Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: j.grytczuk@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 7.01.2025

Recenzja rozprawy doktorskiej Jany Masaříkovej

Computational Complexity of Combinatorial Problems in Hereditary Graph Classes

Klasę grafów nazywamy *dziedziczną* jeżeli jest zamknięta na podgrafy indukowane. Równoważnie, dziedziczność klasy oznacza, że wraz z każdym grafem z tej klasy należy do niej także jego podgraf otrzymany przez usunięcie dowolnego wierzchołka. Sztandarowym przykładem klasy dziedzicznej są grafy *doskonałe*, czyli takie, dla których zachodzi równość pomiędzy liczbą chromatyczną a liczbą klikową w każdym podgrafie indukowanym. Każdą klasę dziedziczną można scharakteryzować poprzez rodzinę grafów *zabronionych*, czyli takich, które nie mogą pojawić się jako podgrafy indukowane w elementach klasy. Na przykład, żaden graf będący cyklem nieparzystym (oprócz trójkąta) bądź jego dopełnieniem nie może być podgrafem indukowanym grafu doskonałego. Słynna hipoteza Berge'a z roku 1961, udowodniona w roku 2002, mówi, że są to jedyne podgrafy zabronione w tej klasie. Ten głęboki strukturalny rezultat dał impuls całemu nurtowi badań z pogranicza teorii grafów i algorytmiki. Recenzowana rozprawa doktorska Jany Masaříkovej wpisuje się w ten nurt prawie dokładnie. Autorka bada kilka problemów algorytmicznych w pewnych dziedzicznych klasach grafów oraz jeden problem czysto kombinatoryczny uzyskując szereg ciekawych rezultatów. Poniżej omówię pokrótce główne wyniki pracy.

Praca doktorska Jany Masaříkovej składa się siedmiu rozdziałów. Pierwsze dwa to wprowadzenie zawierające elegancką prezentacją wyników wraz z ich kontekstem historycznym oraz techniczne preliminaria. Każdy z kolejnych pięciu rozdziałów poświęcony jest w zasadzie innemu problemowi. Pierwsze dwa to klasyka algorytmicznej teorii grafów, a mianowicie problem maksymalnego zbioru niezależnego oraz pokrewny problem kolorowania. Kolejne dwa dotyczą pewnych strukturalnych własności grafów. Wreszcie problem badany w ostatnim rozdziale to słynna hipoteza Tuzy o liczbie „przekłuwającej" dla rodziny trójkątów w grafie.

Niech G będzie grafem, w którym każdemu wierzchołkowi przypisano liczbę nieujemną (*wagę*). Problem badany w rozdziale 3 polega na znalezieniu zbioru *niezależnego* w G (żadne dwa wierzchołki zbioru nie są połączone krawędzią) o łącznej maksymalnej sumie wag swoich elementów. Wiadomo, że w ogólności problem ten jest NP-trudny, także w wersji aproksymacyjnej, nawet nie można go rozwiązać w czasie podwykładniczym (o ile zachodzi hipoteza ETH). Ponadto, problem ten pozostaje NP-trudny w klasach dziedzicznych z jednym zabronionym grafem H, o ile H nie jest grafem, którego każda składowa jest drzewem o co najwyżej trzech liściach (czyli dla większości grafów H). Autorka koncentruje swoją uwagę na newralgicznym szczególnym przypadku tzw. *długiego szpona*, czyli grafu $S_{t,t,t}$ (są to trzy rozłączne krawędziowo ścieżki P_{t+1} o wspólnym początku). W Twierdzeniu 3 znaleziony zostaje algorytm o czasie $2^{O(\sqrt{stn}\log n)}$ rozwiązujący problem maksymalnego ważonego zbioru niezależnego w klasie grafów z zabronionym $H = sS_{t,t,t}$. Twierdzenie 4 podaje algorytm rozwiązujący problem ze współczynnikiem aproksymacji równym $1-\epsilon$, w czasie $2^{O(\epsilon^{-1}st\log^5 n)}$, dla każdego $\epsilon > 0$. Głównym elementem konstrukcji algorytmów jest ciekawy wynik (Twierdzenie 2) gwarantujący znalezienie w czasie wielomianowym odpowiedniej dekompozycji grafów $S_{t,t,t}$-wolnych, wzorowany na wcześniejszym wyniku Gyárfása dla klas dziedzicznych z zabronioną ścieżką P_t. Praca z tymi wynikami ukazała się w *ACM Transactions of Computation Theory.*

Poprawne kolorowanie grafu polega na takim przypisaniu kolorów wierzchołkom, aby sąsiednie wierzchołki otrzymały różne kolory. W ujęciu algorytmicznym chodzi o rozstrzygnięcie czy dany graf ma poprawne kolorowanie przy użyciu co najwyżej k kolorów. Jak wiadomo, problem ten jest wielomianowy dla $k = 2$ i NP-zupełny dla każdego $k \geqslant 3$. Pozostaje takim również w klasach dziedzicznych z jednym zabronionym grafem H, o ile H nie jest lasem ścieżek. W rozdziale 4 autorka bada ten problem dla $k = 3$ i $H = 2P_4$ (dwie rozłączne ścieżki na czterech wierzchołkach każda). Jest to jeden z dwóch najmniejszych nierozstrzygniętych przypadków grafów o ośmiu wierzchołkach. Główny wynik rozdziału (Twierdzenie 5) orzeka, że problem 3-kolorowania jest wielomianowy w dziedzicznej klasie grafów z zabronionymi grafami $2P_4$ i C_5 (cykl na pięciu wierzchołkach). Dowód jest bardzo pomysłowy, sprytnie wykorzystuje wspomniane wcześniej twierdzenia o grafach doskonałych, efektywne algorytmy kolorowania tych grafów, a także algorytmy listowego kolorowania grafów P_4-wolnych. Zresztą wynikowy algorytm działa również efektywnie w przypadku kolorowania listowego, o ile zabronimy dodatkowo indukowanych cykli C_7 i C_9. Praca z tymi wynikami ukazała się w czasopiśmie *Algorithmica.*

Przedmiotem badania w rozdziale 5 jest *szerokość klikowa* w klasach dziedzicznych z dwoma zabronionymi grafami. Jest to jeden z wielu strukturalnych parametrów, obok szerokości ścieżkowej, czy drzewowej, którego skończone ograniczenie w klasie grafów skutkuje istnieniem wielomianowych algorytmów dla całych klas problemów. Na przykład, w klasie grafów o ograniczonej szerokości ścieżkowej, każdy problem definiowalny w logice MSO_1 ma rozwiązanie w czasie liniowym. Okazuje się, że dla niektórych klas dziedzicznych wystarczającym warunkiem dla efektywnej rozwiązywalności wielu problemów wystarczającym jest ograniczenie szerokości ścieżkowej jedynie dla *atomów* klasy, czyli grafów bez przekrojów klikowych. Oczywiście to ograniczenie do atomów ma sens tylko wtedy, gdy szerokość klikowa w całej klasie jest nieograniczona. W Twierdzenie 6 autorka dowodzi, że atomy klasy grafów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych mają ograniczoną szerokość klikową podczas gdy w całej klasie jest ona nieograniczona. Twierdzenie 7 podaje dwie długie listy przypadków par grafów zabronionych (H_1, H_2), dla których szerokość klikowa atomów w odpowiednich klasach jest ograniczona i nieograniczona. Pozostałe, znacznie mniej liczne przypadki, zostały umieszczone w dwóch problemach otwartych. Dowody są skomplikowane technicznie, wymagają umiejętnego rozłożenia analizy na szczególne przypadki, a następnie wykrycia i zastosowania odpowiednich własności strukturalnych. Wyniki zostały opublikowane w *Journal of Graph Theory*.

W wielu zastosowaniach, a także czysto teoretycznych problemach grafowych chcielibyśmy wiedzieć ile wierzchołków (lub krawędzi) trzeba usunąć z danego grafu, aby otrzymać graf o pożądanej własności. Ostatnie dwa rozdziały rozprawy, 6 i 7, traktują o dwóch problemach tego typu. W pierwszym z nich występuje ciekawa klasa grafów, a mianowicie dwudzielne grafy permutacji. Ogólnie, każdy *graf permutacji* można uzyskać jako graf przecięć odcinków o końcach położonych na dwóch równoległych prostych i wnętrzach rozłącznych z tymi prostymi. Dodatkowy warunek dwudzielności oznacza, że odcinki te można tak pomalować dwoma kolorami, że żadne dwa odcinki tego samego koloru nie przecinają się. Klasa tych grafów jest dziedziczna, jej zabronione podgrafy zostały wyznaczone. Główny wynik tego rozdziału to konstrukcja algorytmu o złożoności $O(9^k n^9)$ sprawdzającego czy dany graf rzędu n można sprowadzić do dwudzielnego grafu permutacji przez usunięcie co najwyżej k wierzchołków. Metoda dowodu pomysłowo wykorzystuje zanurzenie grafu w powierzchnię boczną walca lub we wstęgę Möbiusa. Rezultat został opublikowany w *Algorithmice*.

Ostatni rozdział pracy dotyczy sławnej hipotezy Tuzy o trójkątach w grafie. Dla danego grafu G, rozważmy zbiór krawędzi A, który „przekłuwa" wszystkie trójkąty w G, tzn. każdy trójkąt w G ma w zbiorze A co najmniej jedną krawędź. Oznaczmy przez $\tau(G)$ najmniejszą możliwą liczność takiego zbioru A w grafie G. Dodatkowo, niech $\mu(G)$ oznacza maksymalną liczbę trójkątów w G, z których żadne dwa nie mają wspólnej krawędzi. Oczywiście zachodzą nierówności $\mu(G) \leqslant \tau(G) \leqslant 3\mu(G)$. Hipoteza Tuzy postuluje, że dla każdego grafu G ograniczenie górne na $\tau(G)$ ma postać $\tau(G) \leqslant 2\mu(G)$. Autorka dowodzi prawdziwości tego przypuszczenia dla dwóch klas grafów, a mianowicie dla grafów „progowych" oraz dla grafów „ko-łańcuchowych parzyście zbalansowanych". Tym razem dowody nie są trudne technicznie, ale całkiem pomysłowe i pełne uroku, bazują na odpowiednich dekompozycjach grafów. Podejście może okazać się skuteczne w przypadku innych klas grafów o podobnej strukturze, np. dla grafów przecięć przedziałów jednostkowych. Wyniki ukazały się w *Discrete Mathematics and Theroretical Computer Science*.

Podsumowując stwierdzam, że praca Jany Masařikovej to bardzo dobry doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących ciekawej i ważnej tematyki. Ich uzyskanie świadczy o świetnym opanowaniu warsztatu badawczego oraz znakomitej intuicji i erudycji autorki. Praca jest bardzo dobrze zredagowana, z dbałością o szczegóły i komfort czytelnika. Zawiera liczne opisy, komentarze, sugestywne ilustracje, a także sporo problemów otwartych (na zakończenie każdego rozdziału).

Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wszelkie wymogi i wnoszę o dopuszczenie Jany Masaříkovej do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie informatyka.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk