time delays on mutant fixation in pairwise social dilemma games. *Proceedings of the Royal Society A* **480**(2300): 20240195 (2024).
- [E] Jacek Mięksisz and Javad Mohamadichamgavi. Phase transitions in the prisoner's dilemma game on the Barabási-Albert graph with participation cost. *Physical Review E* **112**(3): L032302 (2025).
- [F] Javad Mohamadichamgavi. Strategy-dependent time delays shape cooperation in the spatial prisoner's dilemma game. *Chaos, Solitons & Fractals* **201**: 117255 (2025).

UNIwersYTET WARSZAWSKI
Biuro Rad Naukowych

wpłynęło.....09.03.2026.

UNIwersYTET WARSZAWSKI
BIURO RAD NAUKOWYCH
Ul. Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa