OPINIA O ROZPRAWIE DOKTORSKIEJ
JAKUBA KONCKIEGO
MOTIVIC CHERN CLASSES AND STABLE ENVELOPES

Olsztyn, 19.09.2022

Prof. dr hab. Aleksy Tralle

Uniwersytet Wamińsko-Mazurski

1. Ocena

Zacznę od oceny, co nie jest, być może, do końca zgodne ze standardami pisania recenzji. Jest to spowodowane następującą okolicznością. Po przeczytaniu rozprawy oraz artykułów autorstwa/współautorstwa Jakuba Konckiego doszedłem do wniosku, iż rozpatrywana praca doktorska przewyższa poziomem i ważnością wyników niektóre habilitacje. Wyniki doktoratu zasługują na wszelkie możliwe wyróżnienia. W związku z powyższym moja recenzja będzie krótka, a jej celem będzie udzielenie odpowiedzi na pytania wymagane ustawowo.

1.1. **Ocena tematyki rozprawy.** Obiektem rozprawy są klasy charakterystyczne motywów (motivic characteristic classes) w wersji współzmienniczej (equivariant) oraz ich związek z "otoczkami stabilnymi" (stable envelopes), w przypadku rozkładów Białynickiego-Biruli ("BB-rozkładów"). Warto nadmienić, że nawet definicja "otoczki stabilnej" wciąż ewoluuje. Ponadto, definicja otoczki stabilnej pochodząca od Okounkova, jest aksjomatyczna, a klasy Cherna motywów są konstruowalne, zatem wykazanie związków między nimi jest niezwykle cenne. Tematyka rozprawy znajduje się w centrum uwagi matematyków zajmujących się geometrią algebraiczną, geometrią i topologią symplektyczną, kwantowymi układami całkowalnymi, a szczególnie, geometrią enumeracyjną i szeroko rozumianą teorią działań grup na rozmaitościach algebraicznych. Wybór tematyki przez promotora i doktoranta uważam za bardzo trafny.

1.2. **Ocena wyników rozprawy.** Najważniejszymi wynikami rozprawy są twierdzenia pokazujące, że skręcone (twisted) klasy Cherna motywów spełniają aksjomat normalizacyjny i newtonowską własność zawierania dla otoczek stabilnych (przy pewnych oganiczeniach na "nachylenie" (slope) otoczki). Ponadto, zwróciłem uwagę na twierdzenie, które utożsamia skręcone klasy Cherna motywów i otoczki stabilne w interesującym przypadku wiązki kostycznej do *jednorodnej* rozmaitości algebraicznej G/P reduktywnej zespolonej grupy Liego i jej podgrupy parabolicznej P . Rezultaty rozprawy uważam za bardzo cenne.

1.3. **Ocena poprawności pracy.** Przedstawione dowody głównych twierdzeń rozprawy są, moim zdaniem, poprawne.

1.4. **Ocena prezentacji.** Prezentacja jest bardzo dobra, zresztą, prac źle napisanych nie przyjmują ani do *Journal of Topology*, ani do *Advances in Mathematics.*

1.5. **Ocena publikacji.** Jakub Koncki jest autorem/współautorem następujących artykułów naukowych:

(1) Motivic Chern classes of configuration spaces, *Fund. Math.* 254(2021), 155-180.
(2) Comparison of motivic Chern classes and stable envelopes for cotangent bundles, *J. Topol.* 15(2021), 168-203.
(3) Twisted motivic Chern classes and stable envelopes, *Adv. Math.*, 404, paper no. 108374, 2022.

Jest też autorem preprintu w arxiv. Wyżej wymienione czasopisma, szczególnie (2) i (3), należą do listy najbardziej prestiżowych, o bardzo wysokich wymaganiach do poziomu publikowanych wyników.

2. Omówienie rozprawy

Jeszcze raz podkreślę, że rozprawa doktorska traktuje o absolutnie "topowych" ideach i metodach i jest bardzo zaawansowana pojęciowo, co utrudnia krótkie a sensowne jej streszczenie. Z tego też względu pomijam podstawowe definicje dotyczące niezmienniczej K-teorii, klas charakterystycznych motywów, działań torusów, itd., a także posługuję się oznaczeniami z rozprawy bez dodatkowych wyjaśnień. Stabilne otoczki według Okounkova to pewne klasy w K-teorii spełniające aksjomaty (1)-(4), które przytaczam poniżej. Istnienie takich obiektów jest trudne do ustalenia, a jest bardzo ważne w wielu działach matematyki powiązanych z geometrią enumeracyjną. Autor rozprawy w pewnej mierze wyjaśnia związek tych "klas Okounkova" z bardziej znanym (i dopuszczającym jawną konstrukcję, oraz obliczenia) obiektem: klasami Cherna motywów. Bardzo spodobał mi się wynik, pokazujący, że w przypadku przestrzeni jednorodnych wyżej wymienione obiekty się pokrywają. Moim zdaniem, tego typu wyniki mają olbrzymi potencjał. Krótki opis rozprawy zacznę od " stabilnych otoczek w K-teorii" Okounkova (w wersji zaproponowanej w recenzowanej rozprawie). Niech

$X = T^*M$. Rozważmy ułamkową wiązkę liniową $s \in Pic(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (nazywaną "nachyleniem" (slope)). Otoczką stabilną w K-teorii nazywamy zbiór elementów $Stab^s(\mathrm{e}) \in K^{\mathbb{T}}(X)$ indeksowany elementami zbioru M^A punktów stałych A-działania spełniający aksjomaty:

(1) (aksjomat stabilności)): $\mathrm{supp}(Stab^s(\mathrm{e})) \subset \sqcup_{\mathrm{e}' \leq \mathrm{e}} X^+_{\mathrm{e}'}$.
(2) (aksjomat normalizacji):

$$Stab^s(\mathrm{e})|_{\mathrm{e}} = eu(T^-_{\mathrm{e}} X)\frac{(-1)^{rk T^+ \mathrm{e} M}}{\det T^+_{\mathrm{e}} M}$$

(3) własność zawierania Newtona (dla wielościanów Newtona, pomiajam definicje),
(4) (punkt wyróżniony)

$$w_{e'}(s) - w_e(s) - w_{e'}(\det T^+_{e'} M) \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

nie należy do wielościanu Newtona $\mathcal{N}^A(Stab^s(e)|_{e'})$.

Omówię wynik (Theorem 2.2 rozprawy), który jest reprezentatywny dla rozprawy. Niech A będzie torusem algebraicznym działającym na gładkiej rozmaitości projektywnej M. Załóżmy, że zbiór M^A punktów stałych działania A jest skończony. Niech Y będzie $\mathbb{T}$-rozmaitością taką, że czynnik $\mathbb{T}$ działa na Y trywialnie. Niech $\mathfrak{h}$ oznacza charakter $\mathfrak{h} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$, $\mathrm{e} \in M^A$ jest punktem stałym A-działania, a M^+_{e} oznacza dodatnią BB-komórkę. W sformułowaniu twierdzenia są jeszcze dodatkowe ograniczenia, które pomijam.

Określmy

$$\rho : K^A(Y)[y] \to K^T(Y)$$

za pomocą wzoru $\rho(y) = -\mathfrak{h}$. W rozprawie wykazuje się, że dla punktu stałego $\mathbf{e} \in M^A$ klasa

$$\mathfrak{h}^{-\dim(M^+_e)} \pi^* \rho(mC^A_y(M^+_e \to M)) \in K^T(X)$$

spełnia aksjomat normalizacyjny i własność newtonowskie inkluzji dla otoczki stabilnej $Stab^\theta(\mathbf{e})$.

Ten wynik pokazuje, że klasa Cherna BB-komórki ma własności podobne do klasy będącej otoczką stabilną. Zauważmy, że pytanie o *istnienie* "klasy Okounkova" jest bardzo trudne. W tym kontekście pokazanie, że klasa Cherna spełnia część z aksjomatów ma niezwykłą wartość. Ten wynik jest znacząco wzmacniany w konkretnych przypadkach. Na przykład, Corollary 5.16 rozprawy pokazuje, że w przypadku algebraicznych rozmaitości jednorodnych G/P reduktywnych zespolonych grup Liego i ich podgrup parabolicznych P skręcone (twisted) klasy motywów

$$i_* mC^A_y(\overline{M^+_e}, \partial\overline{M^+_e}; \Delta_{e,s})$$

pokrywają się ze stabilnymi otoczkami dla T^*M z nachyleniem s. W rozprawie zostały też zbadane przypadki różnych nachyleń.

Chcę jeszcze podkreślić, że autor dosyś skromnie pisze, że dowody są oparte na "twierdzeniach o lokalizacji i twierdzeniu Lefschetza-Riemanna-Rocha". W rzeczywistości są one skomplikowane pojęciowo, wymagają znacznej wiedzy ogólnej i bardzo głębokiego zrozumienia teorii klas Cherna motywów. Na przykład, w dowodzie akjsomatu normalizacyjnego (Theorem 2.2) autor rzeczywiście sprawdza równość

$$\mathfrak{h}^{-\dim(M_e^+)}\pi^*\rho(mC_y^A(M_e^+ \to M)) = eu(T_{\mathrm{e}}^- X)\frac{(-1)^{rk}T^+\mathrm{e}M}{\det T_{\mathrm{e}}^+ M}$$

"przekształcając" wzory na klasy Cherna motywów BB-komórki według znanych tożsamości dla rozkładu

$$T_e X^- = T_e^- M \oplus (\mathbb{C}_{\mathfrak{h}} \otimes (T_e^+ M)^*).$$

Prostota tego rachunku jest jednak pozorna, a dla jego przeprowadzenia trzeba "wspiąć się na szczyt" wiedzy oraz umiejętności skojarzenia faktów bardzo zaawansowanej matematyki.

3. Konkluzja

Rozprawę doktorską Jakuba Konckiego uważam za wyróżniającą się. Rezultaty rozprawy w znacznym stopniu przewyższają wymagania ustawowe i zwyczajowe. Stawiam wniosek o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego oraz występuję z wnioskiem o wyróżnienie rozprawy. Osobiście wyrażam też podziw dla tak znakomitego początku kariery akademickiej.